

Ово дело је заштићено лиценцом Креативне заједнице Ауторство – некомерцијално – без прерада¹.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.



¹ Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

"Сва права задржава издавач. Забрањена је свака употреба или трансформација електронског документа осим оних који су експлицитно дозвољени Creative Commons лиценцом која је наведена на почетку публикације."

"Sva prava zadržava izdavač. Zabranjena je svaka upotreba ili transformacija elektronskog dokumenta osim onih koji su eksplicitno dozvoljeni Creative Commons licencom koja je navedena na početku publikacije."



**УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ**



Слободан Радошевић

Методи теорије поља у статистичкој физици

Нови Сад, 2022.

Аутор:

Слободан Радошевић, ванредни професор
Природно-математичког факултета у Новом Саду

Рецензенти:

др Милица Павков-Хрвојевић, редовни професор
Природно-математичког факултета у Новом Саду

др Антун Балаж, научни саветник
Института за Физику у Београду, Института од Националног значаја за
Републику Србију

др Петар Мали, ванредни професор
Природно-математичког факултета у Новом Саду

Издавач: Природно-математички факултет у Новом Саду, Департман за физику

За издавача: Проф. др Милица Павков-Хрвојевић, декан

Употреба уџбеника *Методи теорије поља у статистичкој физици* је одобрена од стране Наставног-научно већа Природно-математичког факултета у Новом Саду на седници одржаној 27. јуна 2022. године (решење број 0602-07-214/22-7).

електронско издање

CIP – Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

536.9(075.8)(075.8)

РАДОШЕВИЋ, Слободан, 1981–

Методи теорије поља у статистичкој физици [Електронски извор]/ Слободан
Радошевић. – Нови Сад : Природно-математички факултет, Департман за
физику, 2023. - 242 стр.

Начин приступа (URL):

[https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/fizika/radosevic
_metodi_teorije_polja_u_statistickoj_fizici.pdf](https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/fizika/radosevic_metodi_teorije_polja_u_statistickoj_fizici.pdf) - Запис заснован на стању
на дан 6. 10. 2023. - Насл. са насловног екрана.

ISBN 978-86-7031-569-3

а) Статистичка физика – Уџбеници

COBISS.SR – ID 126657801

*Невени,
Мини, Душану и Милошу*

Садржај

Предговор	9
1 Основи класичне теорије поља	13
1.1 Лагранжев формализам у теорији поља	13
1.1.1 Варијациони принцип за класично поље и веза са механиком система честица	13
1.1.2 Ојлер-Лагранжеве једначине класичне теорије поља	19
1.1.3 Равни таласи и дисперзиона релација	26
1.2 Хамилтонов формализам	29
1.2.1 Канонске једначине кретања	29
1.2.2 Поасонове заграде	33
1.3 Симетрије у класичној теорији поља	37
1.3.1 Глобалне и локалне симетрије	37
1.3.2 Теорема Еми Нетер	38
1.3.3 Локалне (калибрационе) симетрије	44
1.3.4 Голдстонова теорема у класичној теорији поља	47
2 Ландауова теорија фазних прелаза	55
2.1 Фазни прелази и параметар уређености	55
2.2 Ландауов функционал за Изингов модел	57
2.2.1 Дефиниција Изинговог модела	57
2.2.2 Апроксимација средњег поља	60
2.2.3 Хабард-Стратоновичева трансформација	62
2.2.4 Апроксимација континуума	66
2.2.5 Ландауова апроксимација	74
2.2.6 Спонтано нарушење симетрије	77
2.2.7 Критични експоненти α, β, γ и δ	79
2.2.8 Флуктуације и гаусовски модел	80
2.2.9 Поузданост Ландауове теорије	89
2.2.10 Гаусовска корекција на критичне експоненте	90
2.2.11 Корелационе функције вишег реда	95
2.3 $O(N)$ модел	97
2.4 Гинзбург-Ландауова теорија суперпроводности	100
2.4.1 Образац нарушења симетрије	100
2.4.2 Параметризација и Голдстоново поље	102
2.4.3 Мајснеров ефекат и бесконачна проводност	105

2.4.4	Квантовање магнетног флукса	106
2.5	Спонтано нарушење симетрије у класичним теоријама	107
2.5.1	Мермин-Вагнерова теорема	107
2.5.2	$O(N)$ нелинеарни σ модел	110
3	Канонско квантовање класичних система	119
3.1	Шредингерова и Хајзенбергова слика	119
3.1.1	Шредингерова слика	120
3.1.2	Хајзенбергова слика	120
3.1.3	Једночестична и вишечестична стања	121
3.2	Канонско квантовање скаларног поља	123
3.2.1	Оператори поља и хамилтонијан	123
3.2.2	Једначина кретања	125
3.2.3	Комутационе релације за амплитуде поља	126
3.2.4	Енергија и импулс квантног скаларног поља	127
3.2.5	Честична интерпретација квантног поља	129
3.2.6	Веза са релативистичком квантном механиком	133
3.3	Комплексна поља	134
3.3.1	Двокомпонентно скаларно поље	135
3.3.2	Слободно Шредингерово поље	138
3.3.3	Шредингерово поље у спољашњем потенцијалу	141
3.4	Вишечестични оператори	143
3.5	Дискретизација у теорији поља	148
3.5.1	Нормирање у кутији	149
3.5.2	Поља на решетки	150
3.6	Спонтано нарушење симетрије у квантним теоријама	152
3.6.1	Основне поставке	152
3.6.2	Параметар уређености	154
3.6.3	Голдстонова теорема	155
3.6.4	Генератори трансформација и линеарна суперпозиција	158
3.7	Квантни Хајзенбергов модел	159
3.7.1	$O(3)$ симетрија Хајзенберговог хамилтонијана	159
3.7.2	Хајзенбергов феромагнет	164
3.7.3	Хајзенбергов антиферомагнет	172
3.8	Ефективни лагранжејани за феромагнет и антиферомагнет	191
3.8.1	Антиферомагнет	191
3.8.2	Феромагнет	194
	Прилог	205
	А Релативистичка нотација и Фуријеова трансформација	205
	Б Варијациони Извод	209

Ц Интегралы Гаусовог типа	215
Ц.1 Гаусов интеграл са имагинарним коефицијентом	215
Ц.2 Гаусов интеграл са комплексним коефицијентима	217
Ц.3 Вишедимензиони реални интегралы	219
Ц.4 Викова теорема	222
Ц.4.1 Средње вредности и моменти расподела	222
Ц.4.2 Генералисана Гаусова расподела	223
Д Лијеве групе и алгебре	229
Литература	235

Предговор

Материјал изложен у овом уџбенику је прилагођен предмету *Методи ефективне теорије поља у кондензованом стању* који похађају студенти мастер студија на Департману за физику у Новом Саду. Као такав, текст има две основне намене. Прва је да се студенти упознају са базичним елементим теорија које се заснивају на постојању спонтаног нарушења симетрије, као што су Голдстонова поља и ефективни лагранжијани. Други, подједнако важан аспект овог уџбеника је упознавање студената са обимном литературом из ове области.

Метод ефективних лагранжијана се заснива на примени Голдстонове теореме која тврди да се у спектру система код којих долази до спонтаног нарушења симетрије јављају екситације са ишчезавајућим гепом. Ове екситације (Голдстонова поља) имају низ интересантних особина које их чине погодним степенима слободе за опис ниско-температурске термодинамике таквих система. Пре свега, њихов број и тип (А или В) зависи само од обрасца нарушења симетрије и структуре основног стања. Такође, расејање Голдстонових поља на ниским енергијама је слабо и због тога се могу узети као основа за систематску теорију пертурбација која не захтева постојање малог параметра у хамилтонијану (или лагранжијану) одговарајућег модела. Лагранжијани конструисани помоћу Голдстонових поља се често означавају као нелинеарни σ модели и до сада су са успехом примењени на опис великог броја различитих система почевши од физике високих енергија па све до проблема из физике кондензованог стања.

Идеја метода ефективних лагранжијана се лепо може илустровати на примеру Хајзенберговог антиферромагнета. Антиферромагнет се састоји од кристалне решетке у чијим чворовима су смештени јони одређених хемијских елемената и од електрона који у општем случају могу да прелазе са чвора на чвор. Пошто је маса јона бар 2000 пута већа од масе електрона, у првој апроксимацији се динамика кристалне решетке може одвојити од динамике покретних електрона (тзв. адијабатска апроксимација). На тај начин се долази до хамилтонијана у којем фигуришу једино електронски оператори. Најједноставнији хамилтонијан ове врсте, код којег се у сваком чвору решетке могу наћи максимално два електрона супротно оријентисаних спинова је Хабардов. У њему постоје три независна параметра: амплитуда вероватноће преласка електрона са чвора n на чвор m , која се обично означава са t_{nm} , интензитет кулоновског одбијања електрона на истом чвору U и попуњеност чворова електронима (концентрација). Када је $U \ll |t_{nm}|$, електрони представљају готово слободне честице и можемо користити стандардну теорију пертурбација са малим параметром $U/|t_{nm}|$. Са друге стране, ако је Кулонова интеракција доминантна, немогуће је применити пертурбативни развој јер не постоји основно стање неинтерагујућих електрона. Пошто је, због јаке Кулонове интеракције, енергетски знатно повољније да се на чворовима налазе појединачни електрони,

они ће прескакати са чвора на чвор са врло малом вероватноћом и практично ће бити фиксирани. Показује се да је код полупопуњеног кристала динамику јако корелисаног Хабардовога модела ($U \gg |t_{nm}|$) могуће свести на ефективну антиферромагнетну интеракцију локализованих спинова $S = 1/2$ са интегралом измене $J = 4|t_{nm}|^2/U$. Елементарне ексцитације система локализованих спинова су магнони и они представљају Голдстонова поља за случај спонтаног нарушења симетрије по обрасцу $O(3) \rightarrow O(2)$. Корист од увођења магнона као ефективних степени слободе се најбоље огледа у следећем: колико год интеракције између електрона у антиферромагнетном кристалу биле компликоване и јаке, магнони се у великом делу уређене фазе понашају као слободне честице чиме се долази до ефикасног оквира за рачунање статистичке суме антиферромагнетног система и повезаних термодинамичких величина.

Текст је подељен у три целине. Прва обухвата елементе класичне теорије поља укључујући излагања о Лагранжевом и Хамилтоновом формализму, глобалним и локалним симетријама, теореме Еми Нетер и класичној верзији Голдстонове теореме. Друго поглавље садржи основе Ландауове теорије фазних прелаза и у њој је показано како се класична теорија поља може користити за опис одређених статистичких система. Поред Изинговог модела, дискутован је и нелинеарни σ модел за случај $O(N) \rightarrow O(N-1)$, Мермин-Вагнерова теорема, као и једноставна верзија Гинзбург-Ландауове теорије суперпроводности са становишта класичне ефективне теорије за образац нарушења симетрије $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Треће поглавље је посвећено квантним многочестичним системима код којих се јавља спонтано нарушење симетрије. Дискутована је квантна верзија Голдстонове теореме и показано је како се класична поља у овом случају замењују квантним пољима чије се елементарне ексцитације називају Голдстоновим бозонима. Као два основна примера су обрађени Хајзенбергов феромагнет и антиферомагнет. Најпре су, служећи се аналогијом са класичном теоријом поља, добијене линеаризоване једначине кретања (што одговара стандардном излагању линеарне теорије спинских таласа али се не заснива на бозонским репрезентацијама спинских оператора) да бисмо затим дискутовали спектар елементарних ексцитација и нискотемпературску термодинамику ових система. Као што је већ напоменуто, Голдстонова поља у случају магнетних система одговарају магнонима који код феромагнета представљају Голдстонове бозоне типа В а код антиферомагнета је реч о Голдстоновим бозонима типа А. Разлике у типу Голдстонових бозона се осликавају кроз њихв број и дисперзиону релацију што за последицу има различито понашање унутрашње енергије магнета, параметра уређености и осталих термодинамичких величина. Коначно, ваљаност овог прилаза је илустрована поређењем са резултатим квантних Монте карло симулација. На крају треће главе је детаљно приказан и поступак добијања ефективних лагранжијана за феромагнет и антиферомагнет полазећи од обрасца нарушења симетрије $O(3) \rightarrow O(2)$ и разлике основних стања у ова два случаја. Након трећег поглавља је дат прилог у којем је детаљније објашњена релативистичка нотација, варијациони извод, израчунати су интегрални Гаусовог типа који се користе у другом поглављу и објашњена је одређена терминологија из теорије група. Где год је то било могуће, приказана су детаљна извођења и указано је на референце у којима се могу пронаћи слични или општији резултати. Такође, наведени су и бројни извори у којима су резултати приказани овде послужили само као први корак у развоју потпунијег описа феномена.

Систем јединица који је коришћен у тексту се заснива на избору $\hbar = c = k_B = 1$ а, у зависности од форме која преовлађује у литератури из дате области, магнетно поље је

означавамо симболима B или h .

Аутор дугује велику захвалност рецензентима рукописа: проф. др Милици Павков-Хрвојевић, редовном професору Природно математичког факултета у Новом Саду, др Антуну Балажу, научном саветнику са Института за физику у Београду и др Петру Малом, ванредном професору Природно математичког факултета у Новом Саду, чије су корисне сугестије у многоме побољшале текст. Посебно бих истакао труд који је у тражењу грешака (како штампарских тако и оних озбиљнијих) уложио Петар Мали. Текст је након његових бројних интервенција сигурно постао бољи. Све преостале грешке су ту мојом кривицом и надам се да ће ми заинтересовани читаоци указати на њих (писањем на slobodan@df.uns.ac.rs).

Аутор

1

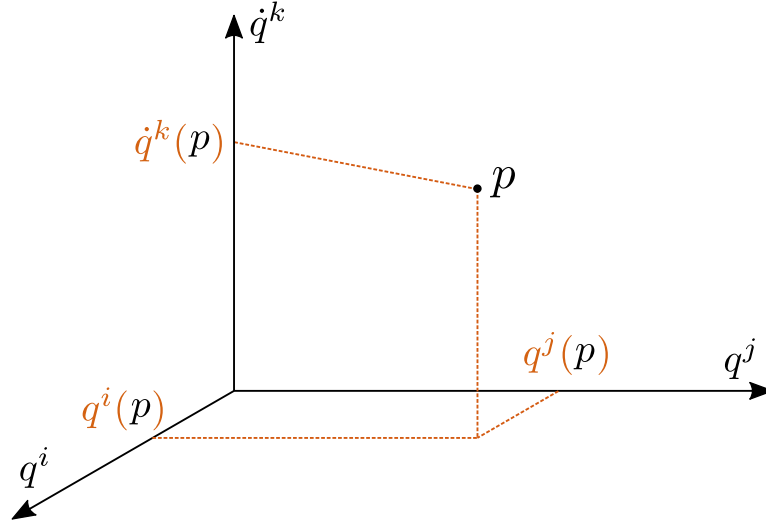
Основи класичне теорије поља

Класично поље представља систем са бесконачно много степени слободe и може се описати функцијом која је дефинисана у свакој тачки простор-времена. Ради једноставности разматрање ћемо почети са класичним реалним скаларним пољем $\phi = \phi(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(x)$. Уколико поље поседује више компоненти, које се на одређени начин понашају у односу на неки задати скуп трансформација, говори се о векторским, тензорским или спинорским класичним пољима. У теорији поља се уводи и појам унутрашњег степена слободe (спин, изоспин, боја, укус...), тако да поље може бити скалар у односу на Лоренцове трансформације (или ротације) и истовремено имати сложенију структуру у односу на унутрашње степене слободe. Основна динамичка величина у класичној и квантној теорији поља је функција ϕ . Због тога је од интереса наћи једначине кретања за поље. То је могуће урадити полазећи од аналогije са механиком система честица. Једначине класичне теорије су прво размотрене у Лагранжевој формулацији, јер се у том формализму најлакше врши прелаз од механике честица ка теорији поља. Поред тога, Лоренцова инваријантност, једна од фундаменталних принципа савремене физике, најлакше се остварује у Лагранжевом формализму. Такође, Лагранжев формализам представља основу за Фајнманов приступ квантовања класичних система. Након осврта на Лагранжев формализам, дискутујемо и Хамилтонов приступ на који се наслања канонска квантизација класичних теорија. Коначно, разматраћемо глобалне симетрије, које воде на законе очувања, као и локалне симетрије које имају важну улогу у великом броју физичких теорија. Неки основи рачуна са функционалима, потребни за формулисање динамичких закона у теорији поља, изложени су у Прилогу Б.

1.1 Лагранжев формализам у теорији поља

1.1.1 Варијациони принцип за класично поље и веза са механиком система честица

Уводно излагање у овом поглављу је посвећено Лагранжевом формализму у класичној теорији поља. Будући да се овај прилаз ослања на лагранжевски опис система механичких честица, ради лакшег преласка на опис система са бесконачно много степени слободe, прво ћемо се подсетити неких детаља везаних за примену Лагранжевог формализма на опис система нерелативистичких честица.



Слика 1.1: Координате произвољне тачке p из простора кинематичких стања

Кључну улогу у геометријској поставци Лагранжевог описа има простор кинематичких стања (тзв. μ простор). Уколико се \mathcal{N} нерелативистичких честица креће у тродимензионом простору, простор кинематичких стања је $6\mathcal{N}$ димензиони простор. У општем случају, простор кинематичких стања *није* векторски простор¹ али ту компликацију нећемо узимати у обзир и претпоставићемо да је простор кинематичких стања једноставно $\mathbb{R}^{6\mathcal{N}}$. Координате на простору кинематичких стања означавамо са $\{q^i, \dot{q}^i\}$, $i = 1, 2, \dots, 3\mathcal{N}$, и, будући да су по дефиницији различите координатне функције у простору кинематичких стања независне, важе релације

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0. \quad (1.1)$$

Дакле, *произвољна* тачка p из простора кинематичких стања је одређена помоћу $6\mathcal{N}$ вредности њених координата (Видети Сл. 1.1)

$$q^1(p), q^2(p), \dots, q^{3\mathcal{N}}(p), \dot{q}^1(p), \dots, \dot{q}^{3\mathcal{N}}(p)$$

и, у принципу нема никакве везе између бројева $q_k(p)$ и $\dot{q}_k(p)$ за неко фиксно k . Са друге стране, решење проблема описа система честица у Лагранжевом формализму је функција $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^{6\mathcal{N}}$ која задовољава једначине кретања (Видети (1.10) ниже за један пример једначина кретања). Овакву функцију можемо представити помоћу вектора колоне

$$[f^1(t) \ f^2(t) \ \dots \ f^{3\mathcal{N}}(t) \ f^{3\mathcal{N}+1}(t) \ \dots \ f^{6\mathcal{N}}(t)]^\top \quad (1.2)$$

при чему су вредности њених компоненти дате са

$$f^i(t) := q^i(f(t)), \quad f^{3\mathcal{N}+i}(t) \equiv \dot{q}^i(f(t)) := \frac{df^i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, 3\mathcal{N}. \quad (1.3)$$

¹На пример, простор кинематичких стања за два спојена математичка клатна је тангентно раслојење чија је основа торус.

Рецимо, у случају линеарног хармонијског осцилатора, једно решење проблема у простору кинематичких стања је дато са

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x_0 \cos(\omega t) \\ -x_0 \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

где је x_0 вредност координате q^1 у почетном тренутку а ω је кружна фреквенција. Дакле, иако су координатне функције у простору кинематичких стања међусобно независне, компоненте класичног решења нису. Са друге стране, један пример за произвољну функцију $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^2$ је

$$t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

и она не представља решење проблема линеарног хармонијског осцилатора. У Поглављу 2 ћемо видети да се за исправан статистички опис (многочестичног) система у обзир морају узети све конфигурације а не само оне које задовољавају једначине кретања. У наставку ћемо употребљавати стандардну злоупотребу нотације и користићемо ознаку $\{q^i(t), \dot{q}^i(t)\}$ како за координатне функције у μ простору тако и за решења једначина кретања. Конкретан смисао би требао да буде јасан из контекста. Слична конвенција ће бити усвојена и када са система честица пређемо на класична поља.

За довољно широку класу механичких система динамичка еволуција је одређена принципом стационарног дејства (Хамилтонов принцип, [Милић, Б. (1997)]). Посматрајмо идеални холономни систем са \mathcal{N} степени слободе (при чему се \mathcal{N} не мора поклапати са бројем честица у систему) у којем делују потенцијалне силе интерације. Кинематичко стање таквог система је одређено познавањем свих генералисаних координата и брзина $\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}$, $a = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$, у сваком тренутку времена и репрезентовано је тачком у μ -простору. Према Хамилтоновом принципу, стварна еволуција посматраног система се одвија по путањи у конфигурационом простору дуж које Хамилтоново дејство има стационарну вредност:

$$\delta S[\{q^a(t)\}] = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L(\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}, t) = 0. \quad (1.6)$$

У горњој једначини са S је означен функционал Хамилтоновог дејства, t_i и t_f представљају почетни и крајњи тренутак у времену између којих се посматра еволуција система док је $L(\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}, t)$ Лагранжева функција која зависи од времена и свих генералисаних координата и брзина система. Када се варирање функционала из (1.6) спроведе до краја добијају се познате Ојлер-Лагранжеве једначине вишечестичног механичког система. При томе захтевамо да варијације функције $t \mapsto q(t)$ ишчезавају у почетном и крајњем тренутку, $\delta q^a(t_i) = \delta q^a(t_f) = 0$, за све $a = 1, 2, \dots, 3\mathcal{N}$.

Пример 1.1. У случају идеалног холономног система са потенцијалним интеракцијама, Лагранжева функција је дата са

$$L(\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}, t) = T(\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}, t) - U(\{q^a(t)\}, t), \quad (1.7)$$

где је T укупна кинетичка а U потенцијална енергија система. Једначине класичне механике се за овај систем добијају из Хамилтоновог принципа према којем је Хамилтоново

дејство стационарно у односу на варијације генерализаних координата. Другим речима [видети једначине (Б.8)-(Б.12)], важи

$$\frac{\delta S[\{q^a(t)\}]}{\delta q^b(\tau)} = \frac{\delta}{\delta q^b(\tau)} \int_{t_i}^{t_f} dt L(\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}, t) = 0, \quad b = 1, 2, \dots, \mathcal{N}. \quad (1.8)$$

Имајући у виду дефиницију варијационог извода (Б.12), као и дефиницију Лагранжеве функције (1.7), видимо да се једначине кретања добијају варирањем једне функције $q_b(\tau)$, при чему је $t_i < \tau < t_f$, док се остале држе фиксирание. Тако налазимо

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta q^b(\tau)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[L(q^b(t) + \epsilon \delta(t - \tau), \dot{q}^b(t) + \frac{d}{dt} \epsilon \delta(t - \tau), \{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}_{a \neq b}, t) \right. \\ &\quad \left. - L(\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}, t) \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^b(t)} \delta(t - \tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b(t)} \frac{d}{dt} \delta(t - \tau) \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^b(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b(t)} \right] \delta(t - \tau), \end{aligned} \quad (1.9)$$

при чему смо искористили да је $\delta(\tau - t_i) = \delta(\tau - t_f) = 0$, што одговара раније споменутом услову $\delta q^a(t_i) = \delta q^a(t_f) = 0$. Дакле, Ојлер-Лагранжеве једначине у овом случају гласе

$$\frac{\partial L}{\partial q^b(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b(t)} = 0. \quad (1.10)$$

Њихова анализа и примене се могу наћи у стандардним уџбеницима [Милић, Б. (1997); Мушицки, Ђ. (1987)]. ■

Прелазак са механике система честица на теорију поља се може извршити на следећи начин [Шиф, Л. (1968); Greiner, W. (1996)]. Претпоставимо да је простор издељен на елементе запремине које пребројава дискретни вектор \mathbf{n} . Нека се у сваком елементу запремине налази по једна честица чије је стање описано генерализаним координатама и брзинама $q_n^i(t)$, $\dot{q}_n^i(t)$, $i = 1, 2, 3$. У граничном случају када поменути елементи запремине теже нули (и даље испуњавајући цео простор), дискретни индекс \mathbf{n} постаје континуални вектор положаја \mathbf{x} . Ако се сада за опис система као небитне могу испустити две генерализане координате по елементарној ћелији (односно по честици) и њихове одговарајуће брзине, долази се до појма једнокомпонентног поља као функције дефинисане у свакој тачки простора и времена:

$$q_n(t) \longrightarrow q_x(t) \equiv \phi(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(x), \quad (1.11)$$

при чему је уведен вектор²

$$x \equiv \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

²У Прилогу А је детаљније образложена коришћена релативистичка нотација.

Коначно, ако се у односу на Лоренцове трансформације $x \rightarrow \Lambda x$ поље ϕ трансформише као $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$, кажемо да је ϕ скаларно поље. Као што би се могло наслутити, једнокомпонентно скаларно поље се може користити само за опис малог броја физички интересантних система. Иако је могуће уопштити појам скаларног поља тако да се добијају различити Лоренц-инваријантни модели [Weinberg, S. (2008)], ми ћемо се у наставку често сусретати и са двокомпонентним нерелативистичким пољем (тзв. Шредингерово поље). Уместо у односу на Лоренцове трансформације, нерелативистичко поље се дефинише у односу на ротације: $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi'(R^{-1}\mathbf{x})$, где је R матрица која репрезентује ротацију у \mathbb{R}^D а D означава просторну димензију.

У механици честица време је параметар а динамичка промењива је вектор положаја (односно импулс честице). Са друге стране, у теорији поља је динамичка промењива поље $\phi \equiv \phi(\mathbf{x}, t)$ а просторне координате \mathbf{x} постају параметар који заједно са временском координатом карактерише поље $\phi(\mathbf{x}, t)$ у свакој тачки простора и времена. У Поглављу 2 ћемо разматрати класичне статистичке системе код којих скуп параметара сачињавају само просторне координате и који се такође могу описати језиком теорије поља. Коначно, у Поглављу 3 ћемо видети каква је веза класичних статистички система и квантних теорија поља.

Како бисмо до краја дефинисали класичну теорију поља у Лагранжевом формализму, морамо на одговарајући начин прилагодити и појам лагранжијана који се користи у механици система честица. У том смислу ћемо поћи од тзв. слободног поља које представља директну генерализацију система неинтерагујућих честица. Лагранжијан таквог система је просто збир лагранжијана појединих честица [Landau, L.D., Lifshitz, E.M. (2013)]. Приликом преласка са система честица на поље, овај збир постаје интеграл по простору $V = \mathbb{R}^D$ у којем се налази поље, тако да Лагранжева функција постаје функционал

$$L(\{q^a(t), \dot{q}^a(t)\}, t) \longrightarrow L[\phi(t), \dot{\phi}(t)] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)). \quad (1.13)$$

У горњем изразу је уведено скраћено означавање за просторни интеграл

$$\int d^D \mathbf{x} \equiv \int_{\mathbf{x}} \quad (1.14)$$

док тачкица означава парцијални извод поља по времену

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \partial_t \phi(\mathbf{x}, t). \quad (1.15)$$

Такође, нова уведена величина је густина лагранжијана³ \mathcal{L} која је функција поља и извода поља по времену. $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ се појављује у (1.13) као последица присуства генералисаних брзина у лагранжијану система честица. Коначан облик густине лагранжијана који се користи у теоријама поља садржи и изводе поља по просторним координатама, $\nabla \phi(\mathbf{x}, t)$, који описују варијације поља од тачке до тачке. Другим речима

$$L[\phi(t), \dot{\phi}(t)] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \nabla \phi(\mathbf{x}, t)) \quad (1.16)$$

³Често се у теорији поља густина лагранжијана једноставно назива лагранжијаном.

при чему облик функције \mathcal{L} зависи од конкретног модела који се користи. Иако смо функционал $L[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ увели ослањајући се на појам слободног поља, сматраћемо да се читава конструкција може применити и у сложенијим ситуацијама. Најчешће се користе густине лагранжијана које садрже само $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ и $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ а не и изводе вишег реда, да би једначине кретања за поље биле диференцијалне једначине другог реда. У принципу се, поготово у ефективним теоријама поља, могу појавити и сложеније густине лагранжијана [Weinberg, S. (2008); Watanabe, H., Murayama, H. (2014)]. У случају слободних поља густина лагранжијана је највише квадратни полином поља ϕ јер се тада добијају линеарне диференцијалне једначине кретања (видети следећи одељак). Још једна претпоставка је да густина лагранжијана не зависи експлицитно од вектора положаја и времена. Вектор $x = [t \ \mathbf{x}]^T$ се може експлицитно појавити у густини лагранжијана ако се разматра систем који није затворен [Ryder, L.H. (1996)]. Присуство $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ у (1.16) се може схватити и са становишта специјалне теорије релативности (СТР). Како опис физичког система не сме зависити од избора инерцијалног система референце, присуство $\dot{\phi}$ у густини лагранжијана са собом повлачи постојање $\nabla\phi$, јер се приликом Лоренцових трансформација $\partial_t\phi \equiv \partial_0\phi$ понаша као компонента квадриквектора (ако је ϕ скаларна функција). Лоренцове трансформације мешају компоненте квадриквектора тако да густина лагранжијана написана у произвољном инерцијалном систему мора садржати изводе по све четири координате. Овај закључак важи и за поља сложеније структуре (на пример векторски електромагнетни потенцијал), јер су Лоренцове трансформације линеарне па се изрази типа $\partial_\alpha A^\beta$ трансформишу као компоненте мешовитог квадритензора.

Дејство за поље се дефинише по аналогiji са механиком система честица

$$S[\phi] = \int_{t_i}^{t_f} dt L[\phi(t), \dot{\phi}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \nabla\phi(\mathbf{x}, t)), \quad (1.17)$$

при чему је сад област интеграције $\Omega \subset \mathbb{R}^{D+1}$. Слично се уопштава и варијациони принцип који тврди да ће поље еволуирати у простору и времену на тај начин да дејство има екстремалну (најчешће минималну) вредност [Greiner, W. (1996); Weinberg, S. (2008)]:

$$\delta S[\phi] = 0. \quad (1.18)$$

При томе се претпоставља да варијације поља на границама интеграције ишчежавају, $\delta\phi|_{\partial\Omega} = 0$. Такође, понекад ћемо претпоставити и да поља на граници области имају константну вредност $\phi|_{\partial\Omega} = \text{const}$ (по потреби ћемо бирати и $\phi|_{\partial\Omega} = 0$). У таквим ситуацијама ћемо моћи да занемаримо интеграле по површини која обухвата простор у којем се налази поље. Рецимо,

$$\int_{\mathbf{x}} \nabla\phi \cdot \nabla\phi = \int_{\mathbf{x}} \text{div}(\phi\nabla\phi) - \int_{\mathbf{x}} \phi\nabla^2\phi = - \int_{\mathbf{x}} \phi\nabla^2\phi, \quad (1.19)$$

јер се интеграл који садржи дивергенцију преводи у површински интеграл који, на основу претпоставке о понашању поља ϕ , ишчежава. Аналогна релација важи у случају интеграције по просторно-временским координатама и тада је потребно користити четвородимензиону верзију Гаусове теореме:

$$\int_{\mathbf{x}} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \int_{\mathbf{x}} \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \int_{\mathbf{x}} \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi = - \int_{\mathbf{x}} \phi\partial^2\phi, \quad (1.20)$$

где је $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ четвородимензиони Лапласов оператор (некада се назива и Даламберовим оператором) а ∂_μ су компоненте коваријантног квадриквектора градијента

$$[\partial_t \partial_x \partial_y \partial_z] \equiv [\partial_0 \partial_1 \partial_2 \partial_3] \equiv \partial. \quad (1.21)$$

Из контекста једначине треба да буде јасно када се користи квадриквектор градијента а када обичан парцијални извод, иако су означени истим симболом ∂ . Такође, увешћемо и Лоренц-инваријантан елемент запремине у 4-димензионом простору

$$d^4x = dt d^3\mathbf{x} \quad (1.22)$$

тако да се дејство може написати као четвороструки интеграл

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \equiv \int_x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)), \quad (1.23)$$

док Хамилтонов принцип постаје

$$\delta \int_x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = 0. \quad (1.24)$$

Значајна особина функционала дејства (1.17), односно (1.23) је да се све информације о динамици система заправо налазе у функцији \mathcal{L} . Због тога се једначине кретања могу изразити помоћу парцијалних а не варијационих извода [Altland, A., Simons, B. (2010)]. Коначно, по потреби ћемо симболе ∂ и \int_x користити и када број просторно-временских димензија није $1 + 3$.

1.1.2 Ојлер-Лагранжеве једначине класичне теорије поља

Једначине кретања за класично поље се добијају применом дефиниције варијационог извода (Б.12) на дејство (1.23)

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_x \mathcal{L}(\phi(x) + \epsilon \delta(x-y), \partial_\mu [\phi(x) + \epsilon \delta(x-y)]) - \int_x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \int_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \epsilon \delta(x-y) + \int_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \epsilon \partial_\mu \delta(x-y) \right. \\ &\quad \left. - \int_x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right], \end{aligned} \quad (1.25)$$

при чему је $\delta(x-y) = \delta(t-\tau) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Члан који садржи извод делта функције се може решити парцијално

$$\int_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \epsilon \partial_\mu \delta(x-y) = \int_x \left(\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \epsilon \delta(x-y) \right] - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \epsilon \delta(x-y) \right). \quad (1.26)$$

Први сабирак је интеграл по запремини дивергенције квадриквектора (\mathcal{L} је прави Лоренцов скалар, видети ниже) који се може превести у површински интеграл четвородимензионом варијантом Гаусове теореме. На границама интеграције варијација поља $\delta \phi(x) = \epsilon \delta(x-y)$ ишчезава, па овај сабирак нестаје. Дакле, добија се

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} = \int_x \delta(x-y) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right]. \quad (1.27)$$

Из услова стационарности дејства се добијају Ојлер-Лагранжеве једначине класичне теорије поља

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.28)$$

Раздвајањем временске и просторних координата, (1.28) поприма следећи облик

$$\nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \phi)} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.29)$$

Као што је напоменуто раније, једначине кретања за класично поље се заиста могу изразити само помоћу функције густине лагранжијана. Горња једначина је изведена за случај једнокомпонентног скаларног поља. Уколико скаларно поље има више компоненти⁴, које ћемо означити са ϕ^a , повезаних са унутрашњим степенима слободe, Ојлер-Лагранжеве једначине постају

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (1.30)$$

Случају $N = 2$ одговара реално поље које се може представити помоћу двокомпонентног вектора у унутрашњем простору

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

или у виду комплексног поља

$$\phi(x) = \frac{\phi^1(x) + i\phi^2(x)}{\sqrt{2}}, \quad \phi^*(x) = \frac{\phi^1(x) - i\phi^2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (1.32)$$

Касније ћемо видети да комплексна поља описују системе наелектрисаних честица. Такође, поред скаларних, важну примену имају и векторска⁵ или тензорска поља. Најпознатије векторско поље је свакако електромагнетно поље док је пример тензорског поља, рецимо, поље метрике које се користи у општој теорији релативности [Пантић, М. (2005)].

Након што смо видели како изгледају једначине кретања добијене из варијационог принципа, природно се намеће питање одабира густине лагранжијана која води на коректну теорију поља. Савремене теорије поља одговор на то питање дају у виду додатних симетрија које се намећу функцији $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ и функционалу дејства. Уколико се захтева да теорија поља задовољава принципе специјалне теорије релативности, густина лагранжијана мора бити Лоренцов скалар. У том случају је једначина (1.28), односно (1.30) инваријантна у односу на Лоренцове трансформације [Weinberg, S.

⁴Скаларно поље које има више компоненти је *скалар* у координатном простору док истовремено има сложенију структуру у односу на унутрашње степене слободe.

⁵За поље са компонентама V^μ кажемо да је векторско уколико се у односу на Лоренцове трансформације његове компоненте мењају према $V^\mu(x) \rightarrow \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x)$. Тензорска поља су дефинисана директном генерализацијом. Видети Прилог А.

(2008)]. Такође, дејство мора бити реална функција, чиме се обезбеђује једнак број једначина и компоненти поља. Међутим, и ту постоје неки изузеци [Weinberg, S. (2008)]. Са друге стране, лагранжијани који се користе за опис нерелативистичких система не морају имати исти број просторних и временских извода али се обично намеће услов ротационе симетрије. Такође, и у релативистичком и у нерелативистичком случају се густина лагранжијана бира тако да води на позитивно дефинитни Хамилтонов функционал у случају слободног поља (видети одељак 1.2).

Пример 1.2. Најједноставнијој релативистичкој теорији поља, тзв. слободном скаларном пољу, одговара густина лагранжијана

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - m^2 \phi^2 \right). \quad (1.33)$$

Пошто је

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \delta_\beta^\mu = \eta^{\alpha\mu} \partial_\alpha \phi = \partial^\mu \phi, \quad (1.34)$$

помоћу (1.28) налазимо

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial \phi} = \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \phi = (\partial^2 + m^2) \phi = 0. \quad (1.35)$$

Ова једначина је позната као Клајн-Гордонова (или релативистичка Шредингерова) једначина и нека њена решења су обрађивана на курсу квантне механике [Шиф, Л. (1968)]. По аналогiji, ϕ се означава као Клајн-Гордоново поље. Треба обратити пажњу да (1.33) дефинише *класичну* теорију поља у којој је m једноставно параметар. Видећемо да се у случају *квантне* верзије теорије параметар m интерпретира као маса елементарних ексцитација поља ϕ . ■

Пример 1.3. Уколико теорија поља описује нерелативистички систем, просторне и временска координата не морају улазити у гуштину лагранжијана симетрично. Ипак, поред тога се често инсистира само на ротационој симетрији трију просторних координата што осликава претпостављену изотропију простора. Основни пример у овом случају је дат густином лагранжијана

$$\mathcal{L}_S = i\psi^* \partial_t \psi - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi, \quad (1.36)$$

где је сада $\psi(\mathbf{x}, t)$ комплексно класично поље. Једначину кретања за ψ можемо добити варирањем густине лагранжијана по ψ^* . Тако налазимо

$$\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} = i\partial_t \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_t \psi^*)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\nabla \psi^*)} = -\frac{1}{2m} \nabla \psi \quad (1.37)$$

Користећи сада Ојлер-Лагранжеву једначину у облику (1.29), видимо да ψ задовољава

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (1.38)$$

Добијена једначина личи на Шредингерову једначину и стога се класично поље ψ , које не представља *шласну функцију*, означава као Шредингерово поље. За самосталну вежбу је остављено налажење једначине кретања за ψ^* . ■

Пример 1.4. Могуће је дефинисати и комплексно Клајн-Гордоново поље. Густина лагранжијана је

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.39)$$

Налажење одговарајућих једначина кретања је остављено за самосталну вежбу. ■

Пример 1.5. Погледајмо сада и пример векторског поља. Густина лагранжијана која описује електромагнетно поље у вакууму је

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \left(\partial_t \mathbf{A} + \text{grad} V \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\text{rot} \mathbf{A} \right)^2, \quad (1.40)$$

где су $V = V(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ скаларни и векторски потенцијал. На овом месту нас интересује лагранжијан који описује само поље, тако да ћемо претпоставити да у датој области простора нема носилаца наелектрисања. Варирањем лагранжијана (1.40) се добијају две Мексвелове једначине а друге две су аутоматски задовољене самим дефиницијама потенцијала. Заиста, ако је

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad} V, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (1.41)$$

узимањем ротора прве од ових једначина добијамо

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \text{rot} \mathbf{A} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.42)$$

што је локални облик Фарадејевог закона. Слично, налажењем дивергенције друге једначине директно добијамо $\text{div} \mathbf{B} = 0$, што је локална форма Амперове хипотезе. Погледајмо сада како се из (1.40) добијају и преостале две једначине. Пре свега, видимо да (1.40) не садржи V и $\partial_t V$. Због тога једна векторска једначина гласи

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\nabla V)} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial(\nabla V)} \left[\partial_t \mathbf{A} + \text{grad} V \right]^2 = \nabla \cdot \left[\partial_t \mathbf{A} + \text{grad} V \right] = 0. \quad (1.43)$$

Имајући у виду релацију $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad} V$, горња једначина је у ствари локални облик Гаусовог закона, $\text{div} \mathbf{E} = 0$. За добијање преостале Мексвелове једначине за промењиве у (1.30) узимамо компоненте векторског потенцијала. Пошто векторски потенцијал у лагранжијан (1.40) улази само кроз $\partial_t \mathbf{A}$ и $\partial_j \mathbf{A}$, Ојлер-Лагранжева једначина гласи

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_t A_i)} + \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_j A_i)} = 0. \quad (1.44)$$

Векторски облик првог члана из (1.44) гласи

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_t \mathbf{A})} &= \frac{1}{2} \partial_t \frac{\partial}{\partial(\partial_t \mathbf{A})} \left[\partial_t \mathbf{A} + \text{grad} V \right]^2 = \partial_t \left[\partial_t \mathbf{A} + \text{grad} V \right] \\ &= -\partial_t \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

За добијање другог сабирка из (1.44) треба уочити да се просторни изводи векторског потенцијала појављују само у сабирку $(1/2)[\text{rot} \mathbf{A}]^2$. Пошто је

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_i)} \left[\text{rot} \mathbf{A} \right]^2 &= 2 \text{rot} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_i)} \epsilon_{klm} \partial_k A_l e_m = 2 \text{rot} \mathbf{A} \cdot e_m \epsilon_{klm} \delta_{jk} \delta_{il} \\ &= 2 \left[\text{rot} \mathbf{A} \right]_m \epsilon_{jim}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

други сабирак из (1.44) се, након множења са e_i , може записати као

$$\begin{aligned} e_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_j A_i)} &= -e_i \partial_j \left[\text{rot} \mathbf{A} \right]_m \epsilon_{jim} = \epsilon_{jmi} \partial_j \left[\text{rot} \mathbf{A} \right]_m e_i \\ &= \text{rot rot} \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где смо искористили везу између векторског потенцијала и магнетног поља. Замена (1.45) и (1.47) у (1.44) даје

$$-\partial_t \mathbf{E} + \text{rot} \mathbf{B} = 0, \quad (1.48)$$

што је локални облик Ампер-Мексвеловог закона за електромагнетно поље у вакууму. На основу дефиниција скаларног и векторског потенцијала, лако је видети да се густина лагранжијана електромагнетног поља може записати и као

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (1.49)$$

Густина лагранжијана (1.49) је доста компактнија од (1.40) али прикрива чињеницу да су у Лагранжевом формализму за електромагнетно поље прави динамички степени слободе скаларни и векторски потенцијал. ■

Пример 1.6. Као што је добро познато из курса класичне физике [Милић, Б. (2002)], Мексвелова електродинамика у вакууму је прва права релативистичка теорија, иако је заокружена пре формулисања специјалне теорије релативности. Због тога се и густина лагранжијана електромагнетног поља може записати и у чисто релативистичкој нотацији⁶ где се просторне и временска координата третирају на равноправан начин. У том циљу ћемо увести квадживектор потенцијала

$$A(x) = \begin{bmatrix} V(x) \\ \mathbf{A}(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^0(x) \\ A^i(x) \end{bmatrix} \equiv \sum_{\mu=0}^3 e_{\mu} A^{\mu}, \quad (1.50)$$

као и антисиметрични тензор електромагнетног поља F са компонентама

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad (1.51)$$

где су $A_{\mu} = \eta_{\mu\beta} A^{\beta}$ компоненте придруженог дуалног квадживектора:

$$A_0 = A^0 = V, \quad A_i = -A^i \equiv -(\mathbf{A})_i, \quad (1.52)$$

а e_{μ} су вектори стандардног базиса у \mathbb{R}^4 [Видети додаток А]. Електрично и магнетно поље се могу изразити помоћу компоненти квадживектора A . Потребно је само дефиниције (1.41) прилагодити релативистичкој нотацији. Тако је

$$(\mathbf{E})_i = \left(-\partial_t \mathbf{A} - \text{grad} V \right)_i = -\partial_t (-A_i) - \partial_i V = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = F_{0i}. \quad (1.53)$$

Слично

$$(\mathbf{B})_i = \left(\text{rot} \mathbf{A} \right)_i = \epsilon_{lmi} \partial_l (-A_m) = -\epsilon_{ilm} \partial_l (A_m). \quad (1.54)$$

⁶Видети Прилог А.

Претходну једнакост је често корисно имати и у облику који се добија након множења са ϵ_{ijk} и сумирањем по индексу i . Тако се добија

$$\epsilon_{ijk}(\mathbf{B})_i = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\partial_l(A_m) = -\left(\partial_j(A_k) - \partial_k(A_j)\right) = -F_{jk}. \quad (1.55)$$

Густина лагранжијана (1.40), тј. (1.49) се сада може записати као

$$\mathcal{L}_{\text{ЕМ}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\gamma\rho}\eta^{\gamma\mu}\eta^{\rho\nu}. \quad (1.56)$$

Прво ћемо показати да је (1.56) еквивалентан са (1.49) а затим и да се одговарајуће Ојлер-Лагранжеве једначине поклапају.

Пошто су у двострукој суми $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ од нуле различити само чланови са F_{0i} , F_{ij} , F^{0i} и F^{ij} , налазимо [видети (A.9) и (A.11)]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ЕМ}} &= -\frac{1}{4}\left(F_{0i}F^{0i} + F_{j0}F^{j0} + F_{ji}F^{ji}\right) = -\frac{1}{4}\left(2\mathbf{E} \cdot (-\mathbf{E}) + \epsilon_{kij}(\mathbf{B})_k(\epsilon_{lij}(\mathbf{B})_l)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - 2\delta_{kl}(\mathbf{B})_k(\mathbf{B})_l\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\right), \end{aligned} \quad (1.57)$$

у складу са (1.49). Што се тиче једначина кретања, из (1.56) је

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{ЕМ}}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}(F_{\mu\nu}F_{\gamma\rho}\eta^{\gamma\mu}\eta^{\rho\nu}) = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\left(\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right) = -F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Пошто је $\partial\mathcal{L}_{\text{ЕМ}}/\partial A_\beta = 0$, једначина кретања гласи

$$-\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.59)$$

Ако је $\beta = 0$, налазимо

$$-\partial_\alpha F^{\alpha 0} = -\partial_i F^{i0} = -\partial_i(-\mathbf{E})_i = \text{div}\mathbf{E} = 0, \quad (1.60)$$

што је једначина (1.43). При томе смо искористили једначину (A.9) и (1.53). Слично, ако је $\beta = i$, користећи (1.55) и (A.11), добијамо

$$\begin{aligned} -\partial_\alpha F^{\alpha i} &= -\partial_j F^{ji} - \partial_0 F^{0i} = -\partial_t(-\mathbf{E})_i - \partial_j\left(-\epsilon_{mji}B_m\right) \\ &= \partial_t(\mathbf{E})_i - \epsilon_{jmi}\partial_j B_m = \left(\partial_t\mathbf{E} - \text{rot}\mathbf{B}\right)_i = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

што је i -та компонента једначине (1.48). ■

Пример 1.7. У ефективним теоријама поља се појављују густине лагранжијана које зависе од извода вишег реда. Рецимо, за густину лагранжијана која садржи изводе првог, другог и трећег реда, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, \partial_{\mu\nu}^2\phi, \partial_{\mu\nu\sigma}^3\phi)$, где су $\partial_{\mu\nu}^2\phi = \partial^2\phi(x)/(\partial x^\mu\partial x^\nu)$ итд, Ојлер-Лагранжева једначина се добија из

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(y)} &= \int_x \left[\delta(x-y)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \delta(x-y)\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu}^2\phi(x))}\partial_{\mu\nu}^2\delta(x-y) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu\sigma}^3\phi(x))}\partial_{\mu\nu\sigma}^3\delta(x-y) \right], \end{aligned} \quad (1.62)$$

где смо искористили (1.26). Преостала два члана, у којима изводи делују на делта функције, могу се трансформисати на следећи начин. Ако два пута применимо парцијалну интеграцију, видимо да се члан који садржи два извода може записати као

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu}^2 \phi(x))} \partial_{\mu\nu}^2 \delta(x-y) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu}^2 \phi(x))} \partial_\nu \delta(x-y) \right) - \partial_\nu \left(\delta(x-y) \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu}^2 \phi(x))} \right) \\ &+ \delta(x-y) \partial_{\mu\nu}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu}^2 \phi(x))}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Након интеграције ће нестати доприноси прва два сабирка јер оба имају структуру дивергенције квадживектора и Гаусовом теоремом се могу превести у интеграле по граници простор-времена Минковског. Сличан поступак спроводимо и код сабирка који садржи $\partial_{\mu\nu\sigma}^3 \delta(x-y)$. Коначно долазимо до Ојлер-Лагранжеве једначине

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_{\mu\nu}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu}^2 \phi)} - \partial_{\mu\nu\sigma}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu\sigma}^3 \phi)} = 0. \quad (1.64)$$

Овакав поступак се може применити и на густине лагранжијана које садрже изводе произвољно високог реда. Ојлер-Лагранжеве једначине се тада могу записати као $E(\mathcal{L}) = 0$, где је E тзв. Ојлеров оператор [Olver, P. (2000)]. У Ојлеровом оператору парцијални изводи вишег реда улазе са предзнацима \pm , попут израза (1.64). ■

На крају овог одељка треба забележити још један облик једначина кретања за поље у Лагранжевом формализму. Наиме, у Лагранжев функционал (1.13), ϕ и $\dot{\phi}$ улазе као независне промењиве [Greiner, W. (1996)],

$$\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} = 0, \quad \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} = \frac{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.65)$$

тако да варирање $L[\phi, \dot{\phi}]$ по ϕ даје [видети (1.16) и (Б.12)]

$$\begin{aligned} \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \phi(\mathbf{y})} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\mathbf{x}} \mathcal{L} \left(\phi(\mathbf{x}) + \epsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \nabla \phi(\mathbf{x}) + \epsilon \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{x}) \right) - L[\phi, \dot{\phi}] \right) \\ &= \int_{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \phi)} \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Када се у другом сабирку примене парцијална интеграција и Гаусова теорема, добија се

$$\frac{\delta L[\phi(t), \dot{\phi}(t)]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\mathbf{x}, t)} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \phi(\mathbf{x}, t))}. \quad (1.67)$$

Сличним поступком налазимо

$$\begin{aligned} \frac{\delta L[\phi(t), \dot{\phi}(t)]}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\mathbf{x}} \mathcal{L} \left(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}(\mathbf{x}) + \epsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) - L[\phi, \dot{\phi}] \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Поређењем (1.67) и (1.68) са (1.29), долази се до

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \dot{\phi}} - \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \phi} = 0. \quad (1.69)$$

Овај облик једначина кретања има важну улогу приликом формулисања закона кретања у Хамилтоновом прилазу. Осим тога, Ојлер-Лагранжеве једначине написане на овај начин највише подсећају на једначине кретања система честица, из којих се добијају формалном заменом $q^a(t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t)$, $\partial \rightarrow \delta$ [Шиф, Л. (1968)]. Лагранжев формализам у теорији поља има ту предност да просторне и временска координата улазе симетрично у једначине кретања, тако да је у њему Лоренцова инваријантност лако видљива. Са друге стране, Хамилтонов формализам се често користи у физици кондензованог стања јер ту симетрија између просторних и временске координате, као ни Лоренцова инваријантност, нису толико битни.

1.1.3 Равни таласи и дисперзиона релација

Све једначине кретања наведене примерима 1.2-1.6 су линеарне и због тога поседују решења у виду равних таласа. Равни таласи задовољавају принцип линеарне суперпозиције и одговарају слободним пољима. Неке разлике између класичног Шредингеровог и Клајн-Гордоновог поља се пресликавају на квантне верзије теорија (видети дискусију из Поглавља 3) због чега је од интереса детаљније размотрити решења класичних једначина. При томе ћемо користити метод Фуријеових трансформација који се користи и у случају квантних поља. Претпоставићемо да су сви Фуријеови интегрални који се појављују у наставку добро дефинисани. Конвенције за Фуријеове интеграле су наведене у Прилогу А.

Фуријеов интеграл за Шредингерово поље

Решење једначине кретања за класично Шредингерово поље (1.38) ћемо тражити у виду Фуријеовог интеграла

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}, \omega} \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (1.70)$$

где су $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ комплексне Фуријеове амплитуде. Будући да је

$$i\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}, \omega} \omega \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad -\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}, \omega} \mathbf{k}^2 \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (1.71)$$

заменом у (1.38) добијамо

$$\int_{\mathbf{k}, \omega} \left[\omega - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \right] \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} = 0. \quad (1.72)$$

Пошто мора бити $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ кад год је $\omega \neq \mathbf{k}^2/(2m)$, при чему ω узима реалне вредности, Фуријеове амплитуде $\psi(\mathbf{k}, \omega)$ су дате са⁷

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi a(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) \quad (1.73)$$

⁷Фактор 2π је изабран због дефиниције Фуријеовог интеграла.

где су $a(\mathbf{k})$ произвољне функције таласног вектора а

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \quad (1.74)$$

је тзв. дисперзиона релација за класично Шредингерово поље. Сада се опште решење Шредингерове једначине за класично поље може записати у виду бесконачне суме хармонијских осцилатора са амплитудама $a(\mathbf{k})$ и одговарајућим кружним фреквенцијама $\omega(\mathbf{k})$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t}. \quad (1.75)$$

Приметићемо да је дисперзиона релација за Шредингерово поље једноставно дата нерелативистичком везом између енергије и импулса, као и да $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$.

Амплитуде $a(\mathbf{k})$ се могу фиксирати ако су познати почетни услови које задовољава функција $\psi(\mathbf{x}, t)$ [Stone M., Goldbart, P. (2009)]. Нека је $\Psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, t = 0)$ конфигурација Шредингеровог поља задата у почетном тренутку. Уколико ову конфигурацију прикажемо помоћу Фуријеовог интеграла

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.76)$$

видимо да се решење (1.75) може записати као

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (1.77)$$

при чему су амплитуде $\tilde{\Psi}(\mathbf{k})$ одређене инверзном трансформацијом

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.78)$$

Фуријеов интеграл за Клајн-Гордоново поље

По узору на класично Шредингерово поље, решење једначине (1.35) ћемо тражити у виду интеграла

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{k}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.79)$$

Замена (1.79) у Клајн-Гордонову једначину даје

$$\int_{\mathbf{k}} \left[-\omega^2 + \mathbf{k}^2 + m^2 \right] \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0, \quad (1.80)$$

одакле налазимо Фуријеове амплитуде⁸

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi A(\mathbf{k}) \delta(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})). \quad (1.81)$$

⁸Фактор 2π је последица дефиниције Фуријеове трансформације.

Овде су $A(\mathbf{k})$ произвољне функције таласног вектора док је

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + m^2 \quad (1.82)$$

дисперзиона релација за Клајн-Гордоново поље. Као што се види, дисперзиона релација у овом случају представља релативистичку везу између енергије и импулса. За разлику од Шредингеровог поља, за Клајн-Гордоново поље не важи $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ за $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$. У жаргону се каже да дисперзија у овом случају има геп (процеп) одређен параметром m . Такође, из (1.33) се види да је за геп одговоран квадратни члан $m^2\phi^2$ у лагранжијану. То је чињеница која важи и у другим теоријама поља⁹. Рецимо, ако се лагранжијану Шредингеровог поља дода члан $-V\psi^\dagger\psi$, лако је видети да ће се за такав лагранжијан добити дисперзија $\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2/(2m) + V$. Ово опажање је битан корак у доказу Голдстонове теореме [видети Одељак 1.3.4].

Да бисмо нашли решење у виду равних таласа за Клајн-Гордоново поље, искористићемо познату особину делта функције (видети, рецимо [Радосевић, С., Мали, П. (2020)])

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (1.83)$$

где су x_i просте нуле функције f , видимо да се амплитуде могу записати као

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}) \left[\frac{\delta(\omega - \omega(\mathbf{k}))}{2\omega(\mathbf{k})} + \frac{\delta(\omega + \omega(\mathbf{k}))}{2\omega(\mathbf{k})} \right]. \quad (1.84)$$

То значи да је Фуријеов развој дат са

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} \left[A(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t} + A(-\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k})t} \right], \quad (1.85)$$

где смо у интегралу који садржи $e^{i\omega(\mathbf{k})t}$ увели смену $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. Такође, пошто је Клајн-Гордоново поље реално, произвољне амплитуде морају задовољавати $A^*(\mathbf{k}) = A(-\mathbf{k})$ због чега се решење често записује и као

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left[A(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t} + A^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k})t} \right], \quad (1.86)$$

при чему смо скалирали амплитуде за фактор $\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}$. Видимо да се опште решење у овом случају састоји од суперпозиције две групе таласа који се крећу у супротним смеровима у односу на правац простирања.

Ако су за дати проблем познати почетни услови

$$\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \Psi(\mathbf{x}), \quad \dot{\phi}(\mathbf{x}, t = 0) = \chi(\mathbf{x}), \quad (1.87)$$

⁹Квадратни члан је највиши члан у лагранжијану који води на линеарну једначину кретања. Ако квадратни члан у Лагранжијану не садржи изводе поља, лако је видети да у решењу једначине кретања помоћу Фуријеовог интеграла такав члан води на константан допринос у дисперзији.

који се могу изразити помоћу Фуријеових интеграла

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \chi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} \tilde{\chi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.88)$$

можемо наћи решење Клајн-Гордонове једначине у којем амплитуде нису произвољне већ су одређене почетним условима. Опште решење (1.86), заједно са (1.87) и (1.88), даје

$$A(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\tilde{\Phi}(\mathbf{k}) + i\tilde{\chi}(\mathbf{k}), \quad A^*(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\tilde{\Phi}(-\mathbf{k}) - i\tilde{\chi}(-\mathbf{k}), \quad (1.89)$$

где су

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}} \chi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.90)$$

Више примена Фуријеовог метода на решавање једначина класичних теорија поља се може наћи у [Милић, Б. (2002); Arodz, H., Hadasz, L. (2010); Scheck, F. (2018)].

Треба приметити да дисперзиона релација за Клајн-Гордоново поље (1.82) има два решења,

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (1.91)$$

као и у случају енергије за релативистичку честицу масе m . Међутим, решења једначине (1.82) не интерпретирамо као могуће енергије честица масе m , јер у класичној теорији поља параметар m не представља масу честице. Због тога теорија класичног Клајн-Гордоновог поља нема проблем са негативним енергијама који се јавља у случају релативистичке Шредингерове једначине [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Ryder, L.H. (1996); Weinberg, S. (2008)]. Штавише, показује се да је енергија класичног Клајн-Гордоновог поља позитивна [Видети (1.100)].

1.2 Хамилтонов формализам

1.2.1 Канонске једначине кретања

Слично као у механици честица [Милић, Б. (2002)], први корак приликом преласка са Лагранжевог на Хамилтонов формализам у теорији поља је дефинисање импулса канонски конјугованог пољу. У теорији поља, његова дефиниција се добија заменом обичног извода варијационим [Greiner, W. (1996)]

$$\pi(x) = \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \dot{\phi}(x)}. \quad (1.92)$$

Горња релација се може упростити коришћењем дефиниције извода функционала из (Б.12), при чему треба водити рачуна да су у Лагранжевом формализму ϕ и $\dot{\phi}$ независне

промењиве

$$\begin{aligned}
\pi(\mathbf{y}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbf{x}} \left[\mathcal{L} \left(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}(\mathbf{x}) + \epsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) - \mathcal{L} \left(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}(\mathbf{x}) \right) \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbf{x}} \left[\mathcal{L} \left(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}(\mathbf{x}) \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \epsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{L} \left(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}(\mathbf{x}) \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Односно

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)}. \tag{1.94}$$

Када је дефинисан канонски импулс (не треба га мешати са импулсом поља који је дефинисан у Примеру 1.13), Лежандровом трансформацијом се уводи густина хамилтонијана [Greiner, W. (1996); Weinberg, S. (2008)]

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{H} \left(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla \phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t), \nabla \pi(\mathbf{x}, t) \right) \\
&= \pi(\mathbf{x}, t) \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L} \left(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla \phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \right),
\end{aligned} \tag{1.95}$$

у којој је $\dot{\phi}$ елиминисано у корист π . Коначно, хамилтонијан система је дат функционалом

$$H[\phi(t), \pi(t)] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{H} \left(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla \phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t), \nabla \pi(\mathbf{x}, t) \right). \tag{1.96}$$

Уколико поље поседује више компоненти, уместо (1.95) имамо

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \pi_a(\mathbf{x}, t) \dot{\phi}^a(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L} \left(\phi^a(\mathbf{x}, t), \nabla \phi^a(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^a(\mathbf{x}, t) \right), \tag{1.97}$$

где је $\pi_a = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}^a$. За разлику од Лагранжевог формализма у којем су независне промењиве ϕ и $\dot{\phi}$, у Хамилтоновом прилазу то су $\phi(\mathbf{x}, t)$ и $\pi(\mathbf{x}, t)$ тако важи

$$\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} = 0, \quad \frac{\delta \phi^a(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi^b(\mathbf{y}, t)} = \frac{\delta \pi_b(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi_a(\mathbf{y}, t)} = \delta_b^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{1.98}$$

Пример 1.8. Погледајмо како изгледају густине хамилтонијана за Клајн-Гордоново, Шредингерово и електромагнетно поље. Ако лагранжијан (1.33) препишемо тако да експлицитно издвојимо $\partial_t \phi$

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi - m^2 \phi^2 \right), \tag{1.99}$$

видимо да је $\pi = \dot{\phi}$, тако да Хамилтонов функционал за Клајн-Гордоново поље гласи

$$H_{\text{KG}}[\phi, \pi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \left(\pi^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^2 \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \left(\pi^2 - \phi \nabla^2 \phi + m^2 \phi^2 \right). \tag{1.100}$$

При томе смо у сабирку који садржи $\nabla\phi$ извршили парцијалну интеграцију и искористили чињеницу да поље довољно брзо тежи нули при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ [видети (1.19)]. Приметићемо да је Хамилтонов функционал класичног Клајн-Гордоновог поља, у случају $m > 0$, дат збиром доприноса чланова који не могу бити негативни.

У случају Шредингеровог поља, описаног лагранжијаном (1.36), канонски импулс придружен пољу ψ је

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^*, \quad (1.101)$$

док канонски импулс придружен пољу ψ^* ишчезава. Према томе, одговарајући Хамилтонов функционал је

$$\begin{aligned} H_S[\psi] &= \int_{\mathbf{x}} \left(i\psi^* \dot{\psi} - i\psi^* \dot{\psi} + \frac{1}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi \right) \\ &= \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi = - \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi, \end{aligned} \quad (1.102)$$

где смо поново искористили парцијалну интеграцију (1.19). За разлику од Клајн-Гордоновог поља, делује као да у Хамилтонов функционал Шредингеровог поља не улази канонски импулс. Наравно, канонски импулс улази у H_S јер је $\pi = i\psi^*$. Према томе, Хамилтонијан Шредингеровог поља у којем експлицитно фигурише канонски импулс гласи

$$H_S[\psi, \pi] = \frac{-i}{2m} \int_{\mathbf{x}} \nabla\pi \cdot \nabla\psi, \quad (1.103)$$

Иако се овај облик Хамилтонијана релативно ретко среће у литератури¹⁰, користићемо га у Примеру 1.9 да добијемо Шредингерову једначину у канонском формализму. Као и у случају Клајн-Гордоновог поља, из (1.102) видимо да је Хамилтонов функционал дат збиром позитивних чланова¹¹.

Коначно, потражимо и хамилтонијан за електромагнетно поље у вакууму, у области простора у којој нема носилаца наелектрисана. Као што смо већ нагласили у Примеру 1.5, основне динамичке променљиве у Лагранжевом формализму за електромагнетно поље су \mathbf{A} и ϕ . Због тога очекујемо да постоје и четири придружена канонска импулса, $\boldsymbol{\pi}_A$ и π_ϕ . Међутим, \mathcal{L}_{EM} не садржи $\partial_t\phi$ због чега је $\pi_\phi \equiv 0$. Са друге стране, за канонски импулс придружен векторском потенцијалу, налазимо

$$\boldsymbol{\pi}_A = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = \dot{\mathbf{A}} + \text{grad}\phi \equiv -\mathbf{E}, \quad (1.104)$$

при чему смо искористили везу између потенцијала и електричног поља. Горња релација омогућава да лако елиминисемо $\dot{\mathbf{A}}$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\mathbf{E} - \text{grad}\phi. \quad (1.105)$$

¹⁰Изузетак је, рецимо [Шиф, Л. (1968)].

¹¹Наравно, ово важи при $m > 0$.

Сада, пишући $\mathcal{L}_{\text{ЕМ}}$ у облику (1.49), за густину хамилтонијана добијамо

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{ЕМ}} &= \dot{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{A}} - \mathcal{L}_{\text{ЕМ}} = (-\mathbf{E} - \text{grad}\phi) \cdot (-\mathbf{E}) - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot \text{grad}\phi.\end{aligned}\quad (1.106)$$

Из класичне електродинимике је познато да је енергија електромагнетног поља у вакууму дата са [Милић, Б. (2002)]

$$W = \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (1.107)$$

па делује као да се применом Хамилтоновог формализма не добија коректан резултат. Ипак, члан $\mathbf{E} \cdot \text{grad}\phi$ не доприноси густини хамилтонијана за поље у вакууму. Пошто је

$$\mathbf{E} \cdot \text{grad}\phi = \text{div}(\phi\mathbf{E}) - \phi \text{div}\mathbf{E} = \text{div}(\phi\mathbf{E}), \quad (1.108)$$

јер је за поље у простору у којем нема носилаца наелектрисања $\text{div}\mathbf{E} = 0$ док просторни интеграл дивергенције ишчезава [видети (1.19)], видимо да се за Хамилтонов функционал поља може писати

$$H_{\text{ЕМ}} = \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (1.109)$$

што се поклапа са класичним резултатом. Односно, Хамилтонов функционал можемо тумачити као енергију поља у вакууму. ■

Једначине кретања у Хамилтоновом формализму се добијају варирањем хамилтонијана у односу на $\phi(\mathbf{x}, t)$ и $\pi(\mathbf{x}, t)$ [Weinberg, S. (2008)]. Полазећи од дефиниције Хамилтоновог функционала

$$H[\phi, \pi] = \int_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - L[\phi, \dot{\phi}] \quad (1.110)$$

и конјугованог импулса, уз коришћење (1.98), добија се

$$\frac{\delta H[\phi, \pi]}{\delta \pi(\mathbf{y})} = \dot{\phi}(\mathbf{y}) + \int_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x}) \frac{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})}{\delta \pi(\mathbf{y})} - \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})} \frac{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})}{\delta \pi(\mathbf{y})} - \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{x})} \frac{\delta \phi(\mathbf{x})}{\delta \pi(\mathbf{y})} = \dot{\phi}(\mathbf{y}) \quad (1.111)$$

и

$$\frac{\delta H[\phi, \pi]}{\delta \phi(\mathbf{y})} = \int_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x}) \frac{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})}{\delta \phi(\mathbf{y})} - \frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{y})} - \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})} \frac{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})}{\delta \phi(\mathbf{y})} = -\frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{y})} = -\dot{\pi}(\mathbf{y}, t), \quad (1.112)$$

при чему смо искористили (1.69) и (1.92). Дакле, Хамилтонове (или канонске) једначине у теорији поља гласе

$$\frac{\delta H[\phi, \pi]}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\delta H[\phi, \pi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} = -\dot{\pi}(\mathbf{x}, t). \quad (1.113)$$

Како је хамилтонијан изражен помоћу запреминског интеграла густине хамилтонијана, варијације из (1.113) се могу спровести до краја. Поступак у потпуности одговара већ изнетом приликом добијања (1.67). Резултат је

$$\begin{aligned}\frac{\delta H[\phi(t), \pi(t)]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi(\mathbf{x}, t)} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi(\mathbf{x}, t))} = -\dot{\pi}(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\delta H[\phi(t), \pi(t)]}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi(\mathbf{x}, t)} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi(\mathbf{x}, t))} = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (1.114)$$

Примећује се да у Хамилтоновим једначинама (1.113) и (1.114) просторне координате не улазе равноправно са временском, тако да Лоренцова инваријантност овако формулисана теорије није очигледна. Ипак, овај прилаз је често много погоднији у физици кондензоване материје где се велики број модела дефинише директно помоћу хамилтонијана.

1.2.2 Поасонове заграде

У Хамилтоновим једначинама поља $\phi(x)$ и конјуговани импулс $\pi(x)$ не наступају симетрично. Такође, овај прилаз (као ни Лагранжев), не омогућава да се директно нађе временска еволуција произвољног функционала $F[\phi, \pi]$. Ови проблеми се у теорији поља решавају слично као и у механици, увођењем Поасонових заграда [Милић, Б. (2002); Greiner, W. (1996)]. Дискусија која следи је ограничена на најједноставније случајеве, а комплетније разматрање се може пронаћи у стандардним уџбеницима [Weinberg, S. (2008); Nair, V.P. (2005); Fecko, M. (2006)].

Да бисмо видели како се у класичној теорији поља појављују Поасонове заграде, посматрајмо функционал $F[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)]$ који је дат интегралом по просторним координатама

$$F[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = \int_{\mathbf{x}} f(\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t), \nabla \phi(\mathbf{x}, t), \nabla \pi(\mathbf{x}, t)) \equiv F(t), \quad (1.115)$$

при чему је f неодређена функција назначених аргумената. Иако је F произвољни функционал поља $\phi(\mathbf{x}, t)$ и канонског импулса $\pi(\mathbf{x}, t)$, он се може посматрати и као функција временске координате t . Због тога је

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ F[\phi(\mathbf{x}, t + \epsilon), \pi(\mathbf{x}, t + \epsilon)] - F[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ F[\phi + \epsilon \dot{\phi} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \pi + \epsilon \dot{\pi} + \mathcal{O}(\epsilon^2)] - F[\phi, \pi] \right\},\end{aligned}\quad (1.116)$$

при чему смо се задржали на члановима линеарним по ϵ . Користећи сада (Б.30), налазимо

$$\frac{d}{dt} F[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = \int_{\mathbf{x}} \left(\frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} \dot{\pi}(\mathbf{x}, t) \right). \quad (1.117)$$

Коначно, замена канонских једначина (1.113) у (1.117) директно води на

$$\frac{d}{dt} F[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = [F, H]_{\text{PZ}} \quad (1.118)$$

при чему смо дефинисали Поасонове заграде у класичној теорији поља

$$[F, G]_{\text{PZ}} := \int_{\mathbf{x}} \left(\frac{\delta F(t)}{\delta \phi(\mathbf{x})} \frac{\delta G(t)}{\delta \pi(\mathbf{x})} - \frac{\delta F(t)}{\delta \pi(\mathbf{x})} \frac{\delta G(t)}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right), \quad (1.119)$$

где је $F(t)$ дефинисано у (1.115) а $G(t)$ има сличну форму. Дакле, увођењем Поасонових заграда се директним путем решава проблем динамичке зависности произвољног функционала $F[\phi, \pi]$.

Што се тиче асиметрије Хамилтонових једначина у односу на $\phi(x)$ и $\pi(x)$, прво треба приметити да је

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), H(t) \right]_{\text{PZ}} = \int_{\mathbf{y}} \left(\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} \frac{\delta H(t)}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} - \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} \frac{\delta H(t)}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} \right) = \frac{\delta H(t)}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.120)$$

при чему су коришћене једначине (1.98). Слична једначина се добија и за $\pi(\mathbf{x}, t)$, тако да Хамилтонове једначине изражене помоћу Поасонових заграда гласе

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \left[\phi(\mathbf{x}, t), H(t) \right]_{\text{PZ}}, \quad \dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = \left[\pi(\mathbf{x}, t), H(t) \right]_{\text{PZ}}. \quad (1.121)$$

У једначинама (1.121), као и у (1.118), $H(t)$ представља хамилтонијан система, а (1.121) је тражена форма једначина кретања у којој поље и конјуговани импулс наступају симетрично.

Пример 1.9. Погледајмо сада како се помоћу (1.121) може добити једначина кретања за Шредингерово поље. Формално, она гласи

$$\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) = \left[\psi(\mathbf{x}, t), H_S(t) \right]_{\text{PZ}}. \quad (1.122)$$

Користећи дефиницију Поасонових заграда, имамо

$$\left[\psi(\mathbf{x}, t), H_S(t) \right]_{\text{PZ}} = \int_{\mathbf{y}} \left(\frac{\delta \psi(\mathbf{x}, t)}{\delta \psi(\mathbf{y}, t)} \frac{\delta H_S(t)}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} - \frac{\delta \psi(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} \frac{\delta H_S(t)}{\delta \psi(\mathbf{y}, t)} \right). \quad (1.123)$$

Ако за Хамилтонов функционал сада искористимо облик из (1.103), као и другу релацију из (1.114) по којој је

$$\frac{\delta H_S[\psi(t), \pi(t)]}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} = \frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \pi(\mathbf{y}, t)} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial (\nabla \pi(\mathbf{y}, t))} = -\frac{-i}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{y}, t), \quad (1.124)$$

једначина кретања (1.122) постаје

$$\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t), \quad (1.125)$$

што је Шредингерова једначина. ■

Коначно, од интереса је Поасонова заграда самог поља и конјугованог импулса. Заменом (1.98) у (1.119) се налази

$$\begin{aligned} \left[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} &= \int_{\mathbf{z}} \left(\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta \pi(\mathbf{y}, t)}{\delta \pi(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta \pi(\mathbf{y}, t)}{\delta \phi(\mathbf{z}, t)} \right) \\ &= \int_{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.126)$$

при чему треба обратити пажњу да се сходно релацијама (1.98) и $\phi(\mathbf{x}, t)$ и $\pi(\mathbf{y}, t)$ узимају у истом тренутку времена. Ако поље поседује више компоненти, дефиниција Поасонове заграде гласи (показати за вежбу)

$$[F, G]_{\text{PZ}} = \sum_a \int_{\mathbf{x}} \left(\frac{\delta F(t)}{\delta \phi^a(\mathbf{x})} \frac{\delta G(t)}{\delta \pi_a(\mathbf{x})} - \frac{\delta F(t)}{\delta \pi_a(\mathbf{x})} \frac{\delta G(t)}{\delta \phi^a(\mathbf{x})} \right) \quad (1.127)$$

а једначина (1.126) постаје

$$\left[\phi^a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_b^a. \quad (1.128)$$

Такође, није тешко показати да важи и

$$\left[\phi^a(\mathbf{x}, t), \phi^b(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} = \left[\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} = 0. \quad (1.129)$$

За самосталну вежбу је остављено да се, коришћењем дефиниције (1.119) и особина варијационих извода [видети Прилог Б], покаже да Поасонове заграде класичне теорије поља поседују исте особине као Поасонове заграде система механичких честица [Weinberg, S. (2008)]:

$$\begin{aligned} [A, B]_{\text{PZ}} &= -[B, A]_{\text{PZ}}, & [A, B + C]_{\text{PZ}} &= [A, B]_{\text{PZ}} + [A, C]_{\text{PZ}}, \\ [A, BC]_{\text{PZ}} &= [A, B]_{\text{PZ}}C + B[A, C]_{\text{PZ}}, \\ [A, [B, C]_{\text{PZ}}]_{\text{PZ}} + [C, [A, B]_{\text{PZ}}]_{\text{PZ}} + [B, [C, A]_{\text{PZ}}]_{\text{PZ}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Пример 1.10. Покажимо сада како се коришћењем основних особина Поасонових заграда може добити Клајн-Гордонова једначина. Да се подсетимо, Хамилтонов функционал је дат са

$$H_{\text{KG}}[\phi, \pi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \left(\pi^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^2 \right), \quad (1.131)$$

док канонске једначине кретања гласе

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \left[\phi(\mathbf{x}, t), H(t) \right]_{\text{PZ}}, \quad \dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = \left[\pi(\mathbf{x}, t), H(t) \right]_{\text{PZ}}. \quad (1.132)$$

Дакле,

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{y}} \left[\phi(\mathbf{x}, t), \pi^2(\mathbf{y}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} \phi(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi(\mathbf{y}, t) + m^2 \phi^2(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}}, \quad (1.133)$$

при чему $\nabla_{\mathbf{y}}$ означава градијент по компонентама вектора \mathbf{y} . Пошто је

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), \pi^2(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} = 2\pi(\mathbf{y}, t) \left[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} = 2\pi(\mathbf{y}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.134)$$

док Поасонове заграде поља са самим собом ишчезавају, налазимо

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{y}} 2\pi(\mathbf{y}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \pi(\mathbf{x}, t). \quad (1.135)$$

Са друге стране,

$$\begin{aligned}\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{y}} \left[\pi(\mathbf{x}, t), \pi^2(\mathbf{y}, t) + \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}, t) + m^2\phi^2(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} \\ &= \int_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}, t) \cdot \left[\pi(\mathbf{x}, t), \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} + m^2 \int_{\mathbf{y}} \phi(\mathbf{y}, t) \left[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}}\end{aligned}\quad (1.136)$$

због (1.129) и особина Поасонових заграда (1.130). Поасонова заграда из другог интеграла директно даје δ -функцију, док се она из првог мора рачунати пажљивије. Користећи дефиницију (1.119), имамо (ради прегледности нећемо експлицитно писати временску координату)

$$\begin{aligned}\left[\pi(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}) \right]_{\text{PZ}} &= \int_{\mathbf{z}} \left(\frac{\delta\pi(\mathbf{x})}{\delta\phi(\mathbf{z})} \frac{\delta(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}))}{\delta\pi(\mathbf{z})} - \frac{\delta\pi(\mathbf{x})}{\delta\pi(\mathbf{z})} \frac{\delta(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}))}{\delta\phi(\mathbf{z})} \right) \\ &= - \int_{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \frac{\delta(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}))}{\delta\phi(\mathbf{z})}.\end{aligned}\quad (1.137)$$

Да бисмо израчунали преостали варијациони извод, уведемо помоћни функционал

$$\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{w}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{w}) \nabla_{\mathbf{w}}\phi(\mathbf{w}) \equiv F[\phi].\quad (1.138)$$

Сада је

$$\begin{aligned}\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(\mathbf{z})} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbf{w}} \left(\delta(\mathbf{y} - \mathbf{w}) \nabla_{\mathbf{w}}(\phi(\mathbf{w}) + \epsilon\delta(\mathbf{z} - \mathbf{w})) - \delta(\mathbf{y} - \mathbf{w}) \nabla_{\mathbf{w}}\phi(\mathbf{w}) \right) \\ &= \nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}).\end{aligned}\quad (1.139)$$

Замена (1.139) у (1.137) даје

$$\left[\pi(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}) \right]_{\text{PZ}} = - \frac{\delta(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}))}{\delta\phi(\mathbf{x})} = -\nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\quad (1.140)$$

па се (1.136) своди на

$$\begin{aligned}\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) &= - \int_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - m^2\phi(\mathbf{x}, t) \\ &= \nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) - m^2\phi(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (1.141)$$

при чему смо у преосталом интегралу искористили Гаусову теорему. Комбиновањем (1.135) и (1.141) добијамо

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) - m^2\phi(\mathbf{x}, t),\quad (1.142)$$

што је Клајн-Гордонова једначина за класично поље $\phi(\mathbf{x}, t)$. ■

Једначине (1.118), (1.121) и (1.126), односно (1.128) и (1.129) омогућавају прелазак са класичне на квантну теорију поља методом канонске квантизације, слично као што се са Њутнове прелази на квантну механику [Шиф, Л. (1968)].

1.3 Симетрије у класичној теорији поља

1.3.1 Глобалне и локалне симетрије

Анализа сложених физичких система је у знатној мери олакшана ако су познате симетрије које их карактеришу. Рецимо, на основу закона одржања момента импулса произилази да се кретање честице у пољу централне силе увек одвија тако да се она све време налази у једној равни и то значајно упрошћава решавање једначина кретања [Милић, Б. (1997)]. Слично, на основу закона одржања енергије и импулса можемо одредити неке карактеристике система без директног решавања једначина кретања. Према савременим схватањима [Weinberg, S. (2008); Хибш Т. (2011)], закони одржања су последица симетрија физичких система¹². Ово тврђење је познато под називом Теорема Еми Нетер. Да бисмо јасно формулисали поменути теорему, прво морамо прецизирати шта подразумевамо под симетријом физичког система.

Претпоставимо да је систем описан са n -компонентним скаларним пољем $\phi^a(x)$, $a = 1, 2, \dots, N$. Дозволимо сада промену поља $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$. Ако промена поља $\delta\phi$ може бити произвољно мала, говоримо о *континуалним симетријама* и њима ћемо се бавити у наставку. Разматрање инфинитезималних трансформација не намеће никаква ограничења пошто се коначна трансформација увек може добити њиховом узастопном применом. У општем случају, поправка $\delta\phi$ је дата са

$$\delta\phi^a(x) = \epsilon^i \mathcal{F}_i^a(x), \quad (1.143)$$

где су $\{\epsilon^i\}$ параметри који дефинишу трансформацију а $\mathcal{F}_i^a(x)$ у општем случају зависи од поља ϕ и њихових извода¹³. Ако параметри ϵ^i не зависе од просторно-временских координата, говоримо о *глобалним континуалним симетријама* [Weinberg, S. (2008)]. Трансформацију поља коју разматрамо у овом одељку ћемо означавати са $\delta\phi$ јер се по смислу разликује од "обичне" варијације $\delta\phi$ коју смо користили да у (1.27) изведемо Ојлер-Лагранжеве једначине. Наиме, у случају добијања Ојлер-Лагранжевих једначина смо тражили конфигурације поља које су такве да њихова произвољна мала варијација не мења дато дејство. При томе је варијација $\delta\phi$ ишчезавала на границама интеграције. Са друге стране, величине $\delta\phi^a = \epsilon^i \mathcal{F}_i^a$ су унапред задате трансформације и обично не ишчезавају на граници области интеграције.

Пример 1.11. Посматрајмо трансформацију једнокомпонентног скаларног поља у односу на translацију просторних координата (ради прегледности не пишемо временску координату), $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$. Тада имамо $\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$. Ако је \mathbf{a} произвољно мали константни вектор, налазимо

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\mathbf{a}^2), \quad (1.144)$$

па је у овом случају

$$\delta\phi(x) = a^k \partial_k \phi(x). \quad (1.145)$$

¹²Вајнберговим речима, *symmetries imply conservation laws* [Weinberg, S. (2008)].

¹³У одељку 1.3.4 ћемо параметре ϵ^i експлицитно повезати са елементима групе G и видећемо да је њихов број једнак димензији групе G (видети (1.221), као и (1.145)). Међутим, за сада нам је довољно да о њима размишљамо као о реалним параметрима.

Дакле, за просторне транслације је $\{\epsilon^i\} = \{a^k\}$, док је $\mathcal{F}_k(\mathbf{x}) = \partial_k \phi(\mathbf{x})$ и величина \mathcal{F} зависи само од извода поља ϕ . ■

Под инфинитезималном глобалном симетријом физичког система подразумевамо скуп трансформација облика (1.143), са константним параметрима $\{\epsilon^i\}$, које не мењају интеграл дејства чак и када једначине кретања *нису* задовољене. Ова дефиниција је од великог значаја за класичне статистичке системе код којих се приликом рачунања партиционе функције (статистичке суме) морају узети у обзир све конфигурације а не само оне које су екстремале одговарајућег дејства [Видети Одељак 2.3 за случај $O(N)$ симетричне теорије као и Одељак 2.5.2 посвећен нелинеарном σ моделу]. Са друге стране, инфинитезималним локалним (или калибрационим) симетријама се називају трансформације типа (1.143) код којих параметри трансформације могу зависе од просторно-временских координата. Основни пример теорије са локалном симетријом је Мексвелова електродинамика. Такође, локалне трансформације играју важну улогу у Гинзбург-Ландауовој теорији суперпроводности и многим другим савременим теоријама.

1.3.2 Теорема Еми Нетер

Теорема Еми Нетер тврди да свака континуална глобална симетрија физичког система, на конфигурацијама које задовољавају класичне једначине кретања, за последицу има закон одржања. При томе, под симетријом физичког система подразумевамо скуп трансформација (1.143) које не мењају дејство. Ако се поља, као основне динамичке величине, трансформишу према $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, то ће за последицу имати промену дејства, $S[\phi] \rightarrow S[\phi + \delta\phi]$. Пошто је, по претпоставци, трансформација поља инфинитезимална, можемо искористити (Б.30) да пишемо

$$S[\phi(x) + \delta\phi(x)] = S[\phi(x)] + \epsilon^i \int_y \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi^a(y)} \mathcal{F}_i^a(y) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (1.146)$$

По дефиницији, трансформација (1.143) је симетрија физичког система ако важи

$$\delta S[\phi] = \epsilon^i \int_y \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi^a(y)} \mathcal{F}_i^a(y) = 0. \quad (1.147)$$

Ако поља задовољавају једначине кретања $\delta S/\delta \phi^a = 0$, аутоматски ће бити $\delta S[\phi] = 0$. Међутим, као што смо рекли раније, под симетријском трансформацијом подразумевамо ону која не мења дејство чак и у случају конфигурација које не задовољавају једначине кретања. Инсистирање на оваквој дефиницији симетрије је нарочито битно за квантну (односно, статистичку) верзију теорије у којој се у обзир морају узети *све* конфигурације поља, а не само оне које задовољавају једначине кретања. Даље, трансформације $\delta\phi$ су, за разлику од варијација $\delta\phi$ у напред задате и оне се могу користити да би се одредила густина лагранжијана која је инваријантна у односу на трансформације $\phi^a \rightarrow \phi^a + \epsilon^i \mathcal{F}_i^a$.

Пример 1.12. Проверимо да ли је интеграл

$$\int_x \phi^a(x) \phi^a(x), \quad (1.148)$$

који се често појављује у физички интересантним моделима као део дејства, и у којем се интеграција врши по целом простору ($-\infty \leq x^\mu \leq \infty$), тако да поље ишчезава при $x^\mu \rightarrow \pm\infty$, инваријантан у односу на трансформацију $\phi^a(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi^a(\mathbf{x} + \mathbf{b}, t)$. Одговарајућа промена интеграла је

$$\int_x \phi^a(x) \phi^a(x) \rightarrow \int_x \phi^a(\mathbf{x} + \mathbf{b}, t) \phi^a(\mathbf{x} + \mathbf{b}, t). \quad (1.149)$$

Једноставним увођењем смене $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$, која не мења ни јакобијан ни границе интеграције, видимо да се интеграл дејства не мења. Дакле, трансформација $\phi^a(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi^a(\mathbf{x} + \mathbf{b}, t)$ је симетрија дејства (1.148) без обзира да ли поља ϕ^a задовољавају или не задовољавају једначине кретања.

Наравно, транслацију је могуће дискутовати и као инфинитезималну трансформацију. Пошто је у Примеру 1.11 показано да тада важи $\mathcal{F}_k^a = \partial_k \phi^a$, имаћемо

$$\begin{aligned} \phi^a(x) \phi^a(x) &\rightarrow \left(\phi^a(x) + b^k \partial_k \phi^a(x) + \mathcal{O}(b^2) \right) \left(\phi^a(x) + b^k \partial_k \phi^a(x) + \mathcal{O}(b^2) \right) \\ &= \phi^a(x) \phi^a(x) + 2\phi^a(x) b^k \partial_k \phi^a(x) + \mathcal{O}(b^2). \end{aligned} \quad (1.150)$$

Међутим,

$$2\phi^a(x) b^k \partial_k \phi^a(x) = b^k \partial_k \left(\phi^a(x) \phi^a(x) \right) = \operatorname{div} \mathbf{A}(x) \quad (1.151)$$

где је $\mathbf{A}(x) = \phi^a(x) \phi^a(x) \mathbf{b}$. То значи да је индукована промена дејства дата са

$$\int_x \operatorname{div} \mathbf{A}(x) = 0 \quad (1.152)$$

јер се одговарајући тродимензиони интеграл применом Гаусовом теореме преводи у површински интеграл који ишчезава. Поново закључујемо да је транслација симетрија дејства (1.148) и у случајевима када једначине кретања не важе. ■

Вратимо се сада на доказ теореме. Како бисмо показали постојање закона одржања, претпоставимо за тренутак да параметри трансформације нису константни, тј. да је $\epsilon^i = \epsilon^i(x)$. Таква трансформација не мора бити симетријска, али у општем случају ће важити

$$\delta S[\phi] = \int_x J_i^\mu(x) \partial_\mu \epsilon^i(x) \quad (1.153)$$

за неке величине $J_i^\mu(x)$. Наиме, ако у (1.153) ставимо $\epsilon^i = \text{const}$, аутоматски добијамо $\delta S[\phi] = 0$, што значи да је глобална трансформација (1.153) симетрија система. Ако сада искористимо четвородимензиону Гаусову теорему [видети (1.20)] и претпоставимо да поља задовољавају једначине кретања, добијамо

$$\delta S[\phi] = 0 = - \int_x \epsilon^i(x) \partial_\mu J_i^\mu(x). \quad (1.154)$$

Да би горња релација важила за произвољне вредности параметара $\{\epsilon^i\}$, мора бити

$$\partial_\mu J_i^\mu(x) = 0 \quad (1.155)$$

што је четвородимензиона једначина континуитета која имплицира постојање величине која се не мења са временом. Да бисмо то лакше видели, раздвојимо просторне и временску компоненту вектора J_i

$$J_i(x) = \begin{bmatrix} \rho_i(x) \\ \mathbf{J}_i(x) \end{bmatrix}. \quad (1.156)$$

Са овим ознакама једначина континуитета постаје

$$\partial_t \rho_i(x) + \operatorname{div} \mathbf{J}_i(x) = 0. \quad (1.157)$$

Интеграцијом горње једначине по просторним координатама и то тако да област интеграције обухвати цео простор, добијамо

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}} \rho_i(\mathbf{x}, t) + \int_{\mathbf{x}} \operatorname{div} \mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.158)$$

Интеграл који садржи $\operatorname{div} \mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t)$ се Гаусовом теоремом преводи у површински интеграл који нестаје (претпостављајући да сва поља и њихови изводи довољно брзо теже нули пр $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$), па коначно налазимо

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}} \rho_i(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.159)$$

што значи да се величина

$$Q_i := \int_{\mathbf{x}} \rho_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{x}} J_i^0(\mathbf{x}, t) \quad (1.160)$$

не мења са временом. То је тражени закон одржања и овим је теорема доказана [Weinberg, S. (2008)]. Треба обратити пажњу да за сваки параметар ϵ^i постоји по једна величина Q_i која се очувава. Такође, $J_i^0(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_i(\mathbf{x}, t)$ се често означава као густина набоја, без обзира да ли је величина која се очувава електрични набој или не.

Ако се у односу на трансформације, поред дејства, не мења ни Лагранжев функционал, могуће је наћи експлицитни облик за величине Q_i . Да бисмо их нашли, довољно је да посматрамо параметре трансформације који зависе само од временске координате, $\epsilon^i = \epsilon^i(t)$. Ако је

$$S[\phi] = \int dt L[\phi, \dot{\phi}], \quad (1.161)$$

имамо

$$\delta L = \int_{\mathbf{x}} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \epsilon^i(t) \mathcal{F}_i^a(\mathbf{x}) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} (\epsilon^i(t) \mathcal{F}_i^a(\mathbf{x})) \right]. \quad (1.162)$$

Услов који мора бити задовољен да би глобална трансформација (при $\epsilon^i = \text{const}$) била симетрија, тј. $\delta L = 0$, је

$$\int_{\mathbf{x}} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \mathcal{F}_i^a(\mathbf{x}) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_i^a(\mathbf{x}) \right] = 0. \quad (1.163)$$

Узимајући у обзир (1.163), релација (1.162) се може записати као

$$\begin{aligned}
\delta L &= \int_{\mathbf{x}} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \epsilon^i(t) \mathcal{F}_i^a(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \epsilon^i(t) \mathcal{F}_i^a(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \epsilon^i(t) \frac{d}{dt} \mathcal{F}_i^a(x) \right] \\
&= \int_{\mathbf{x}} \left[\epsilon^i(t) \left(\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \mathcal{F}_i^a(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_i^a(x) \right) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \epsilon^i(t) \mathcal{F}_i^a(x) \right] \\
&= \int_{\mathbf{x}} \mathcal{F}_i^a(x) \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \epsilon^i(t).
\end{aligned} \tag{1.164}$$

Пошто је одговарајућа варијација дејства

$$\delta S = \int dt \int_{\mathbf{x}} \mathcal{F}_i^a(x) \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \epsilon^i(t), \tag{1.165}$$

поређењем са (1.153) налазимо J_i^0 . Односно

$$Q_i = \int_{\mathbf{x}} J_i^0 = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{F}_i^a(x) \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a}. \tag{1.166}$$

Величина Q_i се заиста не мења са временом за конфигурације које задовољавају једначине кретања. У то се можемо уверити ако израчунамо извод

$$\frac{d}{dt} Q_i = \int_{\mathbf{x}} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{F}_i^a(x) \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \right) = \int_{\mathbf{x}} \left[\mathcal{F}_i^a(x) \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \right) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_i^a(x) \right]. \tag{1.167}$$

Међутим, на основу једначина кретања (1.69), горњи израз постаје

$$\frac{d}{dt} Q_i = \int_{\mathbf{x}} \left[\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \mathcal{F}_i^a(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_i^a(x) \right] = 0 \tag{1.168}$$

због симетријског услова (1.163).

Пример 1.13. Нека је Лагранжев функционал за скаларно поље инваријантан у односу на просторне транслације, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{b}$. У Примеру 1.11 је показано да је тада $\mathcal{F}_k = \partial_k \phi(x)$. Величине које се не мењају са временом су

$$Q_k = \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a} \mathcal{F}_k^a(x) = \int_{\mathbf{x}} \pi_a(x) \partial_k \phi^a(x), \tag{1.169}$$

при чему смо искористили дефиницију канонског импулса. Три величине Q_k можемо скупити у један просторни вектор

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^3 Q^k \mathbf{e}_k = - \int_{\mathbf{x}} \pi_a(x) \nabla \phi^a(x) \tag{1.170}$$

и он представља импулс поља. Оваква интерпретација вектора \mathbf{P} из (1.170) долази од аналогије са механичким системима код којих је укупни импулс система константан ако постоји симетрија у односу на просторне транслације [Милић, Б. (1997)]. ■

Коначно, инваријантност *тусшине лагранжијана* омогућава да се нађе експлицитни облик за величине J_a^μ . Дакле, нека је

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int_x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (1.171)$$

Трансформација поља $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, где је $\delta\phi^a = \epsilon^i(x)\mathcal{F}_i^a$, индукује промену густине лагранжијана

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\delta(\partial_\mu\phi^a) \\ &= \epsilon^i(x) \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\mathcal{F}_i^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\partial_\mu\mathcal{F}_i^a \right] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\mathcal{F}_i^a\partial_\mu\epsilon^i(x), \end{aligned} \quad (1.172)$$

при чему смо искористили комутативност оператора δ и ∂_μ [видети (Б.24)]. У случају глобалних трансформација које не мењају густину лагранжијана, израз у угластој загради мора ишчезавати па остаје

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\mathcal{F}_i^a\partial_\mu\epsilon^i(x). \quad (1.173)$$

Поредећи добијени резултат са подинтегралним изразом из (1.153), директно читамо

$$J_i^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\mathcal{F}_i^a. \quad (1.174)$$

Користећи (1.68), лако се можемо уверити да се J_i^0 из (1.174) поклапа са подинтегралном величином из (1.166). Слично као и у случају инваријантног лагранжијана, може се показати да просторни интеграл од J_i^0 , на конфигурацијама које задовољавају једначине кретања, не зависи од времена. Проверавање овог тврђења је остављено за самосталну вежбу.

Пример 1.14. Посматрајмо лагранжијан за Шредингерово поље

$$\mathcal{L}_S = i\psi^*\partial_t\psi - \frac{1}{2m}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi. \quad (1.175)$$

Лако је видети да је овај лагранжијан инваријантан у односу на трансформације $\psi \rightarrow e^{-i\theta}\psi$, $\psi^* \rightarrow e^{i\theta}\psi^*$. Пошто за инфинитезимални параметар θ добијамо $\psi \rightarrow \psi - i\theta\psi$ и $\psi^* \rightarrow \psi^* + i\theta\psi^*$, директно читамо $\delta\psi = -i\theta\psi$ и $\delta\psi^* = i\theta\psi^*$. Ако индекс $a = 1$ придружимо пољу ψ а индекс $a = 2$ пољу ψ^* , имамо

$$\mathcal{F}^1 = -i\psi, \quad \mathcal{F}^2 = i\psi^*. \quad (1.176)$$

Треба обратити пажњу да за трансформације $\psi \rightarrow e^{-i\theta}\psi$ и $\psi^* \rightarrow e^{i\theta}\psi^*$ постоји само један параметар θ па индекс i узима само једну вредност. Дакле, дефиниција величина J^μ из (1.174) даје

$$\begin{aligned} J^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial\dot{\psi}}\mathcal{F}^1 + \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial\dot{\psi}^*}\mathcal{F}^2 = i\psi^*(-i\psi) = |\psi|^2, \\ \mathbf{J} &= \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial(\nabla\psi)}\mathcal{F}^1 + \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial(\nabla\psi^*)}\mathcal{F}^2 = \frac{i}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi), \end{aligned} \quad (1.177)$$

што је стандардни резултат. Величина $|\psi|^2$ се може интерпретирати као густина честица [Colussi, V., Wickramasekara, S. (2008); Brauner, T. (2010)], мада то постаје очигледно тек када се изврши квантовање модела [Видети Одељак 3.3.2]. Са друге стране, ако трансформацију дефинишемо као

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-ie\theta} \psi, \quad (1.178)$$

где је e елементарно наелектрисање, за очувану величину налазимо

$$Q = \int_{\mathbf{x}} e|\psi|^2 \quad (1.179)$$

и интерпретирамо је као укупни електрични набој поља. Веза између Шредингеровог поља и наелектрисаних честица ће бити додатно разматрана у наредном одељку који се бави локалним симетријама. Будући да $\psi \rightarrow e^{-i\theta}\psi$ не мења модуо комплексног броја $\psi(x)$, овакве трансформације се означавају именом $U(1)$. За самосталну вежбу је остављено да се нађе експлицитни израз за величине J^μ у случају комплексног Клајн-Гордоновог поља из Примера 1.4. ■

У општијем случају, трансформација $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ може индуковати промену густине лагранжијана, $\delta\mathcal{L} \neq 0$. Међутим, ако је та промена једнака дивергенцији неког квадриквектора V_i ,

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^i \partial_\mu V_i^\mu = \epsilon^i \partial \cdot V_i, \quad (1.180)$$

дејство се неће променити и таква трансформација такође не мења класичне једначине кретања. Заиста, у овом случају је

$$\delta S[\phi] = \epsilon^i \int_{\mathbf{x}} \partial \cdot V_i = 0 \quad (1.181)$$

јер се интеграл дивергенције преводи у интеграл по (хипер)површини на којој поље ишчезава [видети (1.20)]. Уместо једначине континуитета (1.173) у овом случају добијемо услов

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \mathcal{F}_i^a \right) = \partial_\mu V_i^\mu \quad (1.182)$$

што значи да је сада квадриквектор струје дат са компонентама

$$J_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \mathcal{F}_i^a - V_i^\mu, \quad (1.183)$$

и за њега важи $\partial \cdot J = 0$.

Слично, промена густине лагранжијана која је облика $\delta\mathcal{L} = \partial_t f(\phi(\mathbf{x}, t))$ индукује промену лагранжијана

$$L[\phi] \rightarrow L[\phi] + \int_{\mathbf{x}} \partial_t f(\phi(\mathbf{x}, t)) = L[\phi] + \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}} f(\phi(\mathbf{x}, t)) \equiv L[\phi] + \frac{dF(t)}{dt}. \quad (1.184)$$

Користећи исти поступак као приликом добијања релације (1.117), налазимо

$$\frac{\delta}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta F}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta F}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)}. \quad (1.185)$$

Дакле, први члан у Ојлер-Лагранжевој једначини (1.69) прелази у

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} + \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} \quad (1.186)$$

док други постаје

$$\frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} \rightarrow \frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} + \frac{d}{dt} \frac{\delta F}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} \quad (1.187)$$

па закључујемо да се једначине кретања класичне теорије поља не мењају при промени $\delta \mathcal{L} = \partial_t f(\phi(\mathbf{x}, t))$.

Погледајмо, за крај овог одељка, како изгледа Поасонова заграда поља $\phi^a(x)$ са густином набоја у случају унутрашњих симетрија, односно симетријских трансформација које повезују унутрашње степене слободе скаларног поља. У тим случајима, као и код $U(1)$ трансформација, $\delta \phi(x)$ зависи само од поља $\phi(x)$ [Watanabe, H., Murayama, H. (2014); Weinberg, S. (2010)]. Ако искористимо (1.94) у дефиницији (1.174), $J_i^0 \equiv \rho_i$ можемо записати и као

$$J_i^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^a} \mathcal{F}_i^a = \pi_a(x) \mathcal{F}_i^a(x). \quad (1.188)$$

Подсетићемо се да је $\delta \phi = \epsilon^i \mathcal{F}_i^a(x)$. Сада директно налазимо

$$\begin{aligned} \epsilon^i \left[\phi^a(\mathbf{x}, t), J_i^0(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} &= \left[\phi^a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t) \delta \phi^b(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} = \delta_b^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \phi^b(\mathbf{y}, t) \\ &= \delta \phi^a(\mathbf{y}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.189)$$

одакле произилази и

$$\left[\phi^a(\mathbf{x}, t), Q_i \epsilon^i \right]_{\text{PZ}} = \int_{\mathbf{y}} \epsilon^i \left[\phi^a(\mathbf{x}, t), J_i^0(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} = \delta \phi^a(\mathbf{x}, t). \quad (1.190)$$

Управо добијене релације играју важну улогу у доказивању Голдстонове теореме за квантна поља када се класична поља замене операторима, а Поасонове заграде комутаторима.

1.3.3 Локалне (калибрационе) симетрије

Размотримо сада детаљније шта се догађа ако наметнемо јачи захтев за инваријантност густине лагранжијана, допуштајући да се параметри $\{\epsilon^i\}$ који дефинишу инфинитезималну трансформацију (1.143) мењају од тачке до тачке у простор-времену: $\epsilon^i \rightarrow \epsilon^i(x)$. Трансформације типа

$$\delta \phi^a(x) = \epsilon^i(x) \mathcal{F}_i^a(x), \quad (1.191)$$

које остављају густину лагранжијана инваријантном се називају локалним или калибрационим симетријама. Ипак, треба имати на уму да локалне симетрије не представљају праве симетрије физичког система већ говоре о *инваријантности нашег опис* физичког система [Witten, E. (2018); Gross, D. (1996); Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)].

Оваква карактеризација локалних трансформација се лепо може илустровати основним примером теорије са калибрационом симетријом – Мексвеловом електродинамиком [Милић, Б. (2002)]. Као што смо већ дискутовали у Примеру 1.5, електрично и магнетно поље су повезани са скаларним (V) и векторским (\mathbf{A}) потенцијалом релацијама

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad} V, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (1.192)$$

Лако је видети да се исто електрично и магнетно поље добијају из нових потенцијала

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \chi, \quad V' = V - \partial_t \chi, \quad (1.193)$$

где је χ произвољна функција на простор-времену. Заиста,

$$\mathbf{E}' = -\partial_t \mathbf{A}' - \text{grad} V' = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad} V - \partial_t \text{grad} \chi + \text{grad} \partial_t \chi = \mathbf{E}, \quad (1.194)$$

при чему смо искористили комутирање оператора ∇ и ∂_t , док је $\mathbf{B}' = \text{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{B}$ на основу познатог идентитета $\text{rot} \text{grad} \equiv \mathbf{0}$. Имајући на уму да се потенцијали у класичној електродинамичи уводе као секундарне функције помоћу којих је могуће одредити поља \mathbf{E} и \mathbf{B} , видимо да два различита скупа потенцијала $\{V, \mathbf{A}\}$ и $\{V', \mathbf{A}'\}$, повезаних трансформацијама (1.193) описују исту конфигурацију електромагнетног поља. Трансформације (1.193), које повезују два скупа потенцијала којима придружујемо једну конфигурацију електромагнетног поља, називају се калибрационим трансформацијама.

Вратимо се сада на Лагранжеву формулацију Шредингеровог поља и покушајмо да одредимо услове под којима је лагранжијан

$$\mathcal{L}_S = i\psi^* \partial_t \psi - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi, \quad (1.195)$$

инваријантан у односу на локалне $U(1)$ трансформације

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta(x)} \psi \quad (1.196)$$

што је директно уопштење глобалних трансформација из Примера 1.14 на случај локалних трансформација. Одмах уочавамо проблем: лагранжијан (1.195) не може бити инваријантан у односу на локалне трансформације јер фактор $\exp(-i\theta(x))$ зависи од просторних координата и чланови који садрже изводе поља се не трансформишу као сама поља. Рецимо,

$$i\psi^* \partial_t \psi \rightarrow i e^{i\theta(x)} \psi^* \partial_t (e^{-i\theta(x)} \psi) = i\psi^* \partial_t \psi + \psi^* \psi \partial_t \theta(x). \quad (1.197)$$

Решење овог проблема се састоји у *модификовању* лагранжијана тако да нови, сложенији лагранжијан, буде инваријантан у односу на локалне трансформације. Пошто чланови који нарушавају инваријантност долазе од дејства извода на фактор $\exp(-i\theta(x))$, решење се своди на дефинисање нових, тзв. коваријантних извода [Хибш Т. (2011)]

$$\partial_t \rightarrow D_t := \partial_t + i\Phi, \quad \nabla \rightarrow \mathbf{D} := \nabla + i\mathbf{X}, \quad (1.198)$$

при чему величине Φ и \mathbf{X} одређујемо из услова да се изводи нових поља трансформишу на исти начин као и сама поља. Односно, захтевамо да важи

$$D_t\psi \rightarrow D'_t\psi' := (\partial_t + i\Phi')\left(e^{-i\theta(x)}\psi\right) = e^{-i\theta(x)}D_t\psi. \quad (1.199)$$

Расписивањем чланова из горњег услова, налазимо

$$e^{-i\theta(x)}\left(\partial_t\psi - i\psi\partial_t\theta + i\Phi'\psi\right) = e^{-i\theta(x)}\left(\partial_t\psi + i\Phi\psi\right), \quad (1.200)$$

одакле видимо да тражени услов гласи

$$\Phi' = \Phi + \partial_t\theta. \quad (1.201)$$

Слично, из захтева

$$\mathbf{D}\psi \rightarrow \mathbf{D}'\psi' := (\nabla + i\mathbf{X}')\left(e^{-i\theta(x)}\psi\right) = e^{-i\theta(x)}\mathbf{D}\psi \quad (1.202)$$

добијамо закон трансформације величине \mathbf{X}

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \nabla\theta. \quad (1.203)$$

Једначине које дефинишу трансформације величина \mathbf{X} и Φ личе на једначине калибрационих трансформација (1.193). Како би аналогија била потпуна, увешћемо нову трансформацију за поље (по узору на (1.178))

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\psi(x), \quad (1.204)$$

и нове величине \mathbf{A} и V релацијама $\Phi = -eV$, $\mathbf{X} = e\mathbf{A}$, које се трансформишу као

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad V \rightarrow V' = V - \partial_t\Lambda. \quad (1.205)$$

На тај начин смо дошли до лагранжијана

$$\mathcal{L} = i\psi^*\left(\partial_t - ieV\right)\psi - \frac{1}{2m}\left(\nabla - ie\mathbf{A}\right)\psi^* \cdot \left(\nabla + ie\mathbf{A}\right)\psi \quad (1.206)$$

који је инваријантан у односу на комбиноване (локалне) трансформације (1.204) и (1.205). Према томе, захтев за локалном $U(1)$ инваријантношћу теорије природно уводи електромагнетно поље у лагранжијан¹⁴. Уколико желимо да електромагнетно поље буде право динамичко поље, морамо у лагранжијан додати и чланове који садрже изводе потенцијала, а калибрационо су инваријантни. То су управо чланови који улазе у лагранжијан из Примера 1.5. Дакле, $U(1)$ калибрационо инваријантни лагранжијан, који описује динамику Шредингеровог поља ψ и електромагнетног поља гласи

$$\mathcal{L} = i\psi^*\left(\partial_t - ieV\right)\psi - \frac{1}{2m}\left|\left(\nabla + ie\mathbf{A}\right)\psi\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_t\mathbf{A} + \text{grad}V\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\text{rot}\mathbf{A}\right)^2. \quad (1.207)$$

¹⁴У том контексту се дуални квадживектор $A = [V, \mathbf{A}]$ означава као $U(1)$ калибрационо поље [Хибш Т. (2011)].

Лагранжијан (1.207) има важну примену у теорији суперпроводности (видети Одељак 2.4). За крај ћемо приметити да чланови типа $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ нису дозвољени у (1.207) јер нису инваријантни у односу на калибрационе трансформације. У контексту квантне теорије се каже да је електромагнетно поље безмасено (видети дискусију из одељка 1.1.3).

Ради комплетности излагања, показаћемо како се модел комплексног Клајн-Гордоновог поља може уопштити тако да буде инваријантан у односу на локалне $U(1)$ трансформације. У том циљу ћемо прво приметити да се калибрационе трансформације (1.205) компактно могу записати као

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda. \quad (1.208)$$

Заиста, пошто је $A_0 = V$ и $\partial_0 = \partial_t$, (1.208) за $\mu = 0$ даје $V' = V - \partial_t \Lambda$. Слично, за $\mu = i$ имамо $A_i = (-\mathbf{A})_i$, па када индекс μ узима вредности 1,2 или 3, налазимо $-\mathbf{A}' = -\mathbf{A} - \nabla \Lambda$. Сада можемо увести и коваријантне изводе

$$D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (1.209)$$

тако да се коваријантни извод поља трансформише као и само поље:

$$D_\mu \phi \rightarrow (\partial_\mu - ieA'_\mu) (e^{-i\Lambda(x)} \phi) = e^{-i\Lambda(x)} D_\mu \phi. \quad (1.210)$$

На основу горње дефиниције коваријантног извода, затим дефиниције лагранжијана за комплексно Клајн-Гордоново поље из Примера 1.4, као и релативистичке формулације лагранжијана за електромагнетно поље из Примера 1.6, видимо да је лагранжијан

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi D^\mu \phi^* - m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.211)$$

при чему је [Ryder, L.H. (1996)]

$$D_\mu \phi^* := (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^*, \quad D^\mu \phi^* = \eta^{\mu\nu} D_\nu \phi^* \quad (1.212)$$

инваријантан у односу на локалне $U(1)$ трансформације а поља ϕ и ϕ^* носе супротна наелектрисања [Видети и дискусију из одељка 3.3.1]. Теорија заснована на лагранжијану (1.211) је позната као скаларна електродинамика [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)].

Имајући у виду пре свега касније примене на теорију суперпроводности, излагање у овом одељку је ограничено на $U(1)$ калибрационе симетрије. Ипак, у великом броју савремених теорија које описују сложене системе управо су од интереса различите неабеловске генерализације калибрационих симетрија [Weinberg, S. (2010); Хибш Т. (2011)].

1.3.4 Голдстонова теорема у класичној теорији поља

Једначине класичне теорије поља су, у општем случају нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине произвољног реда [Видети Пример 1.7], тако да је тешко дати карактеристике тих једначина у општем случају. Један од изузетака је Голдстонова теорема која регулише питање дисперзије у ситуацијама у којима долази до спонтаног нарушења симетрије. За формулисање и доказ Голдстонове теореме ће нам требати неки елементи теорије Лијевих група и алгебри. У додатку Д су наведене неопходне

дефиниције и теореме, а више детаља се може наћи у [Fecko, M. (2006); Hall, B. (2015); Isham, C. (1999); Stone M., Goldbart, P. (2009)].

Претпоставимо да је дато дејство $S[\phi] = \int_x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$, при чему је

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \mathcal{K}(\partial\phi) - \mathcal{V}(\phi) \quad (1.213)$$

где $\mathcal{K}(\partial\phi)$ означава део густине лагранжијана у којем се налазе изводи поља (тзв. кинетички део), док $\mathcal{V}(\phi)$ представља остатак (тзв. потенцијални део). Такође, узећемо да је $\phi: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$. Пошто ћемо дискутовати Голдстонову теорему у генералној формулацији која важи и за релативистичке и за нерелативистичке моделе, нећемо специфицирати $\mathcal{K}(\partial\phi)$. Овај приступ јесте општији, али је сама теорема слабија у смислу да не прецизира број независних физичких степени слободе у случају када не постоји Лоренцова симетрија [Watanabe, H., Murayama, H. (2014)]. Претпоставимо да је (1.213) инваријантно у односу на глобалне трансформације које сачињавају групу симетрија G . Нека $g \in G$ тако да је трансформација поља ϕ дата са $\phi \rightarrow \phi' = g\phi$. Ако ϕ представимо колоном $[\phi^1 \ \phi^2 \ \dots \ \phi^N]^T$, поменута трансформација је дата линеарним дејством $[D(g)]^a_b \phi^b$, при чему је $D(g)$ матрица која репрезентује елемент g у \mathbb{R}^N . Слично, за изводе поља имамо $\partial\phi \rightarrow \partial\phi' = \partial(g\phi) = g\partial\phi$, те услов инваријантности гласи

$$\mathcal{L}(g\phi, g\partial\phi) = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi). \quad (1.214)$$

Са друге стране [Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)], нека је Φ стабилно решење класичних једначина кретања (рецимо, основно стање). Претпоставимо даље да је решење Φ инваријантно у односу на групу симетрија H . То значи да је $h\Phi = \Phi, \forall h \in H$. Уколико је $H \subseteq G$, каже се да је у датом систему дошло до *спонтаног нарушења симетрије*. У наставку овог одељка ћемо размотрити математичке последице спонтаног нарушења глобалне континуалне симетрије не улазећи у сам механизам који доводи до овог феномена. Примери физичких система који испољавају спонтано нарушење симетрије су дати у Поглављима 2 и 3. Решења класичних једначина кретања код којих је $\Phi_0 = \text{const.}$ се називају вакуумом јер су добро дефинисана за било које вредности x^μ па се, у одређеним условима, могу узети као полазна тачка приликом испитивања понашања система¹⁵. Таква решења очигледно морају задовољавати услов

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}(\phi)}{\partial \phi^a} \right|_{\phi=\Phi_0} = 0. \quad (1.215)$$

Голдстонова теорема тврди да у случају када долази до спонтаног нарушења континуалне глобалне симетрије, тј. када постоје вакуумска решења која нису инваријантна у односу на пуну групу симетрије дејства, постоје решења у виду равних таласа и то таква да дисперзија задовољава услов $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$.

Како бисмо доказали теорему, претпоставимо да је G матрична Лијева група димензије $\dim(G) = n$. Према Теорему Д.1, тада је и $H \subseteq G$ Лијева група¹⁶ димензије

¹⁵Саставни део овакве анализе подразумева да се покаже оправданост претпоставке о постојању спонтаног нарушења симетрије. Овом важном темом ћемо се позабавити у Одељку 2.5.1 посвећеном Мермин-Вагнеровој теорему.

¹⁶Оваквим избором односа између G и H смо дозволили и тривијални случај у којем се H састоји само од јединичног елемента од G .

$\dim(H) = m \leq n$. Штавише, ако је \mathfrak{g} Лијева алгебра групе G , тада је \mathfrak{h} Лијева алгебра групе H и важи $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Ако са $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^n$ означимо базис од \mathfrak{g} из њега увек можемо издвојити скуп $\{\mathbf{Y}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ који сачињава базис од \mathfrak{h} . Остатак базисних елемената, \mathbf{X}_A , где $A = 1, 2, \dots, n - m$ генеришу простор $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ [Видети додатак Д]. Користећи управо уведену нотацију, произвољни елемент од G , у близини јединице, можемо записати као

$$g(\theta) = \exp\left[\theta^i \mathbf{X}_i\right] = \exp\left[\theta^A \mathbf{X}_A + \theta^\alpha \mathbf{Y}_\alpha\right], \quad (1.216)$$

где су коефицијенти θ^i параметри који специфицирају трансформацију. Ако се ограничимо на инфинитезималну трансформацију, што значајно упрошћава анализу, можемо писати

$$g(\theta) = I + \theta^A \mathbf{X}_A + \theta^\alpha \mathbf{Y}_\alpha + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (1.217)$$

Слично,

$$h(\theta) = I + \theta^\alpha \mathbf{Y}_\alpha + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (1.218)$$

Услов инваријантности вакуума Φ_0 се сада може записати као

$$\Phi_0 = h\Phi_0 = \left(I + \theta^\alpha \mathbf{Y}_\alpha + \mathcal{O}(\theta^2)\right)\Phi_0 = \Phi_0 + \theta^\alpha \mathbf{Y}_\alpha \Phi_0 + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (1.219)$$

одакле видимо да базисни елементи од \mathfrak{h} анихилирају вакуум

$$\mathbf{Y}_\alpha \Phi_0 = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \dim(H). \quad (1.220)$$

Са друге стране, $V(\phi)$ мора бити инваријантно у односу на произвољну G трансформацију коју, имајући у виду (1.217), можемо записати као $\phi^a \rightarrow \phi^a + \delta\phi^a$. Овде је

$$\delta\phi^a = \theta^i (\mathbf{X}_i)^a_b \phi^b, \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (1.221)$$

При томе су са $(\mathbf{X}_i)^a_b$ означени матрични елементи који репрезентују елемент алгебре \mathbf{X}_i у простору \mathbb{R}^N а θ^i су константни параметри који одређују трансформацију. Инваријантност потенцијалног дела густине лагранжијана гласи

$$\mathcal{V}(\phi) = \mathcal{V}(\phi + \delta\phi) = \mathcal{V}(\phi) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (1.222)$$

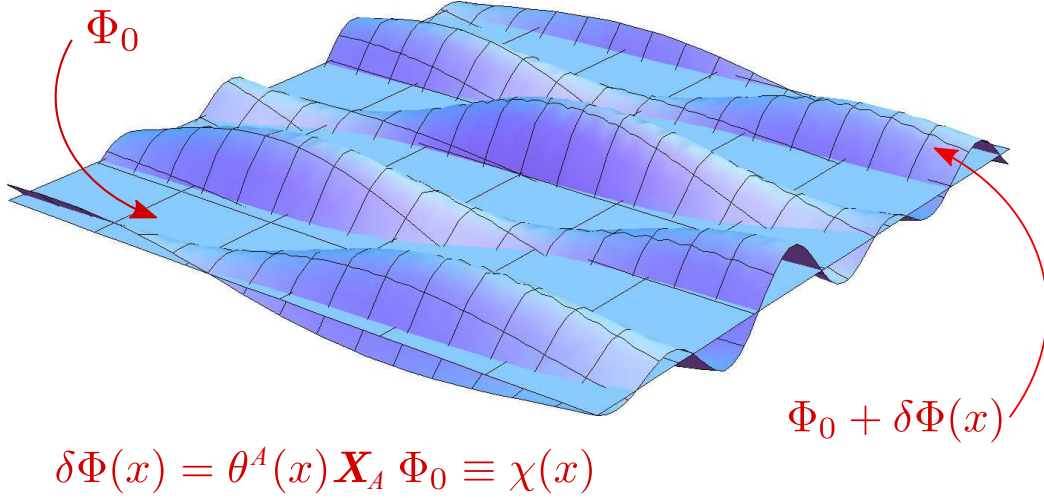
одакле се добија услов који величине $\delta\phi$ морају задовољити:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi^a} \theta^i (\mathbf{X}_i)^a_c \phi^c = 0. \quad (1.223)$$

Диференцирањем горње релације по ϕ^b налазимо

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \theta^i (\mathbf{X}_i)^a_c \phi^c + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi^a} \theta^i (\mathbf{X}_i)^a_b = 0. \quad (1.224)$$

До сада смо допуштали да ϕ буде произвољна конфигурација (не нужно решење класичних једначина кретања – видети дефиницију симетријске трансформације из одељка



Слика 1.2: Суперпозиција вакуумског решења Φ_0 и мале поправке $\delta\Phi_0(x) = \chi(x)$ индуковане инфинитезималном локалном G трансформацијом.

1.3.1). Узмимо сада да је $\phi(x)$ конфигурација која је добијена од вакуума Φ_0 произвољном локалном трансформацијом индукованом елементима групе¹⁷ G . Конфигурација $\Phi_0 + \delta\Phi_0(x)$ је илустрована на Сл. 1.2.

$$\Phi_0^a \rightarrow \Phi_0^a + \delta\Phi_0^a = \Phi_0^a + \theta^i(x)(\mathbf{X}_i)^a_b \Phi_0^b \equiv \phi^a(x). \quad (1.225)$$

Уз овакав избор трансформације, једначина (1.224) постаје

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right|_{\phi=\Phi_0} \theta^i(x)(\mathbf{X}_i)^a_c \Phi_0^c + \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi^a} \right|_{\phi=\Phi_0} \theta^i(x)(\mathbf{X}_i)^a_b = M_{ab} \theta^i(x)(\mathbf{X}_i)^a_c \Phi_0^c = 0, \quad (1.226)$$

где смо искористили (1.215) и увели ознаку

$$M_{ab} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right|_{\phi=\Phi_0}. \quad (1.227)$$

Имајући у виду да генератори од \mathfrak{h} анихилирају вакуум, релација (1.226) се може записати и као

$$M_{ab} \theta^A(x)(\mathbf{X}_A)^a_c \Phi_0^c = 0. \quad (1.228)$$

Једначина (1.226) нам говори који услов мора задовољавати други извод G -инваријантног потенцијала $V(\phi)$ у близини вакуумске конфигурације која је инваријантна у односу на H -трансформације.

Погледајмо сада какве последице по дисперзију намеће релација (1.226). Да бисмо нашли решења у виду равних таласа, у околини вакуумске конфигурације, морамо

¹⁷Обратити пажњу да овакво дефинисање конфигурације $\phi(x)$ не значи да је глобална симетрија лагранжијана подигнута на ниво локалне симетрије. У одељку 1.3.3 је показано да се увођење локалне симетрије остварује помоћу коваријантних извода који замењују парцијалне изводе у кинетичком делу лагранжијана $\mathcal{K}(\partial\phi)$.

апроксимирати потенцијал $V(\phi)$ тако да задржимо највише квадратне чланове. Уведимо, ради прегледнијег писања, ознаку

$$\delta\Phi_0(x) = \theta^A(x)\mathbf{X}_A\Phi_0 = \chi(x) \quad (1.229)$$

тако да је $\phi(x) = \Phi_0 + \chi(x)$. У квадратној апроксимацији је

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Phi_0 + \chi) &= \mathcal{V}(\Phi_0) + \left. \frac{\partial\mathcal{V}(\phi)}{\partial\phi^a} \right|_{\phi=\Phi_0} \chi^a + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial\phi^a\partial\phi^b} \right|_{\phi=\Phi_0} \chi^a\chi^b + \mathcal{O}(\theta^3) \\ &= \mathcal{V}(\Phi_0) + \frac{1}{2}M_{ab}\chi^a(x)\chi^b(x) + \mathcal{O}(\theta^3), \end{aligned} \quad (1.230)$$

где смо искористили (1.215). Међутим, на основу (1.228) је

$$M_{ab}\chi^a(x)\chi^b(x) = M_{ab}\theta^A(x)(\mathbf{X}_A)^a{}_c\Phi_0^c\chi^b = 0, \quad (1.231)$$

тако да је квадратна апроксимација потенцијала $V(\phi)$ у близини вакуума

$$\mathcal{V}(\Phi_0 + \chi) = \mathcal{V}(\Phi_0) + \mathcal{O}(\theta^3). \quad (1.232)$$

Практично, потенцијал се може апроксимирати констатним чланом. Ако се смена $\phi(x) = \Phi_0 + \chi(x)$ уведе и у кинетички до лагранжијана, услед $\partial_\mu\Phi_0 = 0$, налазимо $\mathcal{K}(\partial\phi) = \mathcal{K}(\partial\chi)$. Дакле, лагранжијан у квадратној апроксимацији гласи

$$\mathcal{L}(\chi) = \mathcal{K}(\partial\chi) + \mathcal{V}(\Phi_0). \quad (1.233)$$

Како лагранжијан не садржи квадратни члан облика $M_{ab}\chi^a\chi^b$, на основу дискусије из одељка 1.1.3, закључујемо да дисперзија за поља $\chi(x)$, која се називају Голдстоновим пољима, задовољава услов $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$. Овим је Голдстонова теорема доказана [Weinberg, S. (2010); Nair, V.P. (2005)].

Осврнимо се сада мало детаљније на сам доказ. Пре свега, јасно је да кључни корак у доказу представља чињеница да је $M_{ab}\chi^a = 0$, односно релација (1.228). Важно је да приметимо да се не може наћи произвољна линеарна комбинација $\theta^A\mathbf{X}_A$ за коју важи $\theta^A(x)\mathbf{X}_A\Phi_0 = \chi(x) = 0$. Наиме, као што смо установили раније, само елементи од \mathfrak{h} анихилирају Φ_0 . Уколико би било $\theta^A(x)\mathbf{X}_A\Phi_0 = 0$, то би значило да је линеарна комбинација $\theta^A\mathbf{X}_A \in \mathfrak{h}$. Међутим, то је у супротности са претпоставком да су \mathbf{X}_A генератори од $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. На основу овога можемо и да пребројимо Голдстонова поља. Пре свега, из дефиниције (1.229), видимо да је χ вектор колона из \mathbb{R}^n . Ипак, број Голдстонових поља је одређен бројем елемената из те колоне који су различити од нуле. Пошто је χ изражено помоћу линеарне комбинације базисних елемената од $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, тј. $\chi(x) = \theta^A(x)\mathbf{X}_A\Phi_0$, видимо да су параметари који специфицирају Голдстонова поља баш $\theta^A(x)$ а њихов број је $\dim(G) - \dim(H)$. Практично, Голдстонова поља се могу поистоветити са функцијама $\theta^A(x)$. У случају Лоренц-инваријантних система, број Голдстонових поља се поклапа са бројем физичких степени слободе. Ипак, то не важи за ширу класу нерелативистичких система који имају компликованију структуру члана $\mathcal{K}(\partial\phi)$ [Watanabe, H., Murayama, H. (2014)]. Даље, често је потребно задржати и више чланове од линеарних у (1.217). Уместо линеарне комбинације $\chi(x) = \theta^A(x)\mathbf{X}_A\Phi_0$, Голдстонова поља се тада могу изразити као $\exp[\theta^A(x)\mathbf{X}_A]\Phi_0$. Елементи $\exp[\theta^A(x)\mathbf{X}_A]$ у

општем случају не сачињавају групу¹⁸ већ простор косета G/H јер не укључују трансформације које индукују елементи из \mathfrak{h} . Због тога се каже да класичним Голдстоновим пољима одговарају елементи скупа G/H . Такође, будући да је број Голдстонових поља мањи од димензије групе G , они се не трансформишу линеарно при дејству $g \in G$. Овај општији прилаз је полазна тачка у конструисању тзв. ефективних теорија поља и познат је под називом CCWZ лагранжијан [Weinberg, S. (2010); Brauner, T. (2010); Burgess, C.P. (2000)]. Такође, пошто смо се у доказу ослонили на линеаризацију једначина кретања, он не може бити у потпуности строг. Више детаља, који се тичу решавања одговарајућих нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина у вези са Голдстоновом теоремом, дато је у [Strocchi, F. (2005)]. У Одељку 2.5.2 ћемо видети како се конструише лагранжијан за специјалан случај нарушења симетрије $O(N) \rightarrow O(N-1)$ а у Поглављу 3 ћемо дискутовати и квантну верзију Голдстонове теореме. На крају напомињемо да Голдстонова теорема важи и за моделе који су формулисани у канонском формализму [Видети Пример 1.16].

Пример 1.15. Основни нетривијални пример се односи на моделе код којих је симетрија лагранжијана $G = SO(3)$ а симетрија вакуума $H = SO(2)$. Они су познати под општим називом $O(3)$ модел. На основу горње анализе, очекујемо да се у овом случају јаве $\dim(G) - \dim(H) = 3 - 1 = 2$ два Голдстонова поља.

Дакле, нека је $\phi(x)$ трокомпонентно поље

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \phi^3(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.234)$$

тако да је дејство групе $G = SO(3)$ на ϕ дато линеарним дејством, матрицама тродимензионе репрезентације: $\phi^a \rightarrow [D(g)]^a_b \phi^b$. Такође, узећемо да је густина лагранжијана

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi + \mathcal{V}(|\phi|) \quad (1.235)$$

где је $V(|\phi|)$ потенцијал који зависи само од $|\phi| = \sqrt{\phi \cdot \phi}$ при чему тачкица означава стандардни скаларни производ у \mathbb{R}^3 . Један пример таквог потенцијала је дат у одељку 2.3. Као што је већ речено, вакуумска конфигурација се одређује из услова (1.215), који се у овом случају своди на

$$\mathcal{V}'(|\phi|) \frac{\phi^a}{|\phi|} = 0. \quad (1.236)$$

Једно решење је очигледно $\phi = \mathbf{0}$ и оно је $SO(3)$ инваријантно. Друге могуће вакуумске конфигурације су решења једначине $\mathcal{V}'(|\phi|) = 0$ и она могу да специфицирају само $|\phi|$. Нас тренутно интересује решење које поседује $SO(2)$ симетрију па га можемо узети у облику

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}, \quad v = \text{const}. \quad (1.237)$$

¹⁸Слично као што, у општем случају, вектори X_A не представљају базис Лијеве алгебре. Дефиниције простора G/H и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ су дате у Прилогу Д.

Једна тродимензиона репрезентација алгебре $\mathfrak{so}(3)$ је одређена матрицама

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.238)$$

на основу којих је лако видети да важи $\mathbf{X}_3\Phi_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, док је $\mathbf{X}_1\Phi_0 \neq \mathbf{0}$, и $\mathbf{X}_2\Phi_0 \neq \mathbf{0}$. Очекивано, видимо да је подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2)$ генерисана елементом $\mathbf{X}_3 \equiv \mathbf{Y}_1$, док \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 сачињавају базис од $\mathfrak{so}(3)/\mathfrak{so}(2)$. Како је $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = -\mathbf{X}_3$, јасно је да $\mathfrak{so}(3)/\mathfrak{so}(2)$ није Лијева алгебра. Коначно, два Голдстонова поља, груписана у вектор χ , дата су са

$$\chi = \theta^1(x)\mathbf{X}_1\Phi_0 + \theta^2(x)\mathbf{X}_2\Phi_0 = \begin{bmatrix} -v\theta^2(x) \\ v\theta^1(x) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.239)$$

Даље, елементи матрице M , дефинисане у (1.227), у овом случају се свде на

$$M_{ab} = \mathcal{V}''(|\phi|) \frac{\phi^a \phi^b}{|\phi|^2} \Big|_{\phi=\Phi_0} = \frac{\mathcal{V}''(|\phi|)}{v^2} \Big|_{\phi=\Phi_0} \Phi_0^a \Phi_0^b, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (1.240)$$

Односно,

$$M = \mathcal{V}''(|\phi|) \Big|_{\phi=\Phi_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.241)$$

одакле се лако добија $M\chi = \mathbf{0}$. То значи да се потенцијал $\mathcal{V}(|\phi|)$ може записати у облику (1.232) и једначине кретања за Голдстонова поља гласе

$$\partial^2\theta^1(x) = \partial^2\theta^2(x) = 0. \quad (1.242)$$

Лако је видети да је дисперзиона релација за оба поља дата са $\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$. Дакле, основне одлике спонтаног нарушења симетрије описане у овом одељку, у оквиру $O(3)$ модела, добијају се директно и без специфицирања потенцијала $V(\phi)$. ■

Пример 1.16. Класични $O(3)$ Хајзенбергов феромагнет у граници континуума је дефиниран хамилтонијаном [Haldane, F.D.M. (1986)]

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \partial_i \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_i \mathbf{S}(\mathbf{x}, t), \quad \partial_i \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i}, \quad (1.243)$$

где компоненте вектора $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ задовољавају релације ($a, b, c = 1, 2, 3$)

$$[S^a(\mathbf{x}, t), S^b(\mathbf{y}, t)]_{\text{PZ}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \epsilon_{abc} S^c(\mathbf{x}, t), \quad |\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)| = 1. \quad (1.244)$$

Једначину кретања добијамо користећи наведене Посаонове заграде

$$\begin{aligned} \partial_t S^a(\mathbf{x}, t) &= 2 \times \frac{1}{2} \int_{\mathbf{y}} \partial_j S^b(\mathbf{y}, t) \left[S^a(\mathbf{x}, t), \frac{\partial}{\partial y^j} S^b(\mathbf{y}, t) \right]_{\text{PZ}} \\ &= \epsilon_{abc} \int_{\mathbf{y}} \partial_j S^b(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^j} (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) S^c(\mathbf{x}, t)) \\ &= -\epsilon_{abc} S^c(\mathbf{x}, t) \nabla^2 S^b(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.245)$$

при чему смо искористили аналогон релације (1.140). Добијена једначина се може записати у векторској форми као

$$\partial_t \mathbf{S} = \mathbf{S} \times \nabla^2 \mathbf{S}. \quad (1.246)$$

Претпоставимо да тражимо решења која описују мала одступања од конфигурације $\mathbf{S}_0 = \mathbf{e}_z$. Будући да је Хамилтонијан (1.243) инваријантан у односу на $O(3)$ трансформације, решење $\mathbf{S}_0 = \mathbf{e}_z$ одговра спонтаном нарушењу симетрије по образцу $O(3) \rightarrow O(2)$, као и у претходном примеру. Пошто је у овом случају $\mathbf{S} \approx [S^x \ S^y \ 1]$, налазимо

$$\mathbf{S} \times \nabla^2 \mathbf{S} \approx \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ S^x & S^y & 1 \\ \nabla^2 S^x & \nabla^2 S^y & 0 \end{vmatrix} \approx -\nabla^2 S^y \mathbf{e}_x + \nabla^2 S^x \mathbf{e}_y \quad (1.247)$$

и линеаризоване једначине кретања гласе

$$\partial_t S^x = -\nabla^2 S^y, \quad \partial_t S^y = \nabla^2 S^x. \quad (1.248)$$

Две једначине су добијене као последица чињенице да је $\dim(G) - \dim(H) = 3 - 1 = 2$. Међутим, за разлику од $O(3)$ модела из претходног примера, једначине за два Голдстонова поља у овом случају нису независне. Дефинисањем $\psi(\mathbf{x}, t) = S^x(\mathbf{x}, t) + iS^y(\mathbf{x}, t)$, видимо да се једначине (1.248) могу записати као

$$\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = -\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.249)$$

што је једначина Шредингеровог типа и описује један физички степен слободе (феромагнетни магнон). Лако се показује да је дисперзиона релација у овом случају дата са $\omega(k) = k^2$. ■

У Примерима 1.15 и 1.16 су наведене две класичне теорије поља код којих се појављује иста шема нарушења симетрије $O(3) \rightarrow O(2)$. Ипак, број физичких степени слободе који одговарају Голдстоновим пољима се у ова два случаја разликује. Такође, разликују се и дисперзионе релације. У квантним верзијама ових теорија се као елементарне ексцитације појављују Голдстонови бозони и спектар првог модела садржи два Голдстонова бозона а спектар другог један [Видети Поглавље 3]. Према савременој номенклатури, елементарне ексцитације описане у Примеру 1.15 се називају Голдстонови бозони типа А, док су ексцитације класичног Хајзенберговог феромагнета представници тзв. Голдстонових бозона типа Б [Видети Одељак 3.7]. Као што се може закључити из ова два примера, сам образац нарушења симетрије $G \rightarrow H$ није довољан да би се у потпуности одредио тип и број Голдстонових бозона у датом систему. Више детаља о класификацији Голдстонових ексцитација се може наћи у [Watanabe, Н., Murayama, Н. (2014, 2012)].

2

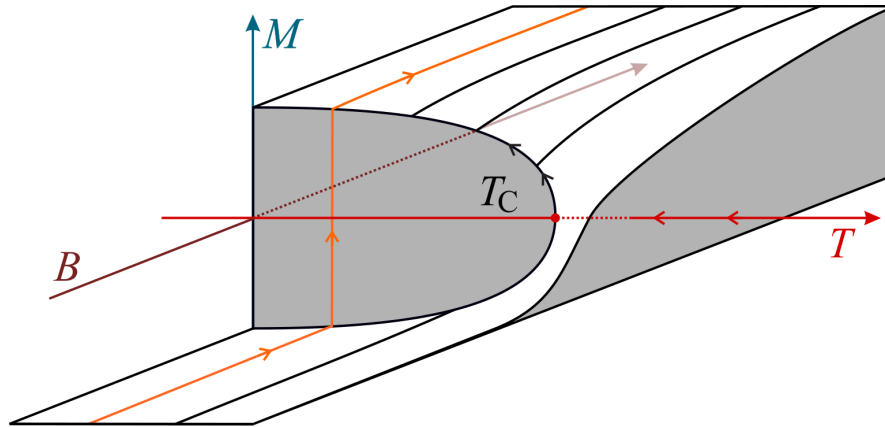
Ландауова теорија фазних прелаза

У овом поглављу ћемо применити методе класичне теорије поља на проблеме равнотежне класичне статистичке физике повезујући тако апстрактни формализам класичне теорије поља са физички интересантним проблемима. Конкретно, изложени су основи Ландауове теорије фазних прелаза са применом на неколико модела. Иако на први поглед равнотежна статистичка физика нема много додирних тачака са класичном теоријом поља, везу између њих директно успоставља функционални формализам. На пример, Ландауова конфигурација која описује равнотежно стање система, добија се помоћу варијационог извода. Још једну везу између ове две области пружа Голдстонова теорема. У претходном одељку смо је формулисали за класичну теорију поља, а у овом поглављу ћемо видети како се она манифестује у понашању сусцептибилности и корелационе дужине. Такође, видећемо и како се $U(1)$ калибрациона теорија користи за једноставан опис феномена везаних за конвенционалну суперпроводност. Излагање је започето са Изинговим моделом за који је добијен приближни израз за статистичку суму помоћу функционалног интеграла на основу чега је добијен Ландауов модел као и гаусовска апроксимација. Након тога су уведени модели са континуалном симетријом и за њих су дискутоване последице Голдстонове теореме. Коначно, формулисана је и Мермин-Вагнерова теорема која уводи ограничења на могућност спонтаног нарушења континуалне глобалне симетрије на коначним температурама.

2.1 Фазни прелази и параметар уређености

Због великог практичног значаја, који се (између осталог) огледа у синтези нових материјала са специфичним карактеристикама, теоријски опис фазних прелаза заузима важно место у савременој физици. За разматрања у овом поглављу, која ће послужити као основа за Ландауову теорију, довољно је да фазу дефинишемо као хомогени део термодинамичког система који се од других делова разликује по својим физичким особинама и који је у термодинамичкој равнотежи са околином при одређеној вредности различитих параметара [Umantsev, A. (2012)]. Мењањем параметара¹ који карактеришу понашање система, могуће је систем превести из једне фазе у другу. Одређене карактеристике система се при томе мењају и тада говоримо о фазном прелазу. Централно место у Ландауовој теорији има параметар уређености. То је физичка величина која

¹То могу бити температура, притисак, спољашње електрично или магнетно поље итд.



Слика 2.1: Шематски приказ фазног дијаграма феромагнета [Према Altland, A., Simons, B. (2010); Negle, J.W., Orland, H. (1998)].

ишчезава у високотемпературској фази². Прецизније, параметар уређености је различит од нуле на свим температурама мањим од температуре фазног прелаза. Уколико параметар уређености континуално тежи нули како се температура приближава температури фазног прелаза, говоримо о фазном прелазу другог реда [Negle, J.W., Orland, H. (1998)] и њима ћемо се бавити у наставку. Фазни прелаз код којег параметар уређености трпи скок на температури фазног прелаза се назива прелазом првог реда³.

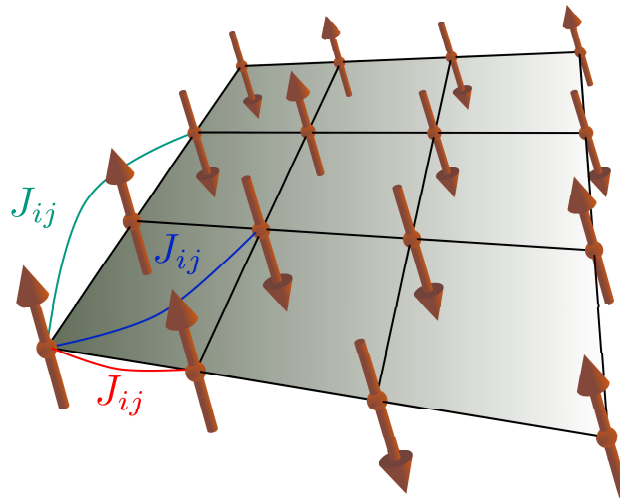
Пример фазног дијаграма феромагнетне супстанце је приказан на Сл. 2.1. Стање система је одређено са два параметра (температура T и магнетно поље B), док је параметар уређености магнетизација (M). Посматрајмо једну фиксну температуру $T < T_C$. Континуалним мењањем магнетног поља од неке вредности $-B$ до B , систем се преводи између две фазе у којима магнетизација мења смер (наранџаста линија). Пошто магнетизација трпи скок при $B = 0$, линија $[0, T_C]$ представља линију фазног прелаза првог реда. Насупрот томе, мењањем температуре од 0 до T_C , при $B = 0$, магнетизација континуално тежи у нулу и овакво понашање одговара фазном прелазу другог реда. Температура T_C , у којој се завршава линија фазног прелаза првог реда, назива се критичном температуром [Negle, J.W., Orland, H. (1998); Altland, A., Simons, B. (2010)].

Неке фазне прелазе другог реда прати промена симетрије – стање које карактерише нискотемпературску фазу има нижу симетрију од Хамилтонијана или дејства који дефинишу модел. У том смислу се фазни прелазу могу тумачити и са становишта спонтаног нарушења симетрије⁴ уведеног у Одељку 1.3.4. Ако је G група симетрије дејства (или хамилтонијана) а $H \subseteq G$ група симетрије основног стања, тада се за параметар

²Прецизнија дефиниција параметра уређености, која се ослања на теорију симетрије, дата је ниже у тексту. Формална дефиниција је наведена у одељку 3.6.2.

³Понекад се поменути типови прелаза означавају и као фазни прелазу прве, односно друге, врсте. Више детаља о класификацији фазних прелаза се може наћи у [Stanley, H.E. (1971); Negle, J.W., Orland, H. (1998); Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010); Ma, S.K. (2018); Zinn – Justin, J. (2007)].

⁴Иако је ово становиште доста корисно јер повезује класичну теорију поља и равнотежну статистичку физику па омогућава да се резултати из једне области примењују у другој, треба имати на уму да постоје фазни прелазу код којих не долази до спонтаног нарушења симетрије [Negle, J.W., Orland, H. (1998)]. Рецимо, код фазног прелаза између течне и гасовите фазе не долази до спонтаног нарушења симетрије као ни код БКТ прелаза у дводимензионим системима.



Слика 2.2: Шематски приказ Изинговог модела на квадратној решетки. Црвена крива симболизује купловање између првих, плава између других а зелена између трећих суседа.

уређености може узети очекивана вредност неке величине која се нетривијално трансформира у односу на G [Видети (2.8) и одељак 3.6.2.]. Избор, наравно, није једнозначан [Nagle, J.W., Orland, H. (1998)]. Ландауова теорија за овакве системе, на начин на који је изложена у случају суперпроводника [Одељак 2.4], представља прву ефективну теорију у модерном смислу – полазећи од одређеног обрасца нарушења симетрије конструише се одговарајуће дејство на основу којег се разматрају физички феномени не улазећи у микроскопске механизме који их покрећу. Ландауова теорија фазних прелаза је значајна и због тога што, на изванредан начин, представља мост између класичне теорије и квантне ефективне теорије поља изложене у Одељку 3.8.

Понашање система у близини критичне температуре се описује помоћу тзв. критичних индекса (или експонената). Рецимо, параметар уређености код фазних прелаза другог реда тежи у нулу као $(T_C - T)^\beta$, где је β одговарајући критични индекс. Основни критични индекси за магнетне системе су уведени у Одељку 2.2.7 и израчунати су помоћу Ландауове теорије. Циљ овог дела текста није да се добију прецизне вредности за критичне индексе већ да се покаже како идеја о спонтаном нарушењу симетрије релативно једноставно води на један скуп ових величина. Систематско рачунање критичних индекса за различите моделе се мора вршити на други начин [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010); Zinn – Justin, J. (2007); Ma, S.K. (2018)].

2.2 Ландауов функционал за Изингов модел

2.2.1 Дефиниција Изинговог модела

Као што је добро познато (видети, рецимо [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010); Altland, A., Simons, B. (2010); Nolting, W., Ramakanth, A. (2009); Huang, K. (1987)]) Изингов модел у спољашњем магнетном пољу интензитета B је дефинисан хамилтонијаном

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j - g\mu_B B \sum_i S_i, \quad (2.1)$$

где је μ_B Боров магнетон, а g је Ландеов фактор [Nolting, W., Ramakanth, A. (2009)]. У наставку ћемо користити скраћени запис

$$g\mu_B B \equiv h, \quad (2.2)$$

и величину h ћемо звати спољашње магнетно поље. На тај начин хамилтонијан (2.1) постаје

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j - h \sum_i S_i. \quad (2.3)$$

Динамичке промењиве у Изинговом моделу су класичне величине S_i (тзв. спинови) које могу узимати само дискретне вредности ± 1 . Индекси којим их означавамо се односе на чворове решетке димензије D док величине J_{ij} дефинишу узајамну интеракцију спинова са чворова i и j . У случају када је $J_{ij} > 0$, говоримо о феромагнетној, а када је $J_{ij} < 0$ о антиферомагнетној интеракцији. Иако су на класичном нивоу ова два случаја еквивалентна, у наставку ћемо се фокусирати на феромагнетни систем. Укупан број чворова у решетки ћемо означити са \mathcal{N} , при чему је сам модел дефинисан у граничном случају $\mathcal{N} \rightarrow \infty$. У наставку ћемо претпоставити да су све интеракције кратकोдометне, односно да J_{ij} довољно брзо тежи нули са повећањем растојања између чворова i и j тако да је сваки спин куплован само са коначно много својих суседа. На Сл. 2.2 је дат шематски приказ Изинговог модела на дводимензионој решетки ($D = 2$) за случај када је урачуната интеракција између првих, других и трећих суседа.

Хамилтонијан Изинговог модела, при $h = 0$, инваријантан је у односу на истовремену трансформацију свих спинова према $S_i \rightarrow \pm 1 \times S_i$. Према томе, Изингов хамилтонијан је инваријантан у односу на глобалне \mathbb{Z}_2 трансформације. Са друге стране, основно стање модела не мора бити инваријантно у односу на исту групу трансформација. Ако је $J_{ij} > 0$, основно стање модела је такво да су на свим чворовима спинови усмерени на исти начин ($S_i = +1, \forall i$ или $S_i = -1, \forall i$) и ова стања су инваријантна само у односу на тривијалну трансформацију $S_i \rightarrow 1 \times S_i$ али су, што се тиче енергије конфигурације, у потпуности еквивалентна. Дакле, у случају Изинговог модела који описује феромагнетни систем, група симетрија хамилтонијана је $G = \mathbb{Z}_2$ док је група симетрија основног стања тривијална група (састоји се само од јединичног елемента). Одабир једног од два еквивалентна основна стања одговара спонтаном нарушењу симетрије код Изинговог модела.

Термодинамичке карактеристике Изинговог модела се могу одредити помоћу партиционе функције⁵

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{S_i\}} e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} S_i K_{ij} S_j + \tilde{h} \sum_i S_i} \quad (2.4)$$

⁵У наставку користимо систем јединица у којем је $k_B = 1$.

при чему се сумира по свих $2^{\mathcal{N}}$ конфигурација решетке:

$$\sum_{\{S_i\}} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \sum_{S_{\mathcal{N}}=\pm 1}. \quad (2.5)$$

Такође, у (2.4) смо увели и ознаке

$$K_{ij} = \beta J_{ij} = \frac{J_{ij}}{T}, \quad \tilde{h} = \beta h = \frac{h}{T}, \quad (2.6)$$

које ћемо повремено користити у наставку. Основна термодинамичка функција, која се добија директно из партиционе функције, је слободна енергија

$$F = -T \ln Z. \quad (2.7)$$

Познавање слободне енергије нам омогућава да одредимо магнетизацију (обрачунату по чвору решетке) као функцију спољашњег магнетног поља и температуре

$$M(h, T) = \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i S_i \right\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_i\}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i S_i \right) e^{-\beta H} = -\frac{1}{T} \frac{\partial F}{\partial h} \frac{1}{\mathcal{N}} \equiv -\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial F}{\partial \tilde{h}} \quad (2.8)$$

као и сусцептибилност

$$\chi(h, T) = \frac{\partial M}{\partial h}. \quad (2.9)$$

Величина $M(h = 0, T) \equiv M_0(T)$ је спонтана магнетизација и представља параметар уређености феромагнета описаног Изинговим моделом. Механизам спонтаног нарушења \mathbb{Z}_2 симетрије Изинговог модела лежи у микроскопском хамилтонијану (2.3). Пошто је $J_{ij} > 0$, минимум енергије ће одговарати конфигурацијама у којима су спинови оријентисани у истом смеру (тзв. феромагнетно стање) и такав хамилтонијан форсира постојање дугодометног уређења. Међутим, када нема спољашњег магнетног поља ($h = 0$), стање у којем су сви спинови Изинговог хамилтонијана усмерени „горе“ има исту енергију као и стање у којем су сви усмерени на „доле“. Како је $e^{-\beta H}$ једнако у ова два случаја, на први поглед бисмо очекивали да се ова два доприноса у суми по стањима типа (2.8) потру тако да спонтана магнетизација ишчезне. Разрешење овог парадокса лежи у пажљивијем приступу термодинамичком лимесу $\mathcal{N} \rightarrow \infty$. Наиме, пошто Изинговим моделом желимо описати физички систем, граничну вредност $h \rightarrow 0$ морамо узети *након* термодинамичког лимеса $\mathcal{N} \rightarrow \infty$. У ситуацији када имамо бесконачно много спинова који су повезани феромагнетним интеракцијама спољашње поље ће, колико год било слабо, форсирати једну од две конфигурације јер је потребна бесконачна енергија да се бесконачно много спинова окрене насупрот пољу h . Пуштајући након тога и лимес $h \rightarrow 0$, систем ће остати „закључан“ у датој конфигурацији јер је вероватноћа да се свих $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ спинова окрене одједном ишчежавајуће мала (иако тај „скок“ не би захтевао улагање енергије). Практично се овде описани поступак издвајања одређеног феромагнетног стања имплементира узимајући лимес $h \rightarrow 0$ у крајњем изразу за $M(h, T)$.

Приметићемо да је избор магнетизације (2.8) за параметар уређености у складу са дефиницијом из Одељка 2.1. Наиме, при дејству елемента $-1 \in \mathbb{Z}_2$, укупни спин се трансформише нетривијално:

$$\sum_i S_i \rightarrow - \sum_i S_i. \quad (2.10)$$

Слична дефиниција параметра уређености важи и у квантним теоријама [Видети Одељак 3.7 за пример квантног Хајзенберговог модела са $O(3)$ симетријом].

Егзактан израз за статистичку суму би омогућио и тачно налажење других термодинамичких карактеристика. Међутим, данас је познат аналитички израз за статистичку суму Изинговог модела са спољашњим магнетним пољем само у случају једнодимензионе решетке [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010), Altland, A., Simons, B. (2010)]. У случају квадратне решетке, аналитички израз за слободну енергију постоји за специјални случај $h = 0$ [Kogut, J.B. (1979); Schultz, T.D., Mattis, D.C., Lieb, E.H. (1964)]. Имајући у виду значај апроксимативних прилаза, који је напоменут у уводном делу овог поглавља, у наставку ћемо се сконцентрисати на неке приближне методе примењиве на Изингов модел. Прва од њих је апроксимација средњег поља. Након ње ћемо дискутовати Ландауову теорију а на крају ћемо се осврнути и на гаусовску апроксимацију која представља први корак у систематској примени техника ренормализационе групе на ϕ^4 модел.

2.2.2 Апроксимација средњег поља

Иако хамилтонијан који дефинише Изингов модел делује релативно једноставно, већ је напоменуто да су позната егзактна решења само за случај једнодимензионе и дводимензионе решетке. Основна тешкоћа у налажењу егзактне статистичке суме је последица чињенице да члан $S_i K_{ij} S_j$ куплује различите спинове те стања која су одређена тако повезаним чворовима нису међусобно независна.

Апроксимација средњег поља (mean field, MF) води на приближни хамилтонијан у којем се на одређени начин елиминише купловање између спинова. Практично, то се постиже претпоставком да је стање спина на чвору одређено са $S_j = M + \delta S_j$, где је $\delta S_j = S_j - M$ одступање стања спина од магнетизације. Ако претпоставимо да је одступање спина од M мало, можемо писати

$$\begin{aligned} S_i S_j &= (M + \delta S_i)(M + \delta S_j) = M^2 + M(\delta S_i + \delta S_j) + \mathcal{O}(\delta S^2) \\ &\approx M^2 + M(S_i - M + S_j - M) = -M^2 + M(S_i + S_j). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ради једноставности, претпоставићемо да у оригиналном Изинговом моделу постоје само интеракције између најближих суседа. Тада свака сума облика $\sum_{i,j}$ има $\mathcal{N} Z_1$ чланова, где је \mathcal{N} број чворова решетке а Z_1 број најближих суседа неког чвора. Према томе, хамилтонијан Изинговог модела који укључује купловање између најближих суседа, у апроксимацији средњег поља, гласи

$$\begin{aligned} H &= -\frac{J}{2} \sum_{i,j} S_i S_j - h \sum_i S_i \approx -\frac{J}{2} \sum_{i,j} (-M^2 + M(S_i + S_j)) - h \sum_i S_i \\ &= E_0 - h_{\text{eff}} \sum_i S_i \equiv H_{\text{MF}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

при чему смо увели ефективно поље $h_{\text{eff}} = h + MJZ_1$ и константу $E_0 = JM^2Z_1\mathcal{N}/2$. Пошто у H_{MF} више нема купловања између спинова, лако можемо наћи статистичку суму и магнетизацију. Из

$$Z_{\text{MF}} = \sum_{\{S_i=\pm 1\}} e^{-\beta H_{\text{MF}}} = \left[e^{\beta E_0} \sum_{S=\pm 1} e^{\beta h_{\text{eff}} S} \right]^{\mathcal{N}} = e^{\beta E_0 \mathcal{N}} 2^{\mathcal{N}} [\cosh(\beta h_{\text{eff}})]^{\mathcal{N}}, \quad (2.13)$$

за магнетизацију добијамо

$$M = \frac{1}{\beta \mathcal{N}} \frac{1}{Z_{\text{MF}}} \frac{\partial Z_{\text{MF}}}{\partial h} = \tanh(\beta h_{\text{eff}}). \quad (2.14)$$

Уколико претпоставимо да нема спољашњег магнетног поља, из горње релације налазимо самоусаглашену једначину за одређивање температурске зависности спонтане магнетизације

$$M_0(T) = \tanh\left(\frac{JZ_1 M_0(T)}{T}\right). \quad (2.15)$$

Лако је видети да из (2.15) следи $M_0(0) = 1$, као и $M_0(T_C) = 0$, где је

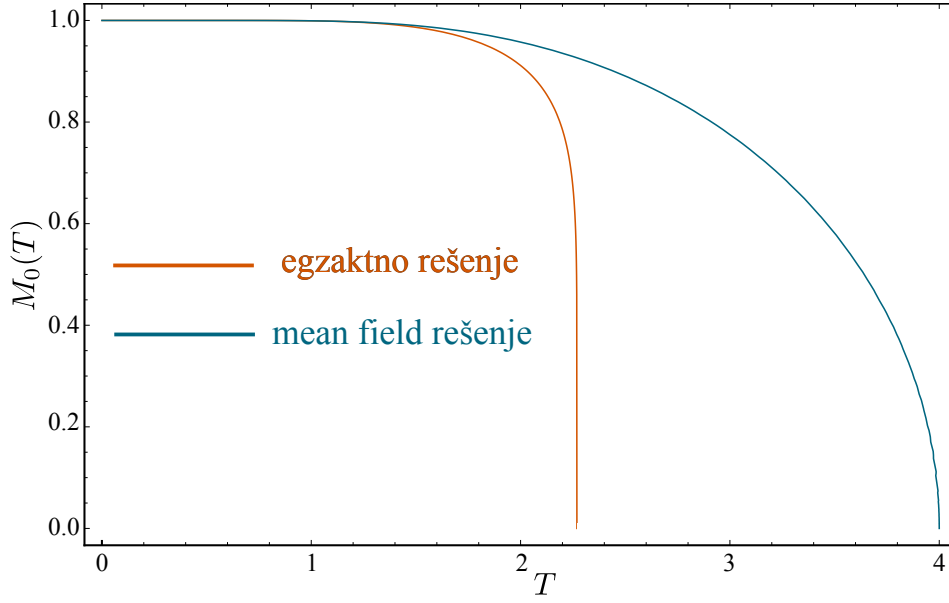
$$T_C = JZ_1 \quad (2.16)$$

критична температура Изинговог модела добијена у апроксимацији средњег поља. Температурска зависност $M_0(T)$, добијена нумеричким решавањем једначине (2.15) је приказана на Сл. 2.3 и, у одређеним границама, репродукује очекивано понашање параметра уређености.

Као што смо већ напоменули, апроксимација средњег поља је доста груба. Између осталог, то се огледа у добијеном изразу за критичну температуру: од свих параметара који дефинишу модел, T_C зависи само од J и Z_1 . Штавише, вредности критичне температуре добијене у овој апроксимацији знатно одступају од оних које следе из егзактних решења или Монте Карло симулација (Видети Табелу 2.1), али се та разлика смањује са повећањем D . Ради поређења са изразом за магнетизацију добијеним у апроксимацији средњег поља, навешћемо и егзактно решење које је први нашао Онзагер [Видети Schultz, T.D., Mattis, D.C., Lieb, E.H. (1964); Huang, K. (1987); Nolting, W., Ramakanth, A. (2009)]

$$M_0(T) = \begin{cases} \left[1 - [x(T)]^{-4}\right]^{1/8}, & T \leq T_C, \text{ где је } x(T) = \sinh \frac{2J}{T}, \\ 0, & T > T_C. \end{cases} \quad (2.17)$$

На Сл. 2.3 је приказано егзактно решење за спонтану магнетизацију Изинговог модела заједно са приближним решењем добијеним у апроксимацији средњег поља. Уместо да се детаљније позабавимо апроксимацијом средњег поља, у наставку ћемо се сконцентрисати на нешто другачије приступе проблему. Више информација о апроксимацији средњег поља се може наћи у стандардним уџбеницима [Милошевић, С. (1979)];



Слика 2.3: Спонтана магнетизација Изинговог модела: егзактно решење (2.17) и mean field решење (2.15). Температура је изражена у јединицама $k_B = 1$, док је узето $J = 1$.

Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010); Stanley, H.E. (1971); Negle, J.W., Orland, H. (1998); Wen, X. G. (2007)].

Табела 2.1: Критична температура за Изингов модел

	MF	егзактно решење ^a	Монте Карло симулација ^b
$D = 1$	$2J$	0	
$D = 2$	$4J$	$2J/\ln(1 + \sqrt{2})$	$(2.2692 \pm 0.0002)J$
$D = 3$	$6J$		$(4.51152 \pm 0.00010)J$

^aВидети [Schultz, T.D., Mattis, D.C., Lieb, E.H. (1964)].

^bВидети [Binder, K., Luijten, E. (2001); Preis, T., Virnau, P., Paul, W., Schneider, J. (2009)].

2.2.3 Хабард-Стратоновичева трансформација

У претходном одељку смо видели да се у апроксимацији средњег поља израз за статистичку суму добија тако што увођењем величине h_{ef} добијамо хамилтонијан који не садржи купловања спинова услед чега сумирање по свим конфигурацијама постаје тривијално. Такође, видели смо да је ова апроксимација доста груба. У овом одељку ћемо применити другачију стратегију. Најпре ћемо уместо величина са дискретним вредностима S_i увести нове промењиве које узимају континуалне вредности на интервалу $(-\infty, \infty)$ које, под одређеним условима, представљају параметар уређености. Предност рада са континуалним величинама је могућност примене већег броја апроксимативних

техника. Пошто у близини критичне температуре параметар уређености ишчезава, моћи ћемо да искористимо развој у ред и задржимо само носеће чланове. Коначно, дискретну структуру решетке на којој је дефинисан оригинални Изингов модел ћемо апроксимирати континуалним простором што ће нам омогућити да искористимо методе класичне теорије поља уведене у Поглављу 1.

За почетак, претпоставимо да се решетка на којој је дефинисан Изингов хамилтонијан, састоји од коначно много чворова. Ако је тај број \mathcal{N} , уведемо \mathcal{N} -димензиони векторски простор $V_{\mathcal{N}}$, са стандардним базисом $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ и стандардним скаларним производом и дефинишимо $\tilde{\mathbf{h}} \in V_{\mathcal{N}}$ и $\mathbf{S} \in V_{\mathcal{N}}$ као

$$\tilde{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{h} \\ \vdots \\ \tilde{h} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (\tilde{\mathbf{h}})^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (\mathbf{S})^i \mathbf{e}_i, \quad \begin{aligned} (\mathbf{S})^i &\equiv S_i \in \{\pm 1\}, \\ (\tilde{\mathbf{h}})^i &= \tilde{h}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

као и тензор типа $(0, 2)$ који, уз стандардну злоупотребу нотације приказујемо матрицом

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1\mathcal{N}} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2\mathcal{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{\mathcal{N}1} & K_{\mathcal{N}2} & \dots & K_{\mathcal{N}\mathcal{N}} \end{bmatrix} \equiv \sum_{i,j=1}^{\mathcal{N}} (\mathbf{K})_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.19)$$

Према томе, компоненте вектора \mathbf{S} су вредности спинова на појединим чворовима S_i док је матрица \mathbf{K} састављена од елемената K_{ij} . Приметићемо да је матрица \mathbf{K} симетрична ($\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$). У овој, могли бисмо рећи геометријској слици, свако стање Изинговог модела је одређено једним од $2^{\mathcal{N}}$ могућих \mathcal{N} -компонентних вектора \mathbf{S} . Користећи стандардни скаларни производ у \mathcal{N} -димензионом простору чији су елементи вектори \mathbf{S} , партициону функцију Изинговог модела за решетку са коначним бројем чворова можемо компактно записати као суму по свим могућим векторима \mathbf{S}

$$Z = \sum_{\mathbf{S}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{K} \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{h}}^T \cdot \mathbf{S}} = \sum_{\mathbf{S}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{K} \mathbf{S}} e^{\tilde{\mathbf{h}}^T \cdot \mathbf{S}}, \quad (2.20)$$

при чему је тачкица у $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{K} \mathbf{S}$ и $\tilde{\mathbf{h}}^T \cdot \mathbf{S}$ скраћена ознака за контракцију. Рецимо,

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{K} \mathbf{S} = \sum_{i,j} (\mathbf{K})_{ij} (\mathbf{S})^i (\mathbf{S})^j = \sum_{i,j} K_{ij} S_i S_j. \quad (2.21)$$

Експоненцијални фактор који садржи матрицу \mathbf{K} можемо написати помоћу \mathcal{N} -димензионог Гаусовог интеграла (Ц.45):

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{K} \mathbf{S} \right] &= \sqrt{\det \mathbf{K}^{-1}} \int_{\mathbf{a}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{S} \right], \\ \int_{\mathbf{a}} &:= \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da_i}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

при чему је \mathbf{K}^{-1} инверзна матрица од \mathbf{K} . Замена (2.22) у (2.20) даје

$$Z = \sqrt{\det \mathbf{K}^{-1}} \int_{\mathbf{a}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \right] \sum_{\mathbf{S}} \exp \left[\mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{h}}) \right]. \quad (2.23)$$

Овим поступком смо елиминисали члан који куплује спинове са различитих чворова тако да се сада сума по свим конфигурацијама налази једноставно. Тако добијамо

$$Z = \sqrt{\det \mathbf{K}^{-1}} \int_{\mathbf{a}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \right] \exp \left\{ \sum_i \ln \left[2 \cosh (a_i + \tilde{h}) \right] \right\}. \quad (2.24)$$

Добијени израз се може мало средити. Смена промењиве $a_i + \tilde{h} = b_i$ у \mathcal{N} -димензионом интегралу води на

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\det \mathbf{K}^{-1}} \int_{\mathbf{b}} e^{-\tilde{S}[\mathbf{b}]}, \\ \tilde{S}[\mathbf{b}] &= \frac{1}{2} \sum_{ij} [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} \tilde{h}^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} b_i [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} b_j - \sum_{ij} \tilde{h} [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} b_i - \sum_i \ln [2 \cosh b_i]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Коначно, дефинисање нове промењиве трансформацијом

$$\mathbf{b} = \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}, \quad (2.26)$$

чији је јакобијан $\det \mathbf{K}$, даје

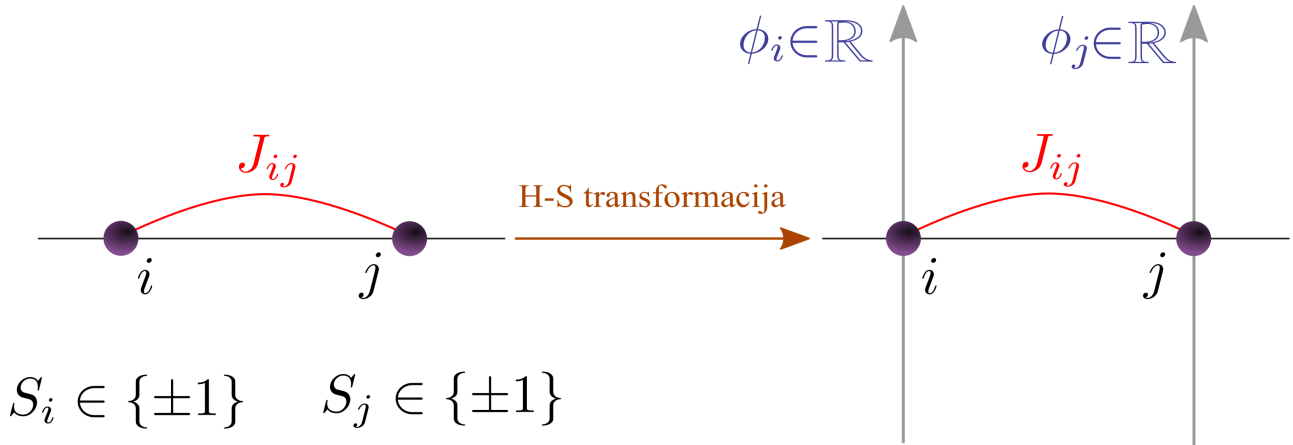
$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\det \mathbf{K}} \int_{\boldsymbol{\phi}} e^{-\tilde{S}[\boldsymbol{\phi}]}, \\ \tilde{S}[\boldsymbol{\phi}] &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j - \sum_i \tilde{h} \phi_i - \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\sum_j K_{ij} \phi_j \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{ij} [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} \tilde{h}^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Важно је приметити да, за разлику од елиминисања фактора $S_i K_{ij} S_j$ у апроксимацији средњег поља, приликом добијања (2.27) нисмо вршили никакве апроксимације. Другим речима, (2.27) је егзактна репрезентација партиционе функције Изинговог модела на решетки са \mathcal{N} чворова. Приметићемо да је партициона функција у овом случају изражена помоћу \mathcal{N} -димензионих вектора

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{\mathcal{N}} \end{bmatrix}, \quad \phi_i \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

којих, чак и у случају решетке са \mathcal{N} чворова, има бесконачно много. То значи и да је број стања одређених \mathcal{N} -димензионим векторима $\boldsymbol{\phi}$ бесконачан. Комплексност Изинговог модела се у овој репрезентацији огледа кроз присуство члана

$$\sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\sum_j K_{ij} \phi_j \right) \right] \quad (2.29)$$



Слика 2.4: Шематски приказ Хабард-Стратоновичева (ХС) трансформације: Дискретни спинови S_i су замењени величинама $\phi_i \in \mathbb{R}$ док је интензитет купловања промењивих са различитих чворова остао исти (сива стрелица симболизује реалну осу). Укупан број стања одређених \mathcal{N} -димензионим векторима \mathbf{S} је $2^{\mathcal{N}}$ док је број стања одређених \mathcal{N} -димензионим векторима $\boldsymbol{\phi}$ бесконачан.

који описује интеракцију нових континуалних промењивих ϕ_i тако што утиче да класичне једначине кретања за величине ϕ_i постану изразито нелинеарне. Основна предност оваквог записа партиционе функције је већа могућност различитих апроксимација које се могу боље контролисати од апроксимације средњег поља. Прелазак са (2.4) на (2.27) је у литератури познат под називом Хабард-Стратоновичева (ХС) трансформација [Altland, A., Simons, B. (2010)]. Шематски приказ ХС трансформације је дат на Сл. 2.4.

Погледајмо сада који је смисао нових промењивих ϕ_i . По дефиницији, средња вредност од ϕ_i , у одсуству спољашњег поља h и обрачуната по чвору решетке је

$$\left\langle \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \phi_i \right\rangle = \frac{1}{Z} \sqrt{\det \mathbf{K}} \int_{\boldsymbol{\phi}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \phi_i \right) e^{-\tilde{S}[\boldsymbol{\phi}]}, \quad Z = \sqrt{\det \mathbf{K}} \int_{\boldsymbol{\phi}} e^{-\tilde{S}[\boldsymbol{\phi}]} \quad (2.30)$$

где је

$$\tilde{S}[\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j - \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\sum_j K_{ij} \phi_j \right) \right] \quad (2.31)$$

Увођењем помоћне промењиве y модификовањем величина $\tilde{S}[\boldsymbol{\phi}]$ и Z као

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\boldsymbol{\phi}, y] &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j - \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\sum_j K_{ij} \phi_j \right) \right] - y \sum_i \phi_i, \\ Z(y) &= \sqrt{\det \mathbf{K}} \int_{\boldsymbol{\phi}} e^{-\tilde{S}[\boldsymbol{\phi}, y]} \end{aligned} \quad (2.32)$$

средња вредност из (2.30) се може записати као

$$\left\langle \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \phi_i \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{Z(y)} \left. \frac{\partial Z(y)}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (2.33)$$

Међутим, величина $Z(y)$ се може записати и мало другачије. Дефинисањем поново $\mathbf{b} = \mathbf{K}\phi$, видимо да је

$$\begin{aligned} Z(y) &= \sqrt{\det \mathbf{K}^{-1}} \int_{\mathbf{b}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} b_i [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} b_j + \sum_i \ln [\cosh b_i] + y \sum_{i,j} [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} b_j \right\} \\ &= \sum_{\{S_i\}} \sqrt{\det \mathbf{K}^{-1}} \int_{\mathbf{b}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} b_i [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} b_j + \sum_i S_i b_i + y \sum_{i,j} [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} b_j \right\} \\ &= \sum_{\{S_i\}} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(S_i + \sum_m [\mathbf{K}^{-1}]_{im} y \right) K_{ij} \left(S_j + \sum_m [\mathbf{K}^{-1}]_{jl} y \right) \right] \\ &= \sum_{\{S_i\}} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} S_i K_{ij} S_j + y \sum_i S_i + \frac{1}{2} y^2 \sum_{i,j} [\mathbf{K}^{-1}]_{ij} \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

при чему смо искористили сумирање по независним спиновима попут оне која повезује два облика статистичке суме из (2.23) и (2.24). На основу (2.34) и израза за магнетизацију Изинговог модела (2.8) је очигледно да важи

$$\left\langle \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \phi_i \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{Z(y)} \left. \frac{\partial Z(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = M_0(T). \quad (2.35)$$

Управо добијени резултат нам говори да је ϕ_i континуална промењива помоћу које се може израчунати статистичка сума Изинговог модела (тзв. нема промењива) и она је нормирана тако да се њена средња вредност поклапа са параметром уређености. У наредном одељку ћемо видети да се у Ландауовој апроксимацији у интерпретацији величине ϕ_i може отићи и корак даље – поистоветићемо је са параметром уређености.

2.2.4 Апроксимација континуума

Као што смо видели у претходном одељку, статистичку суму Изинговог модела је могуће *еџактно* изразити помоћу континуалних промењивих ϕ_i које узимају све вредности на интервалу $(-\infty, \infty)$. При том је средња вредност од $(1/\mathcal{N}) \sum_i \phi_i$ истоветна са параметром уређености. Уколико се ограничимо на област температура у близини критичне температуре T_c , можемо увести нека поједностављења. При томе ће ваљаност добијених резултата служити као оцена квалитета коришћених апроксимација.

Пре свега, последњи члан у (2.27) је константа која редефинише енергију основног стања и у наставку га обично нећемо узимати у обзир. Слично важи и за фактор $\sqrt{\det \mathbf{K}}$. Он се може написати као $\exp [\ln \sqrt{\det \mathbf{K}}]$, одакле се види да је он такође константни допринос у $\tilde{S}[\phi]$.

Даље, будући да у близини критичне температуре параметар уређености континуално ишчезава, делује да би било оправдано развити $\tilde{S}[\phi]$ у ред и задржати само најниже чланове по степенима ϕ_i . Ово опажање ће нам омогућити да значајно упростимо члан наведен у (2.29) тако да добијемо модел из којег релативно лако можемо извући опис Изинговог феромагнета у близини критичне температуре. Конкретно, то значи да ћемо сабирак из (2.29) апроксимирати са

$$\begin{aligned} \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\sum_j K_{ij} \phi_j \right) \right] &= \mathcal{N} \ln 2 + \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j K_{ij} \phi_j \right)^2 \\ &- \frac{1}{12} \sum_i \left(\sum_j K_{ij} \phi_j \right)^4 + \mathcal{O}(\phi^6), \end{aligned} \quad (2.36)$$

при чему фактор \mathcal{N} долази од укупног броја чворова у решетки а сабирак $\mathcal{N} \ln 2$ у наставку нећемо узимати у обзир.

Коначно, увешћемо и апроксимацију континуума. Другим речима, сматраћемо да се величине ϕ_i не мењају значајно на растојањима реда $|i-j|$. То нам омогућава да уведемо скаларно поље $\phi(\mathbf{x})$ и да применимо део класичне теорије поља уведен у Поглављу 1. Формално, то можемо урадити на следећи начин [Wilson, K.G., Kogut, J.V. (1974); Wilson, K.G. (1975)]. Ако чворове решетке на којој је дефинисан Изингов хамилтонијан ради прегледности означимо са $\mathbf{n}, \mathbf{m}, \dots$ уместо са i, j, \dots , Фуријеова трансформација величина $\phi_{\mathbf{n}}$ је

$$\tilde{\phi}_{\mathbf{k}} := \sum_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \quad (2.37)$$

при чему сума иде по свим чворовима решетке. Инверзна трансформација је дата сумом по таласним векторима садржаним у I Брилуеновој зони. У случају када број чворова тежи бесконачности, добија се [Видети Одељак 3.5.2]

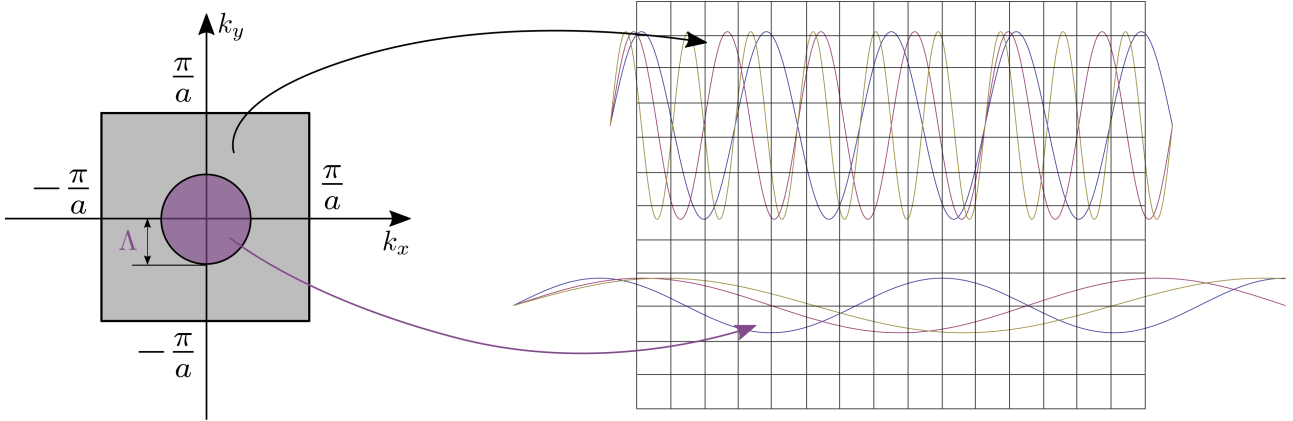
$$\phi_{\mathbf{n}} = \int_{\mathbf{k}} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}, \quad \int_{\mathbf{k}} := \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D}, \quad -\frac{\pi}{a_\alpha} \leq k_\alpha \leq \frac{\pi}{a_\alpha} \quad (2.38)$$

где је a_α ивица елементарне ћелије у правцу \mathbf{e}_α . Другим речима интеграл $\int_{\mathbf{k}}$ се узима по првој Брилуеновој зони одговарајуће реципрочне решетке. Ради једноставности, у наставку ћемо се ограничити на хиперкубне решетке тако да ћемо ставити $a_1 = a_2 = \dots = a_D \equiv a$. Претпоставимо сада да смо фиксирали неку вредност таласног вектора $\Lambda \ll \pi/a$, тако да можемо писати

$$\phi_{\mathbf{n}} = \int_{|\mathbf{k}| \leq \Lambda} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} + \int_{|\mathbf{k}| > \Lambda} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}. \quad (2.39)$$

Први интеграл у горњој релацији садржи само оне доприносе са таласним дужинама већим од $\sim \Lambda^{-1}$ а други доприносе са таласним дужинама мањим од $\sim \Lambda^{-1}$ (видети Сл. 2.5). Уколико нас интересује само понашање система на скалама не мањим од $\sim \Lambda^{-1}$, можемо узети да је $\tilde{\phi}_{\mathbf{k}} = 0$ за $|\mathbf{k}| > \Lambda$ и дефинисати

$$\phi(\mathbf{x}) := \int_{|\mathbf{k}| \leq \Lambda} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.40)$$



Слика 2.5: Двострумензиона Брилуенова зона за квадратну решетку параметра a садржи све таласне векторе $-\pi/a \leq k_1 \leq \pi/a, -\pi/a \leq k_2 \leq \pi/a$. У средини Брилуенове зоне је издвојен круг полупречника Λ у којем се налазе таласни вектори $|\mathbf{k}| \leq \Lambda$ чија је таласна дужина много већа од параметра решетки. Са десне стране цртежа је шематски приказана и квадратна решетка ивице a .

Пошто смо са оваквом дефиницијом величине $\phi(\mathbf{x})$ изгубили све информације о понашању величина ϕ_n на скалама $< |\Lambda|^{-1}$ и $\phi(\mathbf{x})$ можемо тумачити и као средњу вредност од ϕ_n узету по области величине $\sim |\Lambda^{-1}|^D$ са центром у \mathbf{x} . Будући да је $\Lambda^{-1} \gg a$ можемо узети да се вектор \mathbf{x} мења континуално (видети Сл. 2.5). Овим путем стижемо до интерпретације $\phi(\mathbf{x})$ као скаларног поља које ћемо користити у наставку⁶. На скаларно поље ϕ можемо посматрати и као на гранични случај \mathcal{N} -компонентног вектора ϕ , при $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, уведеног у (2.26): као што је вектор ϕ одређен помоћу својих \mathcal{N} компоненти ϕ_i тако је и скаларно поље ϕ одређено са својим вредностима $\phi(\mathbf{x})$. Неки аспекти преласка са \mathcal{N} -димензионих на бесконачно-димензионе векторе су разматрани и у Додатку Б.

Сад нам је преостало да видимо како се $\tilde{S}[\phi]$, као и статистичка сума, могу изразити помоћу скаларног поља $\phi(\mathbf{x})$. Видели смо да је, пре него што смо прешли на границу континуума, стање модела је било одређено \mathcal{N} -димензионим вектором ϕ . Са друге стране, у граници континуума, једно стање је одређено једном функцијом $\phi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$. Према томе, очекујемо да ће партициона функција у граници континуума бити изражена помоћу *суме по свим могућим функцијама* $\mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$.

Као први корак у правцу дефинисања суме по свим функцијама, увешћемо једну рестрикцију на Изингов модел. Наиме, ограничићемо се на случај када су у Изинговом хамилтонијану купловани само најближи суседи. Ово није никакво суштинско ограничење јер се цела анализа може поновити и за моделе са интеракцијама између суседа вишег реда. Ако у моделу постоје купловања само између првих суседа, погодно је увести скуп вектора $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ који уочени чвор повезују са његовим најближим суседима јер се

⁶Заправо, скаларно поље које директно улази у Ландауову теорију се добија након још једног скалирања. Та операција неће променити смисао величине $\phi(\mathbf{x})$ који смо сада установили. Такође, испоставиће се да ϕ зависи од још неких параметара попут температуре и магнетног поља. Ипак, ради прегледности, у наставку ћемо углавном писати једноставно $\phi(\mathbf{x})$ уколико не постоји опасност од забуне.



Слика 2.6: Вектори који на једнодимензионој решетки спајају чвор \mathbf{n} са његовим најближим суседима $\mathbf{n} + a\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{n} - a\mathbf{e}_1$, као и са чвором $\mathbf{n} + 2a\mathbf{e}_1$.

члан који описује купловање величина $\phi_{\mathbf{n}}$ може записати као

$$K \sum_{\mathbf{n}, \boldsymbol{\lambda}} \phi_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.41)$$

где је $K = J\beta = J/T$ интензитет купловања.

Пример 2.1. Погледајмо као изгледају вектори $\boldsymbol{\lambda}$ у неким важнијим случајевима. Код једнодимензионе решетке са параметром a имамо два вектора $\{\boldsymbol{\lambda}\} = \{\pm a\mathbf{e}_1\}$ [Видети Сл. 2.6]. За квадратну решетку тај скуп сачињавају четири вектора: $\{\pm a\mathbf{e}_1, \pm a\mathbf{e}_2\}$ [Видети Сл. 2.7]. По директној аналогiji, у случају D -димензионе прости кубне решетке постоји $Z_1 = 2D$ најближих суседа произвољног чвора \mathbf{n} . То су вектори из скупа $\{\pm a\mathbf{e}_1, \pm a\mathbf{e}_2, \pm a\mathbf{e}_3, \dots, \pm a\mathbf{e}_D\}$.

Још један познат пример је запремински центрирана кубна решетка. Произвољни чвор на тој решетки има 8 суседа. Они се могу добити спајањем чвора \mathbf{n} са векторима [Видети Сл. 2.7]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_1 &= \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), & \boldsymbol{\lambda}_2 &= \frac{a}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), & \boldsymbol{\lambda}_3 &= \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \\ \boldsymbol{\lambda}_4 &= \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), & \boldsymbol{\lambda}_5 &= \frac{a}{2}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), & \boldsymbol{\lambda}_6 &= \frac{a}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \\ \boldsymbol{\lambda}_7 &= \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), & \boldsymbol{\lambda}_8 &= \frac{a}{2}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (2.42)$$

У стандардним уџбеницима из физике кондензованог стања је могуће наћи више примера решетки са описом њихових геометријских карактеристика [Jones, W., March, N. (1973); Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976)]. ■

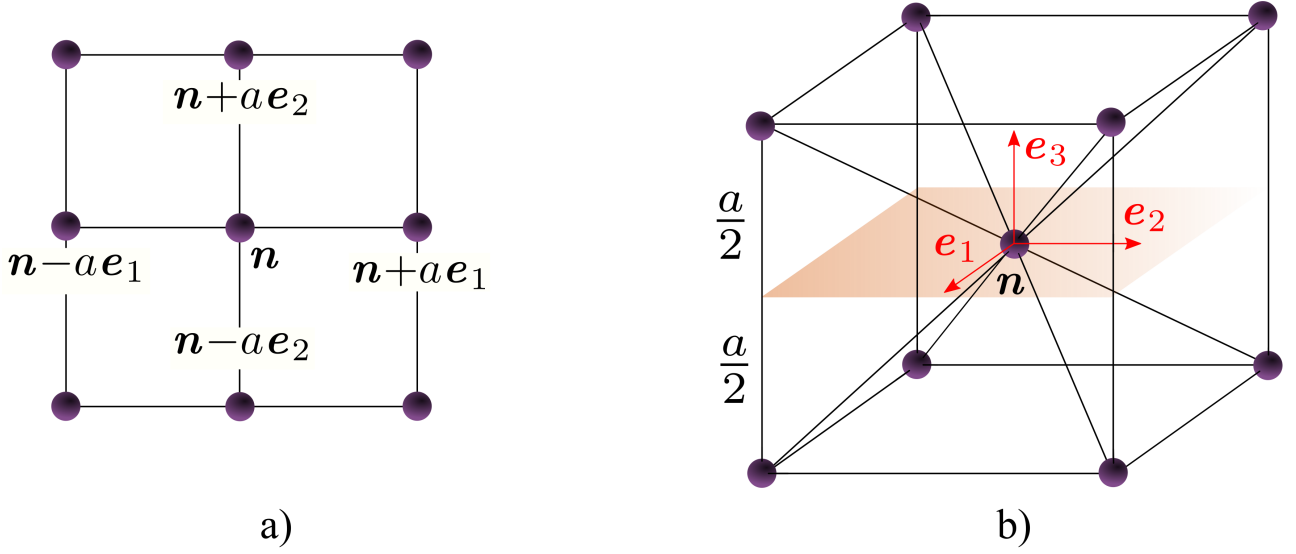
Како бисмо најлакше нашли границу континуума за чланове који описују купловање величина ϕ , биће згодно да уведемо дискретни лапласијан. Овај оператор, који ћемо означити са ∇^2 , дефинисан је као [видети Chow, C.K. (1999)]

$$\nabla^2 \phi_{\mathbf{n}} := \frac{2D}{Z_1 |\boldsymbol{\lambda}|^2} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} [\phi_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\lambda}} - \phi_{\mathbf{n}}], \quad (2.43)$$

где је Z_1 број најближих суседа. Нумерички фактори који улазе у дефиницију дискретног лапласијана су одабрани тако да важи

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\lambda}|^2) \quad (2.44)$$

па се у најнижој апроксимацији континуума дискретни лапласијан своди на обични лапласијан.



Слика 2.7: а) Квадратна решетка код које је растојање између чворова a . Сваки чвор има четири најближа суседа. б) Запремински центрирана решетка. Елементарна ћелија је коцка ивице a .

Пример 2.2. Проверимо горњу релацију за случај D -димензионе кубне решетке. Сматрајући да је $|\boldsymbol{\lambda}| = a$ мала величина, можемо писати

$$\phi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) = \phi(\mathbf{x}) + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla)\phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla)^2\phi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(a^4), \quad (2.45)$$

при чему је са ∇ означен D -димензиони Хамилтонов оператор

$$\nabla = \sum_{\alpha=1}^D \mathbf{e}_{\alpha} \partial_{\alpha}. \quad (2.46)$$

Пошто су вектори $\boldsymbol{\lambda}$ у овом случају дати са $a\{\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2, \pm\mathbf{e}_3, \dots, \pm\mathbf{e}_D\}$, лако је видети да се у суми по свим векторима чланови са првим изводима скрате. Такође, пошто је

$$(a\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \nabla)^2 = (-a\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \nabla)^2 = a^2 \partial_{\alpha}^2, \quad (2.47)$$

док је број најближих суседа $Z_1 = 2D$, имамо

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{2D}{2Da^2} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla)^2 \phi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(a^4) - \phi(\mathbf{x}) \right] \\ &= \frac{1}{a^2} 2 \sum_{\alpha=1}^{2D} \left[\frac{a^2}{2} \partial_{\alpha}^2 \phi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(a^4) \right] = \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

што је и требало показати. За самосталну вежбу је остављено да се покаже како релација (2.44) важи за запремински центрирану решетку. ■

Пример 2.3. Поред тога што се стандардни Лапласов оператор појављује као граница континуума дискретног лапласијана, постоји и једна важна њихова заједничка особина. Као што је добро познато, својствене функције Лапласовог оператора су равни таласи а својствене вредности су $-\mathbf{k}^2$. Ово је лако показати коришћењем дефиниције $\nabla^2 = \text{div grad}$. Пошто је $\text{grad}(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, имамо

$$\nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\mathbf{k}^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.49)$$

На сличан начин је могуће показати да су равни таласи својствене функције и за дискретни лапласијан. Полазећи од дефиниције (2.43) и узимајући $\phi_{\mathbf{n}} = \exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}]$, налазимо

$$\begin{aligned} \nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} &= \frac{2D}{Z_1|\boldsymbol{\lambda}|^2} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \left[e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{n}+\boldsymbol{\lambda})} - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \right] = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \frac{2D}{Z_1|\boldsymbol{\lambda}|^2} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda}} - 1 \right] \\ &\equiv -\widehat{\mathbf{k}}^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где смо увели ознаке

$$\widehat{\mathbf{k}}^2 := \frac{2D}{|\boldsymbol{\lambda}|^2} \left[1 - \gamma_D(\mathbf{k}) \right], \quad \gamma_D(\mathbf{k}) := \frac{1}{Z_1} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.51)$$

По аналогiji са (2.49), величину $-\widehat{\mathbf{k}}^2$ тумачимо као својствену вредност дискретног лапласијана у базису равних таласа. Из (2.51) се види да је својствена вредност дискретног лапласијана изражена помоћу тзв. геометријског фактора $\gamma_D(\mathbf{k})$. Уколико је позната структура решетке, односно, ако је дат скуп вектора $\{\boldsymbol{\lambda}\}$, могуће је одредити геометријски фактор и наћи $\widehat{\mathbf{k}}^2$. Рецимо, у случају прости хиперкубне решетке, која је дискутована у Примеру 2.1, геометријски фактор је

$$\gamma_D(\mathbf{k}) = \frac{1}{D} \sum_{\alpha=1}^D \cos(ak_{\alpha}), \quad (2.52)$$

док је за запремински центрирану кубну решетку

$$\gamma_3(\mathbf{k}) = \cos\left(\frac{ak_1}{2}\right) \cos\left(\frac{ak_2}{2}\right) \cos\left(\frac{ak_3}{2}\right). \quad (2.53)$$

За самосталну вежбу је остављено да се провери исправност релација (2.52) и (2.53). Такође, за самосталну вежбу је остављено да се покаже

$$\lim_{a \rightarrow 0} \widehat{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + \mathcal{O}(k^4). \quad (2.54)$$

у случају кубних решетки параметра a .

Постојање својствених вредности дискретног лапласијана у базису равних таласа омогућава да се решења проблема везаних за системе неинтерагујућих честица код модела дефинисаних на решеткама интерпретирају по аналогiji са стандардним моделом континуума – у том смислу се често каже да равни таласи описују неинтерагујуће честице на решеткама. Штавише, базис равних таласа често представља основу за примену теорије пертурбација и за моделе дефинисане на решеткама. Неке примене дискретног лапласијана се могу наћи у [Radošević, S.M., Pantić M.R., Pavkov – Hrvojević, M.V., Kapor, D.V. (2013); Chow, C.K. (1999); Radošević, S.M. (2015); Gombar, S., Mali, P., Pantić, M., Pavkov – Hrvojević, M.V., Radošević, S.M. (2018)] ■

Вратимо се сада на величину $\tilde{S}[\phi]$. У случају купловања најближих суседа и задржавањем чланова са максимално ϕ^4 [видети (2.36)], (2.27) се своди на

$$\begin{aligned}\tilde{S}[\phi] &= \frac{K}{2} \sum_{n,\lambda} \phi_n \phi_{n+\lambda} - \tilde{h} \sum_n \phi_n \\ &- \frac{1}{2} \sum_n \left(K \sum_\lambda \phi_{n+\lambda} \right)^2 + \frac{1}{12} \sum_n \left(K \sum_\lambda \phi_{n+\lambda} \right)^4 + \mathcal{O}(\phi^6).\end{aligned}\quad (2.55)$$

Користећи се сада дискретним лапласијаном, можемо искористити релацију

$$\sum_\lambda \phi_{n+\lambda} = \frac{Z_1 |\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D} \nabla^2 \phi_n + Z_1 \phi_n \quad (2.56)$$

да елиминишемо факторе који експлицитно садрже суму по најближим суседима. Тако добијамо

$$\begin{aligned}\tilde{S}[\phi] &= \frac{1}{2} \frac{K Z_1 |\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D} \sum_n \phi_n \nabla^2 \phi_n + \frac{1}{2} K Z_1 \sum_n \phi_n^2 - \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{K Z_1 |\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D} \nabla^2 \phi_n + K Z_1 \phi_n \right)^2 \\ &+ \frac{1}{12} \sum_n \left(\frac{K Z_1 |\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D} \nabla^2 \phi_n + K Z_1 \phi_n \right)^4 - \tilde{h} \sum_n \phi_n + \mathcal{O}(\phi^6).\end{aligned}\quad (2.57)$$

Односно,

$$\begin{aligned}\tilde{S}[\phi] &= \frac{1}{2} \tilde{c} \sum_n \phi_n \nabla^2 \phi_n + \frac{1}{2} \tilde{a} \sum_n \phi_n^2 - \frac{1}{2} \sum_n \left(\tilde{c} \nabla^2 \phi_n + \tilde{a} \phi_n \right)^2 \\ &+ \frac{1}{12} \sum_n \left(\tilde{c} \nabla^2 \phi_n + \tilde{a} \phi_n \right)^4 - \tilde{h} \sum_n \phi_n + \mathcal{O}(\phi^6).\end{aligned}\quad (2.58)$$

где смо дефинисали

$$\tilde{c} = \frac{K Z_1 |\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D}, \quad \tilde{a} = K Z_1. \quad (2.59)$$

Под лимесом континуума сада подразумевамо прелаз $|\boldsymbol{\lambda}| \rightarrow 0$, уз $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, при чему држимо константе \tilde{c} и \tilde{a} фиксним. Ако је v_0 запремина елементарне ћелије, у граници континуума важи

$$v_0 \sum_{\mathbf{x}} \longrightarrow \int_{\mathbf{x}} \quad (2.60)$$

док дискретни лапласијан, према (2.44), замењујемо са ∇^2 а интеграција у импулсном простору постаје

$$\int_{\mathbf{k}} \equiv \prod_{\alpha=1}^D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^\alpha}{2\pi}. \quad (2.61)$$

Коначно, величину ϕ_n дефинисану на чворовима решетке замењујемо са $\phi(\mathbf{x})$. Пошто се величина $\phi(\mathbf{x})$ налази под знаком интеграла, њене димензије се разлику у односу на ϕ_n . Лако је видети да је континуално поље заправо дато са $\phi(\mathbf{x})/\sqrt{v_0}$, тако да се фактор $1/v_0$ скрати са фактором v_0 који улази у дефиницију интеграла. Коначно, сматраћемо да су просторне варијације поља $\phi(\mathbf{x})$ релативно слабе, тако да можемо занемарити чланове који садрже изводе више од другог у члановим квадратним по $\phi(\mathbf{x})$ док ћемо доприносе са изводима занемарити уколико се појављују у члановима који имају производе више од два фактора $\phi(\mathbf{x})$. Уз ове апроксимације, из (2.58) налазимо

$$\begin{aligned} S_\Lambda[\phi] &= \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\text{GLW}}(\phi, \nabla\phi, h) - h \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}), \\ \mathcal{L}_{\text{GLW}} &= \frac{a(T)}{2} \phi^2(\mathbf{x}) + \frac{b}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) + \frac{c}{2} |\nabla\phi(\mathbf{x})|^2, \end{aligned} \quad (2.62)$$

при чему смо дефинисали⁷ $h \equiv \tilde{h}/\sqrt{v_0}$, као и

$$a(T) = \tilde{a} - \tilde{a}^2 = \tilde{a}(1 - \tilde{a}) = KZ_1 \frac{T - T_C}{T} \approx \frac{T - T_C}{T_C} \quad (2.63)$$

и искористили апроксимативни израз за критичну температуру Изинговог модела добијен у апроксимацији средњег поља (2.16), као и чињеницу да смо се ограничили на узану област температуреа за које је $T \approx T_C$. У одељку 2.2.6 ћемо видети да је за опис фазног прелаза у Ландауовој теорији кључно да коефицијент $a(T)$ мења знак на $T = T_C$. Слично,

$$b = 4\tilde{a}^4 v_0^2 = 4 \left(\frac{T_C}{T} \right)^4 v_0^2 \approx 4v_0^4 \quad (2.64)$$

и

$$c = \tilde{c} - 2\tilde{c}\tilde{a} = \frac{KZ_1|\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D} \left(1 - 2\frac{T_C}{T} \right) \approx -\frac{JZ_1|\boldsymbol{\lambda}|^2}{2DT} \approx -\frac{|\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D}. \quad (2.65)$$

У одељку 2.5.1 ћемо за c користити израз $-JZ_1|\boldsymbol{\lambda}|^2/(2DT)$ док ћемо у остатку поглавља употребљавати грубљу апроксимацију $c = -|\boldsymbol{\lambda}|^2/(2D)$. Коначно, индекс Λ у дефиницији дејства (2.62) нас подсећа да смо, приликом увођења поља $\phi(\mathbf{x})$ занемарили флукуације са таласним векторима интензитета већег од Λ . Дејство из (2.62) је у литератури познато као Гинзбург-Ландау-Вилсоново (GLW) дејство. Приметићемо да, осим фактора који описује купловање са спољашњим пољем, $S_\Lambda[\phi]$ садржи само чланове са парним степенима поља ϕ . То је последица \mathbb{Z}_2 симетрије Изинговог модела о којој је раније било речи.

Погледајмо мало детаљније како група \mathbb{Z}_2 делује у овом случају. Група \mathbb{Z}_2 се састоји од два елемента, $\mathbb{Z}_2 = \{1, z\}$, $z^2 = 1$. Њено дејство у простору скаларног поља ϕ и извода $\nabla\phi$ је дато са

$$z \cdot \phi(\mathbf{x}) = -\phi(\mathbf{x}), \quad z \cdot [\nabla\phi(\mathbf{x})] = \nabla [z \cdot \phi(\mathbf{x})] = -\nabla\phi(\mathbf{x}), \quad (2.66)$$

⁷У наставку се нећемо враћати на теорију дефинисану на решетки па можемо величину $\tilde{h}/\sqrt{v_0}$ означити такође са h јер не постоји опасност од забуне.

док је дејство јединичног елемента тривијално. Инваријантност дејства

$$S_\Lambda[g \cdot \phi] \Big|_{h=0} = S_\Lambda[\phi] \Big|_{h=0}, \quad (2.67)$$

се у овом случају своди на инваријантност подинтегралне функције

$$\mathcal{L}_{\text{GLW}}(g \cdot \phi, g \cdot \nabla \phi) = \mathcal{L}_{\text{GLW}}(\phi, \nabla \phi). \quad (2.68)$$

Другим речима, \mathcal{L}_{GLW} у потпуности наслеђује \mathbb{Z}_2 симетрију Изинговог хамилтонијана у одсуству спољашњег магнетног поља.

Да бисмо опис Изинговог модела до краја свели на континуалну теорију, потребно је још да видимо како изгледа израз за статистичку суму. Имајући у виду раније изнете опаске о константним члановима у $\tilde{S}[\phi]$, као и да је једно стање система сада описано помоћу једне функције $\phi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ задате са својим вредностима $\phi(\mathbf{x})$, статистичка сума (2.27) у граници континуума прелази у

$$Z(h) = \int \text{D}\phi(\mathbf{x}) \exp \left[- \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\text{GLW}}(\phi, \nabla \phi) - h \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \right] = \int \text{D}\phi(\mathbf{x}) e^{-S_\Lambda[\phi]}, \quad (2.69)$$

где симбол $\int \text{D}\phi(\mathbf{x})$ означава суму по свим могућим функцијама $\mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$. Формално

$$\lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_i \equiv \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(\mathbf{x}) \equiv \int \text{D}\phi(\mathbf{x}) \quad (2.70)$$

при чему под граничном вредношћу $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ подразумевамо да дискретни индекс i који пребројава чворове решетке прелази у непрекидну величину $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$. У том смислу последњи израз за партициону функцију треба схватити као симболичку ознаку за границу континуума. Интеграл по величинама $\phi(\mathbf{x})$, који дефинише суму по свим конфигурацијама, бесконачно-димензиони је и у литератури се означава као *функционални интеграл*. Испоставља се да функционални интегрални играју важну улогу у Фајнмановој верзији квантовања класичних система [Altland, A., Simons, B. (2010); Weinberg, S. (2010); Ryder, L.H. (1996); Wilson, K.G., Kogut, J.B. (1974)].

2.2.5 Ландауова апроксимација

У претходном одељку смо добили израз за статистичку суму Изинговог модела у граници континуума. Иако су увођењем класичног поља $\phi(\mathbf{x})$ избегнуте потешкоће са рачунањем партиционе функције у виду суме по дискретним промењивим S_i , функционални интеграл (2.69) је и даље врло компликован. Као први корак у покушају разумевања система описаног функционалним интегралом (2.69) учинићемо грубу апроксимацију: претпоставићемо да је могуће пронаћи *једну* конфигурацију $\phi_0(\mathbf{x})$ која може да опише систем тако што ће заменити бесконачну суму по свим функцијама.

Под претпоставком да нема спољашњег поља ($h = 0$), као и да је задржана само једна конфигурација поља ϕ , статистичка сума се знатно упрошћава

$$Z = \int \text{D}\phi(\mathbf{x}) e^{-S_\Lambda[\phi]} \longrightarrow e^{-S_\Lambda[\phi_0]} \quad (2.71)$$

што нам омогућава да дођемо до јасне интерпретације поља $\phi_0(\mathbf{x})$ и вредности $S_\Lambda[\phi_0]$, као што ћемо сада видети. Пре свега, на основу (2.7) и (2.71) директно видимо да је $TS_\Lambda[\phi_0]$ слободна енергија Изинговог модела. У том контексту величину $T\mathcal{L}_{\text{GLW}}$ можемо схватити као густину слободне енергије. Наравно, одговарајућим скалирањем коефицијената у \mathcal{L}_{GLW} увек можемо постићи да стриктно важи $F = S_\Lambda[\phi_0]$, тако да у наставку понекад нећемо правити разлику између $TS_\Lambda[\phi_0]$ и $S_\Lambda[\phi_0]$ која је и онако мала у области $T \rightarrow T_c$. Имајући у виду да смо занемарили неке константне⁸ доприносе, веза између $S_\Lambda[\phi_0]$ и слободне енергије F је дата са

$$F = F_0(T) + TS_\Lambda[\phi_0], \quad (2.72)$$

где се у $F_0(T)$ налазе сви чланови који не зависе директно од поља $\phi(\mathbf{x})$.

Како бисмо дошли до интерпретације поља $\phi(\mathbf{x})$, подсетићемо се најпре модела дефинисаног на решетки. Као што је показано у Одељку 2.2.3, величину ϕ_n смо увели као нему промењиву помоћу које рачунамо партициону функцију, али смо је одабрали тако да се њена средња вредност поклапа са спонтаном магнетизацијом Изинговог модела

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_n \phi_n \right\rangle = \frac{1}{Z} \int_\phi \left(\frac{1}{N} \sum_n \phi_n \right) e^{-\tilde{S}[\phi]} = M_0(T), \quad Z = \int_\phi e^{-\tilde{S}[\phi]}. \quad (2.73)$$

Уколико од свих вектора ϕ_n , помоћу којих рачунамо средњу вредност, задржимо само један ϕ_0 , он ће се очигледно поклапати са сопственом средњом вредношћу. Другим речима, вектор ϕ_0 мора бити

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} M_0(T) \\ M_0(T) \\ \vdots \\ M_0(T) \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Како бисмо се уверили у ово, претпоставимо да је дат један од вектора ϕ

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} \phi_0^1 \\ \phi_0^2 \\ \vdots \\ \phi_0^N \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

одређен, за сада непознатим, коефицијентима ϕ_0^i који описују стање величине ϕ_0 на чвору i . Ограничавање статистичке суме на стање описано вектором ϕ_0 је еквивалентно редефинисању N -димензионог интеграла \int_ϕ додавањем делта-функције:

$$\int_\phi \longrightarrow \int_\phi \delta(\phi - \phi_0). \quad (2.76)$$

Статистичка сума сада постаје

$$Z = \int_\phi \delta(\phi - \phi_0) e^{-\tilde{S}[\phi]} = e^{-\tilde{S}[\phi_0]}, \quad (2.77)$$

⁸Константни су у смислу да не зависе од $\phi(\mathbf{x})$.

а средња вредност (2.73) се своди на

$$M_0(T) = \frac{1}{Z} \int_{\phi} \delta(\phi - \phi_0) \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}} \right) e^{-\tilde{S}[\phi]} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \phi_0^i. \quad (2.78)$$

Како су у равнотежним стањима сви чворови еквивалентни, из (2.78) следи да је $\phi_0^i = M_0(T)$, $\forall i$. Овим је показана исправност тврђења (2.74). То, другим речима значи да се компоненте вектора ϕ_0 поклапају са параметром уређености Изинговог модела⁹.

Ситуација је мало другачија у граници континуума. Тада, уместо релације (2.73), морамо писати

$$\left\langle \frac{1}{V} \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \right\rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi(\mathbf{y}) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \right) e^{-S[\phi]} = M_0(T), \quad Z = \int D\phi(\mathbf{y}) e^{-S[\phi]}, \quad (2.79)$$

где је $V = \mathcal{N}v_0$ запремина система а спонтана магнетизација је обрачуната по јединици запремине. Ако, по узору на модел дефинисан на решетки, издвојимо једно стање које одговара конфигурацији $\phi_0(\mathbf{x})$, морамо модификовати функционални интеграл

$$\int D\phi(\mathbf{x}) \longrightarrow \int D\phi(\mathbf{x}) \delta[\phi(\mathbf{x}) - \phi_0(\mathbf{x})], \quad (2.80)$$

где је уведена тзв. функционална делта функција [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)]

$$\delta[\phi(\mathbf{x}) - \phi_0(\mathbf{x})] \equiv \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D} \delta(\phi(\mathbf{x}) - \phi_0(\mathbf{x})) =: \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \delta(\phi_i - \phi_0^i). \quad (2.81)$$

Тада, уместо релације (2.78) имамо

$$\frac{1}{V} \int_{\mathbf{x}} \phi_0(\mathbf{x}) = M_0(T). \quad (2.82)$$

Ако је функција $\phi_0(\mathbf{x})$ константна, за шта је неопходно да члан $|\nabla\phi|^2$ одсутује из \mathcal{L}_{GLW} , видимо да мора бити $\phi_0 = M_0(T)$. Другим речима, у случају хомогене конфигурације $\phi_0 = \text{const}$, поље $\phi_0(\mathbf{x})$ јесте параметар уређености. За све остале конфигурације, строго говорећи, поље $\phi_0(\mathbf{x})$ се може сматрати густином параметра уређености. И поред ове јасне идентификације, за $\phi_0(\mathbf{x})$ се у литератури често срећу одреднице попут *флукутирајућег параметра уређености* [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)] или *проспороно зависног параметра уређености* [Hohenberg, P.C., Krekhov, A.P. (2015)] које могу бити донекле збуњујуће јер се из дефиниције параметра уређености (2.8) види да он не може имати просторну зависност¹⁰. Са друге стране, неки аутори [Negle, J.W., Orland, H. (1998)] посебно дефинишу *глобални* [што би одговарало нашој дефиницији (2.8)] а посебно *локални* параметар уређености као средњу вредност $\langle S_i \rangle$.

⁹Ова констатација нам, за сада, не даје неке информације о температурској зависности $M_0(T)$. Њих морамо прибавити даљом анализом модела и то ћемо урадити у наставку.

¹⁰Дефиниција (2.8) је дата за систем дефинисан на решетки али се ова опаска односи и на моделе дефинисане у континууму.

Дакле, истакнуту конфигурацију ϕ_0 , коју задржавамо при опису Изинговог модела у апроксимацији Ландауа, можемо схватити као густину параметра уређености док $S_\Lambda[\phi_0]$ представља одговарајућу слободну енергију. Сада нам остаје задатак налажења критеријума одабира функције ϕ_0 . Нека је ϕ_0 тражена конфигурација. Произвольна конфигурација $\phi(\mathbf{x})$ увек може написати као $\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 + \eta(\mathbf{x})$, где је η функција која описује одступање од конфигурације ϕ_0 . Сада, према (Б.30), можемо писати

$$S_\Lambda[\phi_0 + \eta] = S_\Lambda[\phi_0] + \int_{\mathbf{x}} \left. \frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right|_{\phi_0} \eta(\mathbf{x}) + \dots \quad (2.83)$$

где \dots означава чланове са функционалним изводима вишег реда које ћемо за сада занемарити. Приликом писања (2.83) смо имплицитно претпоставили да су одступања η од равнотежне конфигурације ϕ_0 на одређени начин мала. У склопу овако изложене теорије то је само претпоставка која може бити оправдана *апостериори*. Партициона функција се сада може записати као сума по свим конфигурацијама $\eta(\mathbf{x})$

$$Z \approx e^{-S_\Lambda[\phi_0]} \int D\eta(\mathbf{x}) e^{-\int_{\mathbf{x}} \left. \frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right|_{\phi_0} \eta(\mathbf{x})}. \quad (2.84)$$

Уколико је конфигурација ϕ_0 таква да важи

$$\left. \frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right|_{\phi_0} = 0, \quad (2.85)$$

преостали функционални интеграл ће дати константу C која не зависи ни од температуре ни од спољашњег поља, а ни од конфигурације ϕ_0 . Другим речима, константа C не утиче на опис фазног прелаза у Ландауовој теорији. Будући да се партициона функција сада може записати као

$$Z = C e^{-S_\Lambda[\phi_0]} = e^{-S_\Lambda[\phi_0] + \ln C}. \quad (2.86)$$

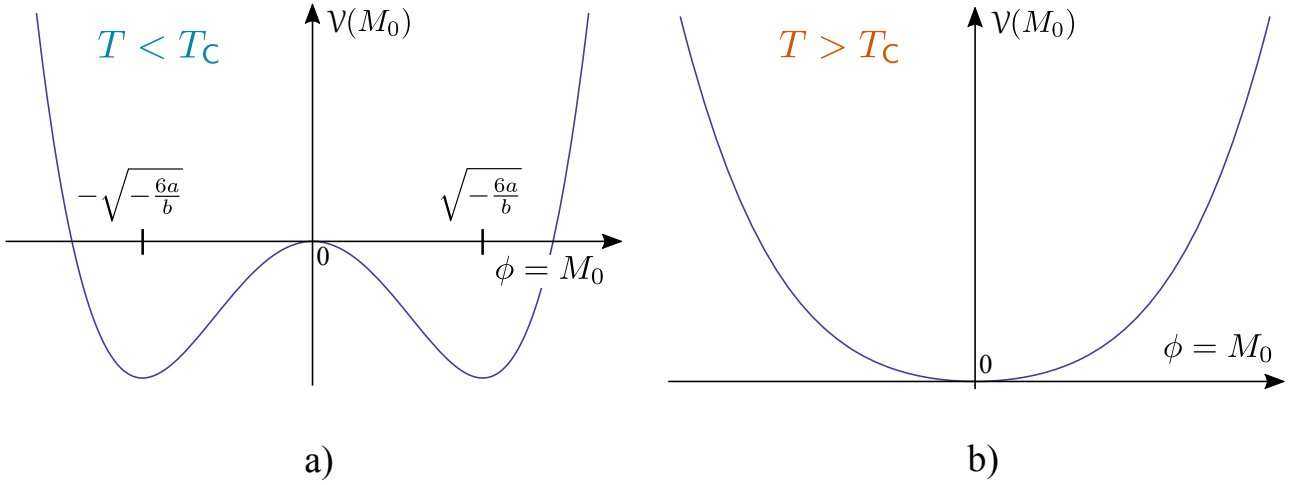
константа C се, заједно са раније занемареним константним доприносима, може се сматрати елементом аналитичког дела слободне енергије $F_0(T)$.

Да сумирамо, суштина Ландауове апроксимације за статистичку суму Изинговог модела је да се од свих могућих конфигурација које дефинишу партициону функцију задржи само она која представља екстремалу GLW дејства, тј. ону за коју важи (2.85). Овим се проблем рачунања партиционе функције, дате функционалним интегралом (2.69), свео на разматрање *класичне* теорије поља одређене функционалом $S_\Lambda[\phi]$ (или, $S_\Lambda[\phi] + F_0(T)$). Наравно, оваква апроксимација је релативно груба и њене последице ће постати јасне када се предвиђања Ландауове теорије пореде са експериментима.

2.2.6 Спонтано нарушење симетрије

Размотримо најпре хомогену конфигурацију $\phi_0 = M_0$. Тада се \mathcal{L}_{GLW} своди на чисто потенцијални део

$$\mathcal{L}_{\text{GLW}} \longrightarrow \mathcal{V}(M_0) = \frac{a(T)}{2} M_0^2(T) + \frac{b}{4!} M_0^4(T) \quad (2.87)$$



Слика 2.8: GLW дејство се у случају хомогене конфигурације своди на потенцијал $\mathcal{V}(M_0)$. На илустрацији а) је приказан облик потенцијала за $T < T_C$ а на илустрацији б) за $T > T_C$.

и Ландауово дејство је једноставно $S_\Lambda[\phi_0] = \mathcal{V}(M_0)V$, где је V запремина система. Услов стационарности дејства (2.85) се у овом случају своди на

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial M_0} = a(T)M_0 + \frac{b}{3!}M_0^3 = 0. \quad (2.88)$$

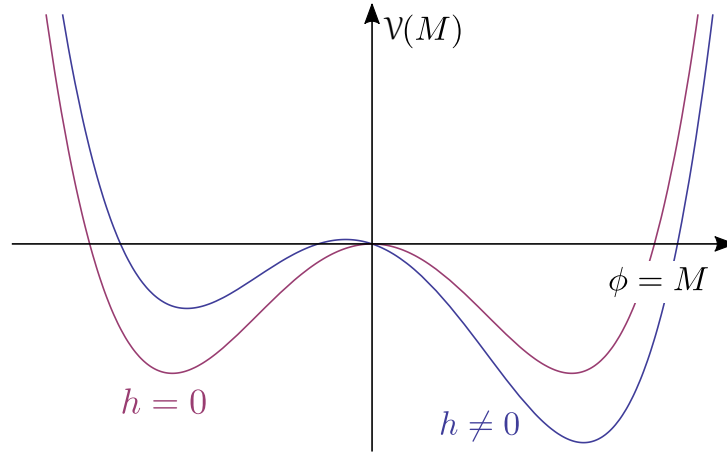
Решења ове једначине зависе од знака функције $a(T)$. Ако је $a(T) > 0$, што према (2.63) одговара вредности $T > T_C$ троструки корен једначине (2.88) је $M_0 = 0$. Дакле, будући да параметар уређености ишчезава, ово решење одговара неуређеној фази. Са друге стране, ако је $a(T) < 0$, што одговара температурама нижим од T_C , поред једног решења $M_0(T) = 0$, постоје и решења са параметром уређености различитим од нуле. Она су дата са

$$M_0(T) = M_0^+ = \sqrt{-\frac{6a(T)}{b}}, \quad M_0(T) = M_0^- = -\sqrt{-\frac{6a(T)}{b}}. \quad (2.89)$$

Лако је видети да решење $M_0 = 0$ одговара минимуму од $\mathcal{V}(M_0)$ када је $T > T_C$, односно да решења из (2.89) представљају минимум од $\mathcal{V}(M_0)$ за $T < T_C$. Такође, решење $M_0(T) = 0$, које постоји и у случају $T < T_C$, не одговара минимуму слободне енергије. Графички приказ функције $\mathcal{V}(M_0)$, у уређеној и неуређеној фази је дат на Сл. 2.8.

Погледајмо сада како се управо добијена решења уклапају у Ландауову слику спонтаног нарушења симетрије. Пре свега, у области високих температура ($T > T_C$), постоји јединствено решење $M_0 = 0$. Ово решење поседује исту \mathbb{Z}_2 симетрију као и дејство $S_\Lambda[\phi] = \mathcal{V}(\phi)V$. Трансформација решења у овом случају тривијална [видети (2.66)]: $1 \cdot M_0 = 1 \cdot 0 = 0 = M_0$, као и $-1 \cdot M_0 = -1 \cdot 0 = 0 = M_0$. Са друге стране, у случају када је $T < T_C$, симетрија решења је мања од симетрије дејства. Заиста, лако видимо да је [видети (2.66)]

$$-1 \cdot M_0^+ = M_0^-, \quad -1 \cdot M_0^- = M_0^+. \quad (2.90)$$



Слика 2.9: GLW дејство се у случају хомогене конфигурације своди на потенцијал $\mathcal{V}(M_0)$. На илустрацији а) је приказан облик потенцијала за $T < T_C$ а на илустрацији б) за $T > T_C$

Дакле, у општем случају, елемент групе \mathbb{Z}_2 преводи једно решење у друго а не оставља га инваријантним. Пошто је симетрија основног стања тривијална а симетрија дејства је \mathbb{Z}_2 , случај налажења равнотежне конфигурације при $T < T_C$ описује појаву спонтаног нарушења симетрије. Штавише, до нарушења симетрије долази баш на температури $T = T_C$ која одговара критичној температури Изинговог модела добијеној у апроксимацији средњег поља.

Ако се систем налази у спољашњем пољу h , спонтана магнетизација је замењена магнетизацијом $M(h, T)$ и потенцијални део GLW дејства се своди на

$$\mathcal{V}(M) = \frac{a(T)}{2} M^2(h, T) + \frac{b}{4!} M^4(h, T) - hM(h, T). \quad (2.91)$$

Овај облик потенцијала је скициран на Сл. 2.9. У овом случају постоји један стабилан минимум, који одговара уређењу спинова у смеру спољашњег поља, па не долази до спонтаног нарушења симетрије. Мењање смера спољашњем пољу ($h \rightarrow -h$) у овом случају даје једноставан пример фазног прелаза првог реда [Nagle, J.W., Orland, H. (1998)].

2.2.7 Критични експоненти α , β , γ и δ

Будући да смо у претходном одељку нашли решења у случају хомогене конфигурације $\phi_0(\mathbf{x}) = M_0$, при чему у Ландауовој апроксимацији функционал $S_\Lambda[\phi]$ интерпретирамо као слободну енергију, сада можемо да одредимо и критичне експоненте у овом прилазу.

Пре свега, на основу (2.63) и (2.89) видимо да је у уређеној фази

$$M_0^\pm(T) \sim (T_C - T)^{1/2}, \quad (2.92)$$

одакле налазимо $\beta = 1/2$. Слично, уколико је систем у спољашњем пољу, равнотежна конфигурација се добија минимизирањем потенцијала (2.91). Тако се добија једначина

$$a(T)M(h, T) + \frac{b}{3!} M^3(h, T) - h = 0, \quad (2.93)$$

из које налазимо, за $T = T_C$,

$$M(h, T_C) \sim h^{1/3}, \quad (2.94)$$

што значи да је $\delta = 3$. Даље, будући да је сусцептибилност дефинисана као $\chi = \partial M(h, T)/\partial h|_{h=0}$, диференцирањем једначине (2.93) по h налазимо

$$\left[a(T) + \frac{b}{2} M_0^2(T) \right] \chi = 1, \quad (2.95)$$

одакле је

$$\chi \sim |T - T_C|^{-1}. \quad (2.96)$$

Односно, налазимо $\gamma = 1$. Коначно, користећи везу између топлотног капацитета и слободне енергије [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)]

$$C_V = -T \left. \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right|_V \quad (2.97)$$

при чему је, према (2.72), слободна енергија у Ландауовој апроксимацији дата са

$$F = F_0(T) + S_\Lambda[M_0] = F_0(T) + V\mathcal{V}(M_0) = F_0(T) + V \left[\frac{a(T)}{2} M_0^2(T) + \frac{b}{4!} M_0^4(T) \right]. \quad (2.98)$$

Односно,

$$F(T) = \begin{cases} F_0(T), & T > T_C, \\ F_0(T) + \frac{12V}{b} a^2(T), & T < T_C. \end{cases} \quad (2.99)$$

На основу (2.99) и (2.97) добијамо да топлотни капацитет у близини T_C трпи скок

$$\lim_{T \rightarrow T_C^+} C_V - \lim_{T \rightarrow T_C^-} C_V = \frac{24V}{bT_C}. \quad (2.100)$$

То значи да је $\alpha = 0$.

Пре него што упоредимо предвиђања Ландауове теорије са вредностима критичних експонената добијеним у случају Изинговог модела егзактним решењем (2D модел) и нумеричким методама (3D модел), у наредном одељку ћемо размотрити и критични експонент повезан са корелационом дужином.

2.2.8 Флуктуације и гаусовски модел

Статистичке корелације величина ϕ , које су битне за детаљније разумевање система описаног партиционом функцијом (2.69), не могу се директно наћи у Ландауовој теорији. Разлог томе је чињеница да смо од свих могућих конфигурација задржали само ону која задовољава услов (2.85). Према томе, да бисмо дошли до информација о статистичкој условљености поља ϕ у различитим тачкама, морамо напустити строге оквире

Ландауове апроксимације и допустити да поље ϕ узима различите вредности у различитим тачкама. Основна величина која мери статистичку повезаност поља ϕ у тачкама \mathbf{x} и \mathbf{y} је тзв. (двочестична) корелациона функција [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle (\phi(\mathbf{x}) - M_0) (\phi(\mathbf{y}) - M_0) \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi(\mathbf{z}) (\phi(\mathbf{x}) - M_0) (\phi(\mathbf{y}) - M_0) e^{-S_\Lambda[\phi]}, \quad (2.101)$$

при чему је M_0 вредност параметра уређености која одговара Ландауовој равнотежној конфигурацији описаној у одељку 2.2.6. За хомогене системе, који одговарају граници континуума уведеној у одељку 2.2.4, корелациона функција зависи само од релативног вектора положаја две тачке, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Уколико је поред тога систем и изотропан, корелациона функција зависи само од модула $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Пошто су статистичке флукуације поља ϕ у тачкама \mathbf{x} и \mathbf{y} независне ако су оне јако удаљене једна од друге, за очекивати је да $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$. Заправо, постоји одређена дужина ξ , која карактерише области у систему у оквиру којих се корелације не могу занемарити. Она је позната под називом корелациона дужина. Као што ћемо видети, корелациона дужина зависи од температуре. Штавише, $\xi \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow T_c$ што значи да су у околини критичне температуре битне флукуације са свим таласним дужинама $0 \leq \lambda < \infty$. Будући да је Ландауово дејство уведено тако да је граница континуума уведена у односу на карактеристичну дужину Λ^{-1} (видети Одељак 2.2.4), дивергенција корелационе дужине нужно доводи до краха Ландауове теорије [Wilson, K.G. (1975)] што се огледа у вредностима критичних експонената које одступају од оних добијених егзактним решавањем модела, нумеричким симулацијама или у експериментима.

Осим у специјалном случају када $S_\Lambda[\phi]$ има чланове који су највише квадратни по ϕ , интеграл (2.101) се не може израчунати аналитички. Дејство које садржи само чланове квадране по ϕ , без обзира да ли на њих делују изводи или не, дефинише тзв. гаусовски модел. На језику теорије поља, гаусовски модел одговара неинтерагујућем пољу. Ипак, једноставни гаусовски модел који се добија простим одбацивањем члана $b\phi^4/4!$ у \mathcal{L}_{GLW} је превише груб да би дао квалитетан опис у обе фазе – равнотежна конфигурација одређена односом $a(T)/b$ [видети (2.89)], што значи да је добијена уз претпоставку $b \neq 0$. Због тога ћемо, уместо једноставног занемаривања члана $b\phi^4/4!$, извршити развој функционала $S_\Lambda[\phi]$ у ред око равнотежне конфигурације $\phi_0 = M_0$, задржавајући се на квадратној апроксимацији. Да би наставак излагања учинили јаснијим, илустроваћемо описани поступак на једноставнијем примеру – добијању Стирлингове апроксимације за $n!$.

Пример 2.4. Као што је добро познато [Радошевић, С., Мали, П. (2020)], $n!$ се може изразити помоћу гама функције

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^n. \quad (2.102)$$

Како бисмо направили јаснију аналогију са оригиналним проблемом рачунања партиционе функције, преписаћемо горњи интеграл као

$$n! = \int_0^\infty dt e^{-[t-n \ln t]} = \int_0^\infty dt e^{-n[t/n - \ln t]}. \quad (2.103)$$

Пошто при $n \gg 1$ експоненцијална функција $\exp(-nx)$ брзо опада, за очекивати је да се при великим вредностима n горњи интеграл може на неки начин апроксимирати. Уведемо ли ознаку

$$f_n(t) = \frac{t}{n} - \ln t \quad (2.104)$$

види се да највећи допринос интегралу дају вредности промењиве t у близини минимума функције f_n . Ако тачку која одговара минимуму од $f_n(t)$ означимо са t_0 , Тејлоров развој функције f_n у околини t_0 је

$$\begin{aligned} f_n(t) &= f_n(t_0) + \left. \frac{df_n}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f_n}{dt^2} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \\ &= f_n(t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f_n}{dt^2} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3), \end{aligned} \quad (2.105)$$

при чему, t_0 одређујемо из услова $df_n/dt = 0$. Тако налазимо $t_0 = n$, као и

$$f_n(t_0) = 1 - \ln n, \quad \left. \frac{d^2 f_n}{dt^2} \right|_{t_0} = \frac{1}{n^2}. \quad (2.106)$$

Замењујући (2.106) у (2.105), налазимо апроксимативни израз за интеграл (2.103)

$$n! \approx e^{-nf_n(t_0)} \int_0^\infty dt e^{-\frac{n}{2} f_n''(t_0)(t-t_0)^2}. \quad (2.107)$$

Увођењем смене $t - t_0 = x$, преостали интеграл постаје

$$n! \approx e^{-nf_n(t_0)} \int_{-t_0}^\infty dx e^{-\frac{n}{2} f_n''(t_0)x^2}. \quad (2.108)$$

Имајући у виду да је $t_0 = n \gg 1$, доњу границу интеграл ћемо апроксимирати са $-\infty$. На тај начин добијамо интеграл Гаусовог типа и коначан резултат је позната Стирлингова формула

$$n! \approx e^{-nf_n(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{nf_n''(t_0)}} = \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}. \quad (2.109)$$

Овај поступак за добијање Стирлингове апроксимације је специјални случај тзв. апроксимације стационарних фаза. Више детаља о апроксимацији стационарних фаза се може наћи у књизи [Zinn – Justin, J. (2007)]. ■

Вратимо се сада оригиналном проблему развоја функционала $S_\Lambda[\phi]$ до квадратних чланова у околини равнотежне конфигурације $\phi_0 = M_0$. На основу (Б.30) и (Б.31) и чињенице да је равнотежна конфигурација одређена условом (2.85), можемо писати

$$S_\Lambda[\phi_0 + \eta] = S_\Lambda[\phi_0] + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \left. \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta\phi(\mathbf{x})\delta\phi(\mathbf{y})} \right|_{\phi_0} \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\eta^3), \quad (2.110)$$

где $\eta(\mathbf{x})$ описује одступање од равнотежне конфигурације. Претпоставићемо да $\eta \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Пошто је $S_\Lambda[\phi] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\text{GLW}}$, имамо

$$\frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi(\mathbf{y})} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{GLW}}}{\partial \phi(\mathbf{y})} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{GLW}}}{\partial \nabla \phi(\mathbf{y})} = a(T)\phi(\mathbf{y}) + \frac{b}{3!}\phi^3(\mathbf{y}) - c\nabla_{\mathbf{y}}^2\phi(\mathbf{y}), \quad (2.111)$$

као и

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{x})} \frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi(\mathbf{y})} \right|_{\phi_0} &= \left[a(T)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{b}{2}\phi^2(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - c\nabla_{\mathbf{y}}^2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \Big|_{\phi_0} \\ &= \left(a(T) + \frac{M_0^2(T)b}{2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - c\nabla_{\mathbf{y}}^2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Пошто смо одредили други варијациони извод и израчунали га за равнотежну конфигурацију $\phi_0 = M_0$, можемо наћи и експлицитни израз за развој функционала $S_\Lambda[\phi]$ из (2.110). При томе, пажњу треба да обратимо на други сабирак из (2.112). Пошто је

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}^2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\ &\quad - \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y}) \right) \nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= - \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \eta(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{y}}\eta(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.113)$$

при чему интеграл дивергенције ишчезава када се претвори у површински, након још једне парцијалне интеграције и одбацивања још једног површинског интеграла налазимо

$$\int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}^2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \eta(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{y}}^2\eta(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}^2\eta(\mathbf{x}). \quad (2.114)$$

Заменом (2.114) и (2.112) у (2.110), коначно добијамо квадратну апроксимацију Ландауовог функционала

$$S_\Lambda[\phi_0 + \eta] = S_\Lambda[\phi_0] + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x})\mathbf{A}\eta(\mathbf{x}) \equiv S_\Lambda[\phi_0] + S_\Lambda^{(2)}[\eta], \quad (2.115)$$

при чему је оператор \mathbf{A} дефинисан са

$$\mathbf{A} = \bar{a}(T) - c\nabla^2 \quad (2.116)$$

а нови коефицијент $\bar{a}(T)$ је

$$\bar{a}(T) = a(T) + \frac{bM_0^2}{2} = \begin{cases} a(T), & T > T_c, \\ a(T) - 3a(T) = -2a(T), & T < T_c. \end{cases} \quad (2.117)$$

Имајући експлицитни израз за квадратну апроксимацију функционала $S_\Lambda[\phi]$, сконцентрисаћемо се на рачунање корелационе функције (2.101). Будући да је равнотежна конфигурације $\phi_0 = M_0$ хомогена, лако је видети да је $\text{D}\phi(\mathbf{x}) = \text{D}\eta(\mathbf{x})$, за $\phi = \eta + M_0$,

тако да се корелациона функција може изразити само помоћу поља η које описује одступања од равнотежне конфигурације

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{Z} \int D\eta(\mathbf{z}) \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y}) e^{-S_\Lambda[\phi_0] - S_\Lambda^{(2)}[\eta]}, \quad (2.118)$$

где је сада

$$Z = \int D\eta(\mathbf{z}) e^{-S_\Lambda[\phi_0] - S_\Lambda^{(2)}[\eta]}. \quad (2.119)$$

Напомињемо да резултат (2.119) важи и на температурама које су више као и на оним које су ниже од T_C . За рачунање корелационе $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ функције можемо искористити поступак који смо већ користили у (2.32) и (2.33). Додавањем дејству члана $\int_{\mathbf{x}} B(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})$, где је $B(\mathbf{x})$ помоћно поље, по аналогији са (II.51), имамо

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{Z[B]} \frac{\delta}{\delta B(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta B(\mathbf{y})} Z[B] \Big|_{B=0}, \\ Z[B] &= \int D\eta(\mathbf{z}) \exp \left[S_\Lambda^{(2)}[\eta] + \int_{\mathbf{z}} B(\mathbf{z})\eta(\mathbf{z}) \right] \end{aligned} \quad (2.120)$$

јер се константни члан $S_\Lambda[\phi_0]$ пократи у дефиницији корелационе функције. Сада видимо да се рачунање корелационе функције добрим делом своди на рачунање функционала $Z[B]$ који се може израчунати по узору на интеграле Гаусовог типа [видети прилог II]. Конкретно, интеграл за $Z[B]$ из (2.120) је директна генерализација интеграла (II.45)

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{A} \mathbf{a} + \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{a}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right]. \quad (2.121)$$

Како бисмо нагласили аналогију између ова два интеграла, приметимо да се $Z[B]$ може записати као

$$Z[B] = \int D\phi e^{-\frac{1}{2}(\eta, \mathbf{A}\eta) + (B, \eta)}, \quad (2.122)$$

где $(,)$ означава скаларни производ у $L_2(\mathbb{R}^D)$ који замењује скаларни производ у \mathbb{R}^N из (2.121). Будући да је функционални интеграл дефинисан као гранична вредност (2.70), имајући у виду и дискусију из Додатка Б, за рачунање гаусовских функционалних интеграла се можемо ослонити на кореспонденцију

$$\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{A} \mathbf{a} \longrightarrow (\eta, \mathbf{A}\eta), \quad \text{односно} \quad \sum_{i=1}^N a^i (\mathbf{A} \mathbf{a})_i \longrightarrow \int_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x}) [\mathbf{A}\eta](\mathbf{x}) \quad (2.123)$$

тако да имамо

$$Z[B] = \int D\phi e^{-\frac{1}{2}(\eta, \mathbf{A}\eta) + (B, \eta)} \propto \frac{1}{\sqrt{\text{Det} \mathbf{A}}} \exp \left[\frac{1}{2} (B, \mathbf{A}^{-1} B) \right]. \quad (2.124)$$

У горњој релацији пишемо знак пропорционалности, уместо строге једнакости, зато што је константа која представља лимит $(2\pi)^{N/2}$, при $N \rightarrow \infty$, бесконачна. Тај (бесконачни)

констатни фактор ће се скаратити у свим крајњим резултатима рачунања па због тога нећемо обраћати пажњу на њега. Такође, користимо симбол Det за детерминанту оператора (2.116) из $L_2(\mathbb{R}^D)$ како би правили разлику у односу на детерминанте матрица типа $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ које означавамо симболом det . Коначно, A^{-1} означава оператор инверзан за A .

Како се у (2.124) појављују A^{-1} и $\text{Det}A$, сконцентришимо се за тренутак на оператор $A = \bar{a}(T) - c\nabla^2$. Као што је оператор A у коначнодимензионом простору \mathbb{R}^N одређен компонентама $(A)_{ij} = \langle i|A|j\rangle$, оператор A у $L_2(\mathbb{R}^D)$ је задан 'компонентама'

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}|A|\mathbf{y}\rangle. \quad (2.125)$$

где је $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Увођење компоненти оператора нам омогућава да направимо и формалну аналогију са репрезентовањем оператора у $L_2(\mathbb{R}^D)$ 'матрицом'

$$\sum_{i,j} (A)_{ij} |i\rangle\langle j| \longrightarrow \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}|. \quad (2.126)$$

На основу горњег развоја у $L_2(\mathbb{R}^D)$ дефинишемо и 'компоненте' инверзног оператора као

$$\sum_{i,j} (A^{-1})_{ik} (A)_{kj} = \delta_{ij} \longrightarrow \int_{\mathbf{z}} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.127)$$

Искористимо ли компоненте, инверзни оператор можемо записати и као

$$A^{-1} = \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}|, \quad (2.128)$$

тако да се скаларни производ из експоненцијалне функције у (2.124) своди на

$$(B, A^{-1}B) = \langle B|A^{-1}|B\rangle = \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \langle B|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}|B\rangle = \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B(\mathbf{x})B(\mathbf{y}), \quad (2.129)$$

Ово је тражена репрезентација скаларног производа јер се у њој директно појављују компоненте оператора A^{-1} . Сада, по аналогији са (II.62), налазимо корелациону функцију изражену помоћу компоненти оператора A^{-1}

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{Z[B]} \frac{\delta}{\delta B(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta B(\mathbf{y})} Z[B] \Big|_{B=0} = A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.130)$$

Одредимо сада и компоненте од A^{-1} .

Пре свега, добро је познато [Weinberg, S. (2012)] да су у \mathbb{R}^D равни таласи својствене функције лапласијана и представљају базис који се користи за дефинисање Фурије-трансформа. То значи да можемо писати [видети и Пример 2.3]

$$\nabla^2 \langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = -\mathbf{k}^2 \langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle, \quad \text{где је } \langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.131)$$

[обратити пажњу на нормирање!] и јединични оператор у $L_2(\mathbb{R}^D)$ можемо представити као

$$I = \int_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle\langle \mathbf{k}|, \quad \text{јер је } I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}|I|\mathbf{y}\rangle = \int_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle\langle \mathbf{k}|\mathbf{y}\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.132)$$

Користећи $A\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = (\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2)\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle$, налазимо

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle \mathbf{x}|IAI|\mathbf{y}\rangle = \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|A|\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}|\mathbf{y}\rangle = \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2) \langle \mathbf{k}|\mathbf{q}\rangle \\ &= \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Сада је лако видети да су компоненте инверзног оператора дате са

$$A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2} \quad (2.134)$$

зато што важи (2.127). Заиста,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z}} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})A(\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \frac{\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2}{\bar{a}(T) + c\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \int_{\mathbf{z}} e^{i\mathbf{z}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})} \\ &= \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \frac{\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2}{\bar{a}(T) + c\mathbf{q}^2} (2\pi)^D \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Према томе, нашли смо да је

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y})\rangle = Z^{-1} \int D\eta \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y}) e^{-\frac{1}{2}(\eta, A\eta)} \\ &= A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Пример 2.5. Будући да ће нам требати у наставку, када будемо рачунали гаусовску корекцију на критични експонент α , погледајмо како се сличном методом оже наћи и $\text{Det}A$. За дефиницију функционалне детерминанте ћемо узети релацију

$$\text{Det}e^A := e^{\text{Tr}A}, \quad (2.137)$$

која представља генерализацију познате релације $\det e^A = e^{\text{tr}A}$ из коначнодимензионих простора [Радосевић, С., Мали, П. (2020)]. При томе, оперцију трага Tr дефинишемо у истом базису који је коришћен за Фуријеов развој јер су компоненте оператора A већ изражене помоћу Фуријеовог интеграла [Видети једначину (2.133)]. Према томе, у нашем случају је

$$\text{Det}A := e^{\text{Tr}\ln A}, \quad (2.138)$$

при чему је

$$\text{Tr}\ln A = \int_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{q}|\ln A|\mathbf{q}\rangle, \quad \ln A = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n. \quad (2.139)$$

Међутим, како је

$$A^2 = \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} A(\mathbf{x}, \mathbf{z})A(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{y}| = \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \int_{\mathbf{k}} (\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2)^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{y}|, \quad (2.140)$$

лако се показује да ће бити и

$$\ln A = \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \int_{\mathbf{k}} \ln \left(\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2 \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{y}|. \quad (2.141)$$

Односно,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln A &= \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \ln \left(\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2 \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \langle \mathbf{q} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y} | \mathbf{q} \rangle \\ &= \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \ln \left(\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2 \right) \int_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})} \int_{\mathbf{y}} e^{i\mathbf{y} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{k})} \\ &= V \int_{\mathbf{k}} \ln \left(\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.142)$$

Уколико допустимо све вредности таласних вектора, $-\infty \leq k_\alpha \leq \infty$, интеграл $\text{Tr} \ln A$ је очигледно дивергентан. Један од начина да се интеграл учини коначним¹¹ је да се у обзир узму само таласни вектори $|\mathbf{k}| \leq \Lambda$ [видети дискусију из одељка 2.2.4]. Наравно, Фуријеов базис није увек погодан за рачунање функционалне детерминанте због чега су развијени и други методи [Nakahara, M. (2003); Elizalde, E. (2008)]. ■

Постоји више начина да се израчуна интеграл (2.136). Један од њих се заснива на познатом резултату [Радошевић, С., Мали, П. (2020)]

$$\int_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{a^2 + \mathbf{k}^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-a|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad (2.143)$$

тако да коначно добијамо

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2} = \frac{1}{4\pi c} \frac{e^{-|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/\xi}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (2.144)$$

при чему смо увели тзв. корелациону дужину

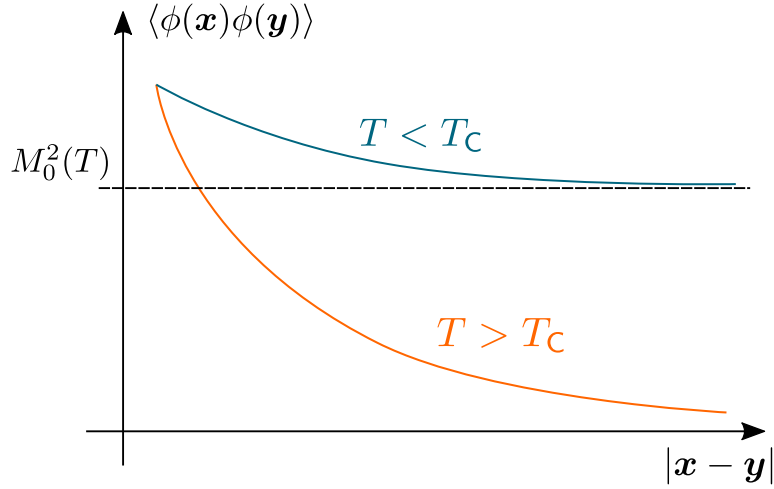
$$\xi = \sqrt{\frac{c}{\bar{a}(T)}} \sim |T - T_C|^{-1/2} \quad (2.145)$$

и претпоставили смо да $0 \leq |\mathbf{k}| < \infty$ што одговара случају $\Lambda \rightarrow \infty$ у граници континуума. Критични експонент који описује дивергенцију корелационе дужине се означава са ν . Дакле, у оквиру гаусовске апроксимације, налазимо $\nu = 1/2$.

Погледајмо сада детаљније како се закључци о корелацијама поља ϕ , у зависности од температуре, могу извести из дефиниције корелационе функције (2.101) и решења (2.144). Пре свега, на основу чињенице да је систем хомоген, дефиницију (2.101) можемо записати и као

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle - M_0^2(T) \quad (2.146)$$

¹¹Поступак елиминисања дивергенције у различитим интегралима који се појављују у теорији поља је познат под називом регуларизација.

Слика 2.10: Функција $\langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle$ у уређеној и неуређеној фази

тако да из решења (2.144) налазимо

$$\langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{4\pi c} \frac{e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/\xi}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + M_0^2(T). \quad (2.147)$$

Ако је $T > T_C$, знамо да је $M_0 = 0$, па горњи израз даје

$$\lim_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow \infty} \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle = 0 \quad (2.148)$$

јер корелације опадају експоненцијално и за $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg \xi$ понашање поља ϕ у тачкама \mathbf{x} и \mathbf{y} је статистички независно. Ово понашање одговара чистој гаусовској апроксимацији. Слично, за $T < T_C$ налазимо

$$\lim_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow \infty} \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle = M_0^2(T). \quad (2.149)$$

Видимо да у оба случаја корелације поља ϕ у довољно удаљеним тачкама \mathbf{x} и \mathbf{y} ишче-завају. Другим речима, у обе фазе, практично важи

$$\langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle \underset{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \gg \xi}{\sim} \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle. \quad (2.150)$$

Ово понашање функције $\langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \rangle$ је скицирано на Сл. 2.10. Дакле, добијени израз за $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ заиста одговара очекиваном понашању наведеном на почетку овог одељка. Ипак, решење приказано у (2.147) није довољно опште да би се могло узети као генерални закључак. Касније ћемо видети да је у случају система са континуалном унутрашњом симетријом понашање корелационе функције нешто другачије.

На крају ћемо приметити да се (2.101) може записати и као

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\delta^2}{\delta B(\mathbf{x})\delta B(\mathbf{y})} \ln Z[B] \Big|_{B=0}, \quad (2.151)$$

где је

$$Z[B] = \int D\phi(\mathbf{z}) e^{-S_\Lambda[\phi] + \int_{\mathbf{z}} B(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})}. \quad (2.152)$$

Овде је такође $B(\mathbf{x})$ помоћно поље али се, за разлику од (2.120), средње вредности рачунају са укупним дејством а не са његовом квадратном апроксимацијом.

2.2.9 Поузданост Ландауове теорије

У претходна два одељка смо одредили критичне експоненте који се, осим експонента ν , строго добијају у оквиру Ландауове теорије. Ове вредности су сумиране у Табели 2.2. Да бисмо могли дискутовати и квалитет коришћених апроксимација, у истој табели су наведене вредности критичних експонената које се данас сматрају прилично поузданим. Штавише, за 2D изингов модел су, на основу Онзагер-Јанговог решења [Schultz, T.D., Mattis, D.C., Lieb, E.H. (1964); Kogut, J.V. (1979)], познате тачне вредности критичних експонената. Ознака $0(\ln)$ указује да топлотни капацитет у случају дводимензионог Изинговог модела логоритамски дивергира. Вредности експонената за 3D Изингов модел су добијене на основу Монте Карло симулација и високо-температурских развоја и преузете су из [Pelissetto, A. Vicari, E. (2002)]. Коначно, вредности за 3D Хајзенбергов модел су, осим експонента α , чија је вредност преузета из [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)], такође из [Pelissetto, A. Vicari, E. (2002)] и добијене су комбиновањем Монте Карло симулација и још неких теоријских метода. Иако ћемо моделе са континуалним симетријама разматрати тек у Одељку 2.3, испоставиће се да се вредности критичних експонената, добијених у оквирима Ландауове теорије, неће променити. Због тога је корисно навести на једном месту критичне експоненте које даје Ландауова теорија заједно са прецизним вредностима за Изингов и Хајзенбергов модел.

Табела 2.2: Критични експоненти за Изингов и Хајзенбергов модел

	α	β	γ	δ	ν
Ландау	0	1/2	1	3	1/2
2D Изинг	$0(\ln)$	$1/8 = 0.125$	$7/4 = 1.75$	15	1
3D Изинг	0.110(1)	0.3265(3)	1.2372(5)	4.789(2)	0.6301(4)
3D Хајзенберг	-0.115(9)	0.3689(3)	1.3960(9)	4.783(3)	0.7112(5)

Пре свега, уочавамо знатну разлику између експонената који карактеришу дводимензиони Изингов модел, тродимензиони Изингов модел и тродимензиони Хајзенбергов модел. Према данас усвојеној терминологији, сваки од ових модела припада засебној *класи универзалности*. Те класе се, у принципу, разликују по унутрашњој симетрији модела и димензионалности просторне решетке на којој су дефинисани. Тако, рецимо, 2D и 3D Изингов модел имају исту унутрашњу симетрију (\mathbb{Z}_2) али се разликују по димензији решетке. Слично, 3D Изингов и 3D Хајзенбергов модел могу бити дефинисани на истој решетки, али се разликују по унутрашњој симетрији [за класични Хајзенбергов модел, симетрија је $O(3)$].

Такође, лако је видети да је одступање Ландауове теорије највеће у случају 2D Изинговог модела, док је слагање са експонентима који карактеришу 3D Изингов и 3D Хајзенбергов модел боље. Ово није случајно јер се применом ренорм-групе показује [Zinn – Justin, J. (2007); Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)] да су критични експоненти који карактеришу Изингову класу универзалности за $D \geq 4$ *тачно* они које предвиђа Ландауова теорија заједно са Гаусовском апроксимацијом. Што је одступање од $D = 4$ веће, већа је и разлика између тачних вредности критичних експонената и

оних које предвиђа Ландауова теорија. Технике ренорм-групе омогућавају да се корекције у односу на Ландауове вредности критичних експонената рачунају систематски и са значајном прецизношћу као пертурбативни развој по параметру $\varepsilon = 4 - D$. Ми ћемо у следећем одељку видети како гласи гаусовска корекција на критични експонент α .

Иако критични експоненти које предвиђа Ландауова теорија одступају од тачних вредности, ови експоненти заједно задовољавају одређени број релација за које се зна да су егзактне. То су тзв. неједнакости између критичних експонената [Stanley, H.E. (1971)]. На овом месту ћемо навести две такве релације:

$$\begin{aligned} \text{Рашбрукова неједнакост} & : \quad \alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2 \\ \text{Грифитсова неједнакост} & : \quad \alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2 \end{aligned} \quad (2.153)$$

где α' и γ' означавају вредност критичног индекса који описује понашање система при $T \geq T_C$. У Ландауовој теорији је $\alpha' = \alpha$ и $\gamma' = \gamma$ [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)]. Битно је приметити да за егзактно решење Изинговог модела, као и за вредности експонената у Ландауовој теорији, горње релације важе као *једнакости*. То указује на одређену унутрашњу конзистентност Ландауове теорије и чини је погодном за пертурбативне рачуне засноване на теорији ренорм-групе.

2.2.10 Гаусовска корекција на критичне експоненте

У претходном одељку смо видели како вредности критичних експонената које предвиђа Ландауова теорија стоје у поређењу са данас прихваћеним вредностима. Као што се види извођења презентованог у Одељцима 2.2.7 и 2.2.8, Ландауова теорија даје експоненте који не зависе од димензије простора на којем је дефинисан модел. Међутим, испоставља се да гаусовски модел уноси поправку на критични експонент α тако да он постаје функција параметра D .

Да бисмо нашли експонент α у гаусовској апроксимацији, кренућемо од апроксимативног квадратног израза за дејство $S_\Lambda[\phi]$ којег смо нашли у у (2.115)

$$S_\Lambda[\phi_0 + \eta] = S_\Lambda[\phi_0] + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x}) \mathbf{A} \eta(\mathbf{x}) \equiv S_\Lambda[\phi_0] + S_\Lambda^{(2)}[\eta], \quad (2.154)$$

при чему је $S_\Lambda[\phi_0] = V\mathcal{V}(M_0)$ хомогени део дејства помоћу којег смо одредили експоненте α, β, γ и δ у Одељцима 2.2.7 и 2.2.6, а η је поље које описује флуктуације око равнотежне конфигурације $\phi_0 = M_0$. Будући да важи $D\phi = D\eta$, статистичку суму можемо написати као

$$Z = e^{-F/T} = \int D\eta e^{-F_0(T)/T - S_\Lambda[\phi_0] - S_\Lambda^{(2)}[\eta]} = e^{-F_0(T)/T - S_\Lambda[\phi_0]} \int D\eta e^{-\frac{1}{2}(\eta, \mathbf{A}\eta)} \quad (2.155)$$

где су различити константни доприноси скупљени у $F_0(T)$ а оператор \mathbf{A} је дефинисан у (2.116). Користећи (2.124), налазимо

$$e^{-F/T} \propto e^{-F_0(T)/T - S_\Lambda[\phi_0]} \frac{1}{\sqrt{\text{Det } \mathbf{A}}} \propto \exp \left[-\frac{F_0(T)}{T} - S_\Lambda[\phi_0] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A} \right] \quad (2.156)$$

при чему смо искористили (2.138). Дакле, користећи (2.142), налазимо да је поправка на слободну енергију Изинговог модела коју уноси гаусовска апросимација дата са

$$\delta F_G = \frac{T}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A} = \frac{T}{2} V \int_{\mathbf{k}} \ln \left(\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2 \right). \quad (2.157)$$

Одговарајућа промена топлотног капацитета је дата са

$$\begin{aligned} C_G &= -T \frac{\partial^2 F_G}{\partial T^2} \\ &= -TV \left(\frac{d\bar{a}(T)}{dT} \right) \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\bar{a}(T) + ck^2} + \frac{T}{2} V \left(\frac{d\bar{a}(T)}{dT} \right)^2 \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{[\bar{a}(T) + ck^2]^2}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Пошто је $\bar{a}(T)$ линеарна функција температуре, јасно је да евентуална дивергенција величине C_G при $T = T_C$ може да дође само од интеграла који фигуришу у (2.158). Размотримо их због тога пажљивије.

Оцена интеграла

Посматрајмо најпре интеграл

$$I_D = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\bar{a}(T) + ck^2}. \quad (2.159)$$

Пошто у подинтегралној функцији фигурише \mathbf{k}^2 , интеграл ћемо рачунати у сферним координатама у \mathbb{R}^D . Интеграција по угловима даје фактор [Радошевић, С., Мали, П. (2020)]

$$\tilde{\Omega}_D = \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)}, \quad \Omega_D := \frac{\tilde{\Omega}_D}{(2\pi)^D} \quad (2.160)$$

где је Γ ознака за гама функцију, тако да остаје

$$I_D = \Omega_D \int_0^\Lambda \frac{dk k^{D-1}}{\bar{a}(T) + ck^2} \quad (2.161)$$

јер смо у дејству $S_\Lambda[\phi]$ задржали само флукуације за које је $|\mathbf{k}| \leq \Lambda$. Уводећи смену $k\sqrt{c/\bar{a}} = x$, претходни интеграл се своди на

$$I_D = \frac{\Omega_D}{\bar{a}} \sqrt{\frac{\bar{a}}{c}} \left(\frac{\bar{a}}{c}\right)^{\frac{D-1}{2}} \int_0^{\Lambda\sqrt{\frac{c}{\bar{a}}}} \frac{dx x^{D-1}}{1+x^2} = \Omega_D \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{D}{2}} \left(\bar{a}(T)\right)^{\frac{D}{2}-1} \tilde{I}_D(\tilde{\Lambda}), \quad (2.162)$$

где је $\tilde{\Lambda} \equiv \Lambda\sqrt{c/\bar{a}}$ и

$$\tilde{I}_D(\tilde{\Lambda}) = \int_0^{\tilde{\Lambda}} \frac{dx x^{D-1}}{1+x^2}. \quad (2.163)$$

У лимесу када $T \rightarrow T_C$ и $\bar{a}(T) \rightarrow 0$, тако да треба да испитамо понашање горњег интеграла за јако велико $\tilde{\Lambda}$. Када је $D = 1$, видимо да је

$$\tilde{I}_1(\tilde{\Lambda} \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.164)$$

Такође, када је $D = 2$, добијамо

$$\tilde{I}_2(\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{2} \ln [\tilde{\Lambda}^2 + 1]. \quad (2.165)$$

За рачунање интеграла при $D > 2$, уведемо прво смену $1 + x^2 = p$. Тако добијамо (сетимо се да x узима само позитивне вредности)

$$\tilde{I}_D(\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{2} \int_1^{\tilde{\Lambda}^2+1} \frac{dp}{p} (p-1)^{\frac{D-2}{2}} = \frac{1}{2} \int_1^{1+\tilde{\Lambda}^2} dp p^{\frac{D}{2}-2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{D-2}{2}} \quad (2.166)$$

Пошто p узима вредности веће од 1, израз у загради можемо написати помоћу хипергеометријске функције

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{D-2}{2}} = {}_2F_1\left(\frac{2-D}{2}, 1; 1; \frac{1}{p}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2-D}{2}\right)_n \left(\frac{1}{p}\right)^n \quad (2.167)$$

где $(\dots)_n$ означава Похамеров симбол [Радошевић, С., Мали, П. (2020)]. Замењујући горњи ред у интеграл, лако добијамо

$$\tilde{I}_D(\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2-D}{2}\right)_n \frac{p^{\frac{D}{2}-1-n}}{\frac{D}{2}-1-n} \Big|_1^{\tilde{\Lambda}^2+1}. \quad (2.168)$$

Пошто смо видели како изгледају решења за $I_D(\tilde{\Lambda})$, вратимо се оцени понашања интеграла I . Када је $D = 1$, на основу (2.164) је

$$I_1 \propto (\bar{a}(T))^{-1/2} \propto |T - T_C|^{-1/2}. \quad (2.169)$$

Слично, када је $D = 2$, имамо

$$I_2 \propto \ln \left[1 + \frac{c\Lambda^2}{\bar{a}(T)}\right] \sim \ln \left[\frac{1}{\bar{a}(T)}\right] \sim \ln |T - T_C|. \quad (2.170)$$

Даље, дивергентни допринос при $T - T_C$ за $D > 2$ можемо наћи посматрајући првих неколико чланова из реда (2.168) заједно са фактором $(\bar{a}(T))^{\frac{D}{2}-1}$. Ако нумеричке коефицијенте који се појављују уз различите чланове $1/p$ означимо као A, B, C, \dots , знајући да је $\tilde{\Lambda}^2 \propto 1/\bar{a}(T)$, налазимо

$$\begin{aligned} I_D &\propto (\bar{a}(T))^{\frac{D}{2}-1} \left[A (\tilde{\Lambda}^2)^{\frac{D}{2}-1-0} + B (\tilde{\Lambda}^2)^{\frac{D}{2}-1-1} + C (\tilde{\Lambda}^2)^{\frac{D}{2}-1-2} + \dots \right] \\ &\propto (\bar{a}(T))^{\frac{D}{2}-1} \left[A (\bar{a}(T))^{-\frac{D}{2}+1} + B (\bar{a}(T))^{-\frac{D}{2}+2} + C (\bar{a}(T))^{-\frac{D}{2}+3} + \dots \right] \\ &\sim A + B|T - T_C| + C|T - T_C|^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.171)$$

па видимо да дивергентни допринос од I_D изостаје за $D > 2$.

Са друге стране, имамо и интеграл

$$J_D = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{[\bar{a}(T) + c\mathbf{k}^2]^2}. \quad (2.172)$$

Прелазећи на сферне координате у \mathbb{R}^D и уводећи смену $x = k\sqrt{c/\bar{a}}$, налазимо

$$J_D = \Omega_D c \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{D}{2}} (\bar{a}(T))^{\frac{D}{2}-2} \tilde{J}_D(\tilde{\Lambda}), \quad (2.173)$$

где је поново $\tilde{\Lambda} \equiv \Lambda \sqrt{c/\bar{a}}$, док је

$$\tilde{J}_D(\tilde{\Lambda}) = \int_0^{\tilde{\Lambda}} \frac{dx x^{D-1}}{[1+x^2]^2}. \quad (2.174)$$

Интеграл $\tilde{J}_D(\tilde{\Lambda} \rightarrow \infty)$ је коначан за $D = 1, 2, 3$,

$$\tilde{J}_1(\tilde{\Lambda} \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{4}, \quad \tilde{J}_2(\tilde{\Lambda} \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}, \quad \tilde{J}_3(\tilde{\Lambda} \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{4}, \quad (2.175)$$

док за $D = 4$ налазимо

$$\tilde{J}_D(\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{1+\tilde{\Lambda}^2} + \ln [1 + \tilde{\Lambda}^2] \right). \quad (2.176)$$

За рачунање интеграла при $D > 4$ се поново можемо послужити хипергеометријском функцијом. Тако налазимо

$$\tilde{J}_D(\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2-D}{2} \right)_n \frac{p^{\frac{D}{2}-2-n}}{\frac{D}{2}-2-n} \Big|_1^{\tilde{\Lambda}^2+1}. \quad (2.177)$$

На основу (2.175), (2.176) и (2.177) можемо оценити понашање интеграла J_D при $T \rightarrow T_C$. Имајући у виду фактор $[\bar{a}(T)]^{\frac{D}{2}-2}$, видимо да је

$$J_1 \sim |T - T_C|^{-\frac{3}{2}}, \quad J_2 \sim |T - T_C|^{-1}, \quad J_3 \sim |T - T_C|^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.178)$$

као и

$$J_4 \sim \ln |T - T_C|. \quad (2.179)$$

Када је $D > 4$, као и код разматрања интеграла I_D за $D > 2$, довољно нам је да посматрамо првих неколико чланова из (2.177). Тако добијамо

$$\begin{aligned} J_D &\propto \left(\bar{a}(T) \right)^{\frac{D}{2}-2} \left[A \left(\tilde{\Lambda}^2 \right)^{\frac{D}{2}-2-0} + B \left(\tilde{\Lambda}^2 \right)^{\frac{D}{2}-2-1} + C \left(\tilde{\Lambda}^2 \right)^{\frac{D}{2}-2-2} + \dots \right] \\ &\propto \left(\bar{a}(T) \right)^{\frac{D}{2}-2} \left[A \left(\bar{a}(T) \right)^{-\frac{D}{2}+2-0} + B \left(\bar{a}(T) \right)^{-\frac{D}{2}+2+1} + C \left(\bar{a}(T) \right)^{-\frac{D}{2}+2+2} + \dots \right] \\ &\sim A + B|T - T_C| + C|T - T_C|^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.180)$$

па видимо да дивергентни допринос од J_D изостаје за $D > 4$.

Критични експонент α

Након анализе интеграла, можемо се вратити првобитном задатку налажење критичног експонента α . Пошто смо нашли да је

$$I_1 \sim |T - T_C|^{-\frac{1}{2}}, \quad J_1 \sim |T - T_C|^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.181)$$

на основу (2.158) добијамо

$$C_G \sim |T - T_C|^{-\frac{3}{2}}, \quad \text{за } D = 1. \quad (2.182)$$

Слично, како је

$$I_2 \sim \ln |T - T_C|, \quad J_2 \sim |T - T_C|^{-1} \quad (2.183)$$

налазимо

$$C_G \sim |T - T_C|^{-1}, \quad \text{за } D = 2. \quad (2.184)$$

Дивергентни допринос од I_D изостаје за $D > 2$, па тако налазимо $C_G \sim J_D$. Конкретно

$$C_G \sim |T - T_C|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{за } D = 3, \quad (2.185)$$

као и

$$C_G \sim \ln |T - T_C|, \quad \text{за } D = 4 \quad (2.186)$$

док дивергенција у потпуности нестаје за $D > 4$.

Сумирајући претходне резултате, можемо написати да је у оквиру гаусовске апроксимације

$$\alpha = \begin{cases} 0, & D \geq 4, \\ 2 - \frac{D}{2}, & D < 4. \end{cases} \quad (2.187)$$

Дакле, када је $D \geq 4$, дивергенција тоplotног капацитета изостаје – флуктуације које уноси гаусовски модел нису значајне и Ландауова претпоставка о постојању доминантне (равнотежне) конфигурације $\phi_0 = M_0$ је оправдана. Са друге стране, видимо да то не важи за $D = 1, 2$ и 3 . У том контексту се гранични случај $D = 4$ означава као *критична димензија*.

Са друге стране, гаусовска апроксимација не уноси корекције на остале критичне експоненте, што је лако проверити. Рецимо, користећи $\langle \phi \rangle = M_0 + \langle \eta \rangle$, као и функционал $Z[B]$ дефинисан у (2.120), чији је експлицитни облик дат у (2.124), налазимо

$$\begin{aligned} \langle \eta(z) \rangle &= \frac{1}{Z[B]} \frac{\delta}{\delta B(z)} Z[B] \Big|_{B=0} \propto \frac{1}{Z[B]} e^{\frac{1}{2}(B, A^{-1}B)} \frac{\delta}{\delta B(z)} (B, A^{-1}B) \Big|_{B=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta B(z)} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B(\mathbf{x}) B(\mathbf{y}) \Big|_{B=0} \\ &= 2 \int_{\mathbf{x}} A^{-1}(\mathbf{x}, z) B(\mathbf{x}) \Big|_{B=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.188)$$

тако да је $\langle \phi \rangle = M_0$ у оквирима гаусовског модела.

Да бисмо показали да гаусовска апроксимација не мења ни вредност индекса δ , потешно је да нађемо $\langle \phi \rangle$ при $h \neq 0$ за шта морамо имати гаусовску апроксимацију дејства у присуству хомогеног спољашњег поља h . За почетак, присетићемо се да се равнотежна конфигурација $M(h, T)$ у присуству спољашњег поља h добија решавањем једначине (2.93). Специјално, када је $T = T_C$, та једначина гласи $\frac{b}{3!} M^3(h) - h = 0$, одакле је $M(h) = (h3!/b)^{1/3}$. Пошто је гаусовска апроксимација Ландауовог дејства одређена са (2.110), за случај $h \neq 0$ и $T = T_C$, добијамо

$$S_\Lambda[M(h) + \eta] = S_\Lambda[M(h)] + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x}) \tilde{A} \eta(\mathbf{x}) \quad (2.189)$$

при чему је

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{M^2(h)b}{2} - c\nabla^2. \quad (2.190)$$

Средња вредност флукутирајућег поља η у присуству поља h , у оквирима гаусовске апроксимације, дата је са

$$\langle \eta \rangle_h = Z^{-1} \int \mathbf{D}\eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y}) \exp \left[-S_\Lambda[M(h)] - \frac{1}{2} (\eta, \tilde{\mathbf{A}}\eta) \right] = 0 \quad (2.191)$$

јер је

$$\int \mathbf{D}\eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y}) e^{-S_\Lambda[M(h)] - \frac{1}{2} (\eta, \tilde{\mathbf{A}}\eta)} = \frac{\delta}{\delta B(\mathbf{y})} \int \mathbf{D}\eta(\mathbf{x}) e^{-S_\Lambda[M(h)] - \frac{1}{2} (\eta, \tilde{\mathbf{A}}\eta) + (B, \eta)} \Big|_{B=0} = 0 \quad (2.192)$$

као и у случају интеграла из (2.188) [видети и аналогни коначнодимензиони интеграл (Ц.45)]. Према томе, $\langle \phi \rangle_h = M(h) + \langle \eta \rangle_h = M(h) \propto h^{1/3}$, па видимо да гаусовска апроксимација заиста не мења ни индекс δ . Из ових разматрања директно следи и

$$\chi = \frac{\partial \langle \phi \rangle_h}{\partial h} \Big|_{h=0} = \frac{\partial M(h, T)}{\partial h} \Big|_{h=0} \propto |T - T_C|^{-1}, \quad (2.193)$$

тако да је у оквирима гаусовске апроксимације и даље $\gamma = 1$. Обратите пажњу да је, користећи (2.190), могуће наћи и гаусовску поправку на слободну енергију за систем у спољашњем пољу h као

$$\delta F_G = \frac{T_C}{2} \text{Tr} \ln \tilde{\mathbf{A}} = \frac{T_C V}{2} \int_{\mathbf{k}} \ln \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h3!}{b} \right)^{2/3} + ck^2 \right]. \quad (2.194)$$

Међутим, поље h не улази линеарно у (2.189) и због тога се поправка на магнетизацију у гаусовској апроксимацији *не може* рачунати помоћу $\partial(\delta F_G)/\partial h$.

Сумирајући, можемо рећи да урачунавање флукутација у оквирима гаусовске апроксимације мења само вредност критичног експонента α [Ma, S.K. (2018); Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)]. Такође, резултат (2.187) јасно указује на посебну важност четвородимензионих ($D = 4$) модела који представљају гранични случај који раздваја системе на које је примењива Ландауова апроксимација ($D \geq 4$) од оних код којих су флукутације превише значајне да би се могле занемарити или описати гаусовском апроксимацијом. Као што је већ напомињано, методи ренорм групе су развијени тако да се ефекти флукутација у случају зинговог модела систематски урачунавају полазећи од резултата за четвородимензионе системе [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010); Wilson, K.G., Kogut, J.B. (1974)].

2.2.11 Корелационе функције вишег реда

У Одељку 2.2.8 смо видели један начин да се приближно урачуна утицај фактора $b\phi^4(\mathbf{x})/4!$. Очекивано, налажење ефективног дејства у гаусовској апроксимацији није једини приступ и често се користи развој експоненцијалне функције чиме се формално

долази до израза у којем се слободна енергија или корелациона функција развијају у степени ред по факторима b . Од кључног значаја у овом прилазу је Викова теорема која је дискутована и Додатку Ц.4.

Као пример, пронађимо прву поправку на слободну енергију $F = -T \ln Z$, где је

$$Z = \int D\phi(\mathbf{z}) e^{-S_\Lambda[\phi]}, \quad S_\Lambda[\phi] = \int_{\mathbf{z}} \left(\frac{a}{2} \phi^2 - \frac{c}{2} \phi \nabla^2 \phi + \frac{b}{4!} \phi^4 \right). \quad (2.195)$$

У дејству $S_\Lambda[\phi]$ ћемо издвојити квадратни део и означићемо га са $S_\Lambda^{(0)}[\phi]$ док ћемо остатак, пропорционалан са b означити са $S_\Lambda^{\text{int}}[\phi]$. Сада партициону функцију можемо развити у ред по коефицијенту b . Ако се задржимо на линеарној апроксимацији, имамо

$$\begin{aligned} Z &= \int D\phi(\mathbf{z}) e^{-S_\Lambda^{(0)}[\phi] - S_\Lambda^{\text{int}}[\phi]} \approx \int D\phi(\mathbf{z}) e^{-S_\Lambda^{(0)}[\phi]} \left(1 - S_\Lambda^{\text{int}}[\phi] \right) \\ &= Z_0 - Z_0 \left\langle \frac{b}{4!} \int_{\mathbf{z}} \phi^4(\mathbf{z}) \right\rangle_0 + \mathcal{O}(b^2) \end{aligned} \quad (2.196)$$

где $\langle \dots \rangle_0$ означава средњу вредност израчунату помоћу

$$S_\Lambda^{(0)}[\phi] = \frac{1}{2} (\phi, \mathbf{A} \phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \mathbf{A} \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A} = a - c \nabla^2, \quad (2.197)$$

а Z_0 је одговарајућа статистичка сума. Из горње релације налазимо слободну енергију израчунату до чланова линеарних по b

$$F = F_0 + \delta F, \quad (2.198)$$

при чему је

$$\delta F = -T \frac{b}{4!} \int_{\mathbf{z}} \langle \phi^4(\mathbf{z}) \rangle_0. \quad (2.199)$$

изражено помоћу корелационе функције четвртог реда. Средња вредност која фигурише у горњој једначини се може израчунати помоћу Викоје теореме. По узору на Пример Ц.2, видимо да се добијају три члана која имају исту вредност (формално, сва четири индекса из Примера Ц.2 узимају исту вредност јер одговарају једној интеграционој промењивој \mathbf{z}). Дакле,

$$\delta F = -3T \frac{b}{4!} \int_{\mathbf{z}} \left[\langle \phi(\mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) \rangle_0 \right]^2. \quad (2.200)$$

Преостала средња вредност је

$$\langle \phi(\mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int D\phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathbf{A} \phi)} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{a + c\mathbf{k}^2} \quad (2.201)$$

при чему смо искористили (2.134) и континуални аналогон релације (Ц.62). Дакле, прва поправка на слободну енергију је дата са

$$\delta F = -3TV \frac{b}{4!} \left[\int_{\mathbf{k}} \frac{1}{a + c\mathbf{k}^2} \right]^2 \quad (2.202)$$

при чему фактор V долази од интеграције $\int_{\mathbf{z}}$.

Иако је поправка експлицитно израчуната, добијени резултат је порблематичан јер преостали интеграл дивергира при $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ [Видети (2.144)]. Разлог дивергенције лежи у чињеници да смо претпоставили да је лимес континуума коректан и при $\Lambda^{-1} \rightarrow 0$ [Видети Одељак 2.2.4]. Због тога се поправке на слободну енергију морају рачунати пажљиво и у ту сврху су развијене различите технике регуларизације и ренормализације¹² [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010); Weinberg, S. (2010); Zinn – Justin, J. (2007); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Ryder, L.H. (1996); Negle, J.W., Orland, H. (1998); Zee, A. (2010)].

2.3 $O(N)$ модел

У претходним одељцима смо видели како се Гинзбург-Ландау-Вилсоново дејство добија у граници континуума модела који поседује унутрашњу \mathbb{Z}_2 симетрију (тзв. Изингов модел). Директном генерализацијом \mathbb{Z}_2 симетрије на $O(N)$, долазимо до

$$\mathcal{L} = \frac{a(T)}{2}|\phi|^2 + \frac{c}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{b}{4!}|\phi|^4 - \mathbf{h} \cdot \phi. \quad (2.203)$$

Овде је $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ а поље \mathbf{h} је усмерено дуж правца вектора $\mathbf{e}_h = \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$, $a(T) \propto T - T_C$, док је b позитивна константа. Лагранжијан (2.203) је могуће добити и анализирајући лимес континуума N -векторског модела на решетки.

Као и у случају \mathbb{Z}_2 модела, равнотежну конфигурацију добијамо минимизирањем потенцијалног дела лагранжијана, $\mathcal{V}(\phi) = (a(T)/2)|\phi|^2 + (b/4!)|\phi|^4 - \phi \cdot \mathbf{h}$. Ако са \mathbf{M}_0 означимо тражену равнотежну конфигурацију, видимо да је она одређена са

$$a(T)\mathbf{M}_0 + \frac{b}{3!}|\mathbf{M}_0|^2\mathbf{M}_0 = \mathbf{h}. \quad (2.204)$$

Када је $T > T_C$, што одговара неуређеној фази, јединствено решење у одсуству спољашњег поља је $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$. Међутим, за $T < T_C$ и $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, налазимо да је модуо равнотежне конфигурације одређен са

$$|\mathbf{M}_0| = \sqrt{-\frac{3!a(T)}{b}}, \quad (2.205)$$

док оријентација вектора \mathbf{M}_0 остаје произвољна. Спонтано нарушење симетрије се у овом случају огледа у избору једне од бесконачно могућих оријентација вектора \mathbf{M}_0 [Видети Одељак 2.4 за специјални случај $U(1) \simeq O(2)$ симетрије]. Нека је, ради једноставности, $\mathbf{M}_0 = |\mathbf{M}_0|\mathbf{e}_N$. Група симетрије $O(N)$ има $N(N-1)/2$ генератора који дефинишу ротације у одговарајућим равнима. Са друге стране, постоји подскуп од $(N-1)(N-2)/2$ генератора који анихилирају вектор $\mathbf{M}_0 = |\mathbf{M}_0|\mathbf{e}_N$ јер одређују ротације у равнима које нису дефинисане помоћу осе \mathbf{e}_N . Скуп ових генератора сачињава алгебру $\mathfrak{o}(N-1)$ а одговарајућа група симетрије која оставља вектор $\mathbf{M}_0 = |\mathbf{M}_0|\mathbf{e}_N$ инваријантним је $O(N-1)$. Дакле, одговарајући образац нарушења симетрије је $O(N) \rightarrow O(N-1)$.

¹²Дивергенције проузроковане понашањем интеграла при $k \rightarrow \infty$ се називају ултраљубичасте (УВ) дивергенције.

Пример 2.6. Погледајмо конкретан пример за нарушење симетрије типа $O(4) \rightarrow O(3)$. Лагранжијан је облика (2.203) а $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$. Нека је основно стање дато са $\mathbf{M}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ v]^T$. Група $O(4)$ има 6 генератора и они се могу изабрати тако да буду репрезентовани матрицама

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{X}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{X}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{X}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{X}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.206)$$

Лако је видети да важи $\mathbf{X}_1 \mathbf{M}_0 = \mathbf{X}_2 \mathbf{M}_0 = \mathbf{X}_3 \mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$, тако да су $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ и \mathbf{X}_3 генератори групе која не мења основно стање \mathbf{M}_0 . Пошто је $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3$, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_2$ и $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1$, видимо да $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ генеришу $\mathfrak{o}(3)$ и група која не мења вектор \mathbf{M}_0 је $O(3)$. Преостала три генератора мењају вектор \mathbf{M}_0 и они сачињавају базис простора $\mathfrak{o}(4)/\mathfrak{o}(3) \cong \mathfrak{o}(3)$. ■

Сконцентришимо се сада на неке термодинамичке карактеристике овог модела. Из (2.205) директно налазимо $\beta = 1/2$, док једначина (2.204), за $T = T_C$, даје $\delta = 3$. Такође, понављајући поступак за анализу специфичне топлоте у оквиру Ландауове апроксимације, налазимо $\alpha = 0$ [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)].

Следећа интересантна величина је суспенцибилност. Будући да је параметар уређености вектор, суспенцибилност се, чак и у случају изотропног система, мора дефинисати као тензорска величина. Компоненте тензора суспенцибилности су $\chi_{lm} = \partial M_l / \partial h_m$. Погодно је разложити их према [Hohenberg, P.C., Krekhov, A.P. (2015)]

$$\chi_{lm} = \chi_{\parallel} (\mathbf{e}_h)_l (\mathbf{e}_h)_m + \chi_{\perp} [\delta_{lm} - (\mathbf{e}_h)_l (\mathbf{e}_h)_m] \quad (2.207)$$

тако да χ_{\parallel} описује одзив система у правцу поља \mathbf{h} (тзв. лонгитудинална компонента) а χ_{\perp} дуж праваца који су ортогонални на правац вектора \mathbf{h} (тзв. трансферзална компонента). Уколико изберемо координатни систем тако да је $\mathbf{h} = |\mathbf{h}| \mathbf{e}_N$, суспенцибилност је репрезентована матрицом

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{\perp} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi_{\perp} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \chi_{\perp} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \chi_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (2.208)$$

Такође, дефинисаћемо и матричне елементе одговарајућег инверзног тензора $\chi_{lm}^{-1} = \partial h_l / \partial M_m$ са

$$\chi_{lm}^{-1} = \chi_{\parallel}^{-1} (\mathbf{e}_h)_l (\mathbf{e}_h)_m + \chi_{\perp}^{-1} [\delta_{lm} - (\mathbf{e}_h)_l (\mathbf{e}_h)_m]. \quad (2.209)$$

Претпоставимо сада да је $T < T_C$. Пошто је $\mathbf{h} = |\mathbf{h}|\mathbf{e}_N$, на основу (2.204) налазимо

$$\chi_{\parallel}^{-1} = a(T) + \frac{b}{2}|\mathbf{M}_0|^2 = -2a(T), \quad \chi_{\perp}^{-1} = 0, \quad T < T_C, \quad (2.210)$$

где смо искористили (2.205). Слично, за $T > T_C$, имамо

$$\chi_{\parallel}^{-1} = \chi_{\perp}^{-1} = a(T), \quad T > T_C. \quad (2.211)$$

На основу ових резултата, видимо да $\chi_{\parallel} \sim |T - T_C|^{-1}$, док χ_{\perp} дивергира у целој уређеној фази и $\chi_{\perp} \sim |T - T_C|^{-1}$ при $T > T_C$.

Разлика између лонгидутиналне и трансферзалне компоненте суспендибилности се осликава и у понашању корелационе дужине. Како бисмо нашли корелациону дужину за $O(N)$ модел, поступићемо као и у Одељку 2.2.8. Гаусовска апроксимација за дејство $O(N)$ је дата са

$$S_{\Lambda}[\mathbf{M}_0 + \boldsymbol{\eta}] = S_{\Lambda}[\mathbf{M}_0] + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \frac{\delta^2 S_{\Lambda}}{\delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{y})} \Big|_{\mathbf{M}_0} \eta_l(\mathbf{x}) \eta_m(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\eta^3). \quad (2.212)$$

где векторско поље $\boldsymbol{\eta}$ описује одступања од равнотежне конфигурације \mathbf{M}_0 . Анализу ћемо ограничити на уређену фазу (јер смо ту уочили разлику између χ_{\parallel} и χ_{\perp}) и претпоставићемо да је $\mathbf{M}_0 = |\mathbf{M}_0|\mathbf{e}_N$. Пошто је

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S_{\Lambda}}{\delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{y})} &= \delta_{lm} \left(a(T) + \frac{b}{3!} |\phi|^2 \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{b}{3} \phi_l(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{z}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &- c \delta_{lm} \nabla_{\mathbf{y}}^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.213)$$

имамо

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S_{\Lambda}}{\delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{y})} \Big|_{\mathbf{M}_0} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\left(a(T) + \frac{b}{6} |\mathbf{M}_0|^2 \right) \delta_{lm} + \frac{b}{3} |\mathbf{M}_0|^2 \delta_{lN} \delta_{mN} \right] \\ &- c \delta_{lm} \nabla_{\mathbf{y}}^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Уколико поље $\boldsymbol{\eta}$ параметризујемо као $[\boldsymbol{\eta}_{\perp} \ \eta_{\parallel}]^T$, где $\boldsymbol{\eta}_{\perp} \in \mathbb{R}^{N-1}$, гаусовско дејство за $O(N)$ модел у уређеној фази гласи

$$S_{\Lambda}[\mathbf{M}_0 + \boldsymbol{\eta}] \approx S_{\Lambda}[\mathbf{M}_0] + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta}_{\perp}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{(\perp)} \boldsymbol{\eta}_{\perp}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \eta_{\parallel}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{(\parallel)} \eta_{\parallel}(\mathbf{x}) \quad (2.214)$$

где су

$$\mathbf{A}^{(\perp)} = -c \nabla^2, \quad \mathbf{A}^{(\parallel)} = c \left(\frac{-2a(T)}{c} - \nabla^2 \right). \quad (2.215)$$

Како сада на располагању имамо квадратно дејство, лако налазимо тражне корелационе функције [Видети (2.136)]

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle (\phi_N(\mathbf{x}) - |\mathbf{M}_0|)(\phi_N(\mathbf{y}) - |\mathbf{M}_0|) \rangle = \langle \eta_{\parallel}(\mathbf{x}) \eta_{\parallel}(\mathbf{y}) \rangle = \left[\mathbf{A}^{(\parallel)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{4\pi c} \frac{e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/\xi_{\parallel}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \end{aligned} \quad (2.216)$$

при чему је корелациона дужина дата са

$$\xi_{\parallel}(T) = \sqrt{\frac{c}{-2a(T)}} = \sqrt{\frac{3c}{b|\mathbf{M}_0|^2}} \sim |T - T_C|^{-1/2}, \quad T < T_C, \quad (2.217)$$

што се слаже са (2.145). Са друге стране, за трансферзалне компоненте налазимо

$$\begin{aligned} G_{\perp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle \eta_{\perp}(\mathbf{x})\eta_{\perp}(\mathbf{y}) \rangle = \left[\mathbf{A}^{(\perp)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{4\pi c} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad \xi_{\perp}(T) \rightarrow \infty, \quad \text{при } T < T_C, \end{aligned} \quad (2.218)$$

где смо са η_{\perp} означили једну од компоненти вектора $\boldsymbol{\eta}_{\perp}$. Средње вредности у (2.216) и (2.218) су рачунате помоћу дејства (2.214). Дакле, слично као χ_{\perp} и корелациона дужина која одговара трансферзалним компонентама дивергира у целој уређеној фази. Ова појава је само још једна манифестација Голдстонове теореме. Наиме, број трансферзалних компоненти је $N - 1$ што одговара $N - 1$ Голдстоновом пољу за нарушење симетрије по обрасцу $O(N) \rightarrow O(N - 1)$ [Видети Прилог Д]. Такође, из (2.214) и (2.215) видимо да дејство за $\boldsymbol{\eta}_{\perp}$ не садржи "масени" члан $\boldsymbol{\eta}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp}$, у складу са анализом из Одељка 1.3.4 која се може поновити и у овом случају, док се допринос тог типа појављује у лагранжијану за η_{\parallel} . Коначно, видимо да постоји кореспонденција $m \leftrightarrow \xi^{-1}$ која употпуњује аналогију између Ландауове теорије фазних прелаза (односно, равнотежне статистичке физике) и класичне теорије поља [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)].

2.4 Гинзбург-Ландауова теорија суперпроводности

У одељку 2.2 смо видели како се, у оквиру Ландауове теорије, Изингов модел описује помоћу GLW дејства док је у 2.3 показано како се \mathbb{Z}_2 симетрија Изинговог модела генерализује на $O(N)$ симетрију. У овом одељку ћемо видети како се Ландауова идеја о спонтаном нарушењу симетрије може инкорпорирати у опис система са локалном симетријом дајући тако ефективни опис феномена везаних за суперпроводност.

2.4.1 Образац нарушења симетрије

На основу Примера 1.14 знамо да се системи који садрже наелектрисане честице описују комплексним пољем $\psi(\mathbf{x}, t)$ и то тако да је закон одржања наелектрисања последица глобалне $U(1)$ симетрије дејства. У ефективном опису конвенционалне суперпроводности се претпоставља да је при $T < T_C$ ова глобална симетрија спонтано нарушена постојањем вакуумског решења за поља која носе наелектрисање $q^* = 2e$, где је e наелектрисање електрона, q^* тзв. ефективно наелектрисање а T_C температура на којој систем прелази из нормалне у суперпроводну фазу. Другим речима, претпоставићемо да постоје просторно-временски независна решења класичних једначина кретања која су међусобно повезана $U(1)$ трансформацијама али тако да постоји неки мањи скуп операција који не мења оваква стања [Видети Одељак 1.3.4 посвећен спонтаном нарушењу симетрије у класичним теоријама]. Поља која у суперпроводницима носе наелектрисање $2e$ су позната као Куперови парови. Механизам који доводи до њиховог формирања

је последица електрон-фонон интеракције и детаљно је објашњен микроскопском BCS теоријом [Altland, A., Simons, B. (2010)].

Означимо дејство $U(1)$ трансформације на комплексно поље са $\psi \rightarrow e^{-iq^*\Lambda}\psi$. За сада ћемо занемарити чињеницу да у случају локалне симетрије Λ мора бити функција просторно-временских координата и сконцентрисаћемо се само на образац нарушења симетрије. Сама чињеница да је q^* целобројни умножак од e ограничава могуће вредности за Λ тако да се вредност $\Lambda + 2\pi/e$ мора идентификовати са Λ . Заиста, ако је $q^* = en$, где је n цео број, налазимо

$$e^{-iq^*(\Lambda + \frac{2\pi}{e})} = e^{-iq^*\Lambda} e^{-i2\pi n} = e^{-iq^*\Lambda} \quad (2.219)$$

одакле се јасно види да Λ параметрише кружницу. Односно,

$$\Lambda + \frac{2\pi}{e} \cong \Lambda. \quad (2.220)$$

Даље, претпоставићемо да при $T < T_C$ постоји просторно-временски независно решење ψ_0 (параметар уређености), при чему поље ψ носи наелектрисање $q^* = 2e$, тако да је $|\psi_0| = v \neq 0$. Ово решење је инваријантно у односу на \mathbb{Z}_2 трансформације које описане са e^{iq^*0} и $e^{iq^*\pi/e}$. Да ове трансформације заиста репрезентују групу \mathbb{Z}_2 , можемо да се уверимо на основу релација

$$\begin{aligned} e^{-iq^*0} e^{-iq^*0} &= e^{-iq^*0}, & e^{-iq^*0} e^{-iq^*\pi/e} &= e^{-iq^*\pi/e}, \\ e^{-iq^*\pi/e} e^{-iq^*\pi/e} &= e^{-i2q^*\pi/e} = e^{-iq^*(0+2\pi/e)} = e^{-iq^*0}, \end{aligned} \quad (2.221)$$

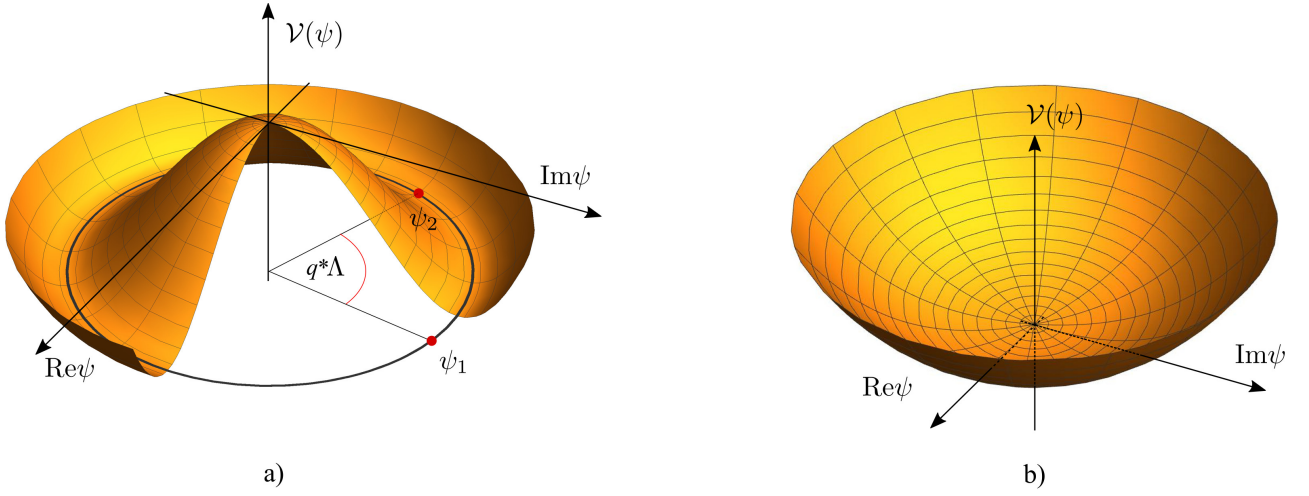
при чему смо искористили (2.220). Дакле, претпоставка по којој постоји комплексно поље које носи наелектрисање q^* тако да вакуумско решење ψ_0 нарушава симетрију, даје $G = U(1)$ и $H = \mathbb{Z}_2$. При томе, група G делује на вакуумско стање ψ_0 као $\psi_0 \rightarrow e^{-iq^*\Lambda}\psi_0$ а стање ψ_0 је инваријантно у односу на трансформације¹³ генерисане са $\Lambda = 0$ и $\Lambda = \pi/e$ [Weinberg, S. (2010)]. Потенцијални део густине лагранжијана који може да опише образац нарушења симетрије $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ мора бити инваријантан у односу на $U(1)$ трансформације [видети Одељак 1.3.4] и добија се директном генерализацијом GLW потенцијала за Изингов модел (2.87)

$$\mathcal{V}(\psi) = a(T)|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4, \quad \text{где је } a(T) \propto T - T_C. \quad (2.222)$$

Овај потенцијал је приказан на Сл. 2.11. Основно стање ψ_0 налазимо минимизирањем потенцијала $\mathcal{V}(\psi)$, односно решавањем једначине

$$a(T)\psi_0^* + b|\psi_0|^2\psi_0^* = 0. \quad (2.223)$$

За $a(T) > 0$, налазимо једно решење $\psi_0^* = \psi_0 = 0$ које одговара високотемпературској (неуређеној) фази. Са друге стране, при $a(T) < 0$, налазимо услов $|\psi_0|^2 = -a(T)/b$ који фиксира само модуо комплексног броја ψ_0 . Дакле, при $T < T_C$, налазимо континуум решења која су међусобно еквивалентна јер минимизирају $\mathcal{V}(\psi)$ а међусобно су повезана $U(1)$ трансформацијама: ако су ψ_1 и ψ_2 два таква решења, веза између њих је $\psi_2 = e^{-iq^*\Lambda}\psi_1$ [Упоредити са анализом из 2.2.6].



Слика 2.11: Потенцијални део лагранжијана (2.222) за а) $T < T_C$ и б) $T > T_C$. Стања ψ_1 и ψ_2 су еквивалентна основна стања повезана $U(1)$ трансформацијом $\psi_2 = e^{-iq^*\Lambda}\psi_1$

Укупни лагранжијан, који ћемо искористити да опишемо неке феномене везане за конвенционалну суперпроводност, добијамо сабирањем $U(1)$ лагранжијана (1.207) и потенцијала (2.222)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SC} = & i\psi^*(\partial_t - iq^*V)\psi - \frac{1}{2m} |(\nabla + iq^*\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_t\mathbf{A} + \text{grad}V)^2 - \frac{1}{2}(\text{rot}\mathbf{A})^2 \\ & + \mathcal{V}(\psi). \end{aligned} \quad (2.224)$$

Треба обратити пажњу да лагранжијан (2.224) поседује калибрациону $U(1)$ симетрију:

$$\begin{aligned} \psi(x) & \rightarrow e^{-iq^*\Lambda(x)}\psi(x), \\ \mathbf{A}(x) & \rightarrow \mathbf{A}(x) + \nabla\Lambda(x), \\ V(x) & \rightarrow V(x) - \partial_t\Lambda(x), \end{aligned} \quad (2.225)$$

али да је за феномен суперпроводности кључно нарушење *глобалне* симетрије по обрасцу $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

2.4.2 Параметризација и Голдстоново поље

Постоји више начина да се параметризује комплексно поље ψ (један од њих је наведен у (1.32)). Испоставља се да је за даља разматрања погодније записати поље ψ као

$$\psi(x) = \rho(x)e^{iq^*\phi(x)} \quad (2.226)$$

тако да се, у односу на $U(1)$ дејство, величина ϕ трансформише као

$$\phi \rightarrow \phi - \Lambda, \quad (2.227)$$

¹³ $e^{iq^*\pi/e}\psi = e^{2\pi i}\psi = \psi$, док је дејство за $\Lambda = 0$ тривијално.

док се $\rho(x)$ не мења. Међутим, уколико долази до спонтаног нарушења глобалне симетрије, конфигурације ψ су инваријантне у односу на \mathbb{Z}_2 трансформације и мора се извршити идентификација

$$\phi + \frac{\pi}{e} \cong \phi. \quad (2.228)$$

Поље ϕ тада параметризује простор $U(1)/\mathbb{Z}_2$ и представља (једно реално) Голдстоново поље које одговара спонтаном нарушењу глобалне симетрије по обрасцу $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ [Видети Одељак 1.3.4].

Значајне информације о понашању система описаног лагранжијаном (2.224) можемо добити анализирањем спектра, односно структуре неинтерагујућег (квадратног) дела лагранжијана. Коришћењем параметризације (2.226) налазимо

$$\left(\nabla + iq^* \mathbf{A}\right)\psi = \left(\nabla\rho + iq^* \rho \nabla\phi + iq^* \rho \mathbf{A}\right)e^{iq^* \phi}, \quad \left(\partial_t - iq^* V\right)\psi = \left(\dot{\rho} + iq^* \rho \dot{\phi} - iq^* V\rho\right)e^{iq^* \phi} \quad (2.229)$$

и лагранжијан (2.224) постаје

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SC}} = & i\rho\left(\dot{\rho} + iq^* \rho \dot{\phi} - iq^* V\rho\right) - \frac{1}{2m}\left(|\nabla\rho|^2 + (q^*)^2 \rho^2 |\nabla\phi|^2 + 2(q^*)^2 \rho^2 \mathbf{A} \cdot \nabla\phi + (q^*)^2 \rho^2 |\mathbf{A}|^2\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\partial_t \mathbf{A} + \text{grad}V\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\text{rot}\mathbf{A}\right)^2 + \mathcal{V}(\rho). \end{aligned} \quad (2.230)$$

Претпоставимо сад да је дошло до спонтаног нарушења глобалне симетрије по образцу $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, тако да је основно стање поља ψ конфигурација ψ_0 . Ако се ограничимо на конфигурације које описују систем у близини ψ_0 , можемо писати $\rho(x) = |\psi_0| + \eta(x)$ где $\eta(x)$ описује просторно-временске варијације модула поља $\psi(x)$ у близини равнотежне конфигурације ψ_0 . Такође, у наставку ћемо узети $V = 0$ јер се испоставља да је од пресудног утицаја понашање векторског потенцијала¹⁴ [Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)]. Заменом $\rho(x) = |\psi_0| + \eta(x)$ у (2.230), налазимо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SC}} = & - \frac{1}{2m}\left(\nabla\eta \cdot \nabla\eta + (q^*)^2 |\psi_0|^2 \nabla\phi \cdot \nabla\phi + 2(q^*)^2 |\psi_0|^2 \mathbf{A} \cdot \nabla\phi + (q^*)^2 |\psi_0|^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\partial_t \mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\text{rot}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{V}}{d\psi^2} \Big|_{\psi=\psi_0} \eta^2 \\ & + \text{чланови вишег реда.} \end{aligned} \quad (2.231)$$

Као што се види из (2.231), квадратни лагранжијан садржи поља \mathbf{A} , η и ϕ и то тако да поље η улази независно док су ϕ и \mathbf{A} купловани кроз члан $\nabla\phi \cdot \mathbf{A}$. У квадратном лагранжијану се појављује допринос $\propto \eta^2$ што значи да дисперзија за поље η садржи геп [Видети одељак 1.1.3]. Такође, лагранжијан садржи и необичан сабирак $\propto \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. У Одељку 1.3.3 смо закључили да такав члан није калибрационо инваријантан и да се из тог разлога не може појавити у лагранжијану за електромагнетно поље. Ипак, лагранжијан (2.231), као и (2.224) и (2.230), садржи додатне степене слободе који се у односу на калибрационе трансформације мењају на такав начин да се компензије део који потиче од $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. Конкретно, реч је о члановима са $\nabla\phi$. Дакле, калибрациона симетрија лагранжијана *није* нарушена појавом сабирка $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ и , као што ћемо видети,

¹⁴Детаљнија анализа која узима у обзир и скаларни потенцијал, дата је у [Greiter, M. (2005)].

управо је тај допринос одговоран за објашњење Мајснеровог ефекта. Уколико квадратни лагранжијан не би садржао члан $\mathbf{A} \cdot \nabla \phi$, могли бисмо одмах да закључимо да векторско поље \mathbf{A} поседује геп у спектру. Такође, овај члан нам онемогућава и да сагледамо значај поља ϕ .

Јаснију слику о физичким процесима које описује квадратни део лагранжијана (2.231) можемо добити преласком на нове степене слободе. Наиме, као што смо утврдили, лагранжијан (2.231) је калибрационо инваријантан. Спорни члан који куплује поља ϕ и \mathbf{A} можемо елиминисати погодним одабиром функције $\Lambda(x)$. Конкретно, бирајући

$$\Lambda(x) = \phi(x) \quad (2.232)$$

и дефинисањем

$$\tilde{\mathbf{A}}(x) = \mathbf{A}(x) + \nabla \phi(x), \quad \tilde{V} = V - \dot{\phi}, \quad (2.233)$$

лагранжијан (2.230) постаје

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SC}} = & \ i\rho(\dot{\rho} - iq^*\tilde{V}\rho) - \frac{1}{2m} \left(|\nabla\rho|^2 + (q^*)^2\rho^2|\tilde{\mathbf{A}}|^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\partial_t \tilde{\mathbf{A}} + \text{grad} \tilde{V} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\text{rot} \tilde{\mathbf{A}} \right)^2 + \mathcal{V}(\rho) \end{aligned} \quad (2.234)$$

и квадратни допринос близини основног стања, уз избор $\tilde{V} = 0$, износи

$$\mathcal{L}_{\text{SC}}^{(2)} = - \frac{1}{2m} \nabla \eta \cdot \nabla \eta + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{V}}{d\psi^2} \Big|_{\psi=\psi_0} \eta^2 - \frac{M^2}{2} \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} \left(\partial_t \tilde{\mathbf{A}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\text{rot} \tilde{\mathbf{A}} \right)^2, \quad (2.235)$$

при чему смо дефинисали

$$M^2 = \frac{(q^*)^2 |\psi_0|^2}{m}. \quad (2.236)$$

Дакле, погодном калибрационом трансформацијом смо потпуно елиминисали поље ϕ . Иако смо видели да су чланови са $\nabla \phi$ омогућавали калибрациону инваријантност лагранжијана који садржи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, лагранжијан (2.235) и даље поседује локалну симетрију јер је поље $\tilde{\mathbf{A}}$ калибрационо *инваријантно*

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \phi \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi + \nabla \phi - \nabla \chi = \tilde{\mathbf{A}} \quad (2.237)$$

где је χ нова (произвољна) калибрациона функција. Према томе, претпоставка о спонтаном нарушењу глобалне U(1) симетрије у лагранжијану који поседује калибрациону U(1) симетрију нам омогућава да систем опишемо помоћу "масивног" векторског поља $\tilde{\mathbf{A}}$ при чему је Голдстоново ϕ поље елиминисано. Овај феномен је познат под називом Андерсон-Хигсов механизам¹⁵ и као важан се појављује у великом броју теорија [Weinberg, S. (2010)].

¹⁵У литератури се Андерсон-Хигсов механизам често описује као феномен у којем "калибрационо поље добија масу" [Ryder, L.H. (1996); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)]. Ипак, ова интерпретација није сасвим коректна јер, као што се види из (2.237), масивно поље $\tilde{\mathbf{A}}$ је калибрационо инваријантно [Greiter, M. (2005)].

2.4.3 Мајснеров ефекат и бесконачна проводност

Пошто је $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \text{rot} \tilde{\mathbf{A}}$, понашање магнетног поља у унутрашњости суперпроводника можемо описати помоћу векторског поља $\tilde{\mathbf{A}}$ и лагранжијана (2.235). Одговарајућа Ојлер-Лагранжева једначина се налази слично као у Примеру 1.5. Како је

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SC}}^{(2)}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} = -M^2 \tilde{\mathbf{A}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SC}}^{(2)}}{\partial (\partial_t \tilde{\mathbf{A}})} = \partial_t \tilde{\mathbf{A}}, \quad (2.238)$$

док је

$$\mathbf{e}_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SC}}^{(2)}}{\partial (\partial_j \tilde{\mathbf{A}}_i)} = -\mathbf{e}_i \partial_j \left[\text{rot} \tilde{\mathbf{A}} \right]_m \epsilon_{jim} = \epsilon_{jmi} \partial_j \left[\text{rot} \tilde{\mathbf{A}} \right]_m \mathbf{e}_i = \text{rot rot} \tilde{\mathbf{A}}, \quad (2.239)$$

једначина кретања гласи

$$\left[\text{rot rot} + \partial_t^2 + M^2 \right] \tilde{\mathbf{A}} = 0. \quad (2.240)$$

Једначину кретања за магнетно поље добијамо узимањем ротора горње релације (уз коришћење услова $\text{div} \mathbf{B} = 0$). Тако долазимо до

$$M^2 \mathbf{B} + \partial_t^2 \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (2.241)$$

Утицај првог члана у горњој једначини се најлакше види ако посматрамо временски независно поље које се простире дуж z правца тако да је област простора $z \geq 0$ испуњена суперпроводником. Једначина (2.241) се тада своди на две једначине

$$\frac{d^2 B_i}{dz^2} = M^2 B_i, \quad i = x, y, \quad (2.242)$$

чија су решења $B_i(z) \propto \exp[-z/\lambda_L]$, где је $\lambda_L = M^{-1}$ тзв. Лондонова дужина. Дакле, интензитет магнетног поља експоненцијално опада у суперпроводнику и оно ефективно може да продре само до дубине реда λ_L . Према томе, појава "масеног" члана за векторско поље $\tilde{\mathbf{A}}$ доводи до гушења поља у суперпроводнику чиме се објашњава Мајснеров ефекат.

За дискусију о проводности нам је потребна четврта Мексвелова једначина $\text{rot} \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{J}$ и дефиниција проводности $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Мексвелову једначину најлакше можемо добити ако кренемо од једначине кретања (2.240) коју смо добили уз избор $\tilde{V} = 0$, што је еквивалентно са $\partial_t \phi = V$. Узимајући у обзир да је $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \phi$, члан $\partial_t^2 \tilde{\mathbf{A}}$ можемо записати као

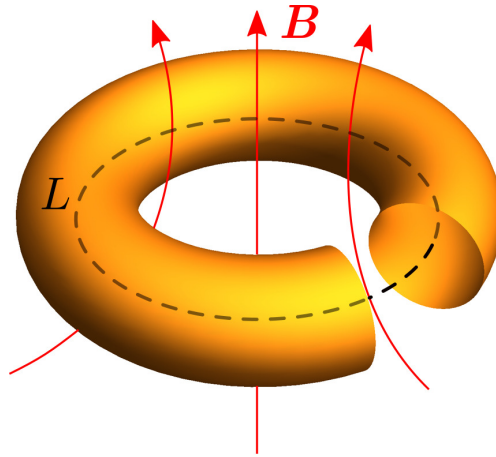
$$\partial_t^2 \tilde{\mathbf{A}} = -\partial_t \left(-\partial_t \mathbf{A} - \partial_t \nabla \phi \right) = -\partial_t \left(-\partial_t \mathbf{A} - \nabla V \right) = -\partial_t \mathbf{E}. \quad (2.243)$$

Једначина (2.240) сада постаје

$$\text{rot} \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E} - M^2 \left(\mathbf{A} + \nabla \phi \right), \quad (2.244)$$

одакле видимо да је густина струје у суперпроводнику

$$\mathbf{J} = -M^2 \left(\mathbf{A} + \nabla \phi \right). \quad (2.245)$$



Слика 2.12: Суперпроводник савијен у торус.

Претпоставимо сада да постоји стабилан, временски независан ток струје. Да би ово било могуће, из (2.245) видимо да \mathbf{A} и ϕ не смеју зависити од времена. Али, тада је

$$\partial_t \mathbf{A} + \partial_t \nabla \phi = \partial_t \mathbf{A} + \nabla V = -\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.246)$$

и на основу дефиниције проводности $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ видимо да у овом случају мора важити $\sigma \rightarrow \infty$ што одговара нултој отпорности.

2.4.4 Квантовање магнетног флукса

Претпоставимо да је суперпроводник савијен у облику торуса [Видети Сл. 2.12] и нека је L затворена контура која пролази дубоко кроз унутрашњост суперпроводника. Уколико је дебљина суперпроводника много већа од Лондонове дужине, у простору кроз који пролази контура L неће бити магнетног поља. Такође, у случају временски независног тока суперпроводне струје, четврта Мексвелова једначина гласи $\text{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J}$. Дакле, у случају стационарног суперпроводног тока, дубоко у унутрашњости суперпроводника не тече струја [Weinberg, S. (2010)]. Пошто је у унутрашњости суперпроводника $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, на основу (2.245) видимо да је у дубоко у суперпроводнику

$$\mathbf{A} = -\text{grad} \phi. \quad (2.247)$$

Односно, векторски потенцијал је у потпуности одређен градијентом поља ϕ . Флукс магнетног поља кроз површину S обухваћену контуром $L = \partial S$ је

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.248)$$

где је $d\mathbf{r}$ елемент лука контуре L . Ако сада искористимо везу (2.247), видимо да се магнетни флукс кроз S своди на интеграл тоталног диференцијала од ϕ ,

$$\Phi = \oint_L d\phi. \quad (2.249)$$

Иако на први поглед делује да овај интеграл ишчезава, морамо имати на уму да при постојању нарушене симетрије поље ϕ задовољава услов (2.228). То значи да се приликом обиласка контуре, у општем случају, вредност поља ϕ може променити за целобројни умножак од π/e . Дакле [Burgess, C.P. (2020)],

$$\Phi = \oint_L d\phi = N\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi}{e} \quad (2.250)$$

где је N цео број. Величина Φ_0 представља најмању могућу вредност тј. квант магнетног флукса. Изражена у SI јениницама, ова величина гласи

$$\Phi_0 = \frac{2\pi}{q^*} \hbar c = \frac{\pi c \hbar}{e} = \frac{hc}{2e}. \quad (2.251)$$

Слични резултати за квантовање флукса се могу добити и када су геометријски односи магнетног поља и суперпроводника другачији [Lévy, L.P. (2000)].

У овом одељку смо укратко описали два феномена који прате примену магнетног поља на материјал који се налази у суперпроводном стању. Ситуација је, наравно, мало сложенија јер не реагују сви суперпроводници подједнако на спољашње магнетно поље. Материјали код којих се јавља потпуни Мајснеров ефекат се називају суперпроводницима I типа и код њих се суперпроводно стање задржава све док магнетно поље не достигне неку критичну вредност. Међутим, постоје и материјали (тзв. суперпроводници II типа) код којих магнетно поље делимично продире у унутрашност (продирање магнетног поља у унутрашњост суперпроводника II типа је могуће само унутар одређеног интервала интензитета магнетног поља). То се догађа кроз посебне конфигурације поља ψ назване вортексима [Greiter, M. (2005); Lévy, L.P. (2000)]. Вортекси у суперпроводнику формирају правилну решетку (тзв. решетка Абрикосова) приликом чега долази до квантовања магнетног флукса. Вортекси, као решења једначина кретања за поља постоје код оба типа суперпроводника, али су само код суперпроводника типа II ова решења енергетски повољна [Weinberg, S. (2010)].

2.5 Спонтано нарушење симетрије у класичним теоријама

2.5.1 Мермин-Вагнерова теорема

За крај овог поглавља смо оставили дискусију о спонтаном нарушењу симетрије у класичним теоријама. У Одељку 1.3.4 посвећеном Голдстоновој теорему смо из претпоставке о спонтаном нарушењу симетрије добили резултате који се тичу дисперзије решења класичних једначина поља у линеарној апроксимацији. Ипак, питање оправданости ове претпоставке је одложено за касније јер га је немогуће дискутовати само у оквирима класичне теорије поља. Наиме, у случају система са континуалном симетријом постоји бесконачно много основних стања која су међусобно еквивалентна (у смислу да је вредност дејства израчуната за свако од њих једнака). Питање могућности одабира једног од тих решења очигледно мора узети у обзир постојање свих а то захтева одређен вид статистичке анализе. Укратко, Мермин-Вагнерова теорема тврди

да не може доћи до спонтаног нарушења континуалне симетрије на $T \neq 0$ у једнодимензионом и дводимензионом системима са краткодметном интеракцијом [Altland, A., Simons, B. (2010); Zinn – Justin, J. (2007); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Zee, A. (2010); Tsvelik, A.M. (2003)]. Ради једноставности, анализу ћемо ограничити на $O(N)$ модел. Такође, пошто желимо да посебно нагласимо разлику између система на $T = 0$ и $T \neq 0$, у овом одељку ћемо скалирати коефицијенте у дејству тако да је партициона функција дата са

$$Z = \int D\phi(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{T} S_\Lambda[\phi]}, \quad (2.252)$$

што значи да смо узели $a \rightarrow a/T$ и $c \rightarrow c/T$ [Видети (2.63) и (2.65)].

Дакле, полазимо од $O(N)$ инваријантног лагранжијана (2.203) и параметризоваћемо поље $\phi(\mathbf{x})$ са $[\boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x}) \ \eta_\parallel(\mathbf{x})]^T$. Даље, претпоставићемо да је основно стање $\mathbf{M}_0 = |\mathbf{M}_0| \mathbf{e}_N = \text{const.}$ као и да су одступања од основног стања мала. То практично значи да ћемо претпоставити да $|\phi(\mathbf{x})| \approx |\mathbf{M}_0|$ тако да поља $\boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x})$ описују мале промене правца у односу на вектор \mathbf{M}_0 [Видети Сл. 2.13]. У овом случају η_\parallel описује варијације параметра уређености. Међутим, η_\parallel и $\boldsymbol{\eta}_\perp$ су сад повезани условом

$$|\boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x})|^2 + (\eta_\parallel(\mathbf{x}))^2 = |\mathbf{M}_0|^2 \quad (2.253)$$

одакле добијамо

$$\eta_\parallel(\mathbf{x}) \approx |\mathbf{M}_0| - \frac{1}{2|\mathbf{M}_0|} \boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x}) \quad (2.254)$$

тако да је параметар уређености

$$\langle \eta_\parallel(\mathbf{x}) \rangle \approx |\mathbf{M}_0| - \frac{N-1}{2|\mathbf{M}_0|} \langle \boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x}) \boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x}) \rangle, \quad (2.255)$$

где је $\boldsymbol{\eta}_\perp$ било која он $N-1$ компоненте вектора $\boldsymbol{\eta}_\perp$. Као што смо већ показали у Одељку 2.3, корелациона функција $\langle \boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x}) \boldsymbol{\eta}_\perp(\mathbf{x}) \rangle$ заправо представља $[\mathbf{A}^{(\perp)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. На основу (2.215) и (2.134) налазимо

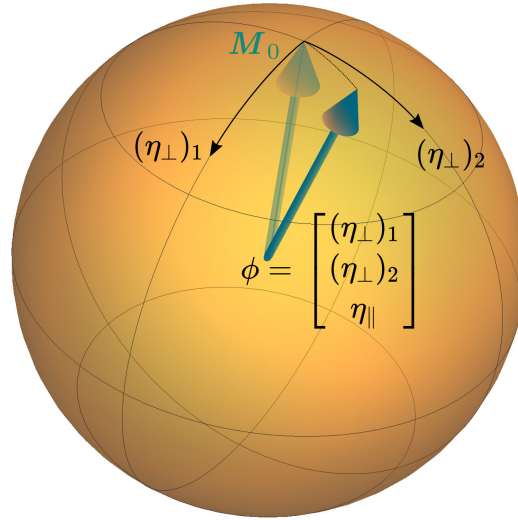
$$[\mathbf{A}^{(\perp)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{T}{c} \int_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{k^2}. \quad (2.256)$$

При томе ћемо, у складу са дискусијим из Одељка 2.2.4, допустити да се у интегралу по таласним векторима узимају само доприноси код којих је $|\mathbf{k}| \leq \Lambda$. Дакле, параметар уређености је апроксимативно дат са

$$\langle \eta_\parallel(\mathbf{x}) \rangle \approx |\mathbf{M}_0| - T \frac{N-1}{2c|\mathbf{M}_0|} \Omega_D \int_0^\Lambda \frac{dk k^{D-1}}{k^2} \quad (2.257)$$

при чему је Ω_D дефинисано у (2.160). Видимо да, без обзира на горњу границу, преостали интеграл није добро дефинисан за $D = 1$ и $D = 2$. Конкретно, интеграл дивергирају при $k \rightarrow 0$ као

$$\frac{1}{k}, \quad D = 1 \quad (2.258)$$



Слика 2.13: Илустрација основног стања M_0 и малог одступања описаног вектором $\phi = [\eta_{\perp} \ \eta_{\parallel}]^T$ за $O(3)$ модел.

и

$$\ln k, \quad D = 2. \quad (2.259)$$

Дакле, наша полазна претпоставка о постојању параметра уређености $\langle \eta_{\parallel}(\mathbf{x}) \rangle$ (тј. претпоставка о постојању дугодометног уређења) на $T \neq 0$, тако да су мала одступања од равнотежне конфигурације M_0 описана пољима $\eta_{\perp}(\mathbf{x})$, је погрешна. Испоставља се да су поправке, израчунате уз претпоставку о постојању дугодометног уређења, произвољно велике. Другим речима, код једнодимензионих и дводимензионих система са континуалним симетријама не може да дође до спонтаног нарушења симетрије на коначним температурама. При $T = 0$, корекција проистекла од $\eta_{\perp}(\mathbf{x})$ ишчезава и закључак о погрешном одабиру стабилног основног стања не важи. Дивергенције попут оних које се појављују у интегралима из (2.257) се називају инфрацрвеним јер су проузроковане понашањем подинтегралних функција при малим вредностима таласног вектора/импулса. Инфрацрвене дивергенције¹⁶ су сигнал лоше одабраног основног стања [Tsvelik, A.M. (2003)] и треба их разликовати од ултраљубичастих дивергенција које се појављују у пертурбативним поправкама [Видети Одељак 2.2.11].

Важно је приметити да Мермин-Вагнерова теорема не износи тврдње у вези система са дискретном симетријом. На пример, на основу егзактног решења је познато да код дводимензионог Изинговог модела постоји спонтано нарушење симетрије (тј. дугодометно уређење) при $T > 0$. Даље, овде је приказана дискусија за класичне системе са континуалном симетријом али се она, уз одговарајуће скалирање параметара модела, може пренети и на квантне верзије модела [Auerbach, A. (2012)]. Такође, Мермин-Вагнерова теорема се односи само на системе на температурама $T > 0$. У следећем поглављу ћемо

¹⁶Термин "инфрацрвене" алудира на чињеницу да су таласне дужине одговарајућих конфигурација мале. На језику квантне теорије то значи да такве конфигурације носе малу енергију и као такве описују локална одступања од правца вектора M_0 .

видети да дугодометно уређење постоји на $T = 0$ у случају дводимензионог (квантног) Хајзенберговог феромагнета и антиферомагнета. Оригинални доказ Мермин-Вагнерове теореме [Mermin, N.D., Wagner, H. (1966)] се односи на квантни Хајзенбергов феромагнет и антиферомагнет и заснива се на примени Богољубовљеве неједнакости [Видети и Nolting, W., Ramakanth, A. (2009)]. Хохенберг [Hohenberg, P.C. (1967)] је пре Мермина и Вагнера искористио неједнакост Богољубова да докаже одсуство дугодометног уређења у случају дводимензионог суперфлуида. Примена Богољубовљеве неједнакости омогућава да се строго покаже како параметар уређености ишчезава а не само да поправке на \mathbf{M}_0 дивергирају. Такође, постоји и третман класичних модела заснован на Богољубовљевој неједнакости [Mermin, ND. (1967)]. Коначно, Колмен [Coleman, S. (1973)] је доказао аналогно тврђење у случају 1+1 димензионе Лоренц-инваријантне квантне теорије поља. Због овога се резултат из овог одељка означава и као Колмен-Хохенберг-Мермин-Вагнерова (СНМВ) теорема.

Иако Мермин-Вагнерова теорема искључује могућност спонтаног нрушења симетрије на коначним температурама у случају дводимензионих система, она не искључује могућност неке врсте фазног прелаза. Познат пример је фазни прелаз у $O(2)$ моделу у две просторне димензије који не укључује спонтано нарушење симетрије (такозвани ВКТ прелаз). У овом случају систем прелази из неуређене фазе (у којој корелациона функција опада експоненцијално) у нискотемпературску фазу са квазни-дугодометним уређењем (фаза у којој корелациона функција опада као $|\mathbf{x}|^{-\gamma}$). Фазни прелази овог типа се означавају као тополошки и не могу се описати помоћу Ландауове теорије [Wen, X. G. (2007); Altland, A., Simons, B. (2010); Herbut, I. (2007)].

2.5.2 $O(N)$ нелинеарни σ модел

У Одељку 2.3 смо увели $O(N)$ модел чије је основно стање константни N димензиони вектор \mathbf{M}_0 . Међутим, на основу структуре самог лагранжијана $O(N)$ модела се не може извести закључак о правцу и смеру вектора \mathbf{M}_0 . Према томе, спонтано нарушење симетрије у овом случају се може посматрати и као одабир једне тачке на $N - 1$ димензионој сфери S^{N-1} . Такође, на основу релација (2.214) и (2.215) смо видели да лагранжијан за лонгитудинално поље η_{\parallel} садржи "масени" члан $-2a(T)/c = |\mathbf{M}_0|^2 b / (3c)$ док одговарајући квадратни допринос $\boldsymbol{\eta}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp}$ не улази у лагранжијан за трансферзална поља $\boldsymbol{\eta}_{\perp}$. Ослањајући се на аналогије из Одељка 1.3.4, закључили смо да трансферзална поља одговарају Голдстоновим пољима за нарушење симетрије по обрасцу $O(N) \rightarrow O(N-1)$. Сада ћемо видети како се добија $O(N)$ инваријантна статистичка сума за конфигурације које одговарају Голдстоновим пољима. Модел који описује утицај Голдстонових поља се, из историјских разлога, назива нелинеарни σ модел [Weinberg, S. (2010)].

Пре свега, на основу дискусије из Одељка 1.3.4 знамо да се конфигурације које одговарају Голдстоновим пољима могу добити дејством елемената групе $O(N)$ на вакуумску конфигурацију \mathbf{M}_0 . Пошто се вектор \mathbf{M}_0 који описује одабрано основно стање може поистоветити са тачком на S^{N-1} , а дејство групе $O(N)$ на S^{N-1} је транзитивно [Видети Одељак Д], видимо да ће дејство произвољног елемента од $O(N)$ на основно стање модела (које нарушава симетрију) поново дати тачку која припада простору S^{N-1} . Дакле, у случају нарушења симетрије по обрасцу $O(N) \rightarrow O(N-1)$ простор конфигурација Голдстонових поља је $S^{N-1} \cong O(N)/O(N-1)$ [Isham, C. (1999); Arvanitoyeorgos, A. (2003)]. То значи да лагранжијан за Голдстонова поља мора бити $O(N)$ инваријантна функција

са пољима која узимају вредности на S^{N-1} . Како бисмо пратили стандардну нотацију¹⁷, Голдстонова поља ћемо у наставку означити са $\boldsymbol{\pi}$ уместо са $\boldsymbol{\eta}_\perp$ и узети $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{e}_N$ (тј. $|\boldsymbol{M}_0| = 1$).

Најједноставнији начин да Голдстонова поља $\boldsymbol{\pi}$ ограничимо на сферу S^{N-1} је да уведемо додатно поље σ (које игра сличну улогу као η_\parallel) и да конструишемо N димензионо векторско поље \boldsymbol{n} као

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) \ \sigma(\boldsymbol{x})]^\top, \quad (2.260)$$

Партициона функција за Голдстонова поља се сада може записати и као

$$Z = \int \mathcal{D}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \delta[\boldsymbol{n}^2(\boldsymbol{x}) - 1] e^{-\frac{1}{T} S_\Lambda[\boldsymbol{n}]}, \quad (2.261)$$

где је $\delta[\boldsymbol{n}^2(\boldsymbol{x}) - 1]$ "функционална" делта функција [Видети (2.81)] која обезбеђује услов

$$|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})|^2 = \boldsymbol{\pi}^2(\boldsymbol{x}) + \sigma^2(\boldsymbol{x}) = 1 \quad (2.262)$$

у свакој тачки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, док је дејство изражено помоћу лагранжијана који је сличног облика као и лагранжијан за трансферзална поља $\boldsymbol{\eta}_\perp$ (подсетићемо се да је $A^{(\perp)} = -c\nabla^2$)

$$S_\Lambda[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2} (\boldsymbol{n}, A^{(\perp)} \boldsymbol{n}) = \frac{c}{2} \int_{\boldsymbol{x}} |\nabla \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})|^2. \quad (2.263)$$

Изражени помоћу поља \boldsymbol{n} , дејство (2.263) и партициона функција (2.261) су очигледно инваријантни у односу на глобалне $O(N)$ трансформације. Ако $\mathcal{O} \in O(N)$, важи $\boldsymbol{n} \rightarrow \mathcal{O}\boldsymbol{n}$, па $\nabla \boldsymbol{n} \rightarrow \nabla \mathcal{O}\boldsymbol{n} = \mathcal{O}\nabla \boldsymbol{n}$ и

$$(\boldsymbol{n}, A^{(\perp)} \boldsymbol{n}) \rightarrow (\mathcal{O}\boldsymbol{n}, \mathcal{O}A^{(\perp)} \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}, A^{(\perp)} \boldsymbol{n}). \quad (2.264)$$

Такође, због $|\det \mathcal{O}| = 1$, не мења се ни фактор $\mathcal{D}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})$ у (2.261). Иако дејство (2.263) подсећа на неинтерагујући део $O(N)$ дејства, нелинеарни услов (2.262) уводи нетривијалну интеракцију¹⁸ међу Голдстоновим пољима. За $D > 2$, када постоји дугодометно уређење, утицај интеракције се може дискутовати пертурбативно, по узору на Одељак 2.2.11. При томе је неопходно на неки начин елиминисати поље σ . Наравно, елиминација поља σ се мора урадити пажљиво како не би дошло до губитка $O(N)$ симетрије. Рецимо, у [Radošević, S.M., Pantić M.R., Pavkov – Hrvojević, M.V., Kapor, D.V. (2013); Radošević, S.M. (2015)] је показано како неке стандардне апроксимације¹⁹ у случају $O(3)$ феромагнета уносе грешке управо јер нарушавају $O(3)$ симетрију дејства и слободне енергије.

¹⁷Не треба мешати канонски импулс поља $\boldsymbol{\pi}$, који смо увели у претходном поглављу, са Голдстоновим пољем.

¹⁸Нелинеарни услов (2.262), заједно са параметризацијом (2.260) и групом симетрије даје име моделу.

¹⁹Мисли се на апроксимацију хаотичних фаза (RPA), Каленову и Кондо-Јамађи апроксимацију; видети референце цитиране у [Radošević, S.M., Pantić M.R., Pavkov – Hrvojević, M.V., Kapor, D.V. (2013); Radošević, S.M. (2015)].

Дакле, претпоставимо да је $D > 2$ и да је дошло до спонтаног нарушења симетрије. Одаберимо за основно стање тачку $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ уз $\sigma > 0$ што одговара „северном полу“ сфере S^{N-1} . Тада је

$$\sigma(\mathbf{x}) = +\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})} \quad (2.265)$$

и дејство, изражено само помоћу поља $\boldsymbol{\pi}$ описује интеракције Голдстонових поља у близини овако одабране равнотежне конфигурације. Партициона функција (2.261) сада постаје

$$Z = \int D\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) D\sigma(\mathbf{x}) \delta[\boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x}) + \sigma^2(\mathbf{x}) - 1] e^{-\frac{1}{T} S_\Lambda[\boldsymbol{\pi}, \sigma]}. \quad (2.266)$$

Пишући функционалну делта функцију као $\delta[f(\sigma)]$, где је $f(\sigma) = \sigma^2 - (1 - \boldsymbol{\pi}^2)$, уз коришћење особине (1.83) и интеграцију по σ , налазимо

$$Z = \int \frac{D\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})}} e^{-\frac{1}{T} S_\Lambda[\boldsymbol{\pi}]}, \quad (2.267)$$

где је

$$S_\Lambda[\boldsymbol{\pi}] = \frac{c}{2} \int_{\mathbf{x}} \left[\partial_i \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_i \boldsymbol{\pi} + \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})} \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})} \right], \quad (2.268)$$

при чему смо као небитан игнорисали фактор $1/2$ уз $D\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ док је $i = 1, 2, \dots, D$. На овај начин смо партициону функцију изразили само помоћу Голдстонових поља. Међутим, пошто $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \in S^{N-1}$, остало је да покажемо да је партициона функција инваријантна у односу на глобалне $O(N)$ трансформације. При томе ћемо $O(N)$ инваријантност партиционе функције дискутовати на нивоу алгебре $\mathfrak{o}(N)$, по узору на Одељак 1.3.4.

Алгебру $\mathfrak{o}(N)$ можемо поделити на два дела: елементе алгебре који анихилирају основно стање и остатак. Елементи алгебре $\mathfrak{o}(N)$ који анихилирају основно стање чине базис алгебре $\mathfrak{o}(N-1)$ и има их $(N-1)(N-2)/2$. Њих ћемо у наставку означити са $\{\mathbf{Y}_\alpha\}$. Преостали елементи генеришу простор $\mathfrak{o}(N)/\mathfrak{o}(N-1)$ димензије $N-1$ и биће означени са $\{\mathbf{X}_A\}$. У општем случају, инфинитезимална глобална $O(N)$ трансформација вектора $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N$ је дата са [Видети (1.221)]

$$\delta n^a(\mathbf{x}) = \theta^\alpha (\mathbf{Y}_\alpha)^a_b n^b(\mathbf{x}) + \theta^A (\mathbf{X}_A)^a_b n^b(\mathbf{x}), \quad a = 1, 2, \dots, N, \quad (2.269)$$

одакле треба да нађемо законе трансформације за $\boldsymbol{\pi}$ и σ .

Посматрајмо прво трансформације које индукују елементи од $\mathfrak{o}(N-1)$. Пошто је $\mathbf{Y}_\alpha \sigma \mathbf{e}_N = 0$, закључујемо да је $\delta\sigma = \delta n^N = 0$. Такође, експоненцирањем ових елемената алгебре се добија група $O(N-1)$ [Видети Теорему Д.1] која је репрезентована матрицама

облика²⁰.

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \tilde{\mathbf{O}} & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.270)$$

где је $\tilde{\mathbf{O}}$ матрица која репрезентује трансформацију из $O(N-1)$. Према томе, $O(N-1)$ трансформација вектора $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ је линеарна $\boldsymbol{\pi} \rightarrow \tilde{\mathbf{O}}\boldsymbol{\pi}$ и $\delta\pi^A = \theta^\alpha (\mathbf{Y}_\alpha)^A_B \pi^B$, где $A, B = 1, 2, \dots, N-1$. Инваријантност статистичке суме (2.267) у односу на $O(N-1)$ трансформације, које не мењају основно стање, је сада очигледна.

Трансформације које индукују елементи \mathbf{X}_A одговарају ротацијама N димензионог вектора $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ у равнима $1N, 2N, 3N, \dots, (N-1)N$. Пошто су те матрице антисиметричне, увек их можемо изабрати тако да једини елемент различит од нуле у N -тој врсти буде -1 а одговарајући елемент у N -тој колони да буде $+1$ [Видети Пример 2.7]. То значи да можемо бирати

$$(\mathbf{X}_A)^A_N = 1, \quad (\mathbf{X}_A)^N_A = -1, \quad (\text{без суме по } A) \quad (2.271)$$

док остали матрични елементи ишчежавају. Тако, из $\delta n^a(\mathbf{x}) = \theta^A (\mathbf{X}_A)^a_b n^b(\mathbf{x})$, за $a = A = 1, 2, \dots, N-1$, налазимо трансформације линеарне по θ^A

$$\delta\pi^A = \theta^B (\mathbf{X}_B)^A_N n^N = \theta^A \sigma = \theta^A \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}. \quad (2.272)$$

Слично, за $a = N$, имамо [Zinn – Justin, J. (2007)]

$$\delta\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} = \delta n^N = \theta^B (\mathbf{X}_B)^N_C n^C = \theta^B (\mathbf{X}_B)^N_B \pi^B = -\theta^B \pi^B = -\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\pi} \equiv \delta\sigma. \quad (2.273)$$

Пример 2.7. Посматрајмо специјални случај нарушења симетрије $O(4) \rightarrow O(3)$. Базисни елементи од $\mathfrak{o}(4)$ у једној четвородимензионој репрезентацији се могу груписати као

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.274)$$

где $\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3\}$ чине базис од $\mathfrak{o}(3)$ а $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ сачињавају базис од $\mathfrak{o}(4)/\mathfrak{o}(3)$. Лако је видети да генератори $\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3\}$ анихилирају вектор $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ и генеришу ротације у равнима $1-2, 1-3$ и $2-3$, док $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ генеришу ротације у равнима $1-4, 2-4$ и $3-4$. ■

²⁰Ово се лако може видети на следећи начин. Матрице \mathbf{Y}_α анихилирају вектор \mathbf{e}_N што значи да су сви елементи у последњој врсти и последњој колони ових матрица једнаки нули, тј. за њих важи $(\mathbf{Y}_\alpha)_{aN} = (\mathbf{Y}_\alpha)_{Na} = 0$, за свако $a = 1, 2, \dots, N$. Према томе, $(\mathbf{Y}_\alpha \mathbf{Y}_\beta)_{aN} = (\mathbf{Y}_\alpha)_{ac} (\mathbf{Y}_\beta)_{cN} = 0$, као и $(\mathbf{Y}_\alpha \mathbf{Y}_\beta)_{Na} = (\mathbf{Y}_\alpha)_{Nc} (\mathbf{Y}_\beta)_{ca} = 0$. Другим речима, и производи ових матрица имају све нуле у последњој врсти и колони па њихово експоненцирање даје елемент групе $O(N-1)$ облика наведеног у (2.270). Видети и Пример 2.7.

Имајући правила по којима се трансформишу $\boldsymbol{\pi}$ и $\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}$, можемо показати инваријантност дејства (2.268). Први сабирак се трансформише као

$$\begin{aligned} \partial_i \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_i \boldsymbol{\pi} &\rightarrow \partial_i (\pi^A + \delta \pi^A) \partial_i (\pi^A + \delta \pi^A) \\ &= \partial_i \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_i \boldsymbol{\pi} + 2 \partial_i (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\theta}) \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.275)$$

на основу (2.272). Слично,

$$\begin{aligned} \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} &\rightarrow \partial_i (\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} - \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\pi}) \partial_i (\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} - \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\pi}) \\ &= \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} - 2 \partial_i (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\theta}) \partial_i \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} + \mathcal{O}(\theta^2), \end{aligned} \quad (2.276)$$

при чему смо искористили (2.273). Инваријантност дејства $S_\Lambda[\boldsymbol{\pi}]$ у односу на трансформације из подскупа $O(N)/O(N-1)$ се сада показује заменом (2.275) и (2.276) у (2.268).

Остало је да покажемо инваријантност статистичке суме Голдстонових поља. Будући да смо видели да је дејство инваријантно, преостаје само да нађемо закон трансформације фактора $D\boldsymbol{\pi}/\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}$. Како бисмо нашли закон трансформације за $D\boldsymbol{\pi}$, приметимо да је он дефинисан по узору на (2.70)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d^{N-1} \boldsymbol{\pi}_i \equiv \prod_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^D} \int_{-\infty}^{\infty} d^{N-1} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) \equiv \int D\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}), \quad (2.277)$$

при чему је $d^{N-1} \boldsymbol{\pi}$ елемент интеграције по S^{N-1} . У односу на смену промењивих, $\boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}$, где је $\varphi^A = \pi^A + \delta \pi^A$ а $\delta \pi^A$ је дато у (2.272), $d^{N-1} \boldsymbol{\pi}$ се трансформише као

$$d^{N-1} \boldsymbol{\pi} \rightarrow d^{N-1} \boldsymbol{\varphi} = \left| \det \left(\frac{\partial \varphi^A}{\partial \pi^B} \right) \right| d^{N-1} \boldsymbol{\pi}. \quad (2.278)$$

Пошто је

$$\frac{\partial \varphi^A}{\partial \pi^B} = \delta_B^A - \frac{\theta^A \pi_B}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}}, \quad (2.279)$$

користећи познати идентитет $\det(I + \epsilon M) = 1 + \epsilon \text{tr}(M) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, добијамо

$$d^{N-1} \boldsymbol{\pi} \rightarrow \left(1 - \frac{\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\theta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}} \right) d^{N-1} \boldsymbol{\pi} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (2.280)$$

На основу (2.273) следи да

$$\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \rightarrow \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\theta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}} \right) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.281)$$

па из последње две релације видимо да је и фактор $D\boldsymbol{\pi}/\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}$ инваријантан што значи да се ни партициона функција (2.267) не мења приликом инфинитезималних $O(N)$ трансформација Голдстонових поља

$$\pi^A \rightarrow \pi^A + \delta \pi^A, \quad \delta \pi^A = \theta^A \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} + \theta^\alpha (\mathbf{Y}_\alpha)^A_B \pi^B. \quad (2.282)$$

Приметићемо да трансформације (2.282) нису линеарне јер S^{N-1} није векторски простор. Управо због тога је потребан фактор $(1 - \boldsymbol{\pi}^2)^{-1/2}$ који осигурава инваријантност статистичке суме. Коначно, дејство (2.268) се може записати и као

$$S[\boldsymbol{\pi}] = \frac{c}{2} \int_x \left[\partial_i \boldsymbol{\pi} \partial_i \boldsymbol{\pi} + \frac{(\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_i \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_i \boldsymbol{\pi})}{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \right] = \frac{c}{2} \int_x \partial_i \pi^A G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) \partial_i \pi^B, \quad (2.283)$$

где су

$$G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) = \delta_{AB} + \frac{\pi_A \pi_B}{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \quad (2.284)$$

компоненте $O(N)$ инваријантног метричног тензора на простору $O(N)/O(N-1) \cong S^{N-1}$ [Zinn – Justin, J. (2007)]. У односу на $O(N)$ дејство, компоненте метричког тензора се трансформишу као $G_{AB} \rightarrow G_{AB} + \delta G_{AB} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^2)$. За трансформације из $O(N-1)$, коефицијенти δG_{AB} су дати са

$$\delta G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) = \frac{\pi_A \delta \pi_B + \pi_B \delta \pi_A}{1 - \boldsymbol{\pi}^2}, \quad (2.285)$$

уз $\delta \pi_A = \theta^\alpha (\mathbf{Y}_\alpha)^B_A \pi_B$. Слично, за трансформације из $O(N)/O(N-1)$, промена компоненти метричког тензора је

$$\delta G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) = \frac{\pi_A \delta \pi_B + \pi_B \delta \pi_A}{1 - \boldsymbol{\pi}^2} + \frac{2\pi_A \pi_B}{[1 - \boldsymbol{\pi}^2]^{3/2}} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\pi}, \quad (2.286)$$

где је $\delta \pi_A = \theta_A \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}$. Користећи законе трансформације Голдстонових поља и компоненти метричког тензора, директно се показује инваријантност дејства

$$\int_x \partial_i (\pi^A + \delta \pi^A) \left(G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) + \delta G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) \right) \partial_i (\pi^B + \delta \pi^B) = \int_x \partial_i \pi^A G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) \partial_i \pi^B + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^2). \quad (2.287)$$

Према томе, интеграл који је израчунат помоћу трансформисаних компоненти метричког тензора и трансформисаних Голдстонових поља једнак је са интегралом израчунатим помоћу оригиналних поља и компоненти метричког тензора. Пошто су трансформације поља и компоненти метричког тензора индуковане елементима групе $O(N)$, овај метрички тензор се означава као $O(N)$ инваријантан [Arvanitoyeorgos, A. (2003)]. Помоћу детерминанте метричког тензора је могуће изразити и интеграцију у функционалном интегралу за партициону функцију. Наиме, на основу (2.285) и познатог израза за детерминанту матричног оператора [Радошевић, С., Мали, П. (2020)], имамо

$$\begin{aligned} \det G &= \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{N-1}} G_{1A_1} G_{2A_2} \dots G_{N-1, A_{N-1}} \\ &= \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{N-1}} \left(\delta_{1A_1} + \frac{\pi_1 \pi_{A_1}}{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \right) \left(\delta_{2A_2} + \frac{\pi_2 \pi_{A_2}}{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \right) \dots \left(\delta_{N-1, A_{N-1}} + \frac{\pi_{N-1} \pi_{A_{N-1}}}{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \right). \end{aligned}$$

Ако се детаљно распише горњи производ, видимо да се састоји од три врсте чланова. Најпре, ту је сабирак који садржи само производ Кронекерових симбола. Када се помножи са антисиметричним симболом $\epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{N-1}}$, даће фактор 1. Даље, имамо $N - 1$ сабирака који су квадратни по Голдстоновим пољима. Они сви имају исту структуру: производ од $N - 2$ Кронекерова симбола и два Голдстонова поља од којих једно има

фиксан а друго неми индекс. Услед Кронекерових симбола, неми индекс Голдстоновог поља у том сабирку мора узети вредност коју има фиксни индекс. Рецимо,

$$\epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{N-1}} \frac{\pi_1 \pi_{A_1}}{1 - \pi^2} \delta_{2 A_2} \delta_{3 A_3} \dots \delta_{N-1, A_{N-1}} = \frac{\pi_1 \pi_1}{1 - \pi^2}.$$

Укупан допринос свих сабирака квадратних по Голдстоновим пољима је $\pi^2/(1 - \pi^2)$. Коначно, имамо сабирке који садрже паран број Голдстонових поља који је већи од 2. Пошто сви ти сабирци имају облик контракције парног и непарног тензора, они ишчезавају. На пример

$$\epsilon_{A_1 A_2 A_3 \dots A_{N-1}} \frac{\pi_1 \pi_{A_1} \pi_2 \pi_{A_2} \pi_3 \pi_{A_3}}{(1 - \pi^2)^3} \delta_{4 A_4} \dots \delta_{N-1, A_{N-1}} = \epsilon_{ABC4\dots N-1} \pi_A \pi_B \pi_C \frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{(1 - \pi^2)^3} = 0.$$

јер су коефицијенти $\epsilon_{ABC4\dots N-1}$ антисиметрични а производи $\pi_A \pi_B \pi_C$ симетрични у односу на пермутације индекса A, B и C . Дакле,

$$\det G = 1 + \frac{\pi^2}{1 - \pi^2} = \frac{1}{1 - \pi^2}, \quad (2.288)$$

и партициона функција (2.267) се може записати у компактном облику

$$\begin{aligned} Z &= \int D\pi \sqrt{\det G(\pi)} e^{-\frac{1}{T} S_\Lambda[\pi]}, \\ S_\Lambda[\pi] &= \frac{c}{2} \int_x \partial_i \pi^A(x) G_{AB}(\pi(x)) \partial_i \pi^B(x), \end{aligned} \quad (2.289)$$

при чему је интеграција по Голдстоновим пољима дефинисана као

$$\int D\pi \sqrt{\det G(\pi)} =: \prod_{x \in \mathbb{R}^D} \int_{-\infty}^{\infty} d^{N-1} \pi(x) \sqrt{\det G(\pi(x))} \quad (2.290)$$

и инваријантна је у односу на $O(N)$ трансформације.

Дискусија из овог одељка се може проширити и на спонтано нарушење симетрије по обрасцу $G \rightarrow H$. Претпоставимо да је конфигурациони простор за Голдстонова поља у овом случају многострукост M и нека $p \in M$ представља произвољно одабрану тачку која одговара основном стању. Како се било која друга тачка из M може добити G дејством на p , то значи да G делује на M транзитивно. Даље, по дефиницији спонтаног нарушења симетрије, одабрано основно стање мора бити H инваријантно. На основу познатог резултата за транзитивна дејства следи да је $M \cong G/H$ [Видети Arvanitoyeorgos, A. (2003); Isham, C. (1999), као и Додатак Д]. То значи да је лагранжијан за Голдстонова поља (најопштија) могућа G инваријантна функција изражена помоћу Голдстонових поља која узимају вредности из простора G/H . Одговарајућа партициона функција и дејство имају исти општи облик наведен у (2.289), при чему сада $G_{AB}(\pi)$ представљају компоненте G инваријантног метричког тензора на G/H [McKane, A., Stone, M. (1980); Honerkamp, J. (1972)]. Такође, у дејство нелинеарног сигма модела се могу укључити и чланови који поседују више од два извода, као и чланови који су инваријантни (у односу на G трансформације) само до на тотални извод. Наравно, могу се додати и чланови који садрже изводе Голдстонових поља по времену и таква дејства описују класичне теорије поља [видети Пример 1.15 и Одељак 3.8].

Нелинеарни сигма модели имају велику улогу у опису нискотемпературског понашања великог броја система попут феромагнета, антиферомагнета, суперфлуида, суперпроводника, фонона у кристалима и флуидима, као и различитих проблема из нуклеарне физике и физике елементарних честица [Burgess, C.P. (2000); Tsvelik, A.M. (2003); Zinn – Justin, J. (2007); Weinberg, S. (2010); Brauner, T. (2010); Auerbach, A. (2012); Watanabe, H., Murayama, H. (2014)].

3

Канонско квантовање класичних система

У овом поглављу је дат и трећи поглед на Голдстонову теорему – након класичне теорије поља и Ландауове теорије за $O(N)$ модел, дискутоваћемо квантну верзију у канонском формализму. Голдстонова теорема у класичној теорији поља даје ограничења на дисперзиону релацију и равне таласе који су добијени као решења линеаризованих једначина кретања. Са друге стране, видели смо и да се она манифестује у Ландауовој теорији кроз дивергенцију трансферзалне суцептибилности. У квантној теорији Голдстонова теорема тврди да се у спектру елементарних ексцитација појављују честице чија енергија нема геп. Ове честице се називају Голдстонови бозони и имају пресудну улогу у нискоенергетском сектору дате теорије. У зависности од обрасца нарушења симетрије и природе основног стања, могуће је предвидети неке опште карактеристике Голдстонових бозона попут понашања дисперзионе релације у дуготаласној апроксимацији и броја различитих Голдстонових честица. У том смислу резултати презентовани у овом поглављу представљају својеврсну синтезу свега изложеног у претходном делу текста – равним таласима из класичне теорије поља након квантовања придружимо честице чије особине, са друге стране, одређују термодинамичке карактеристике макроскопског система. На почетку поглавља је уведен формализам канонског квантовања класичних поља. Као и у случају квантне механике, прво ћемо дефинисати векторе у одговарајућем Хилбертовом простору (тзв. стања система) као и операторе који делују на њих (динамичке промењиве – поља). При томе ћемо цео поступак спровести у Хајзенберговој слици. Након осврта на процедуру канонског квантовања класичних система и честичне интерпретације квантног поља, дискутована је квантна верзија Голдстонове теореме. Општи резултати који су при томе добијени су на крају поглавља илустровани примерима Хајзенберговог феромагнета и антиферомагнета.

3.1 Шредингерова и Хајзенбергова слика

У квантној теорији поља, као и у квантној механици, користе се три еквивалентна описа временске еволуције система. То су Шредингерова, Хајзенбергова и слика интеракције (Која се некад назива и Дираковом сликом [Greiner, W. (1996)]). Будући да у овом поглављу нећемо разматрати теорију пертурбација, биће дато кратко поређење

Шредингерове и Хајзенбергове слике са циљем да се укаже на разлог употребе Хајзенберговог приступа у квантној теорији поља.

3.1.1 Шредингерова слика

У Шредингеровој формулацији квантне теорије динамичка еволуција система се огледа у временској промени функције стања, док се оператори који представљају физичке величине не мењају са временом¹. Функција стања $|\psi(t)\rangle$ задовољава Шредингерову једначину

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = \hat{H} |\psi(t)\rangle_S, \quad (3.1)$$

где је H хамилтонијан система који по претпоставци не зависи од времена а индекс s означава величине у Шредингеровој слици. Ако је позната функција стања у тренутку t_0 , она ће у произвољном тренутку $t > t_0$ бити дата формалним решењем Шредингерове једначине [Шиф, Л. (1968)]

$$|\psi(t)\rangle_S = \exp \left[-i \hat{H} (t - t_0) \right] |\psi(t_0)\rangle \equiv \tilde{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_S. \quad (3.2)$$

Као што видимо, оператор $\tilde{U}(t, t_0)$ описује временску еволуцију система јер преводи стање $|\psi(t_0)\rangle_S$ у стање $|\psi(t)\rangle_S$ при $t > t_0$ [Weinberg, S. (2008)].

3.1.2 Хајзенбергова слика

Насупрот Шредингеровом прилазу, функција стања је константна у Хајзенберговој слици, док оператори физичких величина задовољавају Хајзенбергову једначину кретања [Шиф, Л. (1968)]

$$i \frac{d\hat{O}_H}{dt} = i \frac{\partial \hat{O}_H}{\partial t} + [\hat{O}_H, \hat{H}]_-, \quad (3.3)$$

при чему су $\hat{O}_H(t)$ и \hat{H} написани у Хајзенберговој слици а $[\ ,]_-$ означава комутатор. У свим случајевима који су разматрани овде оператори не зависе експлицитно од времена, тако је $\partial \hat{O}_H / \partial t = 0$. Слично као и Шредингерова једначина, Хајзенбергова једначина (3.3) има формално решење [Greiner, W. (1996)]

$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{O}_H(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (3.4)$$

што се лако показује диференцирањем. Веза између динамичких величина у Хајзенберговој и Шредингеровој слици се може успоставити на основу захтева да матрични елементи оператора (који представљају физички мерљиве величине) не зависе од избора слике. Кренимо од Шредингеровог прилаза. Функција стања се мења према (3.2), док је оператор физичке величине \hat{O}_S константан, па се може параметризовати почетним тренутком t_0 , тј $\hat{O}_S \equiv \hat{O}_S(t_0)$. На овај начин се за матричне елементе добија

$${}_s \langle \psi(t) | \hat{O}_S(t_0) | \psi(t) \rangle_S = {}_s \langle \psi(t_0) | e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{O}_S(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | \psi(t_0) \rangle_S, \quad (3.5)$$

¹Осим евентуалне експлицитне временске зависности.

где је искоришћена веза из (3.2). Претпоставимо сада да се Шредингерова и Хајзенбергова слика поклапају у тренутку t_0 , након чега у Шредингеровој слици еволуира вектор стања а у Хајзенберговој оператор посматране физичке величине. Тако из $\hat{O}_S(t_0) = \hat{O}_H(t_0)$ и $|\psi(t_0)\rangle_S = |\psi(t_0)\rangle_H$, као и (3.5) и (3.4), налазимо везе између Шредингерових и Хајзенбергових величина у произвољном тренутку $t > t_0$

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle_H, \quad \hat{O}_S(t) \equiv \hat{O}_S = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}\hat{O}_H(t)e^{i\hat{H}(t-t_0)}, \quad (3.6)$$

односно

$$|\psi\rangle_H \equiv |\psi(t_0)\rangle_H = e^{i\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S, \quad \hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)}\hat{O}_S(t_0)e^{-i\hat{H}(t-t_0)}. \quad (3.7)$$

Из добијених веза се види да је хамилтонијан исти у оба формализма, што оправдава испуштање индекса слике уз \hat{H} .

Основни разлог за коришћење Хајзенберговог прилаза у релативистичкој квантној теорији поља је тај што се у њему очигледно остварује Лоренцова инваријантност равноправним третманом временске и просторних координата [Weinberg, S. (2008)]. Иако Лоренцова инваријантност није од посебног значаја у нерелативистичкој теорији поља, Хајзенбергов приказ и тада има више предности. Рецимо, омогућава да се добију приближна решења различитих интересантних модела тако што се врше апроксимације у једначинама кретања [Nolting, W., Ramakanth, A. (2009)]. Такође, раздвајањем неинтеграјућег и интерагујућег дела у хамилтонијану се може конзистентно увести теорија пертурбација [Abrikosov, A., Gorkov, L., Dzyaloshinski, I. (1963); Fetter, A., Walecka, J. (1971); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)]. Коначно, испоставља се да неки нерелативистички системи (попут изотропног Хајзенберговог антиферромагнета) у граници континуума могу бити описани ефективном теоријом која јесте Лоренц-инваријантна [Auerbach, A. (2012)] па се у таквом случају могу користити неки готови резултати из релативистичке теорије поља. Пошто ћемо у наставку поглавља искључиво користити Хајзенбергову слику, индекс $_H$ неће бити писан.

3.1.3 Једночестична и вишечестична стања

Приликом преласка са класичне на квантну теорију поља, динамичке величине из класичне теорије идентификујемо као операторе у квантној теорији. Са друге стране, честице у квантној теорији идентификујемо са стањима у одговарајућем Хилбертовом простору. Будући да четири компоненте квадриквектора импулса међусобно комутирају, погодно је таласне функције (тј. стања) изразити помоћу њихових својствених вектора [Weinberg, S. (2008)]. Једночестично стање је, по дефиницији, вектор Хилбертовог простора H који има добро дефинисану вредност импулса (таласног вектора), односно то је својствени вектор оператора квадри-импулса²

$$\hat{P}^\mu |p; \sigma\rangle = p^\mu |p; \sigma\rangle, \quad (3.8)$$

где σ означава скуп додатних квантних бројева (рецимо спин честице). При томе, у квантној механици, $\hat{P}^i |p; \sigma\rangle = p^i |p; \sigma\rangle$, $i = 1, 2, 3$ представља својствени проблем оператора $-i\partial/\partial x^i$, док је $\hat{P}^0 |k; \sigma\rangle = p^0 |p; \sigma\rangle$ својствени проблем хамилтонијана (конструисаног од ∇ и \mathbf{x}) а не својствени проблем од $\partial/\partial t$. Константу нормирања је увек могуће

²Некада је погодније користити други базис за Хилбертов простор једночестичних стања; видети Одељак 3.3.3.

изабрати тако да важи [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Ryder, L.H. (1996)]

$$\langle p; \sigma | q; \sigma' \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (3.9)$$

Приликом преласка на квантну теорију поља, једначине $P^i |p; \sigma\rangle = p^i |p; \sigma\rangle$ постају својствени проблеми оператора импулса поља док се $P^0 |p; \sigma\rangle = p^0 |p; \sigma\rangle$ своди на својствени проблем оператора енергије поља [видети Одељак 3.2.4]. Према стандардним правилима квантне механике [Шиф, Ј. (1968); Altland, A., Simons, B. (2010); Negle, J.W., Orland, H. (1998)], стање система који се састоји од N неинтерагујућих честица је елемент простора

$$\mathbf{H}^N = \underbrace{\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \cdots \otimes \mathbf{H}}_{N \text{ puta}} \quad (3.10)$$

и базис овог простора сачињавају вектори облика $|\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle \cdots |\alpha_N\rangle$, где смо увели скраћену ознаку $(p_i, \sigma_i) = \alpha_i$. У зависности од тога да ли су честице бозони (фермиони), вишечестична стања морају бити симетрична (антисиметрична) у односу на пермутације честица. Ако фиксирамо редослед вектора у \mathbf{H}^N на тај начин што ћемо крајњи леви кет $|\ \rangle_1$ резервисати за стања прве честице, следећи кет $|\ \rangle_2$ за другу и тако редом до крајњег десног кет-вектора $|\ \rangle_N$ који ће носити стања N -те честице, базис бозонског или фермионског простора \mathbf{H}^N се може узети у облику

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\mathcal{P}} \zeta^{\mathcal{P}} |\alpha_{\mathcal{P}_1}\rangle_1 |\alpha_{\mathcal{P}_2}\rangle_2 \cdots |\alpha_{\mathcal{P}_N}\rangle_N, \quad (3.11)$$

где се сума узима по свим пермутацијама у односу на основну конфигурацију

$$|\alpha_1\rangle_1 |\alpha_2\rangle_2 \cdots |\alpha_N\rangle_N \quad (3.12)$$

а фактор $\zeta^{\mathcal{P}}$ урачунава знак \pm приликом замене места честица: било која пермутација бозонских честица не мења знак стања док свака замена места две фермионске честице уноси знак $-$. Фактор $1/\sqrt{N!}$ обезбеђује нормирање у смислу да важи [Negle, J.W., Orland, H. (1998); Weinberg, S. (2008)]

$$\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M \rangle = \delta_{NM} \sum_{\mathcal{P}} \zeta^{\mathcal{P}} \prod_{i=1}^N \delta(\beta_i - \alpha_{\mathcal{P}_i}), \quad N, M = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

где је

$${}_k \langle \beta_i | \alpha_{\mathcal{P}_i} \rangle_k = \delta(\beta_i - \alpha_{\mathcal{P}_i}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_{\mathcal{P}_i}) \delta_{\sigma_i, \sigma_{\mathcal{P}_i}}, \quad \text{за свако } k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.14)$$

Исправност ове релације се може видети на следећи начин. Претпоставимо да је $N = M > 1$ и да смо бра-вектор фиксирали у основном облику [Видети (3.12)]. Тада постоји $N!$ сабирака који се добијају контракцијом стандардног бра вектора ${}_1 \langle \beta_1 | {}_2 \langle \beta_2 | \cdots {}_N \langle \beta_N |$ са $N!$ различитих пермутација α_i стања из кет-вектора $|\alpha_1\rangle_1 |\alpha_2\rangle_2 \cdots |\alpha_N\rangle_N$. При томе, у случају фермионских стања, парне пермутације стања α_i улазе са знаком $+$ а непарне са знаком $-$ (у случају бозонских стања, све пермутације улазе са позитивним предзнаком). Узмимо сада следећу парну пермутацију за кет вектор. Парност сваке од добијених

контракција ће тада поново зависити од парности пермутације кет-вектора. Штавише, добићемо исти резултат као и за основну конфигурацију бра-вектора јер посматрамо свих $N!$ пермутација стања α_i при чему је ${}_k\langle\beta_i|\alpha_{\mathcal{P}_j}\rangle_k = {}_l\langle\beta_i|\alpha_{\mathcal{P}_j}\rangle_l$, за свако $k, l = 1, 2, \dots, N$. Дакле, допринос свих контракција које садрже парне пермутације β_i стања и свих пермутација α_j стања је

$$\frac{N!}{2} \times \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}} \zeta^{\mathcal{P}} \prod_{i=1}^N \delta(\beta_i - \alpha_{\mathcal{P}_i}). \quad (3.15)$$

Посматрајмо сада једну од непарних пермутација бра вектора (Рецимо, ону у којој су прво и друго стање заменили места). Када извршимо контракцију са парном пермутацијом кет-вектора, добићемо израз облика $(-1) \times {}_1\langle\beta_2|\alpha_{\mathcal{P}_1}\rangle_1 {}_2\langle\beta_1|\alpha_{\mathcal{P}_2}\rangle_2 \dots$. Међутим,

$$\begin{aligned} & {}_1\langle\beta_2|\alpha_{\mathcal{P}_1}\rangle_1 {}_2\langle\beta_1|\alpha_{\mathcal{P}_2}\rangle_2 \dots = \delta(\beta_2 - \alpha_{\mathcal{P}_1})\delta(\beta_1 - \alpha_{\mathcal{P}_2}) \dots = \delta(\beta_1 - \alpha_{\mathcal{P}_2})\delta(\beta_2 - \alpha_{\mathcal{P}_1}) \dots \\ & = {}_1\langle\beta_1|\alpha_{\mathcal{P}_2}\rangle_1 {}_2\langle\beta_2|\alpha_{\mathcal{P}_1}\rangle_2 \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

што се поклапа са сабирком који одговара парној пермутацији бра-вектора и непарној пермутацији кет-вектора и такав се већ налази у збиру (3.15). Другим речима, укупни допринос чланова са непарним пермутацијама β_i стања је исти као и допринос чланова који садржи парне пермутације β_i стања и такође је дат са (3.15). Коначно, контракција је једнака нули ако је $N \neq M$ јер су тада одговарајућа стања репрезентована бра и кет-векторима сигурно различита. Када је $N = M = 1$, важи релација (3.9). Према томе, исправност релације (3.13) је доказана.

Пример 3.1. Посматрајмо случај $N = 3$ и уведемо ознаке $\alpha = (\mathbf{p}_1, \sigma_1), \beta = (\mathbf{p}_2, \sigma_2), \gamma = (\mathbf{p}_3, \sigma_3)$. Вишечестично стање које описује три бозона (фермиона) је

$$\begin{aligned} |\alpha, \beta, \gamma\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\gamma\rangle_3 + |\gamma\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\beta\rangle_3 + |\beta\rangle_1 |\gamma\rangle_2 |\alpha\rangle_3 \right) \\ &\pm \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\gamma\rangle_3 + |\alpha\rangle_1 |\gamma\rangle_2 |\beta\rangle_3 + |\gamma\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\alpha\rangle_3 \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где се сви позитивни знаци односе на случај три бозона а стање са три позитивна и три негативна сабирка описују фермионски систем. Ако је $\alpha' = (\mathbf{p}'_1, \sigma'_1), \beta' = (\mathbf{p}'_2, \sigma'_2), \gamma' = (\mathbf{p}'_3, \sigma'_3)$, контракција две стања овог типа је

$$\begin{aligned} \langle\alpha', \beta', \gamma'|\alpha, \beta, \gamma\rangle &= \delta(\alpha' - \alpha)\delta(\beta' - \beta)\delta(\gamma' - \gamma) + \delta(\alpha' - \gamma)\delta(\beta' - \alpha)\delta(\gamma' - \beta) \\ &+ \delta(\alpha' - \beta)\delta(\beta' - \gamma)\delta(\gamma' - \alpha) \pm \delta(\alpha' - \beta)\delta(\beta' - \alpha)\delta(\gamma' - \gamma) \\ &\pm \delta(\alpha' - \alpha)\delta(\beta' - \gamma)\delta(\gamma' - \beta) \pm \delta(\alpha' - \gamma)\delta(\beta' - \beta)\delta(\gamma' - \alpha), \end{aligned} \quad (3.18)$$

при чему се горњи знак односи на бозоне а доњи на фермионе. ■

3.2 Канонско квантовање скаларног поља

3.2.1 Оператори поља и хамилтонијан

Да би нека теорија била у складу са специјалном теоријом релативности потребно је, између осталог, да се у њој временска и просторне координате третирају равноправно. У

квантној механици то није случај јер се време третира као параметар, док су просторне координате динамичке варијабле представљене оператором $\hat{\mathbf{x}}$. Дакле, да би се квантна теорија учинила релативистички коректном, потребно је или прогласити време оператором или просторне координате довести на ниво параметра. Квантна теорија поља се заснива на овом другом прилазу. Слично као у класичној теорији поља, динамичка промењива постаје поље, а на језику квантне теорије то значи да се поље проглашава оператором. Просторне-временске координате представљају параметар који карактерише оператор, односно поље [Srednicki, M. (2007)]. Због тога се квантна теорија поља обично формулише у Хајзенберговој слици.

Пошто је поље $\phi(x)$ унапређено у оператор, оно мора да задовољава одређене једначине кретања. По узору на прелазак са класичне механике на квантну [Шиф, Л. (1968)], једначине кретања за квантно поље у канонском формализму се формулишу полазећи од једначина кретања за класично поље [Видети Одељак 1.2]. Према правилима канонске квантизације [Weinberg, S. (2008); Ryder, L.H. (1996); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Zee, A. (2010)], при преласку са класичне теорије на квантну, постулира се замена класичних величина операторима³ $\phi \rightarrow \hat{\phi}$, $\pi \rightarrow \hat{\pi}$ који делују у Хилбертовом простору изграђеном помоћу стања (3.8) и (3.11), док Поасонове заграде класичних величина прелазе у комутаторе према

$$\left[\cdot, \cdot \right]_{\text{PZ}} \longrightarrow \frac{1}{i} \left[\cdot, \cdot \right]_{-}. \quad (3.19)$$

Основне једначине квантне теорије поља, које следе из класичних једначина (1.118), (1.121) и (1.128) и правила (3.19) гласе

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) &= \left[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{H} \right]_{-}, & i \frac{d}{dt} \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) &= \left[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{H} \right]_{-} \\ \left[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t) \right]_{-} &= i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ i \frac{d}{dt} \hat{F}[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] &= \left[\hat{F}(\mathbf{x}, t), \hat{H} \right]_{-}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

при чему последња једначина представља закон кретања за неку величину F која је функција поља ϕ и конјугованог импулса π а не зависи експлицитно од времена. Ако скаларно поље има више компоненти ϕ^a , комутатор поља и канонског импулса наведен у (3.20) постаје

$$\left[\hat{\phi}^a(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_b(\mathbf{y}, t) \right]_{-} = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_b^a. \quad (3.21)$$

Наведени скуп релација је потребно допунити и очигледним додатним условом, који такође има упориште у класичној теорији поља (1.129)

$$\left[\hat{\phi}^a(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}^b(\mathbf{y}, t) \right]_{-} = \left[\hat{\pi}_a(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_b(\mathbf{y}, t) \right]_{-} = 0. \quad (3.22)$$

Треба обратити пажњу да се у (3.21), као и у првој једначини из (3.20), у комутаторима појављују оператори који се узимају у истом тренутку времена. У наставку ћемо разумевати да су поље, конјуговани импулс и хамилтонијан оператори, па ће симбол $\hat{\cdot}$

³Не треба мешати канонски импулс π са Голдстоновим пољем из претходног поглавља.

бити испуштен. Динамику квантног поља одређује структура хамилтонијана. У случају скаларног поља, он је дат операторском верзијом израза (1.100)

$$H_{\text{KG}}[\phi, \pi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \left(\pi^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^2 \right). \quad (3.23)$$

Сада ћемо видети да се након квантизације параметар m може поистоветити са масом елементарних ексцитација поља. Приликом налажења једначина кретања, корисно је знати да комутатори поседују исте основне карактеристике као и Поасонове заграде [Видети (1.130)]

$$\begin{aligned} [A, B]_- &= -[B, A]_-, & [A, \alpha B]_- &= \alpha [A, B]_-, & \alpha &= \text{const.} \\ [A, B + C]_- &= [A, B]_- + [A, C]_- \\ [A, BC]_- &= [A, B]_- C + B [A, C]_-, \\ [A, [B, C]_-]_- + [C, [A, B]_-]_- + [B, [C, A]_-]_- &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

што се лако показује [Радосевић, С., Мали, П. (2020)].

3.2.2 Једначина кретања

Након што је поље проглашено оператором, потребно је наћи везу између (оператора) поља и једночестичних стања (3.8). У ту сврху, нађимо једначину кретања за поље која следи из (3.20) и (3.23)

$$i \dot{\phi}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \left[\phi(\mathbf{y}, t), \pi^2(\mathbf{x}, t) + [\nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t)]^2 + m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t) \right]_-. \quad (3.25)$$

Пошто је (видети (3.20))

$$\left[\phi(\mathbf{y}, t), \pi^2(\mathbf{x}, t) \right]_- = 2i\pi(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \left[\phi(\mathbf{y}, t), \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) \right]_- = \nabla_{\mathbf{x}} \left[\phi(\mathbf{y}, t), \phi(\mathbf{x}, t) \right]_- = 0 \quad (3.26)$$

добивамо

$$\dot{\phi}(\mathbf{y}, t) = \pi(\mathbf{y}, t). \quad (3.27)$$

Још једном треба нагласити да је у квантној теорији поље динамика система садржана у оператору поља. Зато диференцијални оператор ∇ само описује просторну промену поља и нема везе са координатном репрезентацијом оператора импулса честице која се користи у квантној механици. Слично се долази и до једначине кретања за конјуговани импулс

$$i \dot{\pi}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \left[\pi(\mathbf{y}, t), \pi^2(\mathbf{x}, t) + [\nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t)]^2 + m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t) \right]_-. \quad (3.28)$$

Како комутатор поља и канонског импулса нема операторску структуру, може се писати

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \left[\pi(\mathbf{y}, t), [\nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t)]^2 \right]_- &= 2 \int_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \left[\pi(\mathbf{y}, t), \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) \right]_- \\ &= -2i \int_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Преостали интеграл се може решити парцијално,

$$\int_{\mathbf{x}} \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}} \operatorname{div} \left(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \right) - \int_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t). \quad (3.30)$$

Први интеграл се Гаусовом теоремом преводи у површински а тада се лако види да због $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ интеграл ишчезава⁴. Дакле, добија се

$$\dot{\pi}(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}}^2 \phi(\mathbf{y}, t) - m^2 \phi(\mathbf{y}, t). \quad (3.31)$$

Комбиновањем (3.27) и (3.31) се долази до једначине коју задовољава скаларно поље

$$\left(-\nabla^2 + \partial_t^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = \left(\partial^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.32)$$

што је наравно Клајн-Гордонова једначина. Иако је облик једначине исти као и у класичном случају [Видети (1.35)], што сугерише да би се решења могла тражити у форми равних таласа, чињеница да је ϕ у квантној теорији оператор мења смисао решења.

3.2.3 Комутационе релације за амплитуде поља

Као и у Одељку 1.1.3, решења Клајн-Гордонове једначине за оператор ϕ ћемо тражити у облику Фуријеовог интеграла. Међутим, како је сад поље оператор који мора задовољавати комутационе релације (3.20), амплитуде у Фуријеовом интегралу морају прећи у операторе. По узору на (1.86), решење операторске једначине (3.32) пишемо у облику

$$\phi(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(x) = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right), \quad k^0 = \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (3.33)$$

уз [Видети (A.6)] $k \cdot x = k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. У (3.33) су $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ за сада неодређени оператори (амплитуде поља) повезани условом $[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}]^{\dagger} = a_{\mathbf{k}}$ који обезбеђује да скаларно поље буде реално, односно да оператор $\phi(x)$ буде ермитски ($\phi^{\dagger}(x) = \phi(x)$). Да би се правилно протумачио смисао ових оператора, неопходно је наћи комутационе релације које задовољавају амплитуде $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ и довести их у везу са енергијом и импулсом поља.

На основу Примера 1.8, знамо да је импулс канонски придружен скаларном пољу ϕ дат са $\pi = \partial_t \phi$, тако да из (3.33) налазимо

$$\pi(\mathbf{x}, t) \equiv \pi(x) = i \int_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(-a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right), \quad (3.34)$$

Заменом (3.33) и (3.34) у комутатор $[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]$, налазимо

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- &= \frac{i}{2} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \left([a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}]_- e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} - i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}})t} + [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}]_- e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}})t} \right) \\ &+ \frac{i}{2} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \left([a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{k}}]_- e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} - i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}})t} + [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}]_- e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}})t} \right) \end{aligned}$$

⁴Овај услов је директно преузет из класичне теорије поља; видети Одељак 1.1.1.

Да би важило $[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, амплитуде поља морају да задовољавају релације

$$\left[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger \right]_- = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (3.35)$$

$$\left[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}} \right]_- = \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger \right]_- = 0. \quad (3.36)$$

То су познате комутационе релације за бозонске операторе који се појављују у квантној теорији хармонијског осцилатора [Шиф, Л. (1968); Weinberg, S. (2012)]. Улога бозонских оператора ће бити јаснија кад се помоћу њих изразе енергија и импулс поља.

3.2.4 Енергија и импулс квантног скаларног поља

Оператор енергије скаларног поља добијамо заменом (3.33) и (3.34) у (3.23)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \int_{\mathbf{x}} \frac{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{q}}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{q}}}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \left(a_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \int_{\mathbf{x}} \frac{m^2}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{q}}}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \left(a_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Пошто је у горњим интегралима $q^0 = \omega(\mathbf{q})$ и $k^0 = \omega(\mathbf{k})$, при чему је $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, можемо употребити релацију

$$\int_{\mathbf{x}} \exp\left[i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} \pm \mathbf{q}) \right] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} \pm \mathbf{q}) \exp\left[i t(\omega_{\mathbf{k}} \pm \omega_{\mathbf{q}}) \right], \quad (3.38)$$

да хамилтонијан сведемо на једноставнији облик

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \right] = \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{0})}{2} \right], \quad \omega_{\mathbf{k}} = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (3.39)$$

при чему смо искористили и комутационе релације (3.36).

Иако нам је првенствени циљ да правилно интерпретирамо операторску структуру хамилтонијана (3.39), приметимо да он садржи бесконачни константни члан

$$\mathcal{E}_0 = \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (2\pi)^3 \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k})}{2} \equiv \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (2\pi)^3 \frac{\delta(\mathbf{0})}{2}. \quad (3.40)$$

који представља аналогон нулте енергије хармонијског осцилатора у квантној механици. У њему се заправо крије двострука дивергенција. Прва потиче од делта функције са аргументом $\mathbf{k} - \mathbf{k} = \mathbf{0}$. Овом проблему је могуће доскочити тако што се систем затвори у коцку ивице L . Тада је [Zee, A. (2010); Srednicki, M. (2007)]

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^3 \int_{-L/2}^{L/2} dx_j e^{x_j(p_j - p_j)} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^3 \int_{-L/2}^{L/2} dx_j = L^3 = V. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Дакле, величина $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{0})$ представља само другачије записану запремину система. Сада се \mathcal{E}_0 може записати као

$$\mathcal{E}_0 = \frac{V}{2} \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}, \quad (3.42)$$

и бесконачност која је последица δ -функције се може једноставно заобићи ако се све величине обрачунавају по јединици запремине

$$\mathcal{E}_0/V = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}, \quad (3.43)$$

Овај рецепт треба применити у свим изразима у којима се појављује $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{0})$, као што су укупна енергија и импулс поља [Видети једначину (3.58) ниже у тексту]. Преостали интеграл у (3.43) неограничено расте због горње границе ($0 \leq |\mathbf{k}| \leq \infty$), што је последица претпоставке да је квантна теорија исправна на произвољно малим растојањима (односно, на произвољно високим енергијама). Тзв. ултраљубичаста дивергенција из (3.43) се може уклонити увођењем неког максималног таласног вектора који осликава минимално (инверзно) растојање (или максималну енергију) до којег важе предвиђања квантне теорије [Zee, A. (2010)]. бесконачни константни члан \mathcal{E}_0 се не може опазити у експерименту јер се енергија увек мери у односу на основно стање [Weinberg, S. (2008); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)], тако да га можемо избећи једноставним редефинисањем енергије система. Исти резултат се може постићи захтевом да оператори буду нормално⁵ уређени [Ryder, L.H. (1996)]. Иако константни члан \mathcal{E}_0 не може да се опазити у експерименту, промене енергије основног стања $\Delta\mathcal{E}_0$, настале услед измена граничних услова за поље се могу измерити (тзв. Казимиров ефекат, [Weinberg, S. (2008); Zee, A. (2010); Elizalde, E. (2008)]). У наставку ћемо једноставно игнорисати члан \mathcal{E}_0 .

Импулс класичног скаларног поља је израчунат у Примеру 1.13. За разлику од хамилтонијана, дефиниција импулса поља садржи производ оператора поља и канонског импулса. Ове две величине међусобно не комутирају тако да је њихов редослед у квантној теорији битан. Неједнозначност која због тога настаје приликом преласка са класичних поља на операторска се може решити Вејловим уређењем оператора [Cheng, T.P., Li, L.F. (2000)]. Према том поступку треба узети симетричну комбинацију производа оператора, тако да је импулс поља у квантној теорији одређен са

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \left(\pi(\mathbf{x}, t) \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + [\nabla \phi(\mathbf{x}, t)] \pi(\mathbf{x}, t) \right). \quad (3.44)$$

Користећи услов $\omega(\mathbf{k}) = \omega(-\mathbf{k})$ и процедуру сличну оној која је довела до (3.39), добија се

$$\mathbf{P} = \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{0})}{2} \right] = \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (3.45)$$

⁵Под нормално уређеним оператором се подразумева израз у којем су сви анихилациони оператори написани са десне стране свих креационих оператора. На пример, оператор $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}$ је нормално уређен а $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{l}}^\dagger a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}$ није.

јер члан који садржи $(2\pi)^3\delta(\mathbf{0})/2$ отпада због антисиметрије интегранда⁶. У неким ситуацијама се коректан редослед оператора може одредити на основу поређења резултата квантовања са експерименталним резултатима, симулацијама, или теоријским предвиђањима засованим на неким другачијим прилазима [Видети Одељак 3.7.3 за случај избора редоследа бозонских апроксимација S_x^\pm оператора у случају Хајзенберговог антиферромагнета].

3.2.5 Честична интерпретација квантног поља

Дефинишимо оператор [Ryder, L.H. (1996)]

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \hat{N}_{\mathbf{k}} \equiv V \hat{N}_{\mathbf{k}} := a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (3.46)$$

Лако се показује да оператори $\hat{N}_{\mathbf{k}}$ окарактерисани различитим импулсима комутирају, па се њихове својствене функције могу искористити за базис

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle = n(\mathbf{k}) |n(\mathbf{k})\rangle. \quad (3.47)$$

Израчунавањем комутатора

$$V \left[\hat{N}_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger \right]_- = a_{\mathbf{k}}^\dagger \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad V \left[\hat{N}_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}} \right]_- = -a_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (3.48)$$

може се показати да важи

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger |n(\mathbf{k})\rangle = [n(\mathbf{k}) + 1] a_{\mathbf{k}}^\dagger |n(\mathbf{k})\rangle, \quad \hat{N}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle = [n(\mathbf{k}) - 1] a_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle. \quad (3.49)$$

Из (3.49) се види да су $a_{\mathbf{k}}^\dagger |n(\mathbf{k})\rangle$ и $a_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle$ такође својствени вектори оператора $\hat{N}_{\mathbf{k}}$, али са својственим вредностима $n(\mathbf{k}) + 1$ и $n(\mathbf{k}) - 1$, респективно. То значи да можемо писати

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger |n(\mathbf{k})\rangle = c_+(n(\mathbf{k})) |n(\mathbf{k}) + 1\rangle, \quad a_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle = c_-(n(\mathbf{k})) |n(\mathbf{k}) - 1\rangle, \quad (3.50)$$

где су c_\pm за сада неодређени коефицијенти. Вредности ових коефицијената, као и могуће вредности за $n(\mathbf{k})$, у потпуности су одређене скаларним производом у Хилбертовом простору вектора $|n(\mathbf{k})\rangle$. Пре свега,

$$\langle n(\mathbf{k}) | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle = V n(\mathbf{k}) \langle n(\mathbf{k}) | n(\mathbf{k})\rangle \geq 0, \quad (3.51)$$

видимо да мора бити $n(\mathbf{k}) \geq 0$. Релације (3.49) говоре да $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ делујући на $|n(\mathbf{k})\rangle$ повећава $n(\mathbf{k})$ за један а $a_{\mathbf{k}}$ смањује $n(\mathbf{k})$ за један. Да би услов $n(\mathbf{k}) \geq 0$ био увек испуњен, мора постојати такво стање за које важи

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0. \quad (3.52)$$

Из разлога који ће убрзо постати јасни, стање $|0\rangle$ се назива вакуумом.

⁶До (3.45) се могло доћи и без Вејловог правила, користећи чињеницу да је $\int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \exp[i2\omega_{\mathbf{k}}t] = \mathbf{0}$, при чему сличан интеграл који садржи $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ операторе такође отпада због антисиметрије подинтегралних функција [Greiner, W. (1996)]. У компликованијим случајевима се обично користи Вејлов рецепт.

Ако се пође од вакуумског стања, сукцесивним деловањем $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ оператора, својствена вредност од $\hat{N}_{\mathbf{k}}$ се повећава за један, тако да су вредности $n(\mathbf{k})$ целобројне. Претпоставимо да је $n(\mathbf{q}) = 1$ и означимо то стање са

$$|1(\mathbf{q})\rangle = a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle \equiv |\mathbf{q}\rangle. \quad (3.53)$$

(константа нормирања која за сада није специфицирана ће бити одређена ниже и не утиче на резултат који ће бити изведен). Деловањем оператора импулса на такво стање се добија

$$\begin{aligned} \mathbf{P} |\mathbf{q}\rangle &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) a_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{N}_{\mathbf{k}} \right] |0\rangle \\ &= (2\pi)^3 \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = \mathbf{q} |\mathbf{q}\rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Слично се показује и

$$H |\mathbf{q}\rangle = \omega_{\mathbf{q}} |\mathbf{q}\rangle \quad (3.55)$$

па закључујемо да је $|1(\mathbf{q})\rangle \equiv |\mathbf{q}\rangle$ једночестично стање (видети дефиницију из (3.8)) које описује честицу са импулсом \mathbf{q} , масом m и енергијом $\omega(\mathbf{q}) = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$. Дакле, у случају квантне теорије, параметар m који улази у лагранжијан и хамилтонијан се може поистоветити са масом честице. Честице енергије $\omega(\mathbf{q})$ називамо квантима скаларног поља. На сличан начин се може показати да важи

$$\mathbf{P} |\mathbf{q} \mathbf{p}\rangle = [\mathbf{q} + \mathbf{p}] |\mathbf{q} \mathbf{p}\rangle, \quad H |\mathbf{q} \mathbf{p}\rangle = [\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}] |\mathbf{q} \mathbf{p}\rangle, \quad (3.56)$$

где је

$$|\mathbf{q} \mathbf{p}\rangle = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \equiv |\mathbf{q}\rangle |\mathbf{p}\rangle \quad (3.57)$$

тзв. двочестично стање које описује два кванта поља у стањима са импулсом \mathbf{q} и \mathbf{p} . Поступак се лако уопштава на случај директног поризвода више једночестичних стања. Имајући у виду да се енергија и импулс поља могу записати као

$$\begin{aligned} H &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \hat{N}_{\mathbf{k}} = V \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \hat{N}_{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{P} &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k}} = V \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

јасно је да $\hat{N}_{\mathbf{k}}$ представља оператор броја честица у стању са импулсом \mathbf{k} . Вакуум $|0\rangle$ је основно стање слободног тј. неинтерагујућег поља и не садржи честице. Честице које ствара креациони оператор $a_{\mathbf{k}}^\dagger$, а уништава анихилациони оператор $a_{\mathbf{k}}$ се називају квантима поља и у случају скаларног поља то су бозони. Једночестична стања су нормирана у складу са ранијом дефиницијом (3.9)

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (3.59)$$

при чему су искоришћене комутационе релације (3.36) и очигледно нормирање вакуумског стања [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Srednicki, M. (2007); Weinberg, S. (2008)]

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (3.60)$$

Даље, коефицијенте $c_{\pm}(n(\mathbf{k}))$ можемо одредити из услова да стања $a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |n(\mathbf{p})\rangle$ и $a_{\mathbf{p}} |n(\mathbf{p})\rangle$ буду нормирана. Пошто смо $|\mathbf{k}\rangle$, добијено за $n(\mathbf{k}) = 1$, идентификовали као једночестично стање са "нормом" (3.9), стања за $n(\mathbf{k}) > 1$ ћемо нормирати по узору на (3.13). Односно, захтеваћемо да буде $\langle n(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle \propto V^{n(\mathbf{k})}$. Тада добијамо

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{p})|a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |n(\mathbf{p})\rangle &= |c_{+}(n(\mathbf{p}))|^2 \langle n(\mathbf{p}) + 1|n(\mathbf{p}) + 1\rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \langle n(\mathbf{p})|1 + N_{\mathbf{p}}|n(\mathbf{p})\rangle \\ &= V[n(\mathbf{p}) + 1] \langle n(\mathbf{p})|n(\mathbf{p})\rangle, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{p})|a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} |n(\mathbf{p})\rangle &= |c_{-}(n(\mathbf{p}))|^2 \langle n(\mathbf{p}) - 1|n(\mathbf{p}) - 1\rangle = \langle n(\mathbf{p})|N_{\mathbf{p}}|n(\mathbf{p})\rangle (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \\ &= Vn(\mathbf{p}) \langle n(\mathbf{p})|n(\mathbf{p})\rangle. \end{aligned} \quad (3.62)$$

при чему су у последњим једнакостима из (3.61) и (3.62) искоришћене бозе комутационе релације (3.36), дефиниција оператора $N_{\mathbf{p}}$ из (3.46) и његов својствени проблем (3.47). Поређењем коефицијената из (3.61) и (3.62) налазимо

$$c_{+}(n(\mathbf{p})) = \sqrt{n(\mathbf{p}) + 1}, \quad c_{-}(n(\mathbf{p})) = V \sqrt{n(\mathbf{p})}, \quad (3.63)$$

односно

$$a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |n(\mathbf{p})\rangle = \sqrt{[n(\mathbf{p}) + 1]} |n(\mathbf{p}) + 1\rangle, \quad a_{\mathbf{p}} |n(\mathbf{p})\rangle = V \sqrt{n(\mathbf{p})} |n(\mathbf{p}) - 1\rangle. \quad (3.64)$$

Узимајући у обзир (3.64), можемо конструисати опште вишечестично стање које садржи $n(\mathbf{k}_1)$ честица са импулсом \mathbf{k}_1 , $n(\mathbf{k}_2)$ честица са импулсом \mathbf{k}_2, \dots . Такво стање се може изградити полазећи од вакуума узастопним деловањем креационих оператора [Ryder, L.H. (1996); Altland, A., Simons, B. (2010)]

$$|n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots\rangle = \prod_i \frac{[a_{\mathbf{k}_i}^{\dagger}]^{n(\mathbf{k}_i)}}{\sqrt{n(\mathbf{k}_i)!}} |0\rangle. \quad (3.65)$$

Будући да не постоји принципијелно ограничење на број честица у систему, ова конструкција нам омогућава да Хилбертов простор изградимо као [Altland, A., Simons, B. (2010); Negle, J.W., Orland, H. (1998)]

$$\mathbb{F} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{H}^n \quad (3.66)$$

где \mathbb{H}^n означава Хилбертов простор за n честица. Базис простора \mathbb{H}^n сачињавају вектори облика $|n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots\rangle$, тако да је $n(\mathbf{k}_1) + n(\mathbf{k}_2) + \dots = n$. Хилбертов простор \mathbb{F} се назива Фоковим простором а цео формализам у којем су оператори поља представљени помоћу креационих и анихилационих оператора као репрезентација броја попуњености⁷. Веза између стања (3.11) за случај бозе статистике и (3.65) се може успоставити на следећи начин [Negle, J.W., Orland, H. (1998)]. Најпре ћемо стање (3.11) изразити помоћу креационих оператора који делују на вакуум

$$|\underbrace{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_1}_{n(\mathbf{k}_1) \text{ puta}}, \underbrace{\mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_2}_{n(\mathbf{k}_2) \text{ puta}}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\mathcal{P}} \zeta^{\mathcal{P}} |k_{\mathcal{P}_1}\rangle |k_{\mathcal{P}_2}\rangle \cdots |k_{\mathcal{P}_n}\rangle \quad (3.67)$$

$$= [a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger}]^{n(\mathbf{k}_1)} [a_{\mathbf{k}_2}^{\dagger}]^{n(\mathbf{k}_2)} \cdots |0\rangle \equiv |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots\rangle \quad (3.68)$$

⁷Понекад се, из историјских разлога, користи и донекле збуњујући назив репрезентација друге квантизације.

при чему је $\zeta^{\mathcal{P}} = 1$ јер је реч о бозонским стањима. Такође, важи и $n(\mathbf{k}_1) + n(\mathbf{k}_2) + \dots = n$. Сада једноставно на другачији начин пребројавамо стања: уместо да водимо рачуна о појединачним честицама репрезентованим векторима \mathbf{k}_i , приметимо да је економичнији (али еквивалентан) начин нумерисања заснован на бројевима попуњености $n(\mathbf{k}_i)$. При томе је симетрија вишечестичног стања аутоматски задовољена због комутационих релација бозонских креационих оператора. Истовремено, редослед креационих оператора одређује индексе стања који је експлицитно наведен у (3.11). Уводећи фактор нормирања, имамо

$$|n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_i [n(\mathbf{k}_i)]!}} |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots\rangle. \quad (3.69)$$

Према томе, стања (3.11), (3.65) и (3.67) су суштински еквивалентна. Ми ћемо, осим једног изузетка, у наставку користити стања (3.65). Коначно, појава фактора V у дефиницији коефицијента $c_{-}(n(\mathbf{k}))$ је последица нормирања једночестичних стања [Видети (3.9)]. Рецимо, за једночестично стање $|\mathbf{k}\rangle$ имамо

$$\langle 0|a_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}\rangle = V = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) = \langle \mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle = \left(\langle 0|a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right) |\mathbf{k}\rangle, \quad (3.70)$$

где смо искористили $|\mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{k}}^{\dagger}|0\rangle$. Односно,

$$a_{\mathbf{k}}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})|0\rangle, \quad (3.71)$$

при чему смо искористили (3.36).

Пример 3.2. Користећи репрезентацију вишечестичног стања из (3.67) можемо на још један начин показати исправност релација (3.64) које, у случају дејства креационих и анихилационих оператора на произвољно стање гласе

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots, n(\mathbf{p}), \dots\rangle &= \sqrt{n(\mathbf{p}) + 1} |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots, n(\mathbf{p}) + 1, \dots\rangle, \\ a_{\mathbf{p}} |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots, n(\mathbf{p}), \dots\rangle &= V \sqrt{n(\mathbf{p})} |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots, n(\mathbf{p}) - 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Посматрајмо дејство анихилационог оператора. Због комутационих релација (3.36), анихилациони оператор $a_{\mathbf{p}}$ при дејству (са леве стране) на стање које је репрезентовано са (3.67) може да замени места са свим креационим операторима код којих је $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{p}$. Када тако стигне до производа од $n(\mathbf{p})$ оператора $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, он ће на њих деловати сходно комутатору

$$[a_{\mathbf{p}}, (a_{\mathbf{p}}^{\dagger})^{n(\mathbf{p})}]_{-} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) n(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^{\dagger})^{n(\mathbf{p})-1}. \quad (3.73)$$

На тај начин ћемо добити релацију $a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{\dagger})^{n(\mathbf{p})} = (a_{\mathbf{p}}^{\dagger})^{n(\mathbf{p})} a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) n(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^{\dagger})^{n(\mathbf{p})-1}$. Први сабирак, који садржи анихилациони оператор $a_{\mathbf{p}}$ са десне стране ће даље моћи да замени места са свим осталим креационим операторима за $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{p}$ и на крају ће доћи до вакуумског стања. Према томе, он не доприноси новом вишечестичном стању. Други сабирак, који садржи делта функцију, даће фактор $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) n(\mathbf{p}) = V n(\mathbf{p})$ који може да изађе испред дејства осталих креационих оператора на вакуумско стање. Дакле,

$$a_{\mathbf{p}} |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots, n(\mathbf{p}), \dots\rangle = V n(\mathbf{p}) |n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots, n(\mathbf{p}) - 1, \dots\rangle. \quad (3.74)$$

Урачунавајући фактор нормирања из (3.69), добијамо другу од релација из (3.72). На сличан начин се може дискутовати и дејство креационог оператора. ■

Приметимо још да се деловањем оператора поља (3.33) на вакуумско стање добија

$$\phi(x)|0\rangle = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{k}\rangle. \quad (3.75)$$

Ово је линеарна суперпозиција једночестичних стања са добро дефинисаним импулсима. Према стандардној интерпретацији квантне теорије ову суперпозицију тумачимо као честицу локализовану у тачки $x = [t, \mathbf{x}]$. Другим речима, делујући на вакуумско стање, оператор поља $\phi(x)$ креира честицу у тачки са просторно-временским координатама x [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)].

3.2.6 Веза са релативистичком квантном механиком

До сада смо видели да се Клајн-Гордонова једначина појављује као једначина која описује класична и квантна поља. При томе се смисао параметара који улазе у хамилтонијан, као и интерпретација решења добијених Фуријеовом трансформацијом [једначине (1.86) и (3.33)] доста разликују. Међутим, постоји још једна теорија у којој се појављује једначина истог облика а чија се решења тумаче на начин који до сада нисмо спомињали. Реч је о релативистичкој (једночестичној) квантној механици у којој се решење Клајн-Гордонове једначине тумачи као таласна функција које описују стање једне честице. Иако овај поглед на Клајн-Гордонову једначину са собом носи више потешкоћа, пожељно је указати на њих јер се слична ситуација јавља и у неким статистичким моделима [Видети Одељак 3.7.3].

Ослањајући се на кореспонденцију $E \rightarrow i\partial_t$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ и релативистичку везу између енергије и импулса, $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$, можемо добити релативистичку генерализацију Шредингерове једначине

$$\partial_t^2 \phi(\mathbf{x}, t) = -m^2 \phi(\mathbf{x}, t) + \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.76)$$

која има исти облик као Клајн-Гордонова једначина [Видети (1.35), (1.142) или (3.32)]. Пошто сада једначину (3.76) тумачимо као квантномеханичку једначину, величину $\phi(\mathbf{x}, t)$ интерпретирамо као комплексну таласну функцију која описује једну честицу масе m . У случају слободне честице таласну функцију можемо тражити у облику равних таласа. Заменом овог решења у (3.76), налазимо могуће енергије квантомеханичке релативистичке честице

$$E(\mathbf{p}, m) = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (3.77)$$

Такође, полазећи од једначине (3.76) можемо конструисати једначину континуитета за густину струје вероватноће, $\partial_\mu J^\mu = 0$, где је $J^\mu \propto \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*$ [Шиф, Л. (1968)]. Према стандардној квантомеханичкој интерпретацији, компоненту J^0 интерпретирамо као густину вероватноће налажења честице у неком елементу запремине. У случају једначине (3.76), ова величина је дата са

$$J^0 = C (\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*) \quad (3.78)$$

при чему нам избор константе C тренутно није битан.

Уколико једначину (3.76) заиста желимо да интерпретирамо у духу једночестичне квантне механике, наилазимо на два непремостива проблема. Први се тиче негативног корена једначине (3.77). Негативан корен $E = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ се појављује и у класичној релативистичкој механици али се тада једноставно може одбацити као нефизичко решење. Наиме, у класичној (тј. не-квантној) механици се енергија честице мења континуално и не постоји непрекидан процес који би повезао два корена $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ јер је између њих геп $\Delta E = 2m$. Са друге стране, овакво резоновање се не може применити на квантну теорију јер је добро познато да се енергија честице може мењати у скоковима и не може се *априори* искључити постојање процеса који би превео честицу из стања са енергијом $\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ у стање са енергијом $-\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Како нема ограничења на број стања са негативном енергијом, оваквом интерпретацијом би се тешко објаснила стабилност система описаног квантномеханичком Клајн-Гордоновом једначином. Други проблем се тиче интерпретације J^0 као густине вероватноће јер, као што се види из (3.78), величина J^0 није позитивно-дефинитна [Weinberg, S. (2008)].

Погледајмо сада како се наведени проблеми решавају ако Клајн-Гордонову једначину интерпретирамо као једначину за квантно поље. Пре свега, енергију ексцитација поља дефинишемо као својствену вредност хамилтонијана (3.58) на једночестичним стањима $|\mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ [Видети (3.55)]. Као што се види, енергија елементарне ексцитације (тј. стања $|\mathbf{k}\rangle$) скаларног поља је увек позитивна, $\omega(\mathbf{k}) = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Такође, из (3.56) се види и да је енергија двочестичног стања $|\mathbf{k}\rangle|\mathbf{q}\rangle$ позитивна а сличним поступком се показује да је енергија стања које садржи произвољно много ексцитација увек позитивна. Према томе, проблем негативних енергија уопште не постоји. И поред тога што је енергија једног кванта поља увек позитивна, оператор поља садржи $\exp[-i\omega_{\mathbf{k}} t]$, као и $\exp[i\omega_{\mathbf{k}} t]$. У КТП се ова два решења означавају као позитивне и негативне моде. Задржавање и позитивних и негативних мода у оператору поља је неопходно јер се само на тај начин добија исправно решење једначине које задовољавају амплитуде поља [Видети (1.81) и (1.84)]. Са друге стране, Хилбертов простор у квантној теорији поља сачињавају вектори (3.65) која садрже одређен број честица у стањима са датом вредношћу импулса. Ако се изврши мерење над системом који се налази у неком стању $|\Psi\rangle$, вероватноћа да се систем буде у стању са $n(\mathbf{k}_1)$ честица окарактерисаних импулсом \mathbf{k}_1 , $n(\mathbf{k}_2)$ честица са импулсом \mathbf{k}_2, \dots је дата са

$$P(n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots) = |\langle n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots | \Psi \rangle|^2 \quad (3.79)$$

и то је очигледно позитиван број. Проблем негативних вероватноћа не постоји јер су решења Клајн-Гордонове једначине оператори који мењају број кваната поља у одређеним стањима а не амплитуде вероватноће (једночестичне таласне функције) као у нерелативистичкој квантној механици [Weinberg, S. (2008)].

3.3 Комплексна поља

У овом одељку ћемо размотрити комплексна поља чије квантне теорије представљају директну генерализацију резултата добијених за скаларно поље. Будући да комплексно поље описује систем од два степена слободе, модели засновани на њима поседују закон одржања [Видети Одељак 1.3.2 и Пример 1.14]. Као што ћемо видети у одељку 3.7,

квантно Шредингерово и комплексно поље се могу користити за опис Хајзенберговог феромагнета и антиферомагнета у неинтерагујућој апроксимацији.

3.3.1 Двокомпонентно скаларно поље

Класично поље

Лагранжијан двокомпонентног скаларног поља (или комплексног поља) смо увели у Примеру 1.4 и он је дат са

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \quad (3.80)$$

Динамички степен слободе за овај модел је двокомпонентно поље $\phi = [\phi^1 \ \phi^2]$ које се може еквивалентно описати и помоћу комплексног поља⁸

$$\phi = \frac{\phi^1 + i\phi^2}{\sqrt{2}}, \quad \phi^* = \frac{\phi^1 - i\phi^2}{\sqrt{2}}, \quad (3.81)$$

На основу (3.80) налазимо канонске импулсе, $\pi(x) = \dot{\phi}^*(x)$, $\pi^*(x) = \dot{\phi}(x)$ и Хамилтонов функционал

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbf{x}} \left[\pi(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) + \pi^*(\mathbf{x}) \dot{\phi}^*(\mathbf{x}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}) \right] \\ &= \int_{\mathbf{x}} \left[\pi^*(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) + [\nabla \phi^*(\mathbf{x})] \cdot [\nabla \phi(\mathbf{x})] + m^2 \phi^*(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Лако је видети да ϕ , као и ϕ^* , задовољавају Клајн-Гордонову једначину

$$[\partial^2 - m^2] \phi(x) = [\partial^2 - m^2] \phi^*(x) = 0. \quad (3.83)$$

Лагранжијан (3.80) је инваријантан у односу на глобалне трансформације

$$\phi \longrightarrow e^{-i\Lambda} \phi, \quad \phi^* \longrightarrow e^{i\Lambda} \phi^*, \quad (3.84)$$

што за последицу има једначину континуитета $\partial_\mu J^\mu = 0$, уз

$$J^\mu(x) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (3.85)$$

и очување величине

$$Q = \int_{\mathbf{x}} J^0(x) = i \int_{\mathbf{x}} (\phi^* \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^*). \quad (3.86)$$

⁸У наставку ћемо користити искључиво комплексно поље $\phi = (\phi^1 + i\phi^2)/\sqrt{2}$ па не постоји опасност од забуне због коришћења исте ознаке за двокомпонентно реално и комплексно поље.

Квантовање класичног поља

Пређимо сада на квантну теорију комплексног поља. Прилагођавајући правила канонског квантовања изложена у претходним одељцима, поља ϕ и ϕ^* , као и одговарајуће канонске импулсе π и π^* проглашавамо за операторе који задовољавају комутационе релације [Weinberg, S. (2008)]

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- &= [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)]_- = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]_- &= [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- = [\phi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)]_- = \\ [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)]_- &= [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)]_- = \\ [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]_- &= [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]_- = 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

при чему смо са ϕ^\dagger (π^\dagger) означили оператор придружен класичном пољу ϕ^* (π^*). Користећи ове комутационе релације, налазимо да ϕ и ϕ^\dagger задовољавају Клајн-Гордонову једначину. Решења ових једначина тражимо у облику Фуријеовог интеграла са операторским амплитудама. Како оператор ϕ није ермитски, морамо допустити постојање две врсте операторских амплитуда. Ако ове операторе означимо са $a_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}$, решење Клајн-Гордонове једначине се у овом случају може записати као

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &\equiv \phi(x) = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2} \omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right), & k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, \\ \phi^\dagger(\mathbf{x}, t) &\equiv \phi^\dagger(x) = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2} \omega_{\mathbf{k}}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} + b_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} \right), \end{aligned} \quad (3.88)$$

Одговарајући канонски импулси су

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \dot{\phi}^\dagger(x) = i \int_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} - b_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} \right), \\ \pi^\dagger(x) &= \dot{\phi}(x) = i \int_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(-a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \end{aligned} \quad (3.89)$$

при чему се, као и у (3.88), подразумева да је $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$. Заменом (3.88) и (3.89) у (3.87) налазимо да амплитуде задовољавају следећи скуп комутационих релација

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]_- &= [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger]_- = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}]_- &= [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger]_- = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}]_- = [b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger]_- = [a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger]_- = [b_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]_- = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Енергију поља добијамо помоћу (3.88) и (3.82), док се импулс добија слично као у (3.44). Резултат је

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \right] = V \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[N_{\mathbf{k}}(a) + N_{\mathbf{k}}(b) + 1 \right], \\ \mathbf{P} &= \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \right] = V \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left[N_{\mathbf{k}}(a) + N_{\mathbf{k}}(b) \right], \end{aligned} \quad (3.91)$$

при чему се бесконачни константни члан у изразу за енергију поља може изоставити због разлога који су наведени приликом разматрања енергије скаларног поља (једначина (3.39)), док су

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}}(a) = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}}(b) = b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}. \quad (3.92)$$

Поређењем (3.91) са (3.58), може се закључити да у овом случају постоје две врсте бозонских ексцитација (кваната) комплексног поља: честице типа a и честице типа b . Основно стање система (вакуум) је дефинисано са

$$|0\rangle = |n^a(\mathbf{k}) = 0\rangle |n^b(\mathbf{k}) = 0\rangle, \quad (3.93)$$

тј.

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = b_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0. \quad (3.94)$$

Обе врсте честица имају једнаку масу m и позитивну енергију $\omega(\mathbf{k}) = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ и, као и у случају скаларног поља, могуће је конструисати једночестична или двошестична стања. Рецимо, ако стање које садржи једну a -честицу са импулсом \mathbf{p} и једну b -честицу са импулсом \mathbf{q} означимо са $|\mathbf{p}(a) \mathbf{q}(b)\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle$, лако се показује да важи

$$\begin{aligned} \mathbf{P}|\mathbf{p}(a) \mathbf{q}(b)\rangle &= [\mathbf{p}(a) + \mathbf{q}(b)]|\mathbf{p}(a) \mathbf{q}(b)\rangle, \\ H|\mathbf{p}(a) \mathbf{q}(b)\rangle &= [\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}}]|\mathbf{p}(a) \mathbf{q}(b)\rangle. \end{aligned} \quad (3.95)$$

По аналогiji са скаларним пољем, могу се изградити и произвољна вишечестична стања

$$|n^a(\mathbf{k}_1), n^b(\mathbf{k}_2), \dots\rangle = \prod_i \frac{[a_{\mathbf{k}_i}^\dagger]^{n^a(\mathbf{k}_i)}}{\sqrt{n^a(\mathbf{k}_i)!}} \frac{[b_{\mathbf{k}_i}^\dagger]^{n^b(\mathbf{k}_i)}}{\sqrt{n^b(\mathbf{k}_i)!}} |0\rangle. \quad (3.96)$$

где $n^a(\mathbf{k}_i)$ означава број честица типа a у стању са импулсом \mathbf{k}_i а $n^b(\mathbf{k}_i)$ означава број честица типа b у стању са импулсом \mathbf{k}_i . Коначно, и величина Q из (3.86) се може изразити помоћу креационих и анихилационих оператора

$$Q = \int_x J^0(x) = i \int_x (\phi^\dagger \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^\dagger) = V \int_{\mathbf{k}} [N_{\mathbf{k}}(a) - N_{\mathbf{k}}(b)] \equiv N(a) - N(b). \quad (3.97)$$

Лако се проверава да је $[Q, H]_- = 0$, што значи да је Q очувана величина и у квантној теорији. Оператор Q даје разлику између кванта поља ϕ типа a и типа b . Уколико бисмо (рецимо) честицама типа a и b приписали наелектрисање,

$$\begin{aligned} eQ|\mathbf{q}(a)\rangle &= eV \int_{\mathbf{k}} [N_{\mathbf{k}}(a) - N_{\mathbf{k}}(b)] a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = e|\mathbf{q}(a)\rangle, \\ eQ|\mathbf{q}(b)\rangle &= eV \int_{\mathbf{k}} [N_{\mathbf{k}}(a) - N_{\mathbf{k}}(b)] b_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = -e|\mathbf{q}(b)\rangle. \end{aligned} \quad (3.98)$$

видимо да оператор оператор Q даје укупно наелектрисање поља ϕ , при чему честице типа a носе позитивно а честице типа b негативно наелектрисање. У општем случају, можемо рећи оператор Q описује закон одржања разлике броја честица и који је последица $U(1)$ симетрије [Brauner, T. (2010)]. Наравно, у случају слободног комплексног

поља важи $[N(a), H]_- = [N(b), H]_- = 0$. Међутим, уколико се укључи интеракција (која је описана члановима лагранжијану који садрже производе више од два поља), оператори $N(a)$ и $N(b)$ у општем случају нису очувани али Q јесте [Weinberg, S. (2008)]. На пример, у случају скаларне електродинамике које је дефинисана лагранжијаном (1.211), постоји интеракциони члан облика $\phi^\dagger \phi A_\mu A^\mu$. Он описује процесе у којима долази до анихилације једне позитивно наелектрисане и једне негативно наелектрисане скаларне честице уз креацију два фотона. Такође, на основу решења (3.88) видимо да стања $\phi(x)|0\rangle$ и $\phi^\dagger(x)|0\rangle$ описују честице, локализоване у тачки x , које носе наелектрисања супротних предзнака.

3.3.2 Слободно Шредингерово поље

У Одељку 3.2 смо видели да се при преласку на квантну теорију скаларно поље понаша као систем бозонских релативистичких честица. Појава бозонске статистике је општи резултат релативистичке квантне теорије поља. Наиме, скаларно поље поседује спин $S = 0$ (тривијално се трансформише у односу на ротације) а према теорији о вези спина и статистике, Лоренцова инваријантност, заједно са захтевима о позитивности енергије ексцитација и норме честичних стања, уз услов не нарушавања каузалности, нужно води на бозонску статистику честица са спином $S = 0$ [Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Weinberg, S. (2008)]. Са друге стране, ограничења која намеће Лоренцова инваријантност не постоје у случају нерелативистичког Шредингеровог поља. Због тога приликом квантовања морамо допустити постојање и бозонске и фермионске статистике. Испоставља се да је приликом канонског квантовања система фермиона, Поасонове заграде неопходно заменити *антикомутијаторима* [Weinberg, S. (2008); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)].

Лагранжијан Шредингеровог поља је уведен у Примеру 1.3 а у Примеру 1.14 је дискутована инваријантност лагранжијана у односу на глобалне $U(1)$ трансформације. Тмо је показано је да ова симетрија има за последицу једначину континуитета $\text{div} \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0$, где је $\rho = \psi^* \psi$ густина $U(1)$ набоја класичног Шредингеровог поља. Такође, у Примеру 1.8 смо нашли како изгледају одговарајући канонски импулс и хамилтонијан.

Приликом преласка на квантну теорију Шредингеровог поља усвајамо правила канонске квантизације. Дакле, поља ψ и ψ^* , односно π и π^* постају оператори који задовољавају релације

$$\left[\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \right]_{\mp} = \left[\psi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right]_{\mp} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.99)$$

док остали комутатори/антикомутатори ишчезавају [Шиф, Л. (1968)]. У (3.99) смо увели нотацију за комутатор/антикомутатор величина A и B

$$\left[A, B \right]_{\mp} := AB \mp BA \quad (3.100)$$

коју ћемо користити у наставку. Будући да су канонски импулс и конјуговано поље једноставно повезани, $\pi = i\psi^*$, у наставку ћемо све резултате изразити помоћу ψ^* . Тако, уместо (3.99) имамо релацију

$$\left[\psi_\sigma(\mathbf{x}, t), \psi_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{y}, t) \right]_{\mp} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (3.101)$$

где индекс σ означава пројекцију спина и узима једну од $2S + 1$ вредности. Често ћемо уместо ψ_σ писати само ψ и сматраћемо да је ψ колона са $2S + 1$ компонентом. Користећи операторску верзију хамилтонијана (1.102)

$$H = \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi = - \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2m} \psi^\dagger \nabla^2 \psi, \quad (3.102)$$

налазимо једначину кретања за оператор ψ (ради прегледности не пишемо временску координату; подразумева се да су сви оператори дефинисани у истом тренутку t)

$$i\dot{\psi}(\mathbf{y}) = \left[\psi(\mathbf{y}), H \right]_{\mp} = -\frac{1}{2m} \int_{\mathbf{x}} \left[\psi(\mathbf{y}), [\nabla_{\mathbf{x}} \psi^\dagger(\mathbf{x})] \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x})] \right]_{\mp} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2m} \int_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \left[\psi(\mathbf{y}), \psi^\dagger(\mathbf{x}) \right]_{\mp} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x})] = \frac{1}{2m} \int_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \left(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) \right) - \frac{1}{2m} \int_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \psi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.104)$$

јер $\psi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{y})$ комутирају. Применом Гаусове теореме на први интеграл из горње једначине уз коришћење чињенице да је $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ кад \mathbf{x} репрезентује тачку на граници области интеграције а \mathbf{y} тачку из унутрашњости, добијамо једначину кретања за Шредингеров поље

$$i\partial_t \psi(\mathbf{y}, t) = -\frac{1}{2m} \nabla_{\mathbf{y}}^2 \psi(\mathbf{y}, t), \quad (3.105)$$

Као и у случају класичног скаларног поља из претходног одељка, добили смо једначину која формално изгледа исто као и у класичном случају. Пошто је дисперзиона релација за Шредингерово поље дата са (1.74), решење једначине за оператор ψ пишемо помоћу Фуријеовог интеграла

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t}, \quad \omega(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m}, \quad (3.106)$$

док је адјунговани оператор

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k})t}. \quad (3.107)$$

Да би решења (3.106) и (3.107) задовољавала (анти)комултационе релације (3.101), амплитуде поља морају да буду такве да важи

$$\left[a_{(\mathbf{k}, \sigma)}, a_{(\mathbf{q}, \sigma')}^\dagger \right]_{\mp} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \left[a_{(\mathbf{k}, \sigma)}, a_{(\mathbf{q}, \sigma')} \right]_{\mp} = \left[a_{(\mathbf{q}, \sigma)}^\dagger, a_{(\mathbf{q}, \sigma')}^\dagger \right]_{\mp} = 0. \quad (3.108)$$

при чему индекс σ узима $2S + 1$ вредност и означава пројекцију спина. Очекивано, добили смо да у квантној верзији амплитуде Шредингеровог поља могу задовољавати и бозонске и фермионске комултационе релације.

Експлицитан израз за енергију и импулс слободног Шредингеровог поља у одсуству спољашњег потенцијала добијамо заменом (3.106) и (3.107) у (3.102) и (1.170), при чему

користимо кореспонденцију $\pi \rightarrow i\psi^\dagger$. Тако добијамо

$$H = \sum_{\sigma} \int_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) a_{(\mathbf{k},\sigma)}^\dagger a_{(\mathbf{k},\sigma)} = V \sum_{\sigma} \int_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) N_{\mathbf{k},\sigma}, \quad \omega(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m}, \quad (3.109)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\sigma} \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{(\mathbf{k},\sigma)}^\dagger a_{(\mathbf{k},\sigma)} = V \sum_{\sigma} \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} N_{\mathbf{k},\sigma} \quad (3.110)$$

Оператор $N_{\mathbf{k},\sigma}$ који се појављује у (3.109) и (3.110) је дефинисан као $N_{\mathbf{k},\sigma} = V a_{(\mathbf{k},\sigma)}^\dagger a_{(\mathbf{k},\sigma)}$ и видимо да он и у случају Шредингеровог поља има смисао броја честица у стању са импулсом \mathbf{k} . Односно, укупан број кваната Шредингеровог поља је

$$N = \sum_{\sigma} \int_{\mathbf{k}} a_{(\mathbf{k},\sigma)}^\dagger a_{(\mathbf{k},\sigma)} = V \sum_{\sigma} \int_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k},\sigma} = \int_{\mathbf{x}} \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.111)$$

што значи да оператор

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.112)$$

можемо тумачити као оператор густине броја ексцитација Шредингеровог поља. Као и у случају комплексног поља, важи $[N, H]_- = 0$ што интерпретирамо као очување броја кваната Шредингеровог поља. На основу формалне сличности са релативистичким теоријама, јасно је да се и у случају Шредингеровог поља може конструисати Фоков простор, већ према томе да ли су елементарне ексцитације бозони или фермиони. Такође, из (3.109) се види да је интерпретација параметра m из лагранжијана за квантно Шредингерово поља маса нерелативистичке честице која је квант Шредингеровог поља. Вишечестична фермионска стања (3.11) се такође могу изградити помоћу дејства креационих и анихилационих оператора. Будући да важи $[a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger]_+ = 0$, могуће својствене вредности за оператор $N_{\mathbf{k}}$ су само $n(\mathbf{k}_i) = 0$ и $n(\mathbf{k}_i) = 1$. Узимајући да је σ спин фермиона које описује Шредингерово поље, произвољно антисиметрично стање се дефинише као [Altland, A., Simons, B. (2010)].

$$|n(\mathbf{k}_1, \sigma_1), n(\mathbf{k}_2, \sigma_2), \dots, n(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \dots\rangle = \prod_i [a_{(\mathbf{k}_i, \sigma_i)}^\dagger]^{n(\mathbf{k}_i, \sigma_i)} |0\rangle, \quad (3.113)$$

где импулс, заједно са пројекцијом спина, дефинише једночестично стање. Дејство креационих и анихилационих оператора је дато са

$$\begin{aligned} a_{(\mathbf{k}_i, \sigma_i)}^\dagger | \dots n(\mathbf{k}_i, \sigma_i) = 0 \dots \rangle &= \sqrt{n(\mathbf{k}_i, \sigma_i) + 1} (-1)^{\Sigma(\mathbf{k}_i, \sigma_i)} | \dots n(\mathbf{k}_i, \sigma_i) = 1 \dots \rangle, \\ a_{(\mathbf{k}_i, \sigma_i)} | \dots n(\mathbf{k}_i, \sigma_i) = 1 \dots \rangle &= V \sqrt{n(\mathbf{k}_i, \sigma_i)} (-1)^{\Sigma(\mathbf{k}_i, \sigma_i)} | \dots n(\mathbf{k}_i, \sigma_i) = 0 \dots \rangle \end{aligned} \quad (3.114)$$

а у свим осталим случајима оператори $a_{(\mathbf{k}_i, \sigma_i)}^\dagger$ и $a_{(\mathbf{k}_i, \sigma_i)}$ анихилирају вишечестична стања. Фазни фактор $\Sigma(\mathbf{k}_i, \sigma_i)$ је дефинисан као

$$\Sigma(\mathbf{k}_i, \sigma_i) = \sum_{\alpha=1}^{i-1} n(\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha) \quad (3.115)$$

и представља број попуњених стања која претходе стању $|\mathbf{k}_i, \sigma_i\rangle$. Уз овакве дефиниције је вишефермионско стање исправно антисиметризовано [Negle, J.W., Orland, H. (1998)].

3.3.3 Шредингерово поље у спољашњем потенцијалу

Постоји одређени број примена Шредингеровог поља на опис система честица које се налазе у спољашњем (временски независном) потенцијалу $U(\mathbf{x})$. Такви модели служе, рецимо, за опис електрона који се крећу у потенцијалу решетке [Fetter, A., Walecka, J. (1971); Mahan, G.D. (2000); Altland, A., Simons, B. (2010)]. У таквом случају је погодно дефинисати једночестична стања помоћу базиса који урачунава потенцијал $U(\mathbf{x})$.

Квадратни лагранжијан

Густина лагранжијана за неинтерагујуће Шредингерово поље у спољашњем потенцијалу је дата са [Шиф, Л. (1968)]

$$\mathcal{L} = i\psi^*(\mathbf{x})\partial_t\psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2m}\nabla_{\mathbf{x}}\psi^*(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x})\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \quad (3.116)$$

и за Хамилтонов оператор се добија

$$H = \int_{\mathbf{x}} \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.117)$$

при чему су ψ и ψ^\dagger оператори колоне чије компоненте задовољавају релације (3.101). Одговарајућа једначина кретања је

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi(\mathbf{y}, t) &= \left[\psi(\mathbf{y}, t), H \right]_{\mp} \\ &= -\frac{1}{2m} \int_{\mathbf{x}} \left[\psi(\mathbf{y}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \psi(\mathbf{x}, t) \right]_{\mp} + \int_{\mathbf{x}} \left[\psi(\mathbf{y}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \right]_{\mp} U(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) \\ &= -\frac{1}{2m} \nabla_{\mathbf{y}, t}^2 \psi(\mathbf{y}, t) + U(\mathbf{y})\psi(\mathbf{y}, t), \end{aligned} \quad (3.118)$$

Једначина (3.118) у општем случају нема решења у облику равних таласа, тако да се не може директно применити раније описани поступак тражења решења у виду Фуријеовог интеграла. Ипак, претпоставимо да знамо решења следеће диференцијалне једначине [Шиф, Л. (1968)]

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla_{\mathbf{x}}^2 + U(\mathbf{x}) \right) \phi_n(\mathbf{x}) = E_n\phi_n(\mathbf{x}), \quad (3.119)$$

Функције ϕ_n овде можемо схватити као решења једночестичног квантномеханичког својственог проблема за хамилтонијан $-\frac{1}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{x})$. Одговарајући кет једночестичног стања је $|n\rangle$, тако да је $\phi_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}|n\rangle$. Решења $\phi_n(\mathbf{x})$ чине потпуни базис и, ради једноставности, претпоставићемо да индекс n узима дискретне вредности (тј. $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$). Шредингерово поље сада можемо развити по функцијама $\phi_n(\mathbf{x})$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n e^{-iE_n t} \phi_n(\mathbf{x}), \quad \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n^\dagger e^{iE_n t} \phi_n^*(\mathbf{x}), \quad (3.120)$$

при чему смо спински индекс „увукли“ у n . Уз овакво решење, хамилтонијан поља постаје

$$H = \sum_n E_n a_n^\dagger a_n, \quad (3.121)$$

где је искоришћено ортонормирање својствених функција $\phi_n(\mathbf{x})$. Заменом решења (3.120) у (3.101) добијамо експлицитни израз за комутатор/антикомутатор

$$\left[\psi(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right]_{\mp} = \sum_{n,m} \left[a_n, a_m^\dagger \right]_{\mp} e^{it(E_m - E_n)} \phi_m^*(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}). \quad (3.122)$$

Пошто функције $\phi_n(\mathbf{x})$ задовољавају услов комплетности [Шиф, Л. (1968)]

$$\sum_n \phi_n^*(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.123)$$

за креационе и аниhilационе операторе морају важити следеће релације

$$\left[a_n, a_m^\dagger \right]_{\mp} = \delta_{nm}. \quad (3.124)$$

Слично се показују и

$$\left[a_n, a_m \right]_{\mp} = \left[a_n^\dagger, a_m \right]_{\mp} = 0. \quad (3.125)$$

Из (3.121), (3.124) и (3.125) се види да на снази остаје све што је речено за случај $U(\mathbf{x}) = 0$, с том разликом да се уместо равних таласа користи ортонормирани базис $\{\phi_n(\mathbf{x})\}$, уз замену делта-функција⁹ Кронекеровим симболима.

Лагранжијан са двочестичном интеракцијом

Претпоставимо сад да честице које описује хамилтонијан (3.117) интерагују међусобно и нека је потенцијална енергија те интеракције дата са

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \widetilde{W}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \quad W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i) = W(\mathbf{0}) = 0 \quad (3.126)$$

Да би формализмом КТП обухватили овакву двочестичну интеракцију, можемо поступити на следећи начин. Двочестична интеракција из (3.126) се очигледно може записати и као

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \sum_{i,j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \quad (3.127)$$

где смо увели запреминску густину броја честица

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (3.128)$$

Приликом преласка на квантну теорију, $\rho(\mathbf{x})$ постаје оператор густине броја честица. Њега смо такође нашли приликом разматрања слободног Шредингеровог поља [Видети једначину (3.112)]

$$\rho(\mathbf{x}) = \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}). \quad (3.129)$$

⁹Заправо, уз замену делта функција помножених са $(2\pi)^3$ Кронекеровим симболима.

Замена (3.128) и (3.129) у (3.127) даје оператор двочестичне интеракције написан помоћу оператора Шредингеровог поља

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi^\dagger(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}). \quad (3.130)$$

Оператор интеракције се обично пише тако да су оператори поља нормално уређени, чиме долазимо до коначног облика

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{y}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} W_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \quad (3.131)$$

Матрични елементи интеракције који се појављују у (3.131) су дефинисани са

$$W_{ijkl} = \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \phi_i^*(\mathbf{x}) \phi_j^*(\mathbf{y}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi_k(\mathbf{y}) \phi_l(\mathbf{x}). \quad (3.132)$$

Наравно, изрази (3.130) и (3.131) имају исти класични лимес и у оба је W ермитски оператор, али други има предност да анихилира вакуум [Mahan, G.D. (2000)]. Они се заправо разликују до на дијагонални члан који се може сматрати делом енергије вакуума.

Дакле, хамилтонијан интерагујућег система нерелативистичких честица се може записати као

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbf{x}} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{y}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}) \\ &= \sum_n E_n a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} W_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \end{aligned} \quad (3.133)$$

при чему временски аргумент код оператора поља није писан ради прегледности. На крају треба приметити да, иако описују исту интеракцију, између двочестичног квантно-механичког оператора (3.126) и оператора (3.131) постоји концептуална разлика. Док су у (3.126) динамичке променљиве оператори координате \mathbf{x}_i , у (3.131) су то оператори поља $\psi(\mathbf{x})$.

3.4 Вишечестични оператори

У претходна два одељка смо навели више примера оператора који се појављују у квантним верзијама скаларног, комплексног и Шредингеровог оператора. Са изузетком примера (3.131), у питању су били тзв. једночестични оператори. Њихово дејство на вишечестична бозонска и фермионска стања се своди на дејство оператора $n(\mathbf{k})$ на вишечестична стања. Примери једночестичних оператора су, рецимо, оператори енергије и импулса слободних поља [Видети (3.58), (3.91), (3.110) и (3.131)], као и оператор набоја Q дефинисан у (3.97). Они су, у општем случају, конструисани од парова креационих и/или анихилационих оператора. Двочестични оператори описују ефекте интеракције, односно процесе у којима долази до креације и анихилације честица и садрже четири креациона и/или анихилациона оператора. Поред наведених једночестичних и двочестичних оператора, постоје и многи модели са операторима који садрже бесконачан низ

чланова који описују интеракцију и садрже све већи број оператора креације и анихилације. Пример за овакве теорије су оне засноване на квантној верзији нелинеарног сигма модела или теорије које описују системе локализованих спинова [Видети Одељак 3.7 за пример Хајзенберговог модела]. У овом одељку ћемо дискутовати теорему [Weinberg, S. (2008)] која тврди да је увек могуће конструисати произвољне вишечестичне операторе који имају тражено дејство на вишечестична бозонска/фермионска стања а изграђени су од креационих и анихилационих оператора према

$$O = \sum_{N,M=0}^{\infty} \int dq_1 dq_2 \cdots dq_N dp_1 dp_2 \cdots dp_M C_{NM}(q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_M) \times a_{q_1}^\dagger a_{q_2}^\dagger \cdots a_{q_N}^\dagger a_{p_M} a_{p_{M-1}} \cdots a_{p_1}, \quad (3.134)$$

где p (или q) означава скуп параметара који карактеришу стање (рецимо, импулс \mathbf{p} и спин σ), а $\int dp$ означава суму по свим вредностима тих параметара. Рецимо, за скаларно поље је $p \equiv \mathbf{p}$ и $\int dp \equiv \int_{\mathbf{p}}$, за бозонско $S = 0$ Шредингерово поље у спољашњем потенцијалу је $\int dp \equiv \sum_n$, док је за фермионско Шредингерово поље $p = (\mathbf{p}, \sigma)$ и $\int dp \equiv \int_{\mathbf{p}} \sum_{\sigma=1,2}$. Даље, креациони и анихилациони оператори из (3.134) задовољавају релације

$$[a_p, a_q^\dagger] = \delta(p - q), \quad [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = [a_p, a_q] = 0. \quad (3.135)$$

Тако за скаларно поље (3.135) постаје $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]_- = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$, док је у случају фермионског Шреингеровог поља (3.135) скраћени запис за $[a_{\mathbf{p},\sigma}, a_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger]_+ = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'}$ итд. Једночестична стања су $|k\rangle = a_k^\dagger |0\rangle$. Ако је један од оператора бозонски а други фермионски, узимамо да увек комутирају. Коначно, анихилациони оператори делују на једночестична стања према

$$a_k |K\rangle = \delta(K - k) |0\rangle, \quad (3.136)$$

што је апстрактна верзија релације (3.71). Другим речима, теорема тврди да је увек могуће изабрати коефицијенте $C_{NM}(p_1, p_2, \dots, p_N; q_1, q_2, \dots, q_M)$ тако да матрични елемент оператора O између вишечестичних стања имају тражене (тј. унапред задане) вредности. Због комутационих (антикомутационих) релација (3.135), коефицијенти C_{NM} су симетрични (антисиметрични) у односу на пермутације q_1, q_2, \dots, q_N и p_1, p_2, \dots, p_M . На пример, посматрајмо оператор O који садржи производ два анихилациона и једног креационог оператора за фермионе

$$O = \int dq dp dp' C_{12}(q; p, p') a_q^\dagger a_p a_{p'}. \quad (3.137)$$

Користећи анитикомутатор да заменимо места операторима a_p и $a_{p'}$, након чега извршимо смену неких променљивих $p \rightleftharpoons p'$, видимо да се овај оператор може написати као

$$O = - \int dq dp dp' C_{12}(q; p', p) a_q^\dagger a_p a_{p'}, \quad (3.138)$$

одакле добијамо $C_{12}(q; p, p') = -C_{12}(q; p', p)$. Следећи пример оператора који садржи један бозонски и два фермионска оператора је облика

$$O = \int dq dp dp' C_{12}(q; p, p') a_q^\dagger a_p b_{p'}, \quad (3.139)$$

где су a_p и a_q^\dagger фермионски оператори а $b_{p'}$ је бозонски оператор. Пошто је $[a_p, b_{p'}] = 0$, у овом случају важи $C_{12}(q; p, p') = +C_{12}(q; p', p)$ Оператори овог типа се појављују у теорији суперпроводности где a_q^\dagger креира а a_p анихилира електрон док $b_{p'}$ анихилира фонон [Abrikosov, A., Gorkov, L., Dzyaloshinski, I. (1963); Feynman, R.P. (1973); Mahan, G.D. (2000)].

Пре него што кренемо у доказ теореме, добићемо неке помоћне резултате о дејству анихилационих оператора на стања

$$|K_1, K_2, \dots, K_N\rangle = a_{K_1}^\dagger a_{K_2}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle. \quad (3.140)$$

За почетак, показаћемо да важи

$$a_k |K_1, K_2, \dots, K_N\rangle = \sum_{\alpha=1}^N (\pm)^{\alpha+1} \delta(k - K_\alpha) |\dots K_\alpha = 0 \dots\rangle, \quad (3.141)$$

при чему се горњи знак односи на бозонске операторе, доњи на фермионске а

$$|\dots K_\alpha = 0 \dots\rangle = a_{K_1}^\dagger \dots a_{K_{\alpha-1}}^\dagger a_{K_{\alpha+1}}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle. \quad (3.142)$$

представља стање којем је у односу на (3.140) уклоњена једна честица из стања $|K_\alpha\rangle$. Коришћењем (3.135) два пута узастопно налазимо

$$\begin{aligned} a_k a_{K_1}^\dagger a_{K_2}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle &= \left(\delta(k - K_1) \pm a_{K_1}^\dagger a_k \right) a_{K_2}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle \\ &= \delta(k - K_1) a_{K_2}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle \pm a_{K_1}^\dagger a_k a_{K_2}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle \\ &= \delta(k - K_1) |\dots K_1 = 0 \dots\rangle \pm a_{K_1}^\dagger \left(\delta(k - K_2) \pm a_{K_2}^\dagger a_k \right) a_{K_3}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle \\ &= \delta(k - K_1) |\dots K_1 = 0 \dots\rangle \pm \delta(k - K_2) |\dots K_2 = 0 \dots\rangle \\ &(\pm)^2 a_{K_1}^\dagger a_{K_2}^\dagger a_k a_{K_3}^\dagger \dots a_{K_N}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (3.143)$$

Настављајући померање оператора a_k на десно, коришћењем (3.135), добијамо (3.141).

Следећи резултат који нам треба се тиче дејства N анихилационих оператора на вишечестично стање (3.140) Размотримо, за почетак, случај Ферми-Диракове статистике. Тврдимо да је

$$\begin{aligned} a_{k_N} a_{k_{N-1}} \dots a_{k_2} a_{k_1} |K_1, K_2, \dots, K_{N-1}, K_N\rangle &= \det [\delta(K_\alpha - k_\beta)] |0\rangle \\ &= \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N-1} \alpha_N} \delta(K_1 - k_{\alpha_1}) \delta(K_2 - k_{\alpha_2}) \dots \delta(K_N - k_{\alpha_N}) |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.144)$$

где $\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}$ представља тотално антисиметрични симбол у N димензија. Доказ изводи-мо индукцијом. Пошто се лако проверава да релација (3.144) важи за $N = 1$ и $N = 2$, претпоставимо да је исправна за произвољно N и погледајмо шта се добија када је број

честица $N + 1$. Тада је потребно одредити како $N + 1$ анихилациони оператор делује на вишечестично стање према

$$a_{k_{N+1}} a_{k_N} a_{k_{N-1}} \dots a_{k_2} a_{k_1} |K_1, K_2, \dots, K_N, K_{N+1}\rangle \quad (3.145)$$

Користећи антикомутиционе релације за анихилационе операторе (3.135) да оператор $a_{k_{N+1}}$ пребацимо скроз са десне стране у односу на остале, горњи израз сводимо на

$$\begin{aligned} & (-1)^N a_{k_N} a_{k_{N-1}} \dots a_{k_2} a_{k_1} a_{k_{N+1}} |K_1, K_2, \dots, K_N, K_{N+1}\rangle = \\ & (-1)^N \sum_{\alpha=1}^N \delta(K_\alpha - k_{N+1}) a_{k_N} a_{k_{N-1}} \dots a_{k_2} a_{k_1} |\dots K_\alpha = 0 \dots K_{N+1}\rangle \\ & + (-1)^N (-1)^{(N+1)+1} \delta(K_{N+1} - k_{N+1}) a_{k_N} a_{k_{N-1}} \dots a_{k_2} a_{k_1} |K_1, K_2, \dots, K_N, K_{N+1} = 0\rangle \end{aligned}$$

где смо искористили (3.141) и посебно смо издвојили чланове у којима је $a_{k_{N+1}}$ анихилирао стање $|K_{N+1}\rangle$. Ако сада искористимо релацију (3.144) која, по претпоставци, важи за произвољно N налазимо

$$\begin{aligned} & a_{k_{N+1}} a_{k_N} a_{k_{N-1}} \dots a_{k_2} a_{k_1} |K_1, K_2, \dots, K_N, K_{N+1}\rangle \\ & = \delta(K_{N+1} - k_{N+1}) \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N} \delta(K_1 - k_1) \dots \delta(K_N - k_N) \\ & + \sum_{\alpha=1}^N (-1)^{\alpha+(N+1)} \delta(K_\alpha - k_{N+1}) \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_i \neq \alpha \dots \beta_{N+1}} \delta(K_{\beta_1} - k_1) \dots \delta(K_{\beta_N} - k_N). \end{aligned}$$

Као резултат смо добили суму од $N! + N!N = (N + 1)!$ чланова од којих се сваки састоји од производа $N + 1$ делта функција са различитим аргуменрима типа $K_\alpha - k_\beta$. Такође, на основу особина антисиметричног тензора и фактора $(-1)^{\alpha+(N+1)}$, све пермутације величина k_α у односу на

$$\delta(K_1 - k_1) \delta(K_2 - k_2) \dots \delta(K_N - k_N) \delta(K_{N+1} - k_{N+1}), \quad (3.146)$$

улазе у крајњи резултат са предзнаком \pm у зависности од тога да ли је пермутација парна или не. Овим је доказ завршен.

Што се тиче бозонске статистике, важи

$$\begin{aligned} & a_{k_N} a_{k_{N-1}} \dots a_{k_2} a_{k_1} |K_1, K_2, \dots, K_{N-1}, K_N\rangle = \text{per}[\delta(K_\alpha - k_\beta)] |0\rangle \\ & = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \delta(K_1 - k_{\alpha_1}) \delta(K_2 - k_{\alpha_2}) \dots \delta(K_N - k_{\alpha_N}) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.147)$$

и доказује се на сличан начин. У горњој релацији је са per означена перманента матрице. Забележићемо и релације које се од (3.144) и (3.147) добијају адјунговањем. За случај фермиона имамо

$$\langle K_N, K_{N-1}, \dots, K_1 | a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_N}^\dagger = \langle 0 | \det [\delta(K_\alpha - k_\beta)], \quad (3.148)$$

ДОК

$$\langle K_N, K_{N-1}, \dots, K_1 | a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_N}^\dagger = \langle 0 | \text{per} [\delta(K_\alpha - k_\beta)] \quad (3.149)$$

важи за бозонске системе.

Пример 3.3. Погледајмо како релација (3.144) гласи у случају трочестичног стања. Директно налазимо

$$\begin{aligned} a_q a_p a_k |QPK\rangle &= \delta(K-k)\delta(P-p)\delta(Q-q)|0\rangle + \delta(K-p)\delta(P-q)\delta(Q-k)|0\rangle \\ &+ \delta(K-q)\delta(P-k)\delta(Q-p)|0\rangle - \delta(K-k)\delta(P-q)\delta(Q-p)|0\rangle \\ &- \delta(K-p)\delta(P-k)\delta(Q-q)|0\rangle - \delta(K-q)\delta(P-p)\delta(Q-k)|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Из ове једнакости се лепо види да су и лева и десна страна антисиметричне у односу на међусобне пермутације k, p и q , као и у односу на независне пермутације K, P и Q . ■

Пређимо сада на доказ теореме, који такође изводимо индуктивно. Нека је оператор O задат као у (3.134). Пошто је $a_k|0\rangle = \langle 0|a_k^\dagger = 0$, дејство оператора O на вакуумско стање је у потпуности одређено матричним елементом

$$C_{00} = \langle 0|O|0\rangle. \quad (3.151)$$

Слично, његово дејство на једночестична стања $|K\rangle$ је одређено са три матрична елемента

$$\begin{aligned} \langle 0|O|K\rangle &= \int dp C_{01}(p)\langle 0|a_p|K\rangle = \int dp C_{01}(p)\delta(K-p) = C_{01}(K), \\ \langle K|O|0\rangle &= \int dp C_{10}(p)\langle K|a_p^\dagger|0\rangle = \int dp C_{10}(p)\delta(K-p) = C_{01}(K), \\ \langle Q|O|P\rangle &= \int dqdp C_{11}(q;p)\langle Q|a_q^\dagger a_p|P\rangle = C_{11}(Q;P). \end{aligned} \quad (3.152)$$

Претпоставимо да смо на овај начин фиксирали све матричне елементе до неког $C_{\bar{N}\bar{M}}$. Овај матрични елемент је одређен са

$$\begin{aligned} &\langle Q_{\bar{N}}, Q_{\bar{N}-1}, \dots, Q_2, Q_1|O|P_1, P_2, \dots, P_{\bar{M}-1}, P_{\bar{M}}\rangle \\ &= \int dq_{\bar{N}} \dots dq_1 dp_1 \dots dp_{\bar{M}} C_{\bar{N}\bar{M}}(q_1, q_2, \dots, q_{\bar{N}-1}, q_{\bar{N}}; p_1, p_2, \dots, p_{\bar{M}-1}, p_{\bar{M}}) \\ &\times \langle Q_{\bar{N}}, Q_{\bar{N}-1}, \dots, Q_2, Q_1 | \dots a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_{\bar{N}}}^\dagger a_{p_1} \dots a_{p_{\bar{M}}} | P_1, P_2, \dots, P_{\bar{M}-1}, P_{\bar{M}}\rangle \\ &+ \text{чланови који садрже } C_{NM} \text{ са } N < \bar{N} \text{ и } M \leq \bar{M}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Ако је у питању систем фермиона, на основу (3.144) и (3.148), видимо да се интеграл из горње једнакости своди на

$$\begin{aligned} &\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_M} C_{\bar{N}\bar{M}}(Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_2}, \dots, Q_{\alpha_N}; P_{\beta_1}, P_{\beta_2}, \dots, P_{\beta_M}) \\ &= N!N!C_{\bar{N}\bar{M}}(Q_1, Q_2, \dots, Q_N; P_1, P_2, \dots, P_M), \end{aligned} \quad (3.154)$$

при чему смо искористили особину антисиметрије коефицијената C_{NM} у односу на пермутације аргумената. Лако је видети да се идентичан резултат добија и у случају честица са бозонском статистиком [Weinberg, S. (2008)], као и у случају када имамо мешане бозонске и фермионске честице. На тај начин добијамо

$$\begin{aligned} &\langle Q_{\bar{N}}, Q_{\bar{N}-1}, \dots, Q_2, Q_1|O|P_1, P_2, \dots, P_{\bar{M}-1}, P_{\bar{M}}\rangle \\ &= N!N!C_{NM}(Q_1, Q_2, \dots, Q_N; P_1, P_2, \dots, P_M) \\ &+ \text{чланови који садрже } C_{NM} \text{ са } N < \bar{N} \text{ и } M \leq \bar{M}. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Дакле, без обзира на то како су раније фиксирани сви остали коефицијенти C_{NM} , увек можемо одабрати коефицијенте $C_{\bar{N}\bar{M}}$ тако да матрични елементи оператора O између вишечестичних стања $\langle Q_{\bar{N}}, Q_{\bar{N}-1}, \dots, Q_2, Q_1 |$ и $|P_1, P_2, \dots, P_{\bar{M}-1}, P_{\bar{M}}\rangle$ има тражену вредност. Овим је теорема доказана.

У канонском формализму кључну улогу у опису система има хамилтонијан изражен помоћу креационих и анихилационих оператора. Као што смо управо видели, било који класични хамилтонијан се, при преласку на квантну теорију, може изразити у облику (3.134). Део хамилтонијана који је облика

$$H = \int dp \omega(p) a_p^\dagger a_p, \quad (3.156)$$

описује слободно поље, тј. систем неинтерагујућих честица чија је енергија $\omega(p)$ [Овде и даље користимо апстрактну нотацију уведена на почетку овог поглавља]. Чланови који садрже већи број креационих и анихилационих оператора описују интеракцију између честица која се огледа кроз различите процесе настајања, нестајања честица или њиховог расејања. Код система који поседују транслаторну инваријантност, структура интеракционог члана је

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= \sum_{N,M=0}^{\infty} \int dq_1 dq_2 \dots dq_N dp_1 dp_2 \dots dp_M h_{NM}(q_1, q_2 \dots q_N; p_1, p_2, \dots p_M) \\ &\times a_{q_N}^\dagger \dots a_{q_1}^\dagger a_{p_1} \dots a_{p_M}, \end{aligned} \quad (3.157)$$

при чему су коефицијенти h_{NM} садрже само једну делта функцију која осигурава очување тродимензионог импулса [сада експлицитно пишемо тродимензиони импулс и пројекцију спина],

$$\begin{aligned} h_{NM}(q_1, q_2 \dots q_N; p_1, p_2, \dots p_M) &\equiv h_{NM}(q_1 \sigma_1, q_2 \sigma_2 \dots q_N \sigma_N; p_1 \sigma'_1, p_2 \sigma'_2, \dots p_M \sigma'_M) \\ &= \delta(q_1 + q_2 + \dots + q_N - p_1 - p_2 - \dots - p_M) \\ &\times \tilde{h}_{NM}(q_1 \sigma_1, q_2 \sigma_2 \dots q_N \sigma_N; p_1 \sigma'_1, p_2 \sigma'_2, \dots p_M \sigma'_M) \end{aligned} \quad (3.158)$$

а коефицијенти \tilde{h}_{NM} не садрже додатне делта функције. Испоставља се да овакав облик интеракције осигурава да се имплементира принцип локалности по којем довољно удаљене честице не могу да утичу једна на другу. Ово је један од основних разлога употребе креационих и анихилационих оператора у релативистичкој квантној теорији поља и нерелативистичкој квантној статистичкој механици [Weinberg, S. (2008)]. Утицај интеракције се обично урачунава пертурбативно и у ту сврху су развијене различите технике [Abrikosov, A., Gorkov, L., Dzyaloshinski, I. (1963); Mahan, G.D. (2000); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995); Ryder, L.H. (1996)].

3.5 Дискретизација у теорији поља

У литератури се често користе два вида дискретизације теорије поља. Први је тзв. нормирање у кутији којим се постиже да таласни вектори узимају дискретне вредности

док вектор положаја остаје непрекидна величина. Други прилаз претпоставља дискретну структуру и директног и реципрочног простора (тзв. теорија поља на решетки). У наставку је дат кратак преглед оба прилаза а директна примена теорије поља на решетки је илустрована кроз примере Хајзенберговог феромагнета и антиферомагнета у Одељцима 3.7.2 и 3.7.3.

3.5.1 Нормирање у кутији

Један од начина избегавања нормирања на делта функцију је затварање посматраног система у коцку ивице L и наметањем периодичних граничних услова [Шиф, Л. (1968); Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007)]. То доводи до дискретизације вредности таласног вектора, тако да интегрални бивају замењени сумама

$$\int_{\mathbf{k}} \longrightarrow \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}}. \quad (3.159)$$

Услед замене интеграла сумом, модификују се и неке једначине. Тако, (анти)комутационе релације постају

$$\left[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \right]_{\mp} = \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (3.160)$$

где је $\Delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ Кронекеров симбол, док хамилтонијан слободног поља прелази у

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \left[a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right], \quad (3.161)$$

уз истовремено рескалирање креационих и анихилационих оператора

$$\frac{a_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{\sqrt{V}} \rightarrow a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \quad \frac{a_{\mathbf{k}}}{\sqrt{V}} \rightarrow a_{\mathbf{k}}, \quad V = L^3 = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}). \quad (3.162)$$

Такође, приликом извођења једначина кретања за поље уместо

$$\int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} \mp \mathbf{y})} = \delta(\mathbf{x} \mp \mathbf{y}), \quad \int_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} \mp \mathbf{q})} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} \mp \mathbf{q}) \quad (3.163)$$

треба користити

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} \mp \mathbf{y})} = V \Delta(\mathbf{x} \mp \mathbf{y}), \quad \int_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} \mp \mathbf{q})} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} \mp \mathbf{q}). \quad (3.164)$$

Дејства креационих и анихилационих оператора у Фоковом простору постају

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |n(\mathbf{p})\rangle &= \sqrt{n(\mathbf{p}) + 1} |n(\mathbf{p}) + 1\rangle, \\ a_{\mathbf{p}} |n(\mathbf{p})\rangle &= \sqrt{n(\mathbf{p})} |n(\mathbf{p}) - 1\rangle, \end{aligned} \quad (3.165)$$

док је вишечестично бозонско стање дефинисано као

$$|n(\mathbf{k}_1), n(\mathbf{k}_2), \dots\rangle = \prod_i \frac{[a_{\mathbf{k}_i}^{\dagger}]^{n(\mathbf{k}_i)}}{\sqrt{n(\mathbf{k}_i)!}} |0\rangle, \quad (3.166)$$

уз одговарајућу замену и у случају фермиона.

Рачунање са дискретним векторима \mathbf{p} има предности, јер се пре свега не појављују се ”незгодни” фактори типа $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k})$, али је на крају рачунања обично неопходно прећи на интеграле према (3.159) [Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007)].

3.5.2 Поља на решетки

Постоје два прилаза теорији поља на решетки. Први претпоставља дискретизацију целог простор-времена а у другом се временска координата оставља континуалном [Capitani, S. (2003); Kogut, J.V. (1979)]. Пошто је излагање у овом тексту ограничено на канонско квантовање, дискутоваћемо формулацију у којој се дискретизују само просторне координате.

Нека је дата D димензиона кубна решетка са параметром a . Положаји чворова решетке су одређени са [Capitani, S. (2003)]

$$\mathbf{x} = \sum_i a n_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, D \quad (3.167)$$

где су n_i цели бројеви. Вектор \mathbf{x} и има улогу вектора положаја у обичној (континуалној) теорији. Користимо исту ознаку за вектор положаја на решетки као и за континуални радијус вектор према [Capitani, S. (2003)]. Из контекста ће бити јасно да ли се користи теорија поља у континууму или на решетки, тако да до забуне не може доћи. Уместо интеграла по целом простору, у теорији на решетки се појављују суме по свим чворовима

$$\int_{\mathbf{x}} \longrightarrow a^D \sum_{\mathbf{x}}. \quad (3.168)$$

Даље, због дискретизације простора импулси су ограничени на прву Брилуенову зону

$$\text{IBZ} = \left\{ \mathbf{k} : -\frac{\pi}{a} \leq k_\alpha \leq \frac{\pi}{a} \right\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, D. \quad (3.169)$$

Како се у теорији на решетки појављује коначна горња граница, оваква теорија је аутоматски регуларизирана [Capitani, S. (2003)]. То, наравно, не значи да се не могу појавити инфрацрвене дивергенције које указују на лоше одабрано основно стање [Видети Одељак 3.7.2].

Наметањем периодичних граничних услова [Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007)], импулси постају дискретни

$$k_\alpha = \frac{2\pi n_\alpha}{a\mathcal{N}_i}, \quad n_\alpha = -\frac{\mathcal{N}_\alpha}{2} + 1, \dots, 0, 1, \dots, \frac{\mathcal{N}_\alpha}{2}, \quad (3.170)$$

при чему је

$$V = a^D \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 \cdots \mathcal{N}_D \equiv L^D \equiv v_0 \mathcal{N} \quad (3.171)$$

запремина "кристала" (\mathcal{N} је укупан број чворова, v_0 је запремина елементарне ћелије а L је ивица хиперкоцке; \mathcal{N}_α је број чворова дуж једног правца). Уместо интеграла по \mathbf{k} простору, појавиће се суме по векторима из прве Брилуенове зоне. У граничном случају када $V \rightarrow \infty$, те суме се могу заменити интегралима [Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007); Capitani, S. (2003)]

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \prod_{\alpha=1}^D \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk_i}{2\pi} \equiv \int_{\mathbf{k} \in \text{IBZ}}. \quad (3.172)$$

где $\int_{\mathbf{k} \in \text{IBZ}}$ означава да је реч о интеграцији по првој Брилуеновој зони која је хиперкоцка ивице $2\pi/a$. Када нема опасности од забуне, користимо једноставно симбол $\int_{\mathbf{k}}$.

Купловање скаларних поља се може представити дискретним лапласијаном (2.43), док су Фуријеове трансформације дефинисане са [Capitani, S. (2003)]

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\mathbf{p}) &= a^D \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}), \\ \phi(\mathbf{x}) &= \int_{\text{pIBZ}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{p}),\end{aligned}\tag{3.173}$$

при чему се, као што је наглашено у (3.172) подразумева интеграција по првој Брилуеновој зони у \mathbf{p} простору. Делта функција у импулсном и Кронекеров симбол у директном простору постају [Capitani, S. (2003)]

$$\begin{aligned}(2\pi)^D \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= a^D \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{q})} = \mathcal{N} a^D \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \\ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= a^D \int_{\text{pIBZ}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}.\end{aligned}\tag{3.174}$$

Коначно, канонске комутационе релације за операторе поља на решетки гласе [Kogut, J.B. (1979)]

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \right] = \frac{i}{a^D} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\tag{3.175}$$

док су остали комутатори једнаки нули. При $a \rightarrow 0$ управо наведене једначине прелазе у обичне једначине квантне теорије поља [Weinberg, S. (2008)]. У случају решетке која није проста кубна, у горњим релацијама треба извршити замену $a^D \rightarrow v_0$, где је v_0 запремина одговарајуће елементарне ћелије. Такође, интеграција из (3.172) замењује са интеграцијом по I Брилуеновој зони дате решетке. У овом формализму канонске комутационе релације за креационе и анихилационе операторе задржавају облик (3.36), тј. (3.108).

Пример 3.4. Један од основних модела у теорији интерагујућих електрона је тзв. Хабардов модел. У њему електрони могу да окупирају чворове решетке и при томе интерагују само ако се налазе на истом чвору. У најједноставнијој верзији је допуштено да на чвору буду максимално два електрона. Нека $t_{x,y}$ параметар који описује прескакање електрона са чвора \mathbf{x} на чвор \mathbf{y} и нека је U интензитет Кулоновог одбијања два електрона који се налазе на истом чвору. Хамилтонијан

$$H = - \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \sigma} t_{\mathbf{x}\mathbf{y}} c_{\mathbf{x}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{y}, \sigma} + U \sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}, \uparrow} n_{\mathbf{x}, \downarrow},\tag{3.176}$$

при чему $c_{\mathbf{x}, \sigma}^\dagger$ креира електрон са пројекцијом спина σ на чвору \mathbf{x} , $n_{\mathbf{x}, \sigma} = c_{\mathbf{x}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{x}, \sigma}$ а $\sigma = \pm 1$. Када је $U \ll |t_{\mathbf{x}\mathbf{y}}|$, електрони се понашају као систем скоро слободних честица и може се користити стандардна теорија пертурбација са малим параметром $U/|t_{\mathbf{x}\mathbf{y}}|$. Ако је Кулонова интеракција доминантна, немогуће је применити пертурбативни развој јер не постоји основно стање које сачињавају неинтерагујући електрони. Јака кулоновска интеракција тада фиксира електроне у чворовима решетке, јер је енергетски много повољније да се на чворовима налазе изоловани електрони. Показује се да је код полу-попуњеног кристала динамику јако корелисаног Хабардовог модела ($U \gg |t_{\mathbf{x}\mathbf{y}}|$) могуће свести на ефективну антиферромагнетну интеракцију локализованих спинова $S = 1/2$ са интегралом измене $J \propto |t_{\mathbf{x}\mathbf{y}}|^2/U$ [Fradkin, E. (2013); Auerbach, A. (2012)]. ■

3.6 Спонтано нарушење симетрије у квантним теоријама

У одељку 1.3.4 је дискутована Голдстонова теорема у оквиру класичне теорије поља. Тамо је показано да у случају спонтаног нарушења континуалне глобалне симетрије постоје решења једначина кретања у виду равних таласа чија дисперзија задовољава $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$. Са друге стране, у овом поглављу смо разматрали квантну теорију поља и видели смо да квантно поље описује систем честица чија је енергија $\omega(\mathbf{k})$. Те честице се називају Голдстоновим бозонима¹⁰. Како бисмо доказали Голдстонову теорему и у случају квантне теорије, најпре морамо дати одговарајућу дефиницију спонтаног нарушења симетрије и видети како се симетријске трансформације имплементирају на операторима поља и вакуумским стањима. Излагање је ограничено на тзв. унутрашње симетрије. При томе под унутрашњим симетријама подразумевамо трансформације које не мењају дејство али су такве да ни на који начин не укључују просторно-временске координате [Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)].

3.6.1 Основне поставке

Претпоставимо да посматрамо класични систем који поседује континуалну глобалну симетрију у унутрашњем простору. На основу теореме Еми Нетер [Видети Одељак 1.3.2] следи да постоје величине Q_k које задовољавају услов $dQ_k/dt = 0$ и које су дате као $Q_k(t) = \int_{\mathbf{x}} J_k^0(\mathbf{x}, t)$, где су J_k^0 временске компоненте густина струје J_i^μ које се налазе из лагранжијана инваријантног у односу на трансформације из групе G [Видети (1.174)]. На основу (1.190) видимо да у класичној верзији теорије величине Q_k представљају одговарајуће генераторе трансформација. Заиста, комбинујући (1.190) и (1.221), налазимо

$$\left[\phi^a(\mathbf{x}, t), Q_k \right]_{\text{PZ}} = (\mathbf{X}_k)^a_b \phi^b(\mathbf{x}, t). \quad (3.177)$$

где индекс k узима вредности $1, 2, \dots, \dim(G)$. Након преласка на квантну теорију, ϕ постаје оператор N компонентног скаларног поља а (3.177) прелази у

$$\left[\phi^a(\mathbf{x}, t), Q_k \right]_- = (\mathbf{X}_k)^a_b \phi^b(\mathbf{x}, t). \quad (3.178)$$

што је само инфинитезимална верзија операторске релације [Ryder, L.H. (1996)]

$$e^{i\epsilon^k Q_k} \phi^a(\mathbf{x}, t) e^{-i\epsilon^k Q_k} = \left[e^{i\epsilon^k \mathbf{X}_k} \right]^a_b \phi^b(\mathbf{x}, t). \quad (3.179)$$

Одавде видимо да оператори Q_k репрезентују елементе алгебре \mathfrak{g} у Хилбертовом простору теорије док матрице \mathbf{X}_k репрезентују генераторе алгебре \mathfrak{g} у \mathbb{R}^N , где је N број компоненти поља ϕ . Имагинарну јединицу смо увели у (3.179) како би Q_k били ермитски оператори а \mathbf{X}_k ермитске матрице. Релација (3.179) је само закон трансформације оператора ϕ у односу на дејство унитарног оператора $U = \exp[i\epsilon^k Q_k]$ и као таква важи како за фермионска тако и за бозонска поља. Будући да знамо како група G делује

¹⁰Показује се да им је спин $S = 0$, видети [Weinberg, S. (2010)].

на операторе, закључујемо да ће на векторе у Хилбертовом простору (тј. на стања), трансформације из G деловати као

$$|\psi'\rangle = e^{i\epsilon^k Q_k} |\psi\rangle. \quad (3.180)$$

За сада ћемо претпоставити да интегрални који дефинишу генераторе Q_k конвергирају, тако да су операције (3.179) и (3.180) добро дефинисане. На та питања ћемо се вратити у Одељку 3.6.4.

Претпоставимо, дакле, да је хамилтонијан који дефинише наш модел инваријантан у односу на трансформације из G . Будући да су Q_k генератори тих трансформација у Хилбертовом простору теорије, услов инваријантност хамилтонијана постаје

$$e^{i\epsilon^k Q_k} H e^{-i\epsilon^k Q_k} = H, \quad (3.181)$$

што се може изразити и као

$$\left[H, Q_k \right]_- = 0. \quad (3.182)$$

Даље, нека је $|\text{VAC}\rangle$ основно стање модела¹¹, тј. $H|\text{VAC}\rangle = E_0|\text{VAC}\rangle$, при чему је са E_0 означена енергија основног стања¹². Због релације (3.182), видимо да је и $\exp[i\epsilon^k Q_k]|\text{VAC}\rangle$ такође основно стање. Феномен спонтаног нарушења симетрије одговара ситуацији у којој основно стање *није* инваријантно у односу на дејство елемената групе G , односно када је [Zee, A. (2010); Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)]

$$\exp[i\epsilon^k Q_k]|\text{VAC}\rangle \neq \text{const.} \times |\text{VAC}\rangle. \quad (3.183)$$

Другим речима, до спонтаног нарушења симетрије долази када неки од оператора Q_k не анихилирају основно стање,

$$Q_k|\text{VAC}\rangle \neq 0, \quad \text{барем за неке вредности } k. \quad (3.184)$$

Како је група трансформација G , по претпоставци, Лијева група, постоји бесконачно много основних стања која су међусобно повезана дејством оператора $\exp[i\epsilon^k Q_k]$. Пошто сва таква стања имају исту енергију, дегенерација основног стања је бесконачна. Одабир једног из континуума могућих стања одговара спонтаном нарушењу симетрије и то је математички изражено условом (3.184). Будући да разматрамо квантну теорију, из досадашњег излагања је остало нејасно због чега би се систем морао наћи у једном од еквивалентних стања (што одговара спонтаном нарушењу симетрије), а не у некој линеарној суперпозицији могућих стања. Ово питање је кратко дискутовано у Одељку 3.6.4.

Наравно, може се догодити да је $|\text{VAC}\rangle$ својствено стање неког генератора,

$$Q_l|\text{VAC}\rangle = \lambda_l|\text{VAC}\rangle. \quad (3.185)$$

Тада дејство елемента G којег генерише Q_l мења фазу основног стања

$$e^{i\epsilon^l Q_l}|\text{VAC}\rangle = e^{i\epsilon^l \lambda_l}|\text{VAC}\rangle, \quad \text{без суме по } l. \quad (3.186)$$

¹¹Ознаку $|0\rangle$ ћемо користити за вакуумско стање Голдстонових бозона.

¹²Погодним избором константног фактора у хамилтонијану се увек може постићи $E_0 = 0$.

При томе је $\lambda_l \in \mathbb{R}$ јер је Q_l ермитски оператор. У овој ситуацији је

$$\langle \text{VAC} | Q_l | \text{VAC} \rangle \neq 0. \quad (3.187)$$

Пошто је $Q_k = \int_x J_k^0(\mathbf{x}, t)$, услов (3.187) је могућ само у моделима који нису Лоренц-инваријантни. Наиме, уколико би једна од компоненти неког квадриквектора имала вакуумски очекивану вредност различиту од нуле, то би дефинисало преферисани правац у простору Минковског и водило би ка нарушењу Лоренцове инваријантности теорије [Leutwyler, H. (1994)]. Дакле, услов (3.187) можемо очекивати у нерелативистичким теоријама и видећемо га већ на примеру Хајзенберговог феромагнета [Одељак 3.7.2]. Други пример теорија у којима важи (3.187) су релативистички модели са хемијским потенцијалом [Brauner, T. (2010)].

3.6.2 Параметар уређености

Као и у класичној теорији, спонтано нарушење симетрије у квантном случају се може описати и помоћу параметра уређености. У квантној верзији теорије, параметром уређености називамо очекивану вредност неког оператора који се нетривијално трансформише у односу на елементе из G [Leutwyler, H. (1994)]. Као што ћемо видети, релација (3.184) имплицира постојање параметра уређености.

Нека ϕ^a означава једну од N компоненти скаларног поља које се, приликом дејства групе G трансформише као

$$\phi^a \rightarrow \tilde{\phi}^a = e^{i\epsilon^k Q_k} \phi^a e^{-i\epsilon^k Q_k} = \phi^a - i\epsilon^k [\phi^a, Q_k] + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \phi^a + i\epsilon^k (\mathbf{X}_k)^a_b \phi^b + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.188)$$

Пошто је $\phi^a \neq \tilde{\phi}^a$, бар за неке вредности индекса a , макар неке од матрица \mathbf{X}_k морају бити различите од нула-матрице. Узимањем средње вредности (3.188) по вакуумском стању, добијамо

$$\epsilon^k \langle \text{VAC} | [\phi^a, Q_k] | \text{VAC} \rangle = -\epsilon^k (\mathbf{X}_k)^a_b \langle \text{VAC} | \phi^b | \text{VAC} \rangle \equiv -\chi. \quad (3.189)$$

Уколико би стање $|\text{VAC}\rangle$ поседовало симетрију хамилтонијана (односно, ако би важило $Q_k |\text{VAC}\rangle = 0$ за свако k , или да за неке Q_l важи $Q_l |\text{VAC}\rangle = \lambda_l |\text{VAC}\rangle$), имали бисмо $\epsilon^k (\mathbf{X}_k)^a_b \langle \text{VAC} | \phi^a | \text{VAC} \rangle = 0$. Међутим, управо смо закључили да бар неке матрице \mathbf{X}_k морају имати елементе различите од нуле. То значи да је $\langle \text{VAC} | \phi^a | \text{VAC} \rangle = 0$ кад год Q_k анихилира $|\text{VAC}\rangle$ [Nair, V.P. (2005)], или је $|\text{VAC}\rangle$ својствени вектор од Q_l [Brauner, T. (2010)]. Обрнуто, ако стање $|\text{VAC}\rangle$ није инваријантно у односу на трансформације из групе G , биће $\langle \text{VAC} | [\phi^a, Q_k] | \text{VAC} \rangle \neq 0$ бар за неке вредности k што значи да је бар за неке компоненте

$$\langle \text{VAC} | \phi^a | \text{VAC} \rangle \neq 0. \quad (3.190)$$

Ове очекиване вредности представљају параметар уређености у квантној теорији.

Однос између услова (3.184) и параметара уређености се може дискутовати и у супротном смеру. Уколико постоје оператори који се нетривијално трансформишу у односу на G и ако они поседују вакуумски очекиване вредности различите од нуле (уколико постоји параметар уређености), тада својствено стање хамилтонијана не поседује и његову симетрију.

Погледајмо мало детаљније ситуацију у којој важи (3.187). Како $\{Q_k\}$ представљају базис Лијеве алгебре \mathfrak{g} , они задовољавају комутационе релације

$$\left[Q_i, Q_j\right]_- = if_{ij}^k Q_k, \quad (3.191)$$

где су f_{ij}^k тзв. структурне константе Лијеве алгебре \mathfrak{g} [Weinberg, S. (2008)]. Дакле, ако G није Абелова група и ако постоји генератор Q_l , чији је $|\text{VAC}\rangle$ својствени вектор, очекивану вредност из (3.187) можемо узети за параметар уређености. На основу ранијег коментара, знамо да је ово могуће само у теоријама које не поседују Лоренцову инваријантност. Испоставља се да је управо услов (3.187) одговоран за нерелативистичку дисперзију у великом броју случајева. Наиме, ако важи (3.187), тада сигурно постоје још два елемента из \mathfrak{g} , такви да је

$$\langle \text{VAC} | [Q_i, Q_j]_- | \text{VAC} \rangle = if_{ij}^l \langle \text{VAC} | Q_l | \text{VAC} \rangle \neq 0. \quad (3.192)$$

Горњи услов уводи ограничење на динамику Голдстонових бозона чинећи стања која генеришу Q_i и Q_j међусобно конјугованим а не независним степенима слободе [Видети Nambu, Y. (2004); Watanabe, H., Murayama, H. (2014, 2012); Brauner, T. (2010)].

3.6.3 Голдстонова теорема

У општој формулацији, Голдстонова теорема за квантне системе тврди да у случају спонтаног нарушења континуалне глобалне симетрије постоји *барем једно* стање (тј. честица) чија енергија задовољава услов $\omega(\mathbf{k} = \mathbf{0}) = 0$ [Brauner, T. (2010)]. Као што је већ напоменуто у Одељку 1.3.4, прецизно бројање ових честица захтева додатна разматрања о природи основног стања [Видети Watanabe, H., Murayama, H. (2014)]. Такође, ограничићемо се на унутрашње симетрије.

За доказ Голдстонове теореме ћемо кренути од једначине континуитета (1.155), односно (1.157), која је последица теореме Еми Нетер. Третирајући густине струја у квантној теорији J_k^μ као оперatore, можемо писати

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \left[\partial_\mu J_k^\mu(\mathbf{x}, t), \phi^a(0) \right] &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}} \left[J_k^0(\mathbf{x}, t), \phi^a(0) \right] + \int_{\mathbf{x}} \text{div} \left[\mathbf{J}_a(\mathbf{x}, t), \phi^a(0) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[Q_k(t), \phi^a(0) \right] + \int d\mathbf{S} \cdot \left[\mathbf{J}_k(\mathbf{x}, t), \phi^a(0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.193)$$

Имајући у виду да је $\mathbf{J}_k = -\partial\mathcal{L}/\partial(\nabla\phi^a)\mathcal{F}_k^a$, где је $\delta\phi^a = \epsilon^k \mathcal{F}_k^a$, као и да варијација поља на бесконачно удаљеној површини ишчезава, остаје $d/dt[Q_k(t), \phi^a(0)] = 0$, односно

$$\epsilon^k \left\langle \text{VAC} \left| \frac{d}{dt} \left[Q_k(t), \phi^a(0) \right] \right| \text{VAC} \right\rangle \equiv \frac{d\chi}{dt} = 0. \quad (3.194)$$

Нека $|n\rangle$ означава једночестична стања која су својствена стања оператора квадриквектора импулса поља [Nair, V.P. (2005)]

$$\mathbf{P}|n\rangle = \mathbf{p}_n|n\rangle, \quad H|n\rangle = E(\mathbf{p}_n)|n\rangle \equiv E_n|n\rangle, \quad (3.195)$$

помоћу којих можемо конструисати јединични оператор чијим се уметањем једначина (3.189) може трансформисати као

$$\chi = \epsilon^k \int_{\mathbf{x}} \sum_n \left[\langle \text{VAC} | J_k^0(\mathbf{x}, t) | n \rangle \langle n | \phi^a(0) | \text{VAC} \rangle - \langle \text{VAC} | \phi^a(0) | n \rangle \langle n | J_k^0(\mathbf{x}, t) | \text{VAC} \rangle \right]. \quad (3.196)$$

Даље, користећи оператор просторно-временске транслације [Weinberg, S. (2008)]

$$J_k^0(\mathbf{x}, t) = \exp[-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} + iHt] J_k^0(0) \exp[i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} - iHt] \quad (3.197)$$

заједно са (3.196) и интегралном репрезентацијом делта функције, долазимо до

$$\begin{aligned} \chi &= \epsilon^k \sum_n (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_n) \\ &\times \left[\langle \text{VAC} | J_k^0(0) | n \rangle \langle n | \phi^a(0) | \text{VAC} \rangle e^{-iE_n t} - \langle \text{VAC} | \phi^a(0) | n \rangle \langle n | J_k^0(0) | \text{VAC} \rangle e^{iE_n t} \right]. \end{aligned} \quad (3.198)$$

На основу (3.194) и (3.198) сада следи

$$\begin{aligned} 0 &= i\epsilon^k \sum_n (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_n) E(\mathbf{p}_n) \\ &\times \left[\langle \text{VAC} | J_k^0(0) | n \rangle \langle n | \phi^a(0) | \text{VAC} \rangle e^{-iE_n t} + \langle \text{VAC} | \phi^a(0) | n \rangle \langle n | J_k^0(0) | \text{VAC} \rangle e^{iE_n t} \right]. \end{aligned} \quad (3.199)$$

Претпоставка о спонтано нарушеној симетрији је према (3.189) еквивалентна са $\chi \neq 0$, а из (3.198) се види да је то могуће само ако постоји бар једно стање $|n\rangle \equiv |G\rangle$ које задовољава

$$\langle \text{VAC} | J_k^0(0) | G \rangle \langle G | \phi^a(0) | \text{VAC} \rangle \neq 0. \quad (3.200)$$

Ако важи (3.200), тада из (3.199) следи услов који морају испуњавати енергије једночестичних стања $|G\rangle$

$$\delta(\mathbf{p}_G) E(\mathbf{p}_G) = 0, \quad (3.201)$$

или $E(\mathbf{p}_G = 0) = 0$. Дакле, енергија стања $|G\rangle$, које према (3.200) мора постојати ако је дошло до спонтаног нарушавања симетрије, нестаје при $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$. На тај начин је доказ Голдстонове теореме комплетан. Приметићемо да смо за доказ користили само опште поставке о постојању нарушене симетрије и величина које се нетривијално трансформишу у односу на дејство групе G . Због тога можемо очекивати да теорема буде од користи у различитим ситуацијама.

Из (3.200) видимо да стања $|G\rangle$ креирају бозонски оператори $\phi^a(x)$, као и оператори $J_k^0(x)$. Будући да се и ϕ и J^0 тривијално трансформишу у односу на ротације (индекси a и k се односе на унутрашње степене слободе и немају везе са просторним координатама из \mathbb{R}^D ; видети, рецимо [Kämpfer, F., Moser, M., Wiese, U.J. (2005)] за пример Хајзенберговог антиферромагнета), закључујемо да је стање $|G\rangle$, које се јавља приликом спонтаног нарушења континуалне глобалне симетрије у унутрашњем простору, скалар [Nair, V.P. (2005); Watanabe, H., Murayama, H. (2014); Weinberg, S. (2010); Burgess, C.P. (2020)]. Пошто скаларна стања носе спин $S = 0$, видимо да стање $|G\rangle$ одговара бозонској екситацији. То је тзв. Голдстонов бозон. Испоставља се да је у Лоренц-инваријантним теоријама број Голдстонових бозона једнак са бројем класичних Голдстонових поља и

износи $\dim(G/H)$ [Видети Одељак 1.3.4], док је у нерелативистичким моделима, због услова (3.187) тај број мањи. У општем случају, Голдстонови бозони се могу класификовати у две групе: бозони типа А и бозони типа В. Ако у систему долази до спонтаног нарушења симетрије по образцу $G \rightarrow H$, бројеви Голдстонових бозона типа А (n_A) и В (n_B) су дати са

$$\begin{aligned} n_A &= \dim(G/H) - \text{rank} \rho, \\ n_B &= \frac{1}{2} \text{rank} \rho \end{aligned} \quad (3.202)$$

при чему је матрица ρ дефинисана помоћу компоненти као¹³

$$\rho_{CD} = \frac{-i}{V} \langle \text{VAC} | [Q_C, Q_D] | \text{VAC} \rangle \quad (3.203)$$

а индексима C, D су означени генератори који припадају простору $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ [Видети Одељак 1.3.4], што значи да оператори Q_C и Q_D задовољавају услов (3.184). Укупан број Голдстонових *поља* је увек једнак са $\dim(G/H)$. Другим речима, за потпуни опис динамике Голдстонових бозона у нерелативистичким системима није довољан образац нарушења симетрије $G \rightarrow H$ већ су потребне додатне информације о основном стању $|\text{VAC}\rangle$. Голдстонови бозони типа А обично имају линеарну а Голдстонови бозони типа В квадратну дисперзију. Међутим, могући су изузеци [Видети Watanabe, H., Murayama, H. (2014, 2012)].

Чињеница да је $J_k^0(0)|\text{VAC}\rangle \propto |G\rangle$ нам даје сликовит опис Голдстонових бозона. Наиме, из (3.178) и (3.179) видимо да оператори Q_k генеришу глобалне трансформације које су симетрије хамилтонијана, али и преводе могућа основна стања једно у друго [Видети (3.184)]. Такође, због тога што је $Q_k = \int_x J_k^0(x)$, видимо да Голдстонов бозон одговара стању које настаје као локална трансформација вакуума $|\text{VAC}\rangle$ [Упоредити са (1.225) из класичне теорије]. Како се енергија Голдстонових бозона смањује, овим ексцитацијама одговара све већа и већа таласна дужина. Коначно, у лимесу $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$, локална трансформација која индукује Голдстонове бозоне практично постаје глобална трансформација и стања $J_k^0(0)|\text{VAC}\rangle$ постају један од вакуума [Burgess, C.P. (2020)]. Пошто могу имати произвољно малу енергију, Голдстонови бозони играју доминантну улогу у опису великог броја система као што су магнети, суперпроводници или нискоенергетски сектор квантне хромодинамике. Као полазна тачка, у конструисању квантне теорије Голдстонових бозона, узима се класична теорија заснована на ефективном лагранжијану у којем су степени слободе класична Голдстонова поља. Након квантовања [канонским поступком или Фајнмановим прилазом], добија се квантна теорија Голдстонових поља у којој је основно стање $|0\rangle$ вакуум Голдстонових бозона. Поред тога што се побуђују са малим енергијама, испоставља се да Голдстонови бозони слабо интерагују међусобно [Weinberg, S. (2010); Brauner, T., Jakobsen, M.F. (2018)] тако да се за рачунање термодинамичких величина може користити погодна развијена теорија пертурбација [Watanabe, H., Murayama, H. (2014); Brauner, T. (2010); Burgess, C.P. (2020); Weinberg, S. (2010); Hofmann, C.P. (2011, 1999)].

¹³У случају модела дефинисаних на решетки, матрични елементи се обрачунавају по броју чворова уместо по јединици запремине; видети одељак 3.7.2.

3.6.4 Генератори трансформација и линеарна суперпозиција

За крај дискусије о спонтаном нарушењу симетрије у квантним теоријама смо оставили неке потенцијално осетљиве детаље из претходна три одељка.

Погледајмо, за почетак, стања $Q_k|VAC\rangle$. Ако претпоставимо да је вакуумско стање $|VAC\rangle$ транслаторно инваријантно, онда то мора бити и стање $Q_k|VAC\rangle$. Тада је (ради прегледности, у наставку ћемо изпустити индекс k који пребројава елементе алгебре \mathfrak{g})

$$J(\mathbf{x}, t)Q(t)|VAC\rangle = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}J(\mathbf{0}, t)e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}Q(t)|VAC\rangle = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}J(\mathbf{0}, t)Q(t)|VAC\rangle \quad (3.204)$$

па налазимо

$$\langle VAC|QQ|VAC\rangle = \int_{\mathbf{x}} \langle VAC|J(\mathbf{x}, t)Q(t)|VAC\rangle = \int_{\mathbf{x}} \langle VAC|J(\mathbf{0}, t)Q(t)|VAC\rangle. \quad (3.205)$$

Како подинтегрална функција из (3.205) не зависи од \mathbf{x} , горњи интеграл неће дивергирати само у случају $Q(t)|VAC\rangle = 0$. Другим речима, стање $Q(t)|VAC\rangle$ нема дефинисану норму. Будући да се услов $Q(t)|VAC\rangle = 0$ коси са нашим претпоставком о постојању спонтано нарушене симетрије, закључујемо да сваки пут кад се јавља спонтано нарушење симетрије, оператори Q нису добро дефинисани. Један од начина да се овај проблем заобиђе јесте да се уместо целе области простора V посматра само један његов део Ω . Генератори трансформације се тада могу дефинисати на тој области, $Q_\Omega = \int_\Omega J^0(\mathbf{x})$, чиме се дивергенција губи. На крају прорачуна је тада потребно узети граничну вредност $\Omega \rightarrow V$. На срећу, проблеми ове врсте се у пракси ретко срећу јер се оператори Q обично налазе унутар неког комутатора. Уколико се пре рачунања интеграла по просторним координатама израчунају сви комутатори у којима се појављују генератори трансформације, дивергенције се неће јавити [Brauner, T. (2010)].

Сличан коментар се односи и на оператор $U = \exp[iQ\epsilon]$. Пажљивија анализа показује да у термодинамичком лимесу, за све генераторе Лијеве алгебре \mathfrak{g} , важи услов $\langle VAC|\exp[iQ\epsilon]|VAC\rangle = 0$, тако да су вакуумска стања формално повезана дејством оператора U међусобно ортогонална. Било које класично стање (класични вакуум) се може користити да се над њим конструише Хилбертов простор квантне теорије. Сви ови Хилбертови простори су међусобно еквивалентни и избор неког од њих не утиче на опис физичког система [Brauner, T. (2010); Nair, V.P. (2005)].

Следећи битан детаљ се тицао постојања линеарне суперпозиције могућих вакуумских стања у квантној теорији. Уколико би се основно стање заиста јавило у овој форми, оно би делило симетрију хамилтонијана и спонтаног нарушења симетрије не би било. Испоставља се да произвољно мала пертурбација преводи систем из линеарне суперпозиције у један од вакуума који није инваријантан у односу на дејство групе G . Будући да физички системи нису идеални, увек је могуће одабрати пертурбацију која елиминира линеарну суперпозицију¹⁴. Када се систем нађе у једном од еквивалентних вакуума, вероватноћа да пређе у стање линеарне суперпозиције је пропорционална са $\exp[-CV]$, где је C позитивна константа а V запремина система. Пошто ова вероватноћа ишчезава у термодинамичком лимесу, квантна теорија изграђена над било којем од еквивалентних вакуума је добро дефинисана [За детаље видети Weinberg, S. (2010); Anderson, P.W. (1984)].

¹⁴Овај поступак је очигледна генерализација одабира једног од два могућа основна стања Изинговог модела помоћу спољашњег магнетног поља; видети Одељак 2.2.1.

3.7 Квантни Хајзенбергов модел

У овом одељку ћемо видети неке примене формализма теорије поља на Хајзенбергов модел. То је ефективни модел који се користи за опис понашања система локализованих спинова, односно за опис магнетних изолатора. У зависности од вредности интеграла измене J и геометрије решетке, Хајзенбергов модел може да опише велики број врста магнетног уређења и типова ексцитација [Wen, X. G. (2007); Fradkin, E. (2013); Tsvelik, A.M. (2003); Auerbach, A. (2012); Nolting, W., Ramakanth, A. (2009)]. У наставку ћемо се сконцентрисати на две основне врсте дугодометног уређења (феромагнетно и антиферомагнетно) у случају $O(3)$ (тј. изотропног) модела са интеракцијом између најближих суседа.

3.7.1 $O(3)$ симетрија Хајзенберговог хамилтонијана

Изотропни Хајзенбергов модел је директна генерализација класичног модела из Примера 1.16. Дефинисан је помоћу хамилтонијана на D димензионој решетки

$$H = -J \sum_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}} \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda}}, \quad (3.206)$$

где је $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$ оператор спина S на чвору \mathbf{x} , док $\boldsymbol{\lambda}$ означава вектор који спаја чвор \mathbf{x} са његовим најближим суседима [Видети Пример 2.1]. Величина J описује купловање између суседних спинова и назива се интегралом измене [Видети Сл. 3.1]. Када је $J > 0$, хамилтонијан (3.206) форсира паралелну оријентацију суседних спинова што води на дугодометно уређење феромагнетног типа. За $J < 0$, суседни спинови ће тежити да се оријентишу антипаралелно и хамилтонијан (3.206) тада описује антиферомагнет. Спински оператори задовољавају комутационе релације [Altland, A., Simons, B. (2010)]

$$\left[S_{\mathbf{x}}^{\alpha}, S_{\mathbf{y}}^{\beta} \right]_{-} = i\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\mathbf{x}}^{\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \quad (3.207)$$

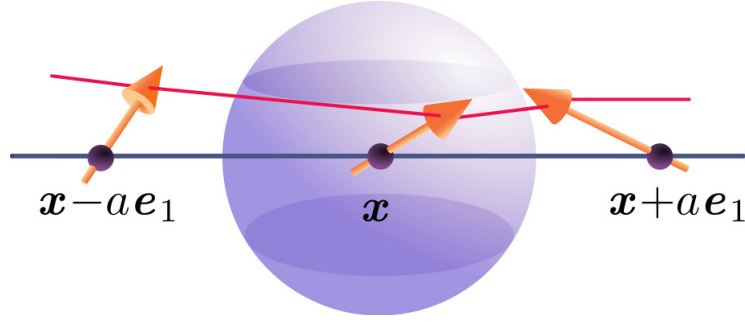
а базис Хилбертовог простор \mathcal{H} који одговара хамилтонијану (3.206) је изражен помоћу тензорских производа базисних елемената Хилбертових простора спинских оператора са појединачних чворова

$$\left\{ \bigotimes_{\mathbf{x}} |S, m\rangle_{\mathbf{x}} \right\}, \quad (3.208)$$

где су $|S, m\rangle_{\mathbf{x}}$ својствени вектори од $S_{\mathbf{x}}^2$ и $S_{\mathbf{x}}^3$ [Шиф, Ј. (1968); Weinberg, S. (2012)]

$$S_{\mathbf{x}}^2 |S, m\rangle_{\mathbf{y}} = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) S(S+1) |S, m\rangle_{\mathbf{x}}, \quad S_{\mathbf{x}}^3 |S, m\rangle_{\mathbf{y}} = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) m |S, m\rangle_{\mathbf{x}}. \quad (3.209)$$

У контексту Хајзенберговог модела се каже да оператори $S_{\mathbf{x}}^3$, чије својствене векторе користимо за опис стања система, дефинишу осу квантизације. Ако претпоставимо да су на сваком чвору решетке локализовани спински оператори истог квантног броја S , стања Хајзенберговог модела међусобно разликујемо по вредностима бројева m . Комутационе релације (3.207), као и структура Хилбертовог простора, чине Хајзенбергов



Слика 3.1: Шематски приказ Хајзенберговог модела на једнодимензионој решетки за $S = 1/2$. Илустрација је преузета из [Radošević, S.M. (2015)].

модел доста компликованим и егзактна решења су, за сад, позната само у случају једнодимензионих решетки [Fradkin, E. (2013)]. Осим што су придружени одговарајућем чвору \mathbf{x} , спински оператори \mathbf{S}_x ни на који други начин не зависе од координата из \mathbb{R}^D . Другим речима, сматрамо да спински оператори описују унутрашње степене слободе [Leutwyler, H. (1994); Kämpfer, F., Moser, M., Wiese, U.J. (2005)]. За специјалан случај изотропног модела који овде разматрамо, хамилтонијан (3.206) је инваријантан у односу на $O(3)$ трансформације у унутрашњем простору. Како бисмо ово експлицитно показали, дефинишимо оператор укупног спина

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{S}_x. \quad (3.210)$$

Компоненте оператора \mathbf{S} задовољавају комутационе релације

$$\left[S^\alpha, S^\beta \right]_- = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma \quad (3.211)$$

одакле видимо да они репрезентују генераторе алгебре $\mathfrak{o}(3)$ у простору \mathcal{H} . Такође, директно се уверавамо да \mathbf{S} комутира са хамилтонијаном

$$\left[\mathbf{S}, H \right]_- = \mathbf{0}, \quad (3.212)$$

што значи да три величине $\{S^1, S^2, S^3\}$ представљају генераторе Q_k у случају Хајзенберговог модела. У односу на ротације одређене вектором¹⁵ $\boldsymbol{\theta}$, које генерише укупни спин (3.210), произвољни оператор на чвору \mathbf{x} се трансформише према [Видети 3.179]

$$\begin{aligned} S_x^\beta &\rightarrow e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S}} S_x^\beta e^{-i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S}} = S_x^\beta + \left[i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S}, S_x^\beta \right]_- + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= S_x^\beta + i\theta^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_x^\gamma + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (3.213)$$

а ова трансформација не мења хамилтонијан (3.206). Заиста, заменом (3.213) уместо S_x^β у Хајзенбергов хамилтонијан, добијамо, до чланова линеарних по θ

$$H \rightarrow H + i\theta^\alpha \sum_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}} \left(\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_x^\gamma S_{\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda}}^\beta + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_x^\beta S_{\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda}}^\gamma \right) = H \quad (3.214)$$

¹⁵Оса ротације је одређена правцем и смером вектора $\boldsymbol{\theta}$ а угао ротације је $|\boldsymbol{\theta}|$.

где смо прво заменили индексе $\beta \rightleftharpoons \gamma$, затим искористили чињеницу да спински оператори са различитих чворова комутирају уз особину антисиметрије Леви-Чивита симбола. Дакле, изотропни Хајзенбергов хамилтонијан (3.206) је инваријантан у односу на $G = O(3)$ групу глобалних трансформација при чему три компоненте оператора укупног спина (3.210) представљају очуване величине и генеришу одговарајуће трансформације.

Приметићемо да су алгебре група $O(3)$ и $SO(3)$ истоветне, тако да се у околини јединичног елемента ове две групе не разликују. Ипак, група $O(3)$ укључује и инверзије, $\mathbf{S}_x \rightarrow -\mathbf{S}_x$, $\forall \mathbf{x}$, које такође не мењају хамилтонијан (3.206). Због тога говоримо о $O(3)$ симетрији Хајзенберговог модела. Међутим, у наставку ћемо дискутовати спонтано нарушење симетрије Хајзенберговог модела и одговарајуће Голдстонове бозоне. Пошто Голдстонови бозони описују мала одступања од равнотежног стања, за касније примене нам разлике између $O(3)$ и $SO(3)$ заправо нису битне.

Пример 3.5. Често је погодно да се уместо S_x^1 и S_x^2 оператора уведу неермитски оператори S_x^\pm

$$S_x^\pm = S_x^1 \pm iS_x^2, \quad S_x^1 = \frac{S_x^+ + S_x^-}{2}, \quad S_x^2 = \frac{S_x^+ - S_x^-}{2i} \quad (3.215)$$

који задовољавају комутационе релације

$$[S_x^+, S_y^-]_- = 2S_x^3 \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [S_x^\pm, S_y^3]_- = \mp \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) S_x^\pm \quad (3.216)$$

и чије је (нетривијално) дејство на елементе базиса \mathbf{H} помоћу

$$S_x^\pm |S, m\rangle_{\mathbf{y}} = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sqrt{S(S+1) - m(m \pm 1)} |S, m \pm 1\rangle_{\mathbf{x}}, \quad (3.217)$$

уз

$$S_x^+ |S, S\rangle_{\mathbf{y}} = S_x^- |S, -S\rangle_{\mathbf{y}} = 0. \quad (3.218)$$

Изражен помоћу нових оператора, хамилтонијан (3.206) гласи

$$H = -J \sum_{x,\lambda} \left[\frac{1}{2} (S_x^+ S_{x+\lambda}^- + S_x^- S_{x+\lambda}^+) + S_x^3 S_{x+\lambda}^3 \right], \quad (3.219)$$

У овако записаном хамилтонијану фигуришу оператори S_x^\pm чије је дејство на елементе Хилбертовог простора једноставније него дејство оператора S_x^1 и S_x^2 али му је мана да $O(3)$ симетрија више није очигледна. ■

Пример 3.6. Поред једноставнијег дејства на стања $|S, m\rangle$, још једна предност S^\pm оператора је та што се могу изразити помоћу бозонских (или фермионских) оператора, [Nolting, W., Ramakanth, A. (2009); Auerbach, A. (2012); Tsvelik, A.M. (2003); Utkarsh B., Suresh, A., Nikolić, B.K. (2021)], у складу са општим тврђењем из Одељка 3.4. На пример, матрични елементи оператора S^\pm, S^3 између стања $|S, m\rangle$, а који су различити од нуле, дати су са (не пишемо индекс чвора решетке ради прегледности)

$$\begin{aligned} \langle S, m-1 | S^- | S, m \rangle &= \sqrt{S(S+1) - (m-1)}, \\ \langle S, m+1 | S^+ | S, m \rangle &= \sqrt{S(S+1) - (m+1)}, \\ \langle S, m | S^3 | S, m \rangle &= m. \end{aligned}$$

Ако уведемо квантни број $n = S - m$, који мери одступање од максималне вредности S , горње матричне елементе можемо записати као

$$\begin{aligned}\langle S, m-1 | S^- | S, m \rangle &= \sqrt{2S} \sqrt{n+1} \sqrt{1 - \frac{n}{2S}}, \\ \langle S, m+1 | S^+ | S, m \rangle &= \sqrt{2S} \sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2S}}, \\ \langle S, m | S^3 | S, m \rangle &= S - n,\end{aligned}\tag{3.220}$$

при чему можемо извршити идентификацију $|S, S\rangle \rightarrow |n=0\rangle$, $|S, S-1\rangle \rightarrow |n=1\rangle$ итд. све до $|S, -S\rangle \rightarrow |n=2S\rangle$, сматрајући да су $|n\rangle$ бозонска стања. Сада је лако видети да оператори

$$\tilde{S}^- = \sqrt{2S} a^\dagger \sqrt{1 - \frac{a^\dagger a}{2S}}, \quad \tilde{S}^+ = \sqrt{2S} \sqrt{1 - \frac{a^\dagger a}{2S}} a, \quad \tilde{S}^z = S - a^\dagger a,\tag{3.221}$$

где су a и a^\dagger бозонски оператори, имају тражене матричне елементе, наведене у (3.220), између бозонских стања

$$\begin{aligned}\langle n+1 | \tilde{S}^- | n \rangle &= \sqrt{2S} \sqrt{n+1} \sqrt{1 - \frac{n}{2S}} = \langle S, m-1 | S^- | S, m \rangle, \\ \langle n-1 | \tilde{S}^+ | n \rangle &= \sqrt{2S} \sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2S}} = \langle S, m+1 | S^+ | S, m \rangle, \\ \langle n | \tilde{S}^z | n \rangle &= S - n = \langle S, m | S^3 | S, m \rangle.\end{aligned}$$

Такође, видимо да оператори \tilde{S}^\pm , заједно са \tilde{S}^3 , задовољавају комутационе релације аналогне са (3.216)

$$\left[\tilde{S}^+, \tilde{S}^- \right]_- = 2\tilde{S}^3, \quad \left[\tilde{S}^\pm, \tilde{S}^3 \right]_- = \mp \tilde{S}^\pm.\tag{3.222}$$

Оператори дефинисани у (3.221) сачињавају Холштајн-Примаков (НР) репрезентацију спинских оператора и она се често користи за третман Хајзенберговог модела. Заменом оператора (3.221) у (3.219) добијамо Хајзенбергов хамилтонијан изражен помоћу бозонских оператора. Такав хамилтонијан се најчешће третира пертурбативно: развојем корене функције у ред по степенима $1/S$, добијамо чланове који описују интеракцију између бозонских честица [Видети, рецимо Zhitomirsky, M.E., Chernyshev, A.L. (2013) и тамо наведене референце].

Испоставља се да је Холштајн-Примаков репрезентација специјалан случај дефиниција [Garbaczewski, P. (1978)]

$$\bar{S}^- = \sqrt{2S} a^\dagger \left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right)^{1-x}, \quad \bar{S}^+ = \sqrt{2S} \left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right)^x a, \quad \bar{S}^z = S - a^\dagger a,\tag{3.223}$$

где је $0 \leq x \leq 1$. Оператори (3.223) сачињавају бозонску репрезентацију спинских оператора у смислу да задовољавају комутационе релације (3.216). Репрезентација која се добија за $x = 0$ је позната као репрезентација Дајсон-Маљејева (DM), док се НР репрезентација добија за $x = 1/2$. У случају репрезентације DM су спински оператори изражени помоћу коначног броја бозонских оператора, али се директном заменом добија хамилтонијан који није ермитски. Ипак, DM репрезентација се често користи у пертурбативним рачунима вишег реда [Syromyatnikov, A.V. (2010)]. ■

Пример 3.7. Полазећи од комутационих релација за спинске операторе (3.210) и ВСН формуле [видети Радошевић, С., Мали, П. (2020)], могуће је добити и експлицитан израз за коначну ротацију спинских оператора. Нека је $\alpha \neq \beta$ и нека је $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тада је (индекс чвора не пишемо ради прегледности)

$$e^{-i\varphi S^\beta} S^\alpha e^{i\varphi S^\beta} = S^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^n}{n!} \underbrace{\left[S^\beta, \left[S^\beta, \dots \left[S^\beta, S^\alpha \right]_- \right]_- \dots \right]_-}_{n \text{ puta}}. \quad (3.224)$$

Пошто је

$$\left[S^\beta, S^\alpha \right]_- = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} S^\gamma, \quad (3.225)$$

биће и

$$\left[S^\beta \left[S^\beta, S^\alpha \right]_- \right]_- = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} \left[S^\beta, S^\gamma \right]_- = i^2 \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\mu} S^\mu \quad (\text{без суме по } \beta). \quad (3.226)$$

Како је, по претпоставци, $\alpha \neq \beta$, налазимо

$$\left[S^\beta \left[S^\beta, S^\alpha \right]_- \right]_- = S^\alpha. \quad (3.227)$$

Сада је лако видети да је

$$\underbrace{\left[S^\beta, \left[S^\beta, \dots \left[S^\beta, S^\alpha \right]_- \right]_- \dots \right]_-}_{n \text{ puta}} = \begin{cases} i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} S^\gamma, & n = 2k + 1 \\ S^\alpha, & n = 2k. \end{cases} \quad (3.228)$$

Користећи (3.228), добијамо релацију

$$e^{-i\varphi S^\beta} S^\alpha e^{i\varphi S^\beta} = S^\alpha - i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma, \quad \alpha \neq \beta \quad (3.229)$$

коју ћемо кроистити у Одељку 3.7.3. ■

Пример 3.8. У посебно важном случају $S = 1/2$ је могуће лако наћи везу између S^3 и S^\pm оператора. Ако посматрамо дејство на стања $|S, m\rangle$, оператор S^2 је еквивалентан са $S(S+1)$. Расписујући скаларни производ помоћу компоненти S^1, S^2 и S^3 и изражавањем S^1 и S^2 помоћу S^\pm према (3.215), добијамо

$$(S^3)^2 + \frac{1}{2}(S^+S^- + S^-S^+) = S^2 + S. \quad (3.230)$$

Међутим, за $S = 1/2$ је $(S^3)^2 = S^2$, тако да се добија

$$S^+S^- + S^-S^+ = 2S. \quad (3.231)$$

Оператор S^+S^- се може елиминисати помоћу комутатора из (3.222) тако да се коначно добија

$$S^3 = S - S^-S^+ = \frac{1}{2} - S^-S^+. \quad (3.232)$$

Релација (3.232) се често користи у анализи Хајзенберговог модела дефинисаног за $S = 1/2$ [Manojlović, M., Pavkov, M., Škrinjar, M., Pantić, M., Kapor, D., Stojanović, S. (2003)]. ■

На основу Мермин-Вагнерове теореме [Видети Одељак 2.5.1], очекујемо да дугодометно уређење које се постиже спонтаним нарушењем симетрије на $T > 0$ није могуће за моделе дефинисане на једнодимензионим и дводимензионим решеткама. У следећа два одељка ћемо видети да дугодометно уређење у случају једнодимензионог феромагнета постоји на $T = 0$, док у случају антиферомагнета постоји на $T = 0$ само ако је $D \geq 2$. Овај закључак о постојању дугодометног уређења се може променити ако се у хамилтонијан укључе чланови који експлицитно нарушавају $O(3)$ симетрију. На пример, спољашње магнетно поље или спинска анизотропија [Видети, рецимо Radošević, S., Pavkov – Hrvojević, M., Pantić, M., Rutonjski, M., Kapor, D., Škrinjar, M. (2009); Rutonjski, M., Radošević, S., Škrinjar, M., Pavkov – Hrvojević, M., Kapor, D., Pantić, M. (2007), као и крај следећег одељка].

3.7.2 Хајзенбергов феромагнет

Основно стање

Хајзенбергов хамилтонијан (3.206) описује феромагнет ако је $J > 0$. У том случају је погодно извршити скалирање $J \rightarrow J/2$, како би се избегло двоструко бројање куплованих спинова (сви чворови су еквивалентни)

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{x,\lambda} \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_{x+\lambda}. \quad (3.233)$$

Интеграл измене $J > 0$ форсира паралелну оријентацију спинова и основно стање $|VAC\rangle$ квантног Хајзенберговог феромагнета је

$$|FM\rangle = \bigotimes_x |S, S\rangle_x. \quad (3.234)$$

Како бисмо показали да је стање $|FM\rangle$ заиста својствено стање хамилтонијана (3.233), искористићемо форму хамилтонијана са S^\pm операторима [Видети (3.219)]. Пошто је $S_x^+ |S, S\rangle_x = 0$, налазимо

$$H|FM\rangle = -\frac{J}{2} \sum_{x,\lambda} S_x^3 S_{x+\lambda}^3 \bigotimes_y |S, S\rangle_y = -\frac{J\mathcal{N}Z_1 S^2}{2} |FM\rangle \quad (3.235)$$

где је \mathcal{N} број чворова у решетки а Z_1 број најближих суседа [Видети Пример 2.1]. Дакле, енергија основног стања $O(3)$ феромагнета са спином S и интеракцијом између најближих суседа, обрачуната по чвору, износи

$$\frac{E_0}{\mathcal{N}} = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle FM|H|FM\rangle = -\frac{JS^2 Z_1}{2}. \quad (3.236)$$

Рецимо, за Хајзенбергов феромагнет са $S = 1/2$ на простој кубној решетки (где је $Z_1 = 6$), имамо $E_0/\mathcal{N} = -3J/4$.

Као што смо већ приметили, различита стања квантног Хајзенберговог модела се међусобно разликују по вредностима квантних бројева m . На основу (3.215) и (3.217) видимо да за компоненте оператора укупног спина важи

$$S^1|FM\rangle \neq 0, \quad S^2|FM\rangle \neq 0 \quad (3.237)$$

док је

$$S^3|\text{FM}\rangle = \mathcal{N}S|\text{FM}\rangle. \quad (3.238)$$

То значи да оператори $\exp[i\varphi S^3]$, где је φ реалан параметар, не мењају стање $|\text{FM}\rangle$ јер не мењају квантне бројеве m . Како оператори $\exp[i\varphi S^3]$ репрезентују групу $U(1)$, док је $U(1) \cong SO(2)$ [Hall, B. (2015)], закључујемо да је образац нарушења симетрије у случају квантног Хајзенберговог модела дат са $O(3) \rightarrow O(2)$. Такође, на основу дискусије из Одељака 3.6.1 и 3.6.2, видимо да за параметар уређености можемо узети

$$M = \langle \text{FM} | S^3 | \text{FM} \rangle = \mathcal{N}S. \quad (3.239)$$

Важно је приметити да је резултат (3.239) егзактан. Такође, јасно је да (3.239) важи како за тродимензионе ($D = 3$), тако и за нискодимензионе ($D = 1, 2$) решетке. То није у супротности са Мермин-Вагнеровом теоремом јер је основно стање $|\text{FM}\rangle$ дефинисано на $T = 0\text{K}$. Будући да смо три компоненте оператора \mathbf{S} идентификовали са генераторима $\{Q_i\}$, креација Голдстонових бозона, који се у случају магнетних система називају *магнонима*, блиско је повезана са дејством оператора S^1 и S^2 на стање $|\text{FM}\rangle$. Са друге стране, чињеница да је стање $|\text{FM}\rangle$ својствено стање¹⁶ од S^3 , очекујемо да се у спектру феромагнета јаве Голдстонови бозони типа В. Како је $\dim[O(3)] = 3$ и $\dim[O(2)] = 1$, при овом обрасцу нарушења симетрије постоје $\dim[O(3)] - \dim[O(2)] = 2$ Голдстонова поља. Међутим, матрица ρ из (3.203) је дата са

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{bmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.240)$$

Лако је показати да је $\text{rank } \rho = 2$ па, на основу (3.202), видимо да је број Голдстонових бозона типа В једнак $n_B = 1$, док се Голдстонови бозони типа А не појављују. Пошто Голдстонови бозони типа В у принципу карактеришу нерелативистичке системе, очекујемо да је дисперзија феромагнетних магнона $\omega(\mathbf{k}) \propto \mathbf{k}^2$.

Феромагнети магнони као Голдстонови бозони типа В

Потпуна карактеризација елементарних ексцитација у $O(3)$ феромагнету подразумева да, поред њиховог типа и броја различитих честица, одредимо и њихову дисперзиону релацију за произвољне вредности таласног вектора. Постоји више начина да се то уради. Стандардни метод подразумева коришћење НР репрезентације у најнижој апроксимацији тако да се заменом у (3.233) добија квадратни хамилтонијан [Видети, рецимо, Nolting, W., Ramakanth, A. (2009); Auerbach, A. (2012)]. Ми ћемо овде пратити извођење из [Radošević, S.M., Pantić M.R., Pavkov – Hrvojević, M.V., Kapor, D.V. (2013)] јер оно наглашава аналогije са слободним Шредингеровим пољем [Видети Одељак 3.3.2].

Полазећи од дефиниције дискретног лапласијана из (2.43), хамилтонијан изотропног Хајзенберговог феромагнета (3.233) можемо преписати као

$$H = -\frac{1}{2} \frac{JZ_1|\lambda|^2}{2D} \sum_x \mathbf{S}_x \cdot \nabla^2 \mathbf{S}_x - \frac{JS(S+1)Z_1\mathcal{N}}{2}. \quad (3.241)$$

¹⁶У Одељку 3.6.4 смо приметили да оператори Q_i и стања $Q_i|\text{VAC}\rangle$ нису добро дефинисани када долази до спонтаног нарушења симетрије. У случају феромагнета се то осликава кроз дивергенцију десне стране једнакости (3.238) у термодинамичком лимесу.

при чему је Z_1 број најближих суседа, а $|\boldsymbol{\lambda}|$ је растојање између најближих суседа на решетки. Користећи (3.20), налазимо једначину кретања за локализоване спинове Хајзенберговог феромагнета (временски аргумент не пишемо ради прегледности)

$$i\partial_t \mathbf{S}_x = \left[\mathbf{S}_x, H \right]_- = -\frac{i}{2} \frac{JZ_1|\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D} \left[\left(\nabla^2 \mathbf{S}_x \right) \times \mathbf{S}_x - \mathbf{S}_x \times \nabla^2 \mathbf{S}_x \right]. \quad (3.242)$$

Ово је једначина Ландау-Лифшица за оператор $\mathbf{S}_x(t)$, регуларизована на просторној решетки. У општем случају, једначина (3.242) се не може решити. Једна од ствари које донекле компликују анализу Хајзенберговог феромагнета је двострука природа једначине (3.242). Она истовремено представља закон одржања укупног спина¹⁷ и једначину кретања [Guralnik, G., Hagen, R., Kibble, T. (1968)]. И поред тога, лако се налази решење линеаризоване једначине.

Под претпоставком дугодометног уређења, оператор $S_x^3(t)$ можемо заменити средњом вредношћу (3.239) обрачунатом по чвору решетке, $S_x^3(t) \rightarrow M/\mathcal{N} = S$. Због Мермин-Вагнерове теореме, очекујемо да апроксимације овог типа буду коректне само за $D \geq 3$ ако је $T > 0$. Треба водити рачуна да се апроксимирањем оператора S^z са средњом вредношћу која не зависи од чвора решетке у крајњем резултату губе сви ефекти који су последица магнон-магнон интеракција. Због тога се добијају резултати који се могу применити само на један део уређене фазе [Видети Сл. 3.3 ниже].

Линеаризована једначина (3.242) за оператор $S_x^+ = S_x^1 + iS_x^2$ поприма облик Шредингерове једначине на просторној решетки

$$i\partial_t S_x^+ = -\frac{1}{2m_{\text{LSW}}} \nabla^2 S_x^+, \quad (3.243)$$

где смо дефинисали

$$m_{\text{LSW}} = \frac{2D}{2JSZ_1|\boldsymbol{\lambda}|^2}. \quad (3.244)$$

Слична једначина се добија и за $S_x^-(t)$. Истовремено, комутационе релације (3.216) за S^\pm операторе постају

$$\left[\frac{S^+(\mathbf{x})}{\sqrt{2S}}, \frac{S^-(\mathbf{y})}{\sqrt{2S}} \right] = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.245)$$

Поредећи (3.245) са комутационим релацијама за Шредингерово поље на решетки,

$$\left[\psi(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right]_- = \frac{1}{v_0} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.246)$$

које се добијају на основу (3.175) и везе $\pi = i\psi^*$, при чему v_0 означава запремину елементарне ћелије, видимо да је у овој апроксимацији Хајзенбергов феромагнет описан бозонским Шредингеровим пољем на решетки

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{S^+(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{2Sv_0}}, \quad \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{S^-(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{2Sv_0}}. \quad (3.247)$$

¹⁷Ово се може једноставно показати сумирањем по свим чворовима решетке, уз коришћење дефиниције дискретног лапласијана (2.43). Тако добијена једначина се своди на (3.212).

Да бисмо комплетирали слику Шредингеровог поља, експлицитно ћемо наћи операторе $\psi(\mathbf{x}, \tau)$ и $\psi^\dagger(\mathbf{x}, \tau)$ и конструисати дијагонални хамилтонијан.

Једначина (3.243) поседује решења у виду равних таласа

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k} \text{ IBZ}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (3.248)$$

при чему је

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\text{LSW}}(\mathbf{k}) = \frac{\widehat{\mathbf{k}}^2}{2m_{\text{LSW}}} = JZ_1S[1 - \gamma_D(\mathbf{k})], \quad (3.249)$$

док интеграција $\int_{\mathbf{k} \text{ IBZ}}$ иде по И Брилуеновој зони одговарајуће решетке, ознака $\widehat{\mathbf{k}}^2$ је уведена у Примеру 2.3 а $\gamma_D(\mathbf{k})$ је геометријски фактор дефинисан у (2.51). Имајући у виду апроксимацију $S_{\mathbf{x}}^3 \approx S$ и везе (3.247), хамилтонијан (3.241) се може записати као

$$H_{\text{LSW}} = -\frac{1}{2} \frac{JZ_1|\boldsymbol{\lambda}|^2}{2D} S v_0 \sum_{\mathbf{x}} \left[\psi_{\mathbf{x}}^\dagger \nabla^2 \psi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}} \nabla^2 \psi_{\mathbf{x}} \right] - \frac{JS(S+1)Z_1\mathcal{N}}{2}. \quad (3.250)$$

Коначно, коришћењем дефиниције дискретног Лапласијана и комутационих релација (3.247) налазимо дијагонални хамилтонијан

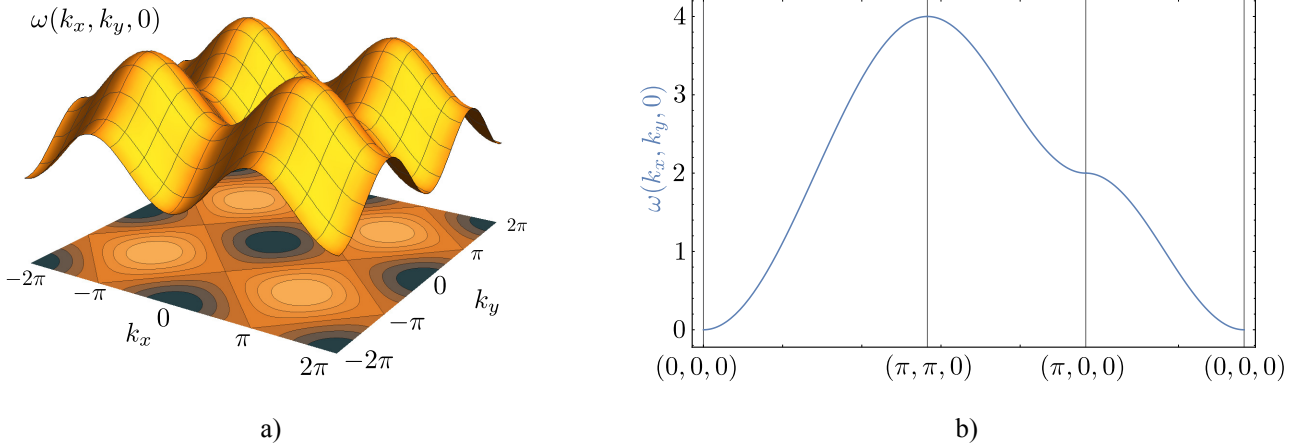
$$H_{\text{LSW}} = -\frac{1}{2m_{\text{LSW}}} v_0 \sum_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}^\dagger \nabla^2 \psi_{\mathbf{x}} - E_{\text{LSW}}^0 = V \int_{\mathbf{k} \text{ IBZ}} \omega(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}) - E_{\text{LSW}}^0, \quad (3.251)$$

где је $Vn(\mathbf{k}) = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ а

$$E_{\text{LSW}}^0 = -\frac{J\mathcal{N}Z_1S^2}{2} \quad (3.252)$$

је раније добијена *еџакџина* вредност енергије основног стања |FM> [Видети (3.236)].

У складу са стандардном теоријом квантног Шредингеровог поља изложеној у Одељку 3.3, видимо да оператор $\psi^\dagger(\mathbf{x})$ креира магнон енергије $\omega_{\text{LSW}}(\mathbf{k})$ на чвору \mathbf{x} . Ови магнони су Голдстонови бозони типа В који прате спонтано нарушење симетрије по шеми $O(3) \rightarrow O(2)$ при чему генератор S^3 има очекивану вредност по основном стању различиту од нуле. Слично, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ креира једночестично магнонско стање $|\mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$, где је $|0\rangle$ вакуум магнона. Оператори $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{q}}^\dagger$ су стандардни бозонски оператори, $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]_- = (2\pi)^D \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$, а једночестична стања су нормирана према [Leutwyler, H. (1994)] као $\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^D \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Вишемагнонска стања се налазе директном применом стандардних процедура за вишечестична стања бозонских поља [Видети Одељак 3.2.5]. Управо добијени резултати су познати под називом линеарна теорија спинских таласа (LSW) која описује квантни Хајзенбергов феромагнет у најнижој (линеарној) апроксимацији у којој је интеракција између магнона у потпуности занемарена [Auerbach, A. (2012); Nolting, W., Ramakanth, A. (2009)].



Слика 3.2: Магنونска дисперзија (3.249) за Хајзенбергов феромагнет на простој кубној решетки са параметрима $S = 1/2$, $J = 1$ и $|\boldsymbol{\lambda}| = a = 1$: а) Тродимензиони приказ функције $\omega(k_x, k_y, 0)$ у $z = 0$ пресеку прве Брлуенове зоне. б) Магنونска дисперзија дуж одређених праваца у Брилуеновој зони.

Магنونске енергије

Погледајмо сада мало детаљније магنونске енергије (3.249). Пошто у граници континуума важи $\hat{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + \mathcal{O}(k^4)$, видимо да се у дуготаласној апроксимацији магنونска енергија своди на

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m_{\text{LSW}}} + \mathcal{O}(k^4) \quad (3.253)$$

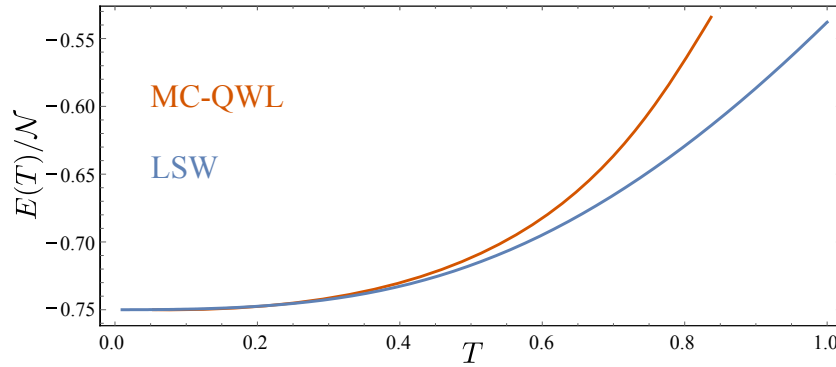
што је стандардни облик енергије нерелативистичке честице масе m_{LSW} . У том смислу треба интерпретирати и величину m_{LSW} .

На (3.2) је дат приказ магنونских енергија добијених у (3.249) за случај прости кубне решетке. Лева страна показује функцију $\omega(k_x, k_y, 0)$ помоћу контура и дводимензионе површине у Брилуеновој зони. Одавде се лепо види периодичност дисперзије која је последица чињенице да је модел дефинисан на решетки. Слично, десна страна на Сл. 3.2 проказује магнуску енергију дуж одређених праваца у Брилуеновој зони. Пошто смо интеракцију између магнона у потпуности занемарили, добијене енергије не зависе од температуре.

Унутрашња енергија феромагнета

У складу са добијеним резултатима, ХФМ у линеарној апроксимацији можемо схватити као систем феромагнетних магнона који описују стања изнад E_0 (којем одговара магнуски вакуум $|0\rangle$) и који међусобно не интерагују. Пошто смо нашли магнуске операторе и дијагонални хамилтонијан, помоћу њих можемо израчунати термодинамичке величине и проверити колико је линеарна апроксимација оправдана.

Као што је познато [Huang, K. (1987); Abrikosov, A., Gorkov, L., Dzyaloshinski, I. (1963); Fetter, A., Walecka, J. (1971)], средња вредност оператора $n(\mathbf{k})$ на температури



Слика 3.3: Унутрашња енергија тродимензионог $S = 1/2$ Хајзенберговог феромагнета са $J = 1$ обрачуната по чвору добијена помоћу линеарне теорије [Видети (3.255)] и квантне Монте Карло симулација.

T је дата са

$$\langle n(\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{\omega(\mathbf{k})}{T}\right] - 1}, \quad (3.254)$$

тако да средњу вредност енергије феромагнета обрачунату по чвору решетке, као функцију температуре, добијамо из (3.2)

$$\frac{E(T)}{\mathcal{N}} = -\frac{S^2 J Z_1}{2} - v_0 \int_{\mathbf{k} \in \text{IBZ}} \langle n(\mathbf{k}) \rangle \omega(\mathbf{k}), \quad (3.255)$$

где је v_0 запремина елементарне ћелије.

Ваљаност резултата (3.255) ћемо проверити помоћу квантне Монте Карло симулације засноване на Ванг-Ландауовом алгоритму [Видети чланке Bauer, B. et al. (2011); Wang, F., Landau, D.P. (2001); Troyer, M., Wessel, S., Alet, F. (2003)]. Одабран је Хајзенбергов феромагнет за $S = 1/2$ и $J = 1$ на простој кубној решетки од $10 \times 10 \times 10$ чворова. За параметар симулације (cutoff) је узето 5×10^4 што за поменућу решетку даје поуздане резултате при $T \gtrsim 0.05$. Број Ванг-Ландау корака по симулацији је 18, тако да је укупан број sweep-ова 10^{10} што даје грешку која је много мања од линије која приказује резултате симулације. Резултати симулације и они добијени помоћу (3.255) су приказани на Сл. 3.3. Примећујемо да је слагање између линеарне теорије и симулација све до неких $T \approx 0.5$. Будући да је критична температура овог модела $T_C \approx 0.839(1)$ [Видети Wessel, S. (2010)], видимо да линеарна теорија даје предвиђања која су веома добра у већем делу уређене фазе. Након $T \approx 0.5$ одступања линеарне теорије од симулација постају знатна. Урачунавање поправке коју уводе магنون-магنون интеракције значајно побољшавају резултате теорије. На нивоу магنونских енергија, интеракција доводи до ренормализације њихове "месе" према $m_{\text{LSW}} \rightarrow m(T)$, тако да нови параметар зависи од температуре. Овај ефекат се осликава кроз температурску зависност различитих термодинамичких величина тако да се теоријски добијене вредности боље слажу са експериментом и симулацијама [Видети Nolting, W., Ramakanth, A. (2009); Radošević, S.M., Pantić M.R., Pavkov – Hrvojević, M.V., Kapor, D.V. (2013); Radošević, S.M. (2015) и тамо наведене референце].

Мермин-Вагнерова теорема

За крај овог одељка посвећеног квантном Хајзенберговом феромагнету смо оставили дискусију о Мермин-Вагнеровој теореме. Као и у случају теореме за класичне моделе, проверићемо да ли је претпоставка о постојању малих одступања од стања |FM) увек оправдана. У контексту квантног модела ово значи да морамо проверити да ли је, у оквиру линеарне теорије, средњи број магнона по чвору мали.

На основу (3.129) и (3.248) видимо да је средњи број магнона по чвору дат са

$$\langle n \rangle = v_0 \int_{\mathbf{k} \in \text{BZ}} \langle n(\mathbf{k}) \rangle. \quad (3.256)$$

По узору на Одељак 2.5.1, испитаћемо понашање горњег интеграла за мале вредности таласних вектора. Тада важи апроксимација (3.253) и подинтегрална функција у $\langle n \rangle$ зависи само од $k = |\mathbf{k}|$ па можемо раздвојити интеграле по угловима од интеграла по модулу вектора \mathbf{k} . Преостала интеграција по k иде од 0 до Λ . Како бисмо регуларизовали инфрацрвену дивергенцију, заменићемо доњу границу са Λ_0 и посматрати граничну вредност $\Lambda_0 \rightarrow 0$. Са друге стране, интеграцију од Λ_0 до Λ ћемо раздвојити на две – прву од Λ_0 до $\tilde{\Lambda}$ а другу од $\tilde{\Lambda}$ до Λ . Вредност $\tilde{\Lambda}$ бирамо тако да важи $\omega(\tilde{\Lambda})/T \ll 1$ [Auerbach, A. (2012)]. Под овим условима се експоненцијална функција Бозе-расподеле у интегралу од Λ_0 до $\tilde{\Lambda}$ може развити у ред и задржати на прва два члана. Тако добијамо [Упоредити са (2.257)]

$$\langle n \rangle = 2m_{\text{LSW}}T v_0 \Omega_D \int_{\Lambda_0}^{\tilde{\Lambda}} \frac{dk k^{D-1}}{k^2} + v_0 \Omega_D \int_{\tilde{\Lambda}}^{\Lambda} \frac{dk k^{D-2}}{\exp[\omega(\mathbf{k})/(2m_{\text{LSW}}T)] - 1}. \quad (3.257)$$

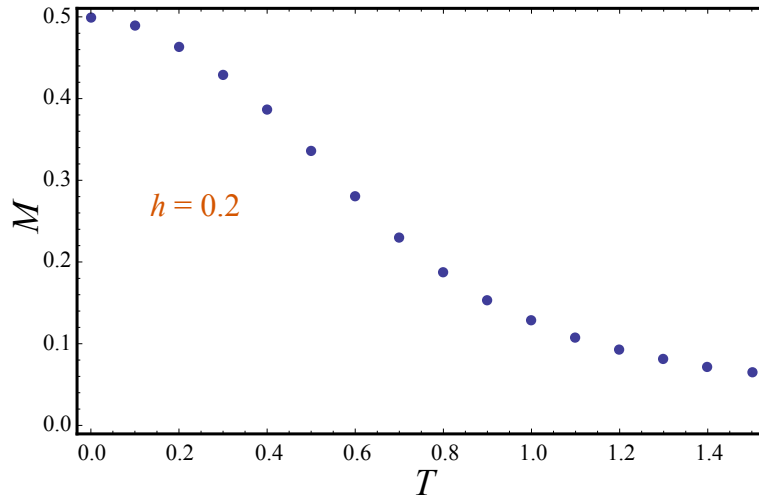
Први интеграл није добро дефинисан за $D = 1$ и $D = 2$. У случају једнодимензионог феромагнета, дивергира као T/Λ_0 , а у другом као $T \ln \Lambda_0$ при $\Lambda_0 \rightarrow 0$ и $T \neq 0$. Као и у класичном случају, добили смо инфрацрвену дивергенцију која сугерише да, при $T \neq 0$, дугодометно уређење није могуће. Наравно, ово је у складу са Мермин-Вагнеровом теоремом. Основно стање на $T = 0$ смо нашли раније [Видети (3.234)] и оно је добро дефинисано за изотропни феромагнет на решеткама свих димензија $D \geq 1$ [Auerbach, A. (2012)]. Са друге стране, за $D \geq 3$, на ниским температурама можемо Бозе-расподелу апроксимирати са $\exp[-\mathbf{k}^2/(2m_{\text{LSW}}T)]$ па добијамо

$$\langle n \rangle \approx \Omega_D \int_0^{\Lambda} dk k^{D-1} \exp\left[-\frac{k^2}{2m_{\text{LSW}}T}\right]. \quad (3.258)$$

Увођењем смене $k^2/(2m_{\text{LSW}}T) = y$, налазимо

$$\langle n \rangle \propto T^{D/2} \int_0^{\Lambda^2/(2m_{\text{LSW}}T)} dy y^{\frac{D-2}{2}} e^{-y} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} T^{D/2} \int_0^{\infty} dy y^{\frac{D-2}{2}} e^{-y}. \quad (3.259)$$

Одавде видимо да је за $D = 3$ носећи члан у нискотемпературском развоју спонтане магнетизације пропорционалан са $T^{3/2}$. То је тзв. Блохов закон [Nolting, W., Ramakanth, A. (2009); Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007); Радошевић, С., Мали, П. (2020)].



Слика 3.4: Квантна Монте Карло симулација Хајзенберговог феромагнета на квадратној решетки у спољашњем пољу. Параметри модела су $S = 1/2$, $J = 1$ и $h = 0.2$.

Експлицитно нарушење симетрије

У складу са дискусијом из Одељака 3.6.4 и 2.2.1, могуће је снизити симетрију хамилтонијана тако да се она поклапа са симетријом основног стања. То можемо постићи увођењем спољашњег поља¹⁸. Интеракцију феромагнета са пољем описује тзв. Земанов члан [Nolting, W., Ramakanth, A. (2009); Auerbach, A. (2012)] који је облика $-\mathbf{h} \cdot \mathbf{S}$, где је \mathbf{S} укупни спин (3.210) а \mathbf{h} је спољашње поље [Видети (2.3)]. Пошто спински оператори описују унутрашње степене слободе, Земанов члан можемо искористити да дефинишемо z осу у унутрашњем простору. На тај начин укупни хамилтонијан Хајзенберговог феромагнета постаје

$$H_h = -\frac{J}{2} \sum_{x,\lambda} \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_{x+\lambda} - h \sum_x S_x^3. \quad (3.260)$$

За овако дефинисан хамилтонијан не важи релација (3.212) већ је само

$$[H_h, S^3]_- = 0 \quad (3.261)$$

па је симетрија хамилтонијана $O(2)$. Такође, стање (3.234) је и даље основно стање па не долази до нарушења симетрије. Енергија стања |FM⟩ у овом случају износи

$$\frac{E_h}{\mathcal{N}} = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle \text{FM} | H_h | \text{FM} \rangle = -\frac{JS^2 Z_1}{2} - hS. \quad (3.262)$$

што се лако показује.

¹⁸Још један начин за снижавање симетрија Хајзенберговог модела је увођење спинске или једнојонске анизотропије. Видети, рецимо [Radošević, S., Rutonjski, M., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M., Kapor, D., Škrinjar, M.G. (2011); Manojlović, M., Pavkov, M., Škrinjar, M., Pantić, M., Kapor, D., Stojanović, S. (2003); Radošević, S., Pavkov – Hrvojević, M., Pantić, M., Rutonjski, M., Kapor, D., Škrinjar, M. (2009)] за конкретне примере.

Магنونске енергије можемо наћи као и у случају изотропног модела. Разлика се појављује у једначини (3.243) која сада гласи

$$i\partial_t S_x^+ = -\frac{1}{2m_{\text{LSW}}}\nabla^2 S_x^+ + hS_x^+. \quad (3.263)$$

Из ове једначине налазимо магنونске енергије за феромагнет у спољашњем пољу,

$$\omega_h(\mathbf{k}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}^2}{2m_{\text{LSW}}} + h = JZ_1S[1 - \gamma_D(\mathbf{k})] + h. \quad (3.264)$$

Пошто код модела са спољашњим пољем не долази до спонтаног нарушења симетрије, магنونске енергије имају геп $\omega_h(0) = h$. Овакве ексцитације су познате под називом *масивни* Голдстонови бозони [Watanabe, H., Brauner, T., Murayama, H. (2013)].

Присуство гема не мења суштинске карактеристике масивних Голдстонових бозона. Њихов број остаје исти и интеракције међу њима су слабе. Међутим, геп регуларизује инфрацрвене дивергенције. Дивергентни интеграл из (3.257) постаје

$$\langle n \rangle \propto T \int_0^\Lambda \frac{dk k^{D-1}}{k^2 + 2m_{\text{LSW}}h}. \quad (3.265)$$

и коначан је за $D = 1$ и $D = 2$. Дакле, у присуству поља, дугодометно уређење на коначним температурама постаје могуће и за нискодимензионе феромагнете. На пример, На Сл. 3.4 су приказани резултати квантне Монте Карло симулације засноване на SSE (Stochastic Series Expansion) алгоритму [Видети овде као и чланак Alet, F., Wessel, S., Troyer, M. (2005)]. Симулација је пуштена за Хајзенбергов феромагнет на квадратној решетци са $S = 1/2$, $J = 1$ и $h = 0.2$. Решетка је димензије 4×4 , број термализација је 10000 а број sweep-ова је 500000 тако да је грешка код сваке приказане тачке $\sim 10^{-5}$. Слични резултати су приказани и у [Fröbrich, P., Kuntz, P.J. (2006)] где је описан још један приближни метод за урачунавање магنون-магنون интеракције.

3.7.3 Хајзенбергов антиферомагнет

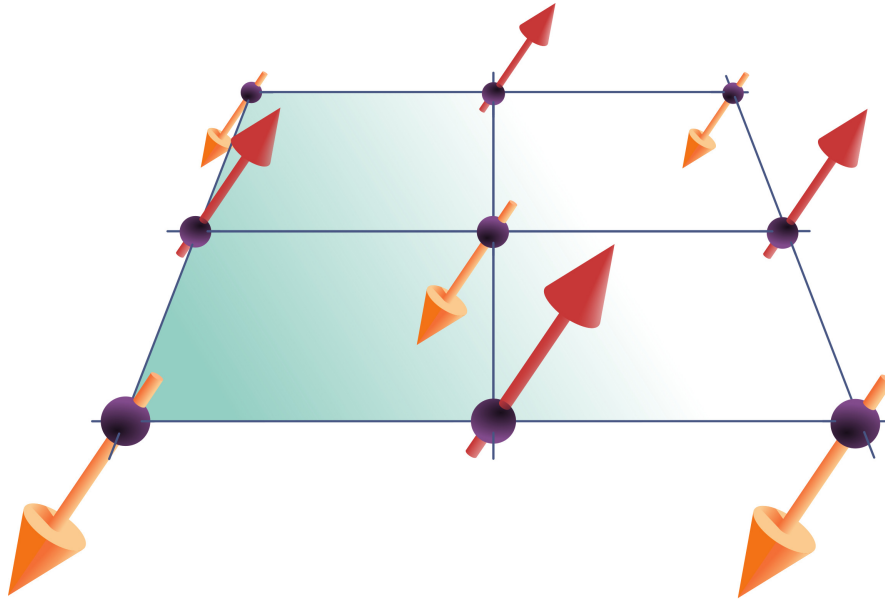
Нелово стање

Хајзенбергов антиферомагнет је дефинисан за негативне вредности J у (3.206). Ограничавајући разматрање на (хипер)кубне решетке, оваква вредност интеграла измене доводи до тога да је сваки спин окружен најближим суседима који су доминантно оријентисани у супротном смеру [Видети Сл. 3.5]. На квантном¹⁹ нивоу ово значи да ће чвор са стањем $|S, m\rangle$ бити окружен чворовима који углавном носе стања $|S, -m\rangle$.

Скуп чворова решетке на којима се налазе спинови који су претежно усмерени дуж позитивног смера²⁰ z осе ћемо означити као подрешетку A и одговарајуће спинске операторе ћемо писати као $\mathbf{S}_x^{(A)}$. Слично, са $\mathbf{S}_x^{(B)}$ ћемо означити спинске операторе који

¹⁹Иако у овом одељку дискутујемо о квантном моделу, често је лакше говорити о оријентацији спина као у случају класичног система.

²⁰Овде још једном наглашавамо да сваки пут када говоримо о оријентацији спина мислимо на правце у тзв. унутрашњем простору који нема везе са решетком и њеном оријентацијом.



Слика 3.5: Шематски приказ класичног основног стања Хајзенберговог антиферомагнета на квадратној решетки.

припадају подрешетки B са спиновима доминантно оријентисаним "на доле". Прихватајући ове конвенције, хамилтонијан Хајзенберговог антиферомагнета ћемо записати као

$$H = J \sum_{\mathbf{x} \in A, \lambda} \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{(A)} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\lambda}^{(B)}, \quad (3.266)$$

где је сад $J > 0$. Хамилтонијан дефинишемо без фактора $1/2$ пошто сума по \mathbf{x} пребрoјава само чворове подрешетке A , којих по конвенцији има $\mathcal{N}_A = \mathcal{N}/2$. Такође, $\mathcal{N}_B = \mathcal{N}_A$. Основно стање, које би одговарало класичном антиферомагнету, има максималне пројекције спинова и назива се Нелово стање

$$|\text{NEL}\rangle = \bigotimes_{\mathbf{x} \in A} |S, S\rangle_{\mathbf{x}} \bigotimes_{\mathbf{x} \in B} |S, -S\rangle_{\mathbf{x}}. \quad (3.267)$$

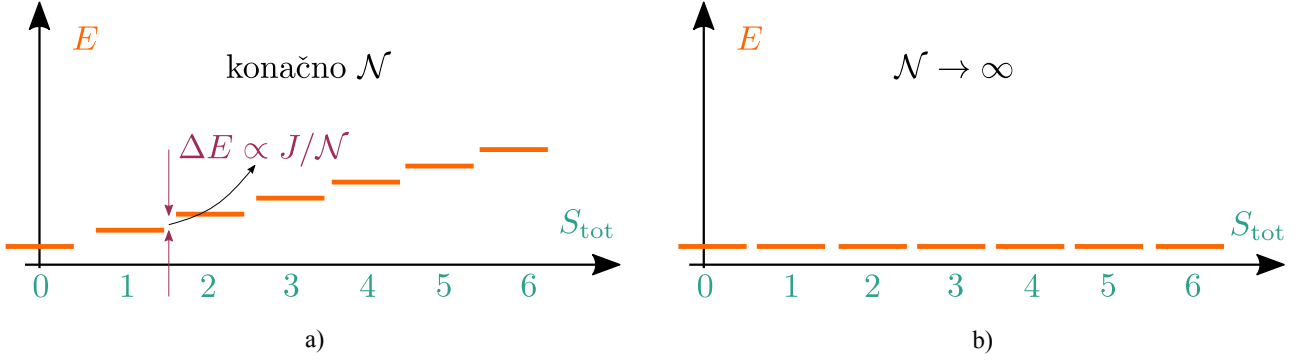
Користећи (3.217), видимо да је и у случају Неловог стања

$$S^1 |\text{NEL}\rangle \neq 0, \quad S^2 |\text{NEL}\rangle \neq 0, \quad (3.268)$$

где су S^1 и S^2 компоненте укупног спина (3.210). За разлику од феромагнетног стања, сада налазимо

$$S^3 |\text{NEL}\rangle = S \left(\frac{\mathcal{N}}{2} - \frac{\mathcal{N}}{2} \right) |\text{NEL}\rangle = 0. \quad (3.269)$$

То значи да би се, у случају када би $|\text{NEL}\rangle$ било основно стање антиферомагнета, спонтано нарушење симетрије одвијало по обрасцу $O(3) \rightarrow O(2)$. При томе се величина $\langle \text{NEL} | S^3 | \text{NEL} \rangle$ не може користити као параметар уређености. Такође, пошто је $\langle \text{NEL} | S^3 | \text{NEL} \rangle = 0$, у спектру елементарних ексцитација антиферомагнета очекујемо Голдстонове бозоне типа A , који су иначе карактеристични за релативистичке системе.



Слика 3.6: Структура првих неколико енергетских нивоа антиферромагнета на бипартитивној решетци: а) решетка коначних димензија; б) решетка у термодинамичком лимесу [према Greiter, M. (2005)].

Основно стање $O(3)$ антиферромагнета

Под претпоставком да је $|\text{NEL}\rangle$ основно стање антиферромагнета, образац нарушења симетрије код антиферромагнета је $O(3) \rightarrow O(2)$. Међутим, $|\text{NEL}\rangle$ није основно стање хамилтонијана (3.266). То се најлакше види ако хамилтонијан запишемо помоћу S^\pm оператора уведених у Примеру 3.5. Тако добијамо

$$H = J \sum_{x \in A, \lambda} \left[\frac{1}{2} \left(S_x^{+(A)} S_{x+\lambda}^{-(B)} + S_x^{-(A)} S_{x+\lambda}^{+(B)} \right) + S_x^{3(A)} S_{x+\lambda}^{3(B)} \right]. \quad (3.270)$$

Иако члан $S_x^{+(A)} S_{x+\lambda}^{-(B)}$ анихилира $|\text{NEL}\rangle$ а $|\text{NEL}\rangle$ је својствени вектор од $S_x^{3(A)} S_{x+\lambda}^{3(B)}$, преостали сабирак чини да је $H|\text{NEL}\rangle \neq \text{const} \times |\text{NEL}\rangle$. Дакле, основно стање квантног $O(3)$ антиферромагнета се разликује од $|\text{NEL}\rangle$. Без обзира на то, стање $|\text{NEL}\rangle$ одговара основном стању класичног модела и због тога се често узима као полазиште приликом испитивања квантног антиферромагнетног модела.

Заправо, истинско основно стање антиферромагнета на произвољној решетци још увек није познато [Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)]. Са друге стране, основно стање антиферромагнета на бипартитивној решетци²¹ са коначним бројем чворова \mathcal{N} је спински синглет – окарактерисано је вредношћу²² $S_{\text{tot}} = 0$ оператора укупног спина (3.210). Овај резултат је познат под називом Маршалова теорема [Auerbach, A. (2012)]. Како је $S_{\text{tot}} = 0$ стање јединствено и ротационо инваријантно, до нарушења симетрије у овом случају не долази. Ситуација се ипак мења ако посматрамо решетку у термодинамичком лимесу $\mathcal{N} \rightarrow \infty$.

Структура енергетских нивоа антиферромагнета на коначној бипартитивној решетци је скицирана на Сл. 3.6 под а). Након основног стања окарактерисаног са $S_{\text{tot}} = 0$, долази низ нивоа²³ који су одређени са $S_{\text{tot}} = 1, S_{\text{tot}} = 2, \dots$ при чему је размак између суседних нивоа $\Delta E \propto J/\mathcal{N}$ [Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019);

²¹Под бипартитивном решетком се подразумева она код које је сваки чвор из подрешетке A окружен најближим суседима из подрешетке B и обрнуто.

²²Како бисмо избегли евентуалну забуну, својствене вредности од S^2 смо означили са $S_{\text{tot}}(S_{\text{tot}} + 1)$, док је са S означена максимална вредност пројекције оператора S_x .

²³Ова структура нивоа је позната под називом "tower of states" [видети, рецимо Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)].

Tasaki, H. (2019)]. У термодинамичком лимесу стања са вредностима укупног спина $S_{\text{tot}} > 0$ (ова стања нису ротационо инваријантна) постају дегенерисана са основним стањем $S_{\text{tot}} = 0$ [Видети Сл. 3.6 под б)]. Основна стања, која се мођусобно разликују по правцу осе квантизације у унутрашњем простору и која мало одступају од $|NEL\rangle$, сада се могу изградити као суперпозиција ових дегенерисаних стања са различитим вредностима укупног спина S_{tot} [Anderson, P.W. (1984)]. Коначно, као што је дискутовано у случају Изинговог модела [Одељак 2.2.1] и Голдстонове теореме [Одељак 3.6.4], инфинитезимална пертурбација издваја једно од ових еквивалентних стања чиме долази до нарушавања $O(3)$ симетрије Хајзенберговог антифероманета. Чињеница да ћемо разматрање квантног модела започети од $|NEL\rangle$, које није основно стање хамилтонијана (3.266), огледаће се кроз постојање тзв. квантних флукуација. Као оправдање за овакво полазиште ћемо дати унутрашњу конзистентност прилаза (квантне флукуације уносе релативно мале поправке а добијени резултати су у складу са Мермин-Вагнеровом теоремом и претпостављеним обрасцем нарушења симетрије) и слагање са Монте Карло симулацијама. Наравно, у литератури се може наћи и пуно примера где су вредности добијене на основу прорачуна заснованог на Неловом стању поређена са експериментима [Видети, рецимо, Radošević, S., Pavkov – Hrvojević, M., Pantić, M., Rutonjski, M., Kapor, D., Škrinjar, M. (2009); Radošević, S., Rutonjski, M., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M., Kapor, D., Škrinjar, M.G. (2011) и тамо наведене референце].

Параметар уређености

Будући да очекивана вредност укупног \mathbf{S} ишчезава у Неловом стању, параметар уређености ћемо дефинисати као очекивану вредност тзв. Неловог вектора²⁴ [Greiter, M. (2005); Burgess, C.P. (2000)]

$$\mathbf{N} = \sum_{\mathbf{x} \in A} \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{(A)} - \sum_{\mathbf{x} \in B} \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{(B)}. \quad (3.271)$$

Вектор \mathbf{N} се у односу на трансформације које генерише укупни спин трансформише према

$$\left[S^\alpha, N^\beta \right]_- = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} N^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \quad (3.272)$$

па је добар избор за конструисање параметра уређености. Прецизније, за параметар уређености узимамо

$$N = \langle \text{AFM} | N^3 | \text{AFM} \rangle = \mathcal{N} S. \quad (3.273)$$

јер смо претпоставили да се спинови оријентишу дуж z осе у унутрашњем простору. Овде смо са $|\text{AFM}\rangle$ означили основно стање квантног Хајзенберговог модела (3.266). Пошто је $|\text{AFM}\rangle \neq |NEL\rangle$, биће $N/\mathcal{N} < S$ и разлика између S и N се означава као појава квантних флукуација.

На појаву квантних флукуација можемо гледати и из другог угла. Полазећи од комутатора

$$\left[\mathbf{N}, H \right]_- = -2i \sum_{\mathbf{x} \in A, \lambda} \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{(A)} \times \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\lambda}^{(B)}, \quad (3.274)$$

²⁴Као и укупни спин \mathbf{S} , величина \mathbf{N} је вектор у унутрашњем простору.

видимо да оператор \mathbf{N} не дели својствене векторе са хамилтонијаном и није константа кретања. Како основно стање система $|\text{AMF}\rangle$ представља један од својствених вектора оператора H , мора важити $\langle \text{NEL} | \mathbf{N}^3 | \text{NEL} \rangle \neq \langle \text{AFM} | \mathbf{N}^3 | \text{AFM} \rangle$. Такође,

$$\langle \text{AFM} | \mathbf{S} | \text{AFM} \rangle = 0 \quad (3.275)$$

јер, без обзира што је $|\text{AFM}\rangle \neq |\text{NEL}\rangle$, интеракција измене форсира "антипаралелна стања" на суседним чворовима.

Унитарна трансформација стања $|\text{NEL}\rangle$ и хамилтонијана

Пгодним избором унитарне трансформације је могуће превести Нелово стање (3.267) у стање којем одговарају вектори $|S, S\rangle$ на свим чворовима, те се поклапа²⁵ са феромагнетним стањем [Altland, A., Simons, B. (2010)]

$$|\text{NEL}\rangle \longrightarrow U|\text{NEL}\rangle = \bigotimes_{x \in A} |S, S\rangle_x \bigotimes_{x \in B} |S, S\rangle_x \equiv |\text{FM}\rangle. \quad (3.276)$$

Овакву трансформацију можемо извршити помоћу оператора

$$U = \prod_{\mathbf{y} \in B} \exp \left[-i\pi S_{\mathbf{y}}^{1(B)} \right] \quad (3.277)$$

који врши глобалну ротацију спинских стања и оператора са подрешетке B за угао π око осе S^1 према $|S, M\rangle_{\mathbf{y}} \rightarrow U|S, M\rangle_{\mathbf{y}}$ и $S_{\mathbf{y}}^{\alpha(B)} \rightarrow US_{\mathbf{y}}^{\alpha(B)}U^\dagger \equiv \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\alpha(B)}$. Оваква трансформација очувава комутационе релације (3.207). Како бисмо то показали, прво ћемо приметити да оператори са различитих подрешетки увек комутирају. Због тога је довољно да посматрамо комутационе релације за операторе са подрешетке B . Оператор који се налази са десне стране (3.207) се трансформише као

$$S_{\mathbf{x}}^{\gamma(B)} \rightarrow US_{\mathbf{x}}^{\gamma(B)}U^\dagger \equiv \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\gamma(B)} \quad (3.278)$$

док комутатор који се налази са леве стране прелази у

$$\begin{aligned} [S_{\mathbf{x}}^{\alpha(B)}, S_{\mathbf{y}}^{\beta(B)}]_- &\rightarrow U [S_{\mathbf{x}}^{\alpha(B)}, S_{\mathbf{y}}^{\beta(B)}]_- U^\dagger = US_{\mathbf{x}}^{\alpha(B)}U^\dagger US_{\mathbf{y}}^{\beta(B)}U^\dagger - US_{\mathbf{y}}^{\beta(B)}U^\dagger US_{\mathbf{x}}^{\alpha(B)}U^\dagger \\ &= [\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha(B)}, \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\beta(B)}]_-, \end{aligned} \quad (3.279)$$

на основу чега видимо да трансформисани оператори задовољавају релације

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha(B)}, \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\beta(B)}]_- = i\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\gamma(B)}. \quad (3.280)$$

Комутационе релације између оператора са подрешетке A остају непромењене а оне релације у којима фигуришу оператори са различитих подрешетки се такође не мењају.

Користећи (3.229), видимо да је дејство од U на спинске експлицитно дато са $S_{\mathbf{y}}^{1(B)} \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{1(B)} = S_{\mathbf{y}}^{1(B)}$, уз

$$S_{\mathbf{y}}^{2(B)} \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{2(B)} = -S_{\mathbf{y}}^{2(B)}, \quad S_{\mathbf{y}}^{3(B)} \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{3(B)} = -S_{\mathbf{y}}^{3(B)}, \quad (3.281)$$

²⁵Заправо, поклапају се до на фазни фактор; видети ниже.

док је

$$S_{\mathbf{y}}^{\pm(B)} \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\pm(B)} = S_{\mathbf{y}}^{\mp(B)}. \quad (3.282)$$

На овај начин добијемо и трансформисани хамилтонијан

$$H \rightarrow UHU^\dagger = J \sum_{\mathbf{x} \in A, \lambda} \left[\frac{1}{2} \left(S_{\mathbf{x}}^{+(A)} \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\lambda}^{+(B)} + S_{\mathbf{x}}^{-(A)} \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\lambda}^{-(B)} \right) - S_{\mathbf{x}}^{z(A)} \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\lambda}^{z(B)} \right]. \quad (3.283)$$

Како бисмо показали да се вектори у Хилбертовом простору трансформишу према (3.276), поћи ћемо од својственог проблема оператора $S_{\mathbf{y}}^{3(B)}$:

$$S_{\mathbf{y}}^{3(B)} |S, M\rangle_{\mathbf{y}} = m |S, M\rangle_{\mathbf{y}}. \quad (3.284)$$

Делујући на ову релацију оператором U са леве стране и уметањем $I = U^\dagger U$ на левој страни једнакости, добијемо

$$\mathbf{S}^{3(B)} [U|S, m\rangle_{\mathbf{y}}] = -m [U|S, m\rangle_{\mathbf{y}}], \quad (3.285)$$

одакле видимо да је $U|S, m\rangle_{\mathbf{y}} \propto |S, -m\rangle_{\mathbf{y}}$. Другим речима, важиће једнакост $m = \langle S, m | \mathbf{S}^{3(B)} | S, m \rangle = [\langle S, m | U] \mathbf{S}^{3(B)} [U | S, m \rangle]$, јер унитарна трансформација очувава вредности матричних елемената.

Дакле, оператор U из (3.277) преводи Нелово стање $|NEL\rangle$ у стање које изгледа као феромагнетно стање $|FM\rangle$. Истовремено, трансформисани хамилтонијан је облика (3.283) и због члана $S_{\mathbf{x}}^{-(A)} \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\lambda}^{-(B)}$, (3.276) није својствено стање хамилтонијана (3.283). Разлог за трансформацију стања и хамилтонијана је тај што се прорачуни врше лакше када не морамо водити рачуна о оријентацијама стања на чворовима који пропадају различитим подрешеткама. Иако $|FM\rangle$ није својствено стање хамилтонијана (3.283), односно стање $|NEL\rangle$ није својствено стање хамилтонијана (3.266), погодно је стање са максималном пројекцијом узети као полазиште при одређивању спектра елементарних ексцитација и термодинамичких карактеристика антиферомагнета. Унитарна трансформација утиче и на право основно стање антиферомагнета. Формално ћемо писати

$$|AFM\rangle \rightarrow U|AFM\rangle \equiv |\mathbf{AFM}\rangle \quad (3.286)$$

без обзира што не знамо право стање $|AFM\rangle$. У наставку ћемо видети да у линеарној апроксимацији стању $|\mathbf{AFM}\rangle$ одговара магнетски вакуум.

Једначине кретања

Број и тип Голдстонових бозона у спектру антиферомагнета је одређен обрасцем нарушења симетрије и карактеристикама основног стања. Ако за полазиште узмемо $|NEL\rangle$, симетрија се редукује према $O(3) \rightarrow O(2)$, док укупни спин (који представља очувану величину из теореме Еми Нетер) ишчежава, $\langle NEL | \mathbf{S} | NEL \rangle = \mathbf{0}$. На основу дискусије из Одељка 3.6.3 следи да се у случају антиферомагнета јављају два Голдстонова бозона типа А. Како бисмо одредили њихову пуну дисперзиону релацију, поћи ћемо од хамилтонијана (3.283) и решити линеаризоване једначине кретања.

Полазећи од хамилтонијана (3.283), налазимо (временску координату не пишемо ради прегледности)

$$\begin{aligned} i\partial_t S_x^{+(A)} &= \left[S_x^{+(A)}, H \right]_- = J S_x^{z(A)} \sum_{\lambda} S_{x+\lambda}^{-(B)} + J S_x^{+(A)} \sum_{\lambda} S_{x+\lambda}^{z(B)}, \\ i\partial_t S_y^{-(B)} &= \left[S_y^{-(B)}, H \right]_- = -J S_y^{z(B)} \sum_{\lambda} S_{y+\lambda}^{+(A)} - J S_y^{-(B)} \sum_{\lambda} S_{y+\lambda}^{z(A)}. \end{aligned} \quad (3.287)$$

Претпостављајући да је основно стање $|FM\rangle = U|NEL\rangle$, у једначине кретања ћемо увести апроксимацију $S_x^{3(A)}(t) = S_x^{3(B)}(t) \approx S$, за коју очекујемо да би могла бити оправдана при великим вредностима S . На тај начин долазимо до

$$\begin{aligned} i\partial_t S_x^{+(A)} &= JS \sum_{\lambda} S_{x+\lambda}^{-(B)} + JZ_1 S S_x^{+(A)}, \\ i\partial_t S_y^{-(B)} &= -JS \sum_{\lambda} S_{y+\lambda}^{+(A)} - JZ_1 S S_y^{-(B)}. \end{aligned} \quad (3.288)$$

Истовремено, комутационе релације за S^{\pm} операторе постају

$$\left[\frac{S_x^{+(A)}(t)}{\sqrt{2S}}, \frac{S_y^{-(A)}(t)}{\sqrt{2S}} \right]_- = \left[\frac{S_x^{+(B)}(t)}{\sqrt{2S}}, \frac{S_y^{-(B)}(t)}{\sqrt{2S}} \right]_- = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.289)$$

док су остали комутатори једнаки нули. Комутационе релације (3.289) описују систем код којег се појављују две врсте бозонских ексцитација и ову чињеницу морамо узети у обзир приликом писања Фуријеовог развоја за $S_x^{+(A)}(t)$ ниже у тексту.

Добијени систем од две једначине (3.288) се може решити преласком у импулсни простор:

$$S_x^{\pm(A)}(t) = \frac{1}{\sqrt{N_A}} \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}^{\pm(A)}(t) e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad S_x^{\pm(B)}(t) = \frac{1}{\sqrt{N_B}} \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}^{\pm(B)}(t) e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.290)$$

где је $N_A = N_B = N/2$ број чворова подрешетке. Пошто је

$$\sum_{\lambda} S_{x+\lambda}^{\pm(A)} = \frac{1}{\sqrt{N_A}} \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}^{\pm(A)} e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\lambda} e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\lambda} = \frac{Z_1}{\sqrt{N_A}} \sum_{\mathbf{k}} \gamma_D(\mathbf{k}) e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} S_{\mathbf{k}}^{\pm(A)} \quad (3.291)$$

где је $\gamma_D(\mathbf{k})$ дефинисано у (2.51) а Z_1 представља број најближих суседа, систем (3.288) се своди на

$$\begin{aligned} i\partial_t S_{\mathbf{k}}^{+(A)} &= JSZ_1 \gamma_D(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^{-(B)} + JSZ_1 S_{\mathbf{k}}^{+(A)}, \\ i\partial_t S_{\mathbf{k}}^{-(B)} &= -JSZ_1 \gamma_D(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^{+(A)} - JSZ_1 S_{\mathbf{k}}^{-(B)}. \end{aligned} \quad (3.292)$$

Односно,

$$\partial_t S_{\mathbf{k}}^{+(A)} = -iSJ(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^{-(B)} - i\epsilon S_{\mathbf{k}}^{+(A)}, \quad (3.293)$$

$$\partial_t S_{\mathbf{k}}^{-(B)} = iSJ(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^{+(A)} + i\epsilon S_{\mathbf{k}}^{-(B)}, \quad (3.294)$$

при чему су уведене стандардне ознаке [Radošević, S., Pavkov – Hrvojević, M., Pantić, M., Rutonjski, M., Kapor, D., Škrinjar, M. (2009)]

$$J(\mathbf{k}) = JZ_1 \gamma_D(\mathbf{k}), \quad \epsilon = JZ_1 S. \quad (3.295)$$

Диференцирањем (3.293) по времену налазимо

$$\begin{aligned}\partial_t^2 S_{\mathbf{k}}^{+(A)} &= -SJ(\mathbf{k}) i\partial_t S_{\mathbf{k}}^{-(B)} - \epsilon i\partial_t S_{\mathbf{k}}^{+(A)} \\ &= -SJ(\mathbf{k}) \left[-SJ(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^{+(A)} - \epsilon S_{\mathbf{k}}^{-(B)} \right] - \epsilon \left[SJ(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^{-(B)} + \epsilon S_{\mathbf{k}}^{+(A)} \right] \\ &= \{ [J(\mathbf{k})S]^2 - \epsilon^2 \} S_{\mathbf{k}}^{+(A)}.\end{aligned}\quad (3.296)$$

Једначина (3.296) представља добро познату једначину хармонијског осцилатора. Уколико решења тражимо у облику $S_{\mathbf{k}}^{+(A)}(t) \propto \exp[-i\omega t]$, налазимо дисперзиону релацију

$$\omega^2 = \epsilon^2 - [J(\mathbf{k})S]^2 \equiv \omega^2(\mathbf{k}) = (JSZ_1)^2 [1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})], \quad (3.297)$$

или

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm JSZ_1 \sqrt{1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})}. \quad (3.298)$$

По аналогји са сличним једначинама које смо сусрели одељцима посвећеним класичном и квантном Клајн-Гордоновом пољу [Видети 1.1.3, 3.2 као и 3.3.1], решење тражимо у виду Фуријеовог интеграла

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{x}}^{+(A)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_A}} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{+(A)}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \delta(\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_A}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{S^{+(A)}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t} + \frac{S^{+(A)}(-\mathbf{k}, -\omega_{\mathbf{k}})}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}} t} \right),\end{aligned}\quad (3.299)$$

У наставку ћемо уместо Фуријеових амплитуда $S^{+(A)}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))$ експлицитно увести бозонске операторе

$$\frac{S^{+(A)}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))}{2\omega(\mathbf{k})} = u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}, \quad \frac{S^{+(A)}(-\mathbf{k}, -\omega(\mathbf{k}))}{2\omega(\mathbf{k})} = v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \quad (3.300)$$

док су $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ за сада неодређене, али реалне и парне функције вектора \mathbf{k} , док оператори $a_{\mathbf{k}}$ $b_{\mathbf{k}}$ задовољавају комутационе релације

$$\left[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \right]_{-} = \left[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^{\dagger} \right]_{-} = \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad \left[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}} \right]_{-} = \left[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}} \right]_{-} = \dots = \left[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, b_{\mathbf{q}}^{\dagger} \right]_{-} = 0, \quad (3.301)$$

Линеаризовано решење (3.299) се сада може записати као

$$S_{\mathbf{x}}^{+(A)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_A}} \sum_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k}) t} + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k}) t} \right), \quad (3.302)$$

одакле директно налазимо и

$$S_{\mathbf{x}}^{-(A)}(t) = \left[S_{\mathbf{x}}^{+(A)}(t) \right]^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_A}} \sum_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k}) t} + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k}) t} \right). \quad (3.303)$$

Пошто оператори $S_{\mathbf{y}}^{-(B)}(t)$ такође задовољавају једначину (3.296), одмах можемо писати преостала два решења

$$S_{\mathbf{y}}^{+(B)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_A}} \sum_{\mathbf{k}} \left(v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y} + i\omega(\mathbf{k}) t} + u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y} - i\omega(\mathbf{k}) t} \right), \quad (3.304)$$

$$S_{\mathbf{y}}^{-(B)}(t) = \left[S_{\mathbf{x}}^{+(B)}(t) \right]^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_A}} \sum_{\mathbf{k}} \left(v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y} - i\omega(\mathbf{k}) t} + u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y} + i\omega(\mathbf{k}) t} \right).$$

Како бисмо на исправан начин интерпретирали смисао решења добијених у линеарној апроксимацији, морамо одредити непознате функције $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ и конструисати дијагонални хамилтонијан.

Комутационе релације и дијагонални хамилтонијан

Непознате функције $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ ћемо одредити наметањем два услова. Први је тај да оператори (3.302), (3.303) и (3.304) задовољавају комутационе релације (3.289). Други услов је да хамилтонијан написан помоћу оператора у линеарној апроксимацији има дијагоналну форму (3.156) [Weinberg, S. (2010)].

Заменом решења (3.302) и (3.304) у комутатор (3.289) добијамо

$$\begin{aligned} \left[S_{\mathbf{x}}^{+(A)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-(A)}(t) \right]_- &= \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left\{ u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} \left[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger \right]_- e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} \left[b_{\mathbf{q}}^\dagger, b_{\mathbf{k}} \right]_- e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = 2S\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.305)$$

при чему смо користили скраћену ознаку за скаларни производ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t$ и бозонске комутационе релације (3.301). Према томе, први услов који треба да задовоље функције $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ је

$$u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 2S. \quad (3.306)$$

Иста релација се налази из другог комутаторског пара $\left[S_{\mathbf{x}}^{+(B)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-(B)}(t) \right]_-$, док су остали комутатори аутоматски једнаки нули.

Да бисмо лакше нашли дијагоналну верзију хамилтонијана (3.266), односно (3.283), поделићемо га на три дела. Први је

$$\begin{aligned} H^1 &= \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{x}, \lambda} S_{\mathbf{x}}^{+(A)} S_{\mathbf{x}+\lambda}^{+(B)} = \frac{J}{2\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} S_{\mathbf{k}}^{+(A)} S_{\mathbf{q}}^{+(B)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}+\lambda)} \\ &= \frac{JZ_1}{2} \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}^{+(A)} S_{-\mathbf{k}}^{+(B)} \gamma_D(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.307)$$

при чему смо прешли у импулсни простор према (3.290). Заменом Фуријеових амплитуда из (3.302) и (3.304) у (3.307) налазимо

$$H_{\text{LSW}}^1 = \frac{JZ_1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \gamma_D(\mathbf{k}) \left\{ u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \right) + u_{\mathbf{k}}^2 e^{-i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^2 e^{i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger \right\}. \quad (3.308)$$

На сличан начин добијамо и

$$\begin{aligned} H_{\text{LSW}}^2 &= \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{x}, \lambda} S_{\mathbf{x}}^{-(A)} S_{\mathbf{x}+\lambda}^{-(B)} \\ &= \frac{JZ_1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \gamma_D(\mathbf{k}) \left\{ u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \right) + u_{\mathbf{k}}^2 e^{i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}}^2 e^{-i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.309)$$

Остала је још да се нађе Фуријеова трансформација за

$$H^3 = -J \sum_{\mathbf{x}, \lambda} S_{\mathbf{x}}^{3(A)} S_{\mathbf{x}+\lambda}^{3(B)}. \quad (3.310)$$

Међутим, у H^3 фигуришу оператори $S_{\mathbf{x}}^{3(A)}$ и $S_{\mathbf{x}+\lambda}^{3(B)}$ који још увек нису изражени помоћу бозонских оператора A и B . Тај проблем можемо решити тако што ћемо H_{RPA}^3 написати помоћу S^{\pm} оператора и то тако да буду задовољене једначине кретања (3.288). Другим речима, у линеарној апроксимацији, H_{LSW}^3 је оператор за који важи

$$\begin{aligned} \left[S_{\mathbf{x}}^{+(A)}, H_{\text{LSW}}^3 \right]_- &= JSZ_1 S_{\mathbf{x}}^{+(A)} = \epsilon S_{\mathbf{x}}^{+(A)} \\ \left[S_{\mathbf{x}}^{-(B)}, H_{\text{LSW}}^3 \right]_- &= -\epsilon S_{\mathbf{x}}^{-(B)}. \end{aligned} \quad (3.311)$$

Пошто је у линеарној апроксимацији $\left[S_{\mathbf{x}}^{+(A)}, S_{\mathbf{y}}^{-(A)} \right]_- = \left[S_{\mathbf{x}}^{+(B)}, S_{\mathbf{y}}^{-(B)} \right]_- = 2S\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, једначина (3.311) ће важити ако ставимо

$$H_{\text{LSW}}^3 = \frac{\epsilon}{2S} \sum_{\mathbf{x} \in A} S_{\mathbf{x}}^{-(A)} S_{\mathbf{x}}^{+(A)} + \frac{\epsilon}{2S} \sum_{\mathbf{y} \in B} S_{\mathbf{y}}^{-(B)} S_{\mathbf{y}}^{+(B)}. \quad (3.312)$$

На овом месту ћемо приметити да се иста једначина кретања добија и ако оператори S^+ и S^- у (3.312) замене места. Такође, у класичном лимиту оба избора воде на исти резултат. Оно што их разликује је константни фактор који се појављује у изразу за укупну енергију антиферромагнета. Избор који смо овде усвојили води на резултат који се слаже са стандардном линеарном теоријом спинских таласа [Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019)] и Монте Карло симулацијама. Према томе, линеаризована верзија од H^3 гласи,

$$\begin{aligned} H_{\text{LSW}}^3 &= \frac{\epsilon}{2S} \sum_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}}) \\ &+ \frac{\epsilon}{2S} \sum_{\mathbf{k}} 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \left(e^{i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + e^{-i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{\epsilon}{2S} \sum_{\mathbf{k}} 2v_{\mathbf{k}}^2 \end{aligned} \quad (3.313)$$

при чему је константни фактор последица свођења бозонских оператора на нормално уређење. Дакле, укупни хамилтонијан Хајзенберговог антиферромагнета добијен на основу линеаризације једначина кретања је

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{LSW}} &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}) + \frac{\epsilon}{2S} (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) \right\} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}}) \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} \left\{ J(\mathbf{k}) \frac{u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2}{2} + \frac{u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \epsilon}{S} \right\} \left(e^{i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + e^{-i2\omega(\mathbf{k})t} a_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} \right) \\ &+ \frac{\epsilon}{2S} \sum_{\mathbf{k}} 2 \left[v_{\mathbf{k}}^2 + \gamma_D(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \right]. \end{aligned} \quad (3.314)$$

при чему додатни константни фктор долази од нормалног уређења оператора из H_{LSW}^1 и H_{LSW}^2 .

Да би H_{LSW} представљао хамилтонијан неинтерагујућег магнетног система, потребно је да коефицијенти $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ буду такви да је испуњен услов

$$J(\mathbf{k}) \frac{u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2}{2} + \frac{u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \epsilon}{S} = 0. \quad (3.315)$$

Релације (3.306) и (3.315) у потпуности одређују функције $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$. Решења тог система су

$$u_{\mathbf{k}} = \sqrt{2S} \sqrt{\frac{\epsilon}{2\omega(\mathbf{k})} + \frac{1}{2}}, \quad v_{\mathbf{k}} = -\sqrt{2S} \sqrt{\frac{\epsilon}{2\omega(\mathbf{k})} - \frac{1}{2}}. \quad (3.316)$$

Замена решења (3.316) у (3.314) даје магнетски хамилтонијан који репродукује једначине кретања у линеарној апроксимацији. Међутим, пошто смо разматрање засновали на постојању класичног (Неловог) стања, тако да линеаризоване једначине описују мала одступања од $|\text{NEL}\rangle$, морамо у обзир узети и енергију ове конфигурације. Пошто она износи $-JZ_1 S^2 \mathcal{N}_A$, укупни хамилтонијана слободног магнетног поља у $O(3)$ антиферромагнету гласи

$$H_{\text{LSW}} = -JZ_1 S(S+1) \mathcal{N}_A + \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \right]. \quad (3.317)$$

Приметићемо да је класични део од (3.317) пропорционалан са S^2 , док су корекције услед линеарне квантне теорије $\propto S$. До резултата (3.317) се обично долази помоћу НР репрезентације спинских оператора [видети, рецимо, уџбенике Auerbach, A. (2012); Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019); Nolting, W., Ramakanth, A. (2009)]. Извођење које је овде приказано омогућава јасније тумачење дисперзионе релације на основу аналогија са квантовањем скаларног поља [видети Одељке 3.2 и 3.3.1].

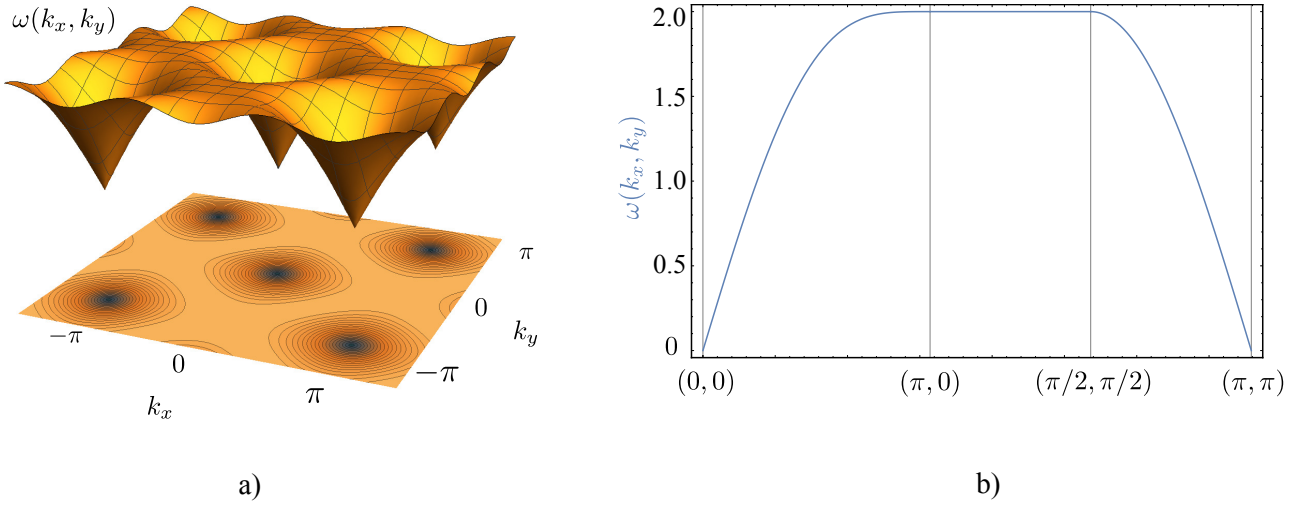
Основно стање и магнетске енергије

Из (3.317) видимо да се у линеарној апроксимацији $O(3)$ антиферромагнет описује као систем неинтерагујућих магнетона. На основу ранијих разматрања знамо да су то Голдстонови бозони типа A^{26} и јављају се у два 'укуса' – магнетони које креирају оператори $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ и они које креира $b_{\mathbf{k}}^\dagger$. Енергије магнетона оба укуса су

$$\omega(\mathbf{k}) = JSZ_1 \sqrt{1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})} \quad (3.318)$$

и за њих важи $\omega(\mathbf{k}) \geq 0$ за све вредности \mathbf{k} из прве Брилуенове зоне [Kapoor, D., Pantić, M., Škrinjar, M., Pavkov, M., Radošević, S., Rutonjski, M. (2007)]. Ипак, исправна верзија хамилтонијана се добија ако се узму у обзир оба корена из једначине (3.298). Као што смо већ дискутовали у Одељцима 1.1.3 и 3.2.3, то је последица чињенице да је једначина кретања другог реда по временској координати – једино се узимањем оба корена налази потпуно решење помоћу Фуријеовог интеграла. Дисперзиона релација

²⁶Матрица ρ из (3.202) и (3.203) идентички ишчезава.



Слика 3.7: Магنونска дисперзија (3.249) за Хајзенбергов антиферромагнет на квадратној решетки са параметрима $S = 1/2$, $J = 1$ и $a = 1$: а) Тродимензиони приказ функције $\omega(k_x, k_y)$ у реципрочном простору. б) Магنونска дисперзија дуж одређених праваца у Брилуеновој зони.

за дводимензиони антиферромагнет је приказана на Сл. 3.7. Приметићемо и да је облик хамилтонијана (3.317) формално сличан са хамилтонијаном комплексног скаларног поља (3.91) у тој мери да, поред две врсте оператора, оба поседују и исти константни члан $\int_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})$. Пошто је антиферромагнет дефинисан на решетки, овај сабирак не садржи бесконачни допринос у овом случају. Такође, оба хамилтонијана су $U(1)$ инваријантна. У случају антифероманета ова симетрија говори да је број магнона оба укуса исти. Овај закључак неће важити ако се систем смести у спољашње магнетно поље. Коначно, магنونски вакуум је сада дефинисан по узору на комплексно скаларно поље

$$|0\rangle = |n^A(\mathbf{k}) = 0\rangle |n^B(\mathbf{k}) = 0\rangle. \quad (3.319)$$

Једночестична стања су

$$|\mathbf{k}^{(A)}\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle, \quad |\mathbf{k}^{(B)}\rangle = b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \quad (3.320)$$

и нормирана су као $\langle \mathbf{k}^{(A)} | \mathbf{q}^{(B)} \rangle = \delta_{AB} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$.

На основу решења линеаризованих једначина кретања, (3.302) и (3.303), видимо да се на чворовима подрешетке A креирају магнони оба укуса. То можда није очекивано, али је последица чињенице да су магнони колективна побуђења целог система [Fazekas, P. (1999)]. Слично важи и за чворове подрешетке B .

Пошто смо нашли дијагонални бозонски хамилтонијан, основно стање антифероманета у линеарној апроксимацији је

$$|\text{AFM}\rangle \approx |0\rangle, \quad (3.321)$$

где је $|0\rangle$ вакуум Голдстонових бозона (магنونски вакуум). Како бисмо показали да стање $|0\rangle$ нарушава симетрију Хајземберговог хамилтонијана, довољно је покажемо да једна од компоненти Неловог вектора поседује очекивану вредност различиту од нуле

у овом стању [Видети дискусију из Одељка 3.6.2]. У најнижој (нултој) апроксимацији, коју смо користили за добијање линеаризованих једначина кретања је $S_x^{3(A)} = S_x^{3(B)} = S$ и за параметар уређености

$$N = \left\langle \text{AFM} \left| \sum_{x \in A} S_x^{3(A)} + \sum_{y \in B} S_y^{3(B)} \right| \text{AFM} \right\rangle \approx \langle 0 | \mathcal{N}_A S + \mathcal{N}_B S | 0 \rangle = \mathcal{N} S \quad (3.322)$$

што је у складу са (3.273) и претпостављеним обрасцем нарушења симетрије. Бољу оцену за вредност параметра уређености у основном стању можемо добити ако операторе $S_x^{3(A)}$ и $S_z^{3(B)}$ изразимо помоћу операторске релације

$$(S_x^{1(A)})^2 + (S_x^{2(A)})^2 + (S_x^{3(A)})^2 \approx S^2, \quad (3.323)$$

која апроксимативно важи за велике вредности S . Пошто линеарни хамилтонијан поседује $U(1)$ симетрију, при рачунању параметра уређености нам је довољно да посматрамо подрешетку A . Из горње везе између спинских оператора налазимо

$$S_x^{z(A)} = \sqrt{S^2 - \left((S_x^{1(A)})^2 + (S_x^{2(A)})^2 \right)} = S - \frac{1}{2S} \left((S_x^{1(A)})^2 + (S_x^{2(A)})^2 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{S^3} \right). \quad (3.324)$$

У наставку ћемо одбацити све чланове пропорционалне са $1/S, 1/S^2$ итд јер смо у потпуности игнорисали интеракцију између магнона. Наиме, испоставља се [Manousakis, E. (1991)] да први доприноси који долазе од магнон-магнон интеракције имају фактор $1/S$. Због тога би било неконзистентно да их овде задржавамо. На основу Примера 3.5 знамо да је

$$(S_x^{1(A)})^2 + (S_x^{2(A)})^2 = \frac{1}{2} \left(S_x^{+(A)} S_x^{-(A)} + S_x^{-(A)} S_x^{+(A)} \right) = S_x^{-(A)} S_x^{+(A)} + S_x^{3(A)} \quad (3.325)$$

тако да можемо писати приближан израз за оператор²⁷

$$S_x^{z(A)} = S - \frac{1}{2S} S_x^{-(A)} S_x^{+(A)} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{S} \right). \quad (3.326)$$

За параметар уређености сада налазимо

$$N = \left\langle \text{AFM} \left| \sum_{x \in A} S_x^{z(A)} \right| \text{AFM} \right\rangle = \mathcal{N}_A S - \frac{1}{2S} \left\langle 0 \left| \sum_{x \in A} S_x^{-(A)} S_x^{+(A)} \right| 0 \right\rangle \quad (3.327)$$

при чему користимо апроксимативна бозонска решења за S^\pm операторе дата у (3.302) и (3.303). Тако налазимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2S} \left\langle 0 \left| \sum_{x \in A} S_x^{-(A)} S_x^{+(A)} \right| 0 \right\rangle &= \frac{1}{2S} \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} \langle 0 | b_{-\mathbf{k}} b_{-\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle \sum_{\mathbf{x} \in A} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})} \\ &= \frac{1}{2S} \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 \langle 0 | 1 + b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.328)$$

²⁷Из (3.302), (3.303) и (3.316) знамо да је у линеарној апроксимацији $S_x^{-(A)} S_x^{+(A)} \propto S$. Такође, оператор $S_x^{3(A)}/S$ морамо занемарити у односу на $S_x^{3(A)}$. Коначно, приметимо да се апроксимативни израз (3.326) своди на егзактни резултат (3.232) при $S = 1/2$.

при чему смо искористили (3.174). Дакле,

$$N/\mathcal{N}_A = S - \frac{1}{2} \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})}} - 1 \right] \quad (3.329)$$

представља вредност параметра уређености, обрачунаог по чвору решетке, у линеарној теорији [Manousakis, E. (1991)].

Са Сл. 3.7 се види да је веза између енергије и модула таласног вектора линеарна у близини центра Брилуенове зоне. Заиста, развојем функције $\gamma_D(\mathbf{k})$, у случају (хипер)кубне решетке, налазимо

$$\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| + \mathcal{O}(\mathbf{k}^4), \quad (3.330)$$

где је $c = 2Jsa\sqrt{D}$ брзина магнона. Облик маггонске дисперзије у дуготаласној апроксимацији сугерише да се $O(3)$ антиферромагнет у апроксимацији континуума описује теоријом која поседује Лоренцову инваријантност (с тим да је брзина светлости замењена брзином магнона). Одговарајући теорија је $O(3)$ нелинеарни сигма модел, којег смо срели у Одељку 2.5.2, модификован тако да садржи и временске изводе [Leutwyler, H. (1994); Watanabe, H., Murayama, H. (2012)]. Прелазак на границу континуума у директном простору у случају антиферромагнета је нетривијалан проблем са изненађујућим резултатом за једнодимензиони систем. Наиме, испоставља се да одговарајући сигма модел садржи и тзв. тополошки члан који утиче на разлику у понашању антиферромагнета код којих је спин S цео број у односу на оне код којих је S полуцео број. Конкретно, у случају полуцелобројног спина се у систему јављају ексцитације које не поседују геп док се код једнодимензионих антиферромагнета за целобројно S јављају ексцитације са гепом [тзв. Халдејнов геп]. Наведени резултат није у супротности са Голдстоновом и Мермин-Вагнеровом теоремом јер у случају једнодимензионих антиферромагнета не долази до спонтаног нарушења симетрије и споменуте ексцитације нису магнони [Auerbach, A. (2012); Altland, A., Simons, B. (2010); Fradkin, E. (2013)].

Релација (3.329) нам омогућава и да проверимо оправданост претпоставке о постојању дугодометног уређења на $T = 0\text{K}$. У дуготаласној апроксимацији је $\sqrt{1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})} \propto |\mathbf{k}|$, па налазимо

$$\frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})}} \propto \int_0^\Lambda \frac{dk k^{D-1}}{k}. \quad (3.331)$$

Одавде видимо, да за разлику од ферромагнета, спонтано нарушење симетрије код $O(3)$ антиферромагнета није могуће за $D = 1$ на $T = 0\text{K}$.

Мермин-Вагнерова теорема

Да бисмо испитали постојање дугодометног уређења на коначним температурама, поново ћемо кренути од (3.326) и решења линеарних једначина (3.302) и (3.303). Како сада не усређавамо по вакуумском стању, имамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2S} \left\langle \sum_{x \in A} S_x^{-(A)} S^{+(A)} \right\rangle &= \frac{1}{2S} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \frac{1}{\mathcal{N}_A} \left[u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \rangle e^{ix \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})} + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} \langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle e^{-ix \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})} \right] \\ &= \frac{1}{2S} \sum_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}}^2 \langle n_{\mathbf{k}}^{(A)} \rangle + v_{\mathbf{k}}^2 \left[1 + \langle n_{\mathbf{k}}^{(B)} \rangle \right] \right). \end{aligned} \quad (3.332)$$

Пошто је у одсуству спољашњег поља $\langle n_{\mathbf{k}}^{(A)} \rangle = \langle n_{\mathbf{k}}^{(B)} \rangle$, коначно налазимо

$$N(T)/\mathcal{N}_A = S - \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\epsilon}{2\omega(\mathbf{k})} \coth \frac{\omega(\mathbf{k})}{2T} - \frac{1}{2} \right], \quad (3.333)$$

при чему смо искористили $1 + 2[e^x - 1]^{-1} = \coth[x/2]$.

Да бисмо испитали понашање $N(T)$ код нискодимензионих система, поступићемо слично као и у случају феромагнета. Најпре ћемо преписати (3.333) као

$$N(T)/\mathcal{N}_A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\sqrt{1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})}} + \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_D^2(\mathbf{k})}} \langle n_{\mathbf{k}}^{(A)} \rangle. \quad (3.334)$$

Интересантан нам је последњи интеграл. На ниским температурама се побуђују магнони ниских енергија за које је $\omega(\mathbf{k}) \approx c|\mathbf{k}|$, где је c брзина магнона. Интеграцију по Брилуеновој зони тада можемо апроксимирати интеграцијом по D димензионим сферним координатама. Ако уведемо инфрацрвени регулатор Λ_0 и интеграцију по k поделимо на део од Λ_0 до $\tilde{\Lambda}$ где је, за дату температуру, $c\tilde{\Lambda}/T \ll 1$, температурски интеграл је пропорционалан са

$$T \int_{\Lambda_0}^{\tilde{\Lambda}} dk k^{D-3} \quad (3.335)$$

и дивергира при $\Lambda_0 \rightarrow 0$ за $D = 1$ и $D = 2$. Дакле, на коначним температурама, не може доћи до спонтаног нарушења симетрије код $O(3)$ антиферомагнета у једној и две просторне димензије [Auerbach, A. (2012)].

При $D \geq 3$ и $T \rightarrow 0$, можемо писати $\coth \frac{\omega(\mathbf{k})}{2T} \approx 1 + 2e^{-\omega(\mathbf{k})/T}$. Уз ову апроксимацију, видимо да се интеграл из (3.333) своди на два доприноса. Први је интеграл који фигурише у (3.329). Са друге стране, температурски зависан део је пропорционалан са

$$\int_0^{\Lambda} dk k^{D-2} e^{-ck/(2T)} = \left(\frac{2T}{c} \right)^{D-1} \int_0^{\frac{c\Lambda}{2T}} dy y^{D-2} e^{-y}, \quad (3.336)$$

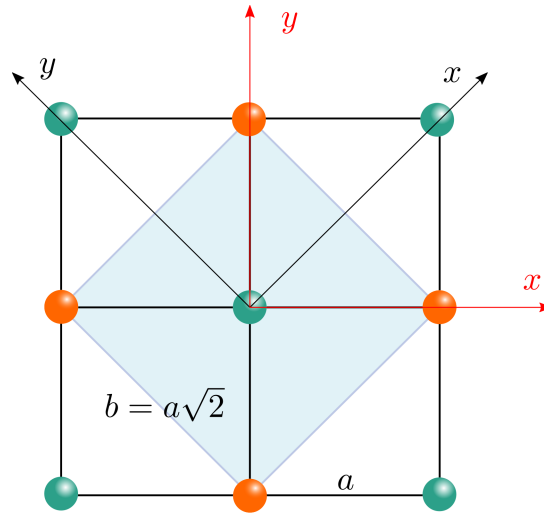
где је c брзина магнона. Из горњег израза налазимо да је код тродимензионог антиферомагнета први члан у нискотемпературском развоју параметра уређености пропорционалан са T^2 [Oguchi, T. (1960); Hofmann, C.P. (1999)].

Нумеричке вредности на $T = 0$

Погледајмо сада колико су предвиђања линеарне теорије поуздана. Да бисмо били конкретни, узећемо Хајзенбергов антиферомагнет за $S = 1/2$ на квадратној решетки. Овај модел има изванредан теоријски значај јер се магнетне особине једињења La_2CuO_4 , које након допирања прелази у суперпроводну фазу, у одређеној мери могу описати помоћу њега [Manousakis, E. (1991)].

Да бисмо поједноставили рачунање интеграла по Брилуеновој зони, изабраћемо координатни систем као што је приказано на Сл. 3.8. За стандардну квадратну решетку је елементарна ћелија квадрат ивице a и геометријски фактор је

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{k}) = \frac{\cos(ak_1) + \cos(ak_2)}{2}. \quad (3.337)$$



Слика 3.8: Антиферромагнет на квадратној решетки ивице a : наранџасте и зелене куглице репрезентују чворове различитих подрешетки. Елементарна ћелија у координатном систему $x - y$ је квадрат ивице a . У теменима овог квадрата се налазе два чвора из подрешетке A и два из подрешетке B . У координатном систему $x - y$, који се добија ротацијом за $\pi/4$, за елементарну ћелију узимамо квадрат ивице $b = a\sqrt{2}$. У теменима овог квадрата су четири чвора из подрешетке B а у центру је један из подрешетке A .

Са друге стране, ако координатни систем ротирамо за $\pi/4$, као елементарну ћелију узимамо квадрат ивице $b = a\sqrt{2}$ тако да се у центру квадрата налази чвор подрешетке A а у теменима су чворови подрешетке B (или обрнуто). Геометријски фактор у овако одабраном систему је

$$\gamma(\mathbf{k}) = \cos\left(\frac{bk_1}{2}\right) \cos\left(\frac{bk_2}{2}\right). \quad (3.338)$$

Оба ова избора су потпуно еквивалентна и прелазак са суме на интеграл по Брилуеновој зони се може извршити према (3.172)

$$\sum_{\mathbf{k}} = \frac{\mathcal{N}_A a^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_1 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_2 = \frac{\mathcal{N}_A b^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} dk_1 \int_{-\pi/b}^{\pi/b} dk_2. \quad (3.339)$$

Ипак, рачунање интеграла је доста једноставније у другом случају.

Пример 3.9. Посматрајмо интеграл

$$I(\alpha) = \frac{b^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} dk_1 \int_{-\pi/b}^{\pi/b} dk_2 (1 - \gamma^2(\mathbf{k}))^\alpha, \quad (3.340)$$

где је $\alpha \in \mathbb{R}$ уз $\alpha \geq -1/2$, док је $\gamma(\mathbf{k})$ дефинисано у (3.338). Увођењем смене $bk_1/2 = x$, $bk_2/2 = y$, интеграл се своди на

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} dy [1 - \cos^2 x \cos^2 y]^\alpha \\ &\equiv \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} dy [1 - a_x^2 \cos^2 y]^\alpha. \end{aligned} \quad (3.341)$$

Користећи познати развој [Видети [Радосевић, С., Мали, П. \(2020\)](#) и тамо наведене референце]

$$(1 - t^2)^\alpha = {}_2F_1(-\alpha, 1; 1; t^2), \quad (3.342)$$

где је

$${}_2F_1(-\alpha, 1; 1; t^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_m}{m!} t^{2m} \quad (3.343)$$

хипергеометријска функција а

$$(a)_m = \frac{\Gamma(a + m)}{\Gamma(a)} \quad (3.344)$$

представља тзв. Похамеров симбол, интеграл по y из (3.341) се може записати као

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} dy (1 - a_x^2 \cos^2 y)^\alpha &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_m}{m!} (a_x)^{2m} \int_0^{\pi/2} dy \cos^{2m} y \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_m}{m!} \frac{(1/2)_m}{(1)_m} (a_x)^{2m}. \end{aligned} \quad (3.345)$$

У горњој једнакости смо искористили интеграл

$$\int_0^{\pi/2} dy \cos^{2m} y = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(m + 1/2)}{2 \Gamma(m + 1)}. \quad (3.346)$$

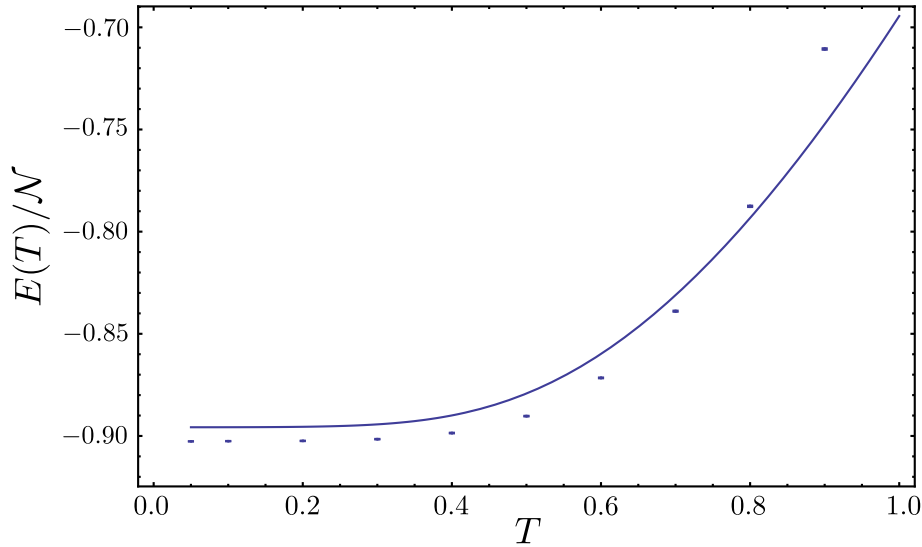
Заменом (3.345) у (3.341) добијамо

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{4 \pi}{\pi^2 2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_m}{m!} \frac{(1/2)_m}{(1)_m} \int_0^{\pi/2} dx \cos^{2m} y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_m}{m!} \frac{(1/2)_m (1/2)_m}{(1)_m (1)_m} \\ &\equiv {}_3F_2\left(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; 1\right). \end{aligned} \quad (3.347)$$

Овде ${}_3F_2$ означава уопштену хипергеометријску функцију која је дефинисана помоћу датог реда који конвергира за $\alpha \geq -1/2$. Више детаља о уопштеној хипергеометријској функцији, као и њеној примени на Хајзенбергов модел, може се наћи у [[Radošević, S., Pantić, M., Karor, D., Pavkov – Hrvojević, M., Škrinjar, M. \(2010\)](#); [Радосевић, С., Мали, П. \(2020\)](#); [Radošević, S., Rutonjski, M., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M., Karor, D., Škrinjar, M.G. \(2011\)](#)] и тамо наведеним референцама. ■

Замењујући интеграл из Примера 3.9 у (3.317), налазимо енергију основног стања Хајзенберговог антиферромагнета на квадратној решетци, обрачунатог по чвору $\mathcal{N} = 2\mathcal{N}_A$, у линеарној апроксимацији.

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\langle \text{AFM} | H | \text{AFM} \rangle}{\mathcal{N}} = \frac{\langle 0 | H_{\text{LSW}} | 0 \rangle}{\mathcal{N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{S}\right) \\ &= -\frac{JZ_1 S(S+1)}{2} + \frac{JZ_1 S}{2} {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; 1\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{S}\right). \end{aligned} \quad (3.348)$$



Слика 3.9: Унутрашња енергија Хајзенберговог антиферромагнета обрачуната по чвору решетке добијена помоћу линеарне теорије (пуна линија) и Монте Карло симулације (тачке).

Специјално, за $S = 1/2$, $J = 1$ модел на квадратној решетки, налазимо, $E_0 = -0.657947$. Са друге стране, Монте Карло симулација базирана на SSE алгоритму²⁸ за 8×8 чворова, даје вредност $E_{MC} = -0.6736(1)$. Резултати симулација на већим решеткама [Sandvik, A.W. (1997)] дају сличан резултат $E = -0.669437(5)$. Дакле, енергија обрачуната по чвору у линеарној теорији се од резултата Монте Карло симулација разликују за мање од 2%. Са друге стране, за вредност параметра уређености налазимо

$$N_0 = \frac{N(0)}{N_A} = S - \frac{1}{2} \left[{}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; 1 \right) - 1 \right]. \quad (3.349)$$

За квадратну решетку са $S = 1/2$ и $J = 1$, налазимо $N_0 = 0.3033$. Монте Карло SSE симулација за решетку 4×4 (5×10^8 термализација и 5×10^5 sweep-ова) даје $N_0 = 0.30354(28)$, што је блиско са вредностима које се налазе у литератури [Sandvik, A.W. (1997)]. За оцену вредности параметра уређености у симулацији је коришћена величина [Manousakis, E. (1991)]

$$\frac{\sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}}}{N} \quad (3.350)$$

при чему је \mathbf{N} дефинисано у (3.271). Дакле, видимо да квантне флукуације редукују вредност параметра уређености са 0.5 на приближно 0.3, што је одступање од скоро 40%. Општи резултат је да се са повећањем S и димензије система D утицај квантних флукуација смањује [Anderson, P.W. (1952)]. Односно, са порастом D и S су стања $|0\rangle$, $|\text{AFM}\rangle$ и $|\text{FM}\rangle$ све ближа једна другом.

²⁸SSE алгоритам је дефинисан за $T \neq 0$. Ипак, оцене физичких величина дефинисаних на $T = 0$ се могу добити снижавањем вредности параметра T у симулацији [Sandvik, A.W. (1997)].

Нумеричке вредности на $T \neq 0$

На Сл. 3.9 је приказана унутрашња енергија $O(3)$ антифермагнета на простој кубној решетки добијена помоћу линеарне теорије (пуна линија) и квантне Монте Карло симулације засноване на SSE алгоритму (кружићи). Модел је дефинисан са $J = 1$ и $S = 1/2$ а симулација је вршена на решетки $10 \times 10 \times 10$ уз 10^6 термализација и 10^5 sweep-ова. Грешке вредности добијених у симулацији су мање од симбола којима су представљене на графику. Као и у случају феромагнета, примећује се доста добро слагање између симулација и линеарне теорије. Рецимо, релативно одступање између два резултата на ниским температурама је мање од 1%. Такође, резултати добијени у овој симулацији се јако добро слажу са онима добијеним помоћу равоја око Изинговог лимита [Oitmaa, J., Hamer, C.J., Zheng, W. (1994)]. Екстраполација SSE Монте Карло резултата на $T = 0$ даје $E_0/\mathcal{N} = -0.90246(6)$ а развој око Изинговог лимита $E_0/\mathcal{N} = -0.90246(5)$. Знатније разлике између SSE Монте Карло симулације и предвиђања линеарне теорије се појављују тек при $T \approx 0.6$, што је блиско половини вредности критичне температуре која износи $T_C = 0.946 \pm 0.001$ [Sandvik, A.W. (1998)].

Анализа резултата

У претходна два одељка смо видели примену спинских таласа, као манифестацију Голдстонове теореме, на Хајзенбергов феромагнет и антиферомагнет. Поред тога што је образац нарушења симетрије у оба случаја исти, $O(3) \rightarrow O(2)$, постоје значајне разлике у понашању ова два система. Пре свега, у спектру феромагнета се појављује један Голдстонов бозон типа В, док се код антиферомагнета појављују два бозона типа А. Разлог за ово је динамички – интеракција измене у антиферомагнету форсира услов $\langle \text{AFM} | S^3 | \text{AFM} \rangle = 0$ услед чега је матрица ρ из (3.203) идентички ишчезава. Ово за последицу има разлику у нискотемпературској термодинамици два система. Пошто су енергије магнона код феромагнета $\propto \mathbf{k}^2$, водећи члан у температурској зависности параметра уређености је $\propto T^{D/2}$, где је $D > 2$ просторна димензија система. У случају антиферомагнета, код којег су магнонске енергије $\propto |\mathbf{k}|$, овај носећи члан је T^{D-1} . Аналогне разлике се јављају и код нискотемпературских развоја осталих термодинамичких величина [Hofmann, C.P. (2011, 1999)].

Такође, видели смо да је слагање између предвиђања теорије неинтерагујућих Голдстонових бозона и Монте Карло симулација изузетно добро, чак и када је $S = 1/2$. У том случају $1/S$ није мали број и не може се *a priori* оправдати занемаривање чланова који описују магнон-магнон интеракцију [Видети коментар из Примера 3.6]. На изненађујуће добре резултате линеарне теорије у случају $S = 1/2$ система се може гледати на више начина. Један од њих [Manousakis, E. (1991)] сугерише да виши чланови који се добијају при развоју оператора (3.223) по степенима $1/S$ заправо добијају у развоју по све вишим степенима величине $\langle n_x \rangle / S$. На овај начин би се слабост интеракције (односно, мало одступање спинских оператора од чистих бозонских) објаснило чињеницом да је на ниским температурама $\langle n_x \rangle$ мали број. Ипак, ово је у суштини аргумент заснован на апроксимацији средњег поља (замена оператора $a_x^\dagger a_x$ са његовом средњом вредношћу) за коју се зна да у одређеним ситуацијама предвиђа резултате у супротности са Мермин-Вагнеровом [Fröbrich, P., Kuntz, P.J. (2006)] или Голдстоновом [Wen, X. G. (2007)] теоремом. Из наведених разлога се овакво објашњење не би требало

сматрати коначним. Са друге стране, слабост интеракције између Голдстонових бозона је општа карактеристика система у којима се они јављају. Наиме, испоставља се да је нискоенергетска динамика Голдстонових бозона одређена тзв. ефективним лагранжијаном [Weinberg, S. (2010); Brauner, T. (2010); Watanabe, H., Murayama, H. (2014)] који у суштини представља генреализацију $O(N)$ нелинеарног σ модела уведеног у Одељку 2.5.2. Чланови у лагранжијану који описују интеракцију између Голдстонових поља увек садрже и изводе самих поља. Рецимо, у случају аниферомагнета, појављује се члан облика $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) \nabla^2 [\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t)]$, где су $\pi^1(x)$ и $\pi^2(x)$ два магнонска поља [Видети Одељак 3.8]. Ако поменути члан посматрамо у импулсном простору, фактор ∇^2 ће постати \mathbf{p}^2 . Због тога ће на ниским енергијама ефекти магнон-магнон интеракције бити релативно мали чак и када је $S = 1/2$ [Radošević, S.M. (2015)].

Ово опажање илуструје како се у Голдстонови бозони у квантној теорији користе као погодни степени слободе за опис нискоенергетског (нискотемпературског) сектора модела код којег долази до спонтаног нарушења симетрије. Рецимо, у случају Хајзенберговог антиферомагнета, физичке особине магнета су у суштини одређене на основу кулоновске интеракција неспарених електрона који могу да прескачу између чворова решетке и Паулијевог принципа. Један од основних модела који описује овакве системе је Хабардов модел са доминантном Кулоновом интеракцијом [Видети Пример 3.4]. Колико год интеракције између ових електрона биле компликоване и јаке, магнони се у највећем делу уређене фазе понашају као слободне (неинтерагујуће) честице. Због тога се термодинамичке карактеристике Хајзенберговог антиферомагнета доста ефикасно рачунају помоћу (неинтерагујућих) магнона.

3.8 Ефективни лагранжијани за феромагнет и анти-феромагнет

У Одељку 2.5.2 смо видели како је могуће конструисати ефективно дејство за Голдстонова поља у $O(N)$ нелинеарном σ моделу који се користи у Ландауовој теорији фазних прелаза. Ефективни лагранжијан, који описује класичну *динамику* Голдстонових поља се може добити на сличан начин. Примењујући правила канонског квантовања на ефективни лагранжијан, добијамо чисти магнонски хамилтонијан у којем се од самог почетка налазе магнонски оператори. Интеракција између магнона је аутоматски укључена кроз чланове који садрже производе од четири и више оператора. Магнонски лагранжијани су компактно записани помоћу јединичног векторског поља јер се на тај начин лакше повлачи паралела са прилазом из претходног одељка. Ови резултати су у потпуности еквивалентни са стандардним CCWZ лагранжијаном који се може написати помоћу Море-Картанове форме [Watanabe, H., Murayama, H. (2014)].

3.8.1 Антиферомагнет

Пре свега, у Одељку 2.5.2 смо видели да при нарушењу симетрије по шеми $O(3) \rightarrow O(2)$, постоје два Голдстонова поља π^1 и π^2 и то тако да се вредности $\pi^1(x)$ и $\pi^2(x)$ увек

одговарају тачкама на јединичној сфери. У односу на произвољну²⁹ инфинитезималну $O(3)$ трансформацију, поља π^1 и π^2 се понашају као $\pi^A \rightarrow \pi^A + \delta\pi^A$, при чему је [видети (2.282)]

$$\delta\pi^A = \theta^A \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2} + \theta^3 (\mathbf{Y})^A_B \pi^B, \quad A, B = 1, 2 \quad (3.351)$$

где је \mathbf{Y} генератор од $O(2)$ а θ^A су углови који дефинишу трансформацију. На основу резултата из Одељка 2.5.2, знамо да је израз

$$\int_{\mathbf{x}} \partial_r \pi^A G_{AB} \partial_r \pi^B \quad (3.352)$$

где индекс r пребројава просторне координате а

$$G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) = \delta_{AB} + \frac{\pi_A \pi_B}{1 - \boldsymbol{\pi}^2} \quad (3.353)$$

представља компоненте метричког тензора на S^2 , инваријантан у односу на трансформације из (3.351). Пошто у случају унутрашњих степени слободе $O(3)$ трансформације не зависе ни од просторних ни и временских координата, одмах можемо написати лагранжијан $O(3)$ инваријантног σ модела који описује класична Голдстонова поља типа A као динамички ентитет,

$$\mathcal{L} = \frac{F_1^2}{2} \partial_t \pi^A G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) \partial_t \pi^B - \frac{F_2^2}{2} \nabla \pi^A \cdot G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) \nabla \pi^B. \quad (3.354)$$

при чему су F_1 и F_2 произвољне константе. Ако компоненте градијента дефинишемо помоћу

$$\partial = \sum_{\mu=1}^D e^\mu \partial_\mu \equiv \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right] \quad (3.355)$$

где је c брзина магнона уведена код једначине (3.330), густина лагранжијана која описује нискоенергетску (тј. дуготаласну) динамику Голдстонових поља у случају $O(3)$ антиферромагнета на кубној решетки је

$$\mathcal{L} = \frac{F_2^2}{2} \partial_\mu \pi^A G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) \partial^\mu \pi^B, \quad c = F_2/F_1. \quad (3.356)$$

Овај лагранжијан се често записује и у другом облику код којег је $O(3)$ симетрија очигледна. То смо такође сусрели у Одељку 2.5.2. Ако дефинишемо јединични вектор $\mathbf{U} = [\boldsymbol{\pi}, U^3]$, где је U^3 одређено са $U^3 = \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}$, лагранжијан (3.354) поприма једноставнију форму

$$\mathcal{L} = \frac{F_2^2}{2} \partial_\mu \mathbf{U} \cdot \partial^\mu \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}^2 = 1. \quad (3.357)$$

Лагранжијан (3.357) делује једноставније, али садржи фиткивно поље U^3 које се мора елиминисати у свим прорачунима. Иако делује да (3.354) и (3.357) имају једноставнију

²⁹Трансформација је произвољна у смислу да није ограничена на подгрупу $O(2)$ или трансформације из $O(3)/O(2)$. Оно што трансформацију чини инфинитезималном је вредност параметра θ^A .

структуру од Хајзенберговог хамилтонијана (3.266) јер не узимају у обзир постојање решетке, ови лагранжијани на исправан начин урачунавају структуру магнон-магнон³⁰ интеракција у најнижем реду [Leutwyler, H. (1994)]. Интеракција се у (3.354) манифестује кроз нетривијални метрички тензор G а у (3.357) је последица фиктивног поља U^3 [односно, нелинеарног услова $|U| = 1$]. Ово представља општар контраст у односу на Хајзенбергов хамилтонијан (3.266) у којем се магнон-магнон интеракција појављује као последица нетривијалног Хилбертовог простора и комутационих релација које задовољавају спински оператори.

Лако је видети да у линеарној теорији, која одговара апроксимацији $G_{AB} = \delta_{AB}$ у (3.356) или занемаривањем компоненте U^3 у (3.357), Хамилтонов функционал је [Gongyo, S., Kikuchi, Y., Hyodo, T., Kunihiro, T. (2016)]

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^2 \int_{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{F_1^2} \Pi_A^2 + F_2^2 \nabla \pi^A \cdot \nabla \pi^A \right], \quad (3.358)$$

где је смо са $\Pi^A = \partial \mathcal{L}_0 / \dot{\pi}^A = F_1^2 \dot{\pi}^A$ означили одговарајуће канонске импулсе. Након квантовања, овај хамилтонијан постаје

$$H_0 = F_1^2 \int_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \right] \quad (3.359)$$

до на константни члан. Магнонске енергије су $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$ док $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ креирају магноне два укуса као у Одељку 3.7.3. Магнонски оператори су очигледно дати изразима који су аналогни са онима из (3.88), где је комплексно магнонско поље дефинисано³¹ са $\pi = (\pi^1 + i\pi^2)/\sqrt{2}$.

Помоћу хамилтонијана (3.359) је могуће репродуковати неке основне резултате из претходног одељка. Рецимо, параметар уређености је $N = \langle U^3 \rangle$, при чему је

$$\int_{\mathbf{x}} U^3(x) = \int_{\mathbf{x}} \sqrt{1 - \pi^2(x)} \approx V - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \pi(x) \cdot \pi(x) = V - \int_{\mathbf{x}} \pi^\dagger(x) \pi(x). \quad (3.360)$$

Односно,

$$N/V \approx 1 - \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \langle n^A(\mathbf{k}) \rangle, \quad (3.361)$$

где је $n^A(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} = V a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ а $\langle n^A(\mathbf{k}) \rangle$ је одговарајућа Бозе-расподела. Рачунањем интеграла налазимо да је носећи члан у нискотемпературском развоју пропорционалан са T^{D-1} у складу са (3.336).

Основно преимућство метода ефективних лагранжијана је што се систематски могу урачунати и поправке вишег реда тако да се директно добијају нискотемпературски развоји различитих термодинамичких величина без неконтролисаних апроксимација [Hofmann, C.P. (1999a, 2010)]. Ово се постиже урачунавањем свих чланова са претпостављеним симетријама модела [Weinberg, S. (2010)]. На пример, апроксимирањем G_{AB} са $\delta_{AB} + \pi_A \pi_B$ води на интеракциони члан облика

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{F_1^2}{2} (\pi_A \partial_\mu \pi^A) (\pi^B \partial^\mu \pi^B) = \frac{F_1^2}{8} \partial_\mu \pi^2 \partial^\mu \pi^2 = \frac{F_1^2}{8} \partial_\mu (\pi^2 \partial^\mu \pi^2) - \frac{1}{8} \pi^2 \partial^2 \pi^2. \quad (3.362)$$

³⁰О магнонима као честицама треба размишљати тек након квантовања класичне теорије.

³¹Обратити пажњу да је у Одељку 3.88 са симболом $\pi(x)$ означен канонски импулс који смо у овом делу текста означили са Π .

Први сабирак је облика дивергенције вектора и не доприноси дејству. Други члан води на облик интеракције наведен у Одељку 3.7.3. Интеракциони доприноси вишег реда се добијају када се у ефективни лагранжијан укључе сви чланови који су у складу са претпостављеном $O(3)$ симетријом модела. То су, на пример [Hofmann, С.Р. (1999а, 2010)]

$$D_1 (\partial_\mu \mathbf{U} \cdot \partial^\mu \mathbf{U}) (\partial_\nu \mathbf{U} \cdot \partial^\nu \mathbf{U}), \quad D_2 (\partial_\mu \mathbf{U} \cdot \partial_\nu \mathbf{U}) (\partial^\mu \mathbf{U} \cdot \partial^\nu \mathbf{U}), \quad (3.363)$$

где су D_1 и D_2 произвољне константе. У општем случају, класификација различитих чланова се врши према броју извода који делују на магнетна поља и броју интеграција по унутрашњим линијама Фајнманових дијаграма [Weinberg, S. (2010)]. Произвољне константе које фигуришу у ефективном лагранжијану се могу фиксирати поређењем са микроскопским прилазима (спински таласи), са резултатима Монте Карло симулација или поређењем са експериментом [Hofmann, С.Р. (2011)]. Када се све константе фиксирају, теорија заснована на ефективном лагранжијану се може користити за детаљне прорачуне. На крају напомињемо да се лагранжијан из овог одељка директно уопштава на случај $O(N)$ антиферромагнета [Hofmann, С.Р. (1999а, 2010)].

3.8.2 Феромагнет

У овом одељку ћемо доћи и до ефективног лагранжијана који у најнижој апроксимацији описује магнетне типа В у феромагнету. Као што ћемо видети, добијање овог лагранжијана је доста компликованије него у случају антиферромагнета а разлог томе је постојање параметра уређености повезаног за теоремом Еми Нетер.

Килингова векторска поља

За почетак ћемо фиксирати базисе у $\mathfrak{o}(3)$ и $\mathfrak{o}(2)$. За разлику од Примера 1.15 или дискусије из Одељка 2.5.2, узећемо³²

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{Y}, \quad (3.364)$$

тако да \mathbf{Y} репрезентује генератор од $\mathfrak{o}(2)$ а \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 генераторе од $\mathfrak{o}(3)/\mathfrak{o}(2) \cong \mathbb{R}^2$ у \mathbb{R}^3 , док ћемо за генераторе од $\mathfrak{o}(3)$ узети скуп $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 = \mathbf{Y}\}$. Као и до сада, индекси i, j, \dots ће пребројавати базисне елементе од $\mathfrak{o}(3)$ док ћемо са A, B, \dots нумерисати различите елементе из базиса простора $\mathfrak{o}(3)/\mathfrak{o}(2)$. Матрице \mathbf{X}_i су изабране тако да буде

$$(\mathbf{X}_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}. \quad (3.365)$$

Разлог за другачију параметризацију дејства $\mathfrak{o}(3)$ на S^2 је тај што желимо да ефективно дејство за феромагнет изразимо помоћу јединичног поља \mathbf{U} , $|\mathbf{U}|^2 = 1$.

Полазећи од (2.269) можемо писати (не правимо разлику између горњих и дојних индекса код поља \mathbf{U})

$$\delta U_i = \theta^j (\mathbf{X}_j)^k{}_i U_k = -\theta^j \epsilon_{jki} U_k = \epsilon_{ijk} U^j \theta^k \quad \text{tj.} \quad \delta \mathbf{U} = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\theta}. \quad (3.366)$$

³²Матрице $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 = \mathbf{Y}\}$ одговарају тзв. адјунгованој репрезентацији.

Ако поље \mathbf{U} параметризујемо као $[\pi^1 \ \pi^2 \ \sqrt{1-\pi^2}]^\top$, из (3.366) налазимо и законе трансформације Голдстонових поља [Упоредити са (3.351)!]

$$\delta\pi^1 = -\theta^2\sqrt{1-\pi^2} + \theta^3\pi^2, \quad \delta\pi^2 = \theta^1\sqrt{1-\pi^2} - \theta^3\pi^1. \quad (3.367)$$

Релацију (3.367) која дефинише трансформацију Голдстонових поља у односу на дејство елемената из $\mathfrak{o}(3)$ ћемо записати као [Watanabe, H., Murayama, H. (2014)]

$$\pi^A \rightarrow \pi^A + \delta\pi^A, \quad \delta\pi^A = \theta^i h_i^A(\boldsymbol{\pi}) \quad (3.368)$$

где су $\{h_i^1, h_i^2\}$ компоненте три тзв. Килингова векторска поља $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ и \mathbf{h}_3 [Leutwyler, H. (1994); Leutwyler, H. (1994)], где је $\mathbf{h}_i = h_i^A \mathbf{e}_A$. Компоненте Килингових вектора за $G \rightarrow H$ дато са $O(3) \rightarrow O(2)$ се директно добијају поређењем (3.368) и (3.351) [Видети и Watanabe, H., Murayama, H. (2012)]

$$h_1^1 = 0, \quad h_1^2 = \sqrt{1-\pi^2}, \quad h_2^1 = -\sqrt{1-\pi^2}, \quad h_2^2 = 0, \quad h_3^1 = \pi^2, \quad h_3^2 = -\pi^1. \quad (3.369)$$

У општем случају, Килингова векторска поља описују инфинитезимално дејство групе G на простор G/H [Arvanitoyeorgos, A. (2003); Fecko, M. (2006)].

У наставку ћемо користити чињеницу да се помоћу Килингових векторских поља може конструисати инверзни метрички тензор као

$$G^{-1} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_i, \quad \text{тј.} \quad G^{AB} = \sum_{i=1}^3 h_i^A h_i^B. \quad (3.370)$$

Користећи компоненте Килингових вектора из (3.369), као и дефиницију компоненти метричког тензора (3.353), налазимо³³

$$G = \begin{bmatrix} 1 + \frac{(\pi^1)^2}{1-\pi^2} & \frac{\pi^1\pi^2}{1-\pi^2} \\ \frac{\pi^1\pi^2}{1-\pi^2} & 1 + \frac{(\pi^2)^2}{1-\pi^2} \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - (\pi^1)^2 & -\pi^1\pi^2 \\ -\pi^1\pi^2 & 1 - (\pi^2)^2 \end{bmatrix} \quad (3.371)$$

на основу чега се лако показује $GG^{-1} = G^{-1}G = I_{2 \times 2}$.

Параметризација метрике са јединичним векторским пољем \mathbf{U}

Компоненте метричког тензора је могуће на компакан начин изразити и помоћу компоненти поља \mathbf{U} . Заиста, пошто је (користимо скраћено означавање $\partial_A = \partial/\partial\pi^A$)

$$\sum_{i=1}^3 \partial_A U_i \partial_B U_i = \sum_{C=1}^2 \partial_A \pi^C \partial_B \pi^C + \partial_A \sqrt{1-\pi^2} \partial_B \sqrt{1-\pi^2} = \delta_{AB} + \frac{\pi_A \pi_B}{1-\pi^2} \quad (3.372)$$

видимо да се метрички тензор може записати и као

$$G = \sum_{i=1}^3 \partial U_i \otimes \partial U_i = \partial_A U_i \partial_B U_i \mathbf{e}^{*A} \otimes \mathbf{e}^{*B}, \quad (3.373)$$

³³Чињеница да смо на другачији начин параметризовали дејство од $O(3)$ на S^2 , што се огледа у различитим законима трансформације Голдстонових поља датим у (3.351) и (3.367), не утиче на компоненте метричког тензора на S^2 .

Метрички тензор можемо искористити за спуштање индекса, односно за придруживање дуалних вектора пољима \mathbf{h}_i [Видети Прилог А]

$$\tilde{\mathbf{h}}_i = G(\mathbf{h}_i, \text{---}) = \partial U_j (\partial_A U_j h_i^A). \quad (3.374)$$

Рецимо, за $i = 1$, налазимо компоненте дуалног вектора

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{1B} &= \partial_B U_1 (\partial_1 U_1 h_1^1 + \partial_2 U_1 h_1^2) + \partial_B U_2 (\partial_1 U_2 h_1^1 + \partial_2 U_2 h_1^2) + \partial_B U_3 (\partial_1 U_3 h_1^1 + \partial_2 U_3 h_1^2) \\ &= U_3 \partial_B U_2 - U_2 \partial_B U_3 \end{aligned} \quad (3.375)$$

Понављајући рачун за преостале вредности индекса i , налазимо [Leutwyler, H. (1994)]

$$\tilde{\mathbf{h}}_i = \epsilon_{ijk} \partial_A U^j U^k e^{*A}. \quad (3.376)$$

Користећи $U_j \partial_A U_j = \frac{1}{2} \partial_A |\mathbf{U}|^2 = 0$, можемо показати да се метрички тензор може написати и као [Leutwyler, H. (1994)]

$$G = \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{h}}_i \otimes \tilde{\mathbf{h}}_i. \quad (3.377)$$

Управо ће нам облик метричког тензора из (3.377) бити од користи приликом налажења ефективног лагранжијана за феромагнет.

Инваријантни тензори на G/H

Као што смо видели на примеру антиферомагнета, или $O(N)$ σ модела, ефективни лагранжијан је изражен помоћу компоненти метричког тензора на простору G/H . Разлог за то је што се компоненте метричког тензора и Голдстонових поља трансформишу на такав начин да је величина $G_{AB} \partial_\mu \pi^A \partial^\mu \pi^B$ инваријантна у односу на дејство групе G дато са $\pi^A \rightarrow \pi^A + \delta \pi^A$, $G_{AB} \rightarrow G_{AB} + \delta G_{AB}$ и као таква представља G инваријантну функцију на G/H . Одавде је јасно да ће ефективни лагранжијан у принципу морати да садржи све чланове који су изфрађени од G инваријантних функција на G/H [Weinberg, S. (2010); Andersen, J.O., Brauner, T., Hofmann, C.P., Vuorinen, A. (2014); Watanabe, H., Murayama, H. (2014)]. Рецимо, неки могући сабирци који садрже четири Голдстонова поља на $S^2 = O(3)/O(2)$ су наведени у (3.363). Уколико је модел Лоренц-инваријантан, сваки од наведених сабирака мора бити и Лоренцов скалар. У општем случају, овај последњи услов не мора да важи.

На основу линеарне анализе Хајзенберговог феромагнета [Видети Одељак 3.7.2] можемо закључити да се у најнижој апроксимацији ефективни лагранжијан за $O(3)$ феромагнет мора свести на лагранжијан за Шредингерово поље а овај сигурно садржи члан са једним временским изводом. Према томе, ефективни лагранжијан мора садржати сабирак облика

$$\mathcal{L}^{(0,1)} = c_A(\boldsymbol{\pi}) \dot{\pi}^a \quad (3.378)$$

где нотација $\mathcal{L}^{(0,1)}$ сугерише да је реч о сабирку без просторних и са једним временским изводом а $c_A(\boldsymbol{\pi})$ су компоненте $O(3)$ инваријантног тензорског поља на S^2 . Као што ћемо видети ниже, овај сабирак је повезан са очуваном величином из теореме Еми Нетер и

као такав се може појавити само у нерелативистичким системима [Leutwyler, H. (1994); Watanabe, H., Murayama, H. (2014)]. Овакви доприноси у лагранжијану су познати под називом Беријева фаза [Wen, X. G. (2007); Zee, A. (2010); Watanabe, H., Murayama, H. (2014)] или Вес-Зуминов (WZ) члан [Leutwyler, H. (1994); Fradkin, E. (2013)]. Узимајући у обзир WZ члан, ефективни лагранжијан за феромагнет постаје

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}) = c_A(\boldsymbol{\pi})\dot{\pi}^A + \frac{\bar{F}^2}{2}G_{AB}(\boldsymbol{\pi})\partial_t\pi^A\partial_t\pi^B - \frac{1}{2}G_{AB}(\boldsymbol{\pi})\nabla\pi^A \cdot \nabla\pi^B \quad (3.379)$$

где је \bar{F} произвољна константа. Приметићемо да у ефективни лагранжијан не улази члан са једним изводом по просторној координати $\tilde{\mathbf{c}}_A(\boldsymbol{\pi}) \cdot \nabla\pi^A$ или мешовити члан $\propto \dot{\pi}^A\nabla\pi^B \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{AB}$ јер они нарушавају претпостављану ротациону симетрију теорије у односу на просторне координате. Ипак, овакви сабирци се могу појавити у лагранжијанима који описују једнодимензионе системе [Watanabe, H., Murayama, H. (2014)].

Диференцијална једначина за функције $c_A(\boldsymbol{\pi})$

Функције $c_A(\boldsymbol{\pi})$ ћемо одредити тако да дејство $S[\boldsymbol{\pi}] = \int_x \mathcal{L}$ буде инваријантно у односу на трансформације $\pi^A \rightarrow \pi^a + \delta\pi^A$, где је $\delta\pi^A = h_i^A\theta_i$ а компоненте Килингових вектора су наведене у (3.369). Као што је дискутовано у Одељку 1.3.2, уколико се при наведеној трансформацији густина лагранжијана промени за парцијални извод неке функције по времену, $\mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}) \rightarrow \mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}) + \partial_t\tilde{e}(\boldsymbol{\pi})$, то ће индуковати промену Лагранжевог функционала $L[\boldsymbol{\pi}] = \int_x \mathcal{L}(\boldsymbol{\pi})$, дату са

$$L[\boldsymbol{\pi}] \rightarrow L[\boldsymbol{\pi}] + \frac{d\tilde{e}(\boldsymbol{\pi})}{dt}. \quad (3.380)$$

и то неће променити одговарајуће Ојлер-Лагранжеве једначине. Другим речима, класична теорија ће остати непромењена у овом случају. Испоставља се да ово важи и у квантној теорији [Weinberg, S. (2008)]. Како су чланови са два просторна или два временска извода инваријантни у односу на ове трансформације [Видети дискусију из Одељка 2.5.2], у наставку ћемо се сконцентрисати на доприносе из $\mathcal{L}^{(0,1)}(\boldsymbol{\pi})$.

Пошто је $\delta(\dot{\pi}^A) = \partial_t(\delta\pi^A) = \theta^i\partial_B h_i^A \dot{\pi}^B$, налазимо

$$\delta\mathcal{L}^{(0,1)} = \partial_B c_A \delta\pi^B \dot{\pi}^A + c_A \delta\dot{\pi}^A \quad (3.381)$$

тако да услов инваријантности дејства гласи

$$\delta\mathcal{L}^{(0,1)} = \theta^i \dot{\pi}^B (h_i^A \partial_A c_B + c_A \partial_B h_i^A) = \frac{\partial\tilde{e}}{\partial t}. \quad (3.382)$$

Добијену релацију ћемо још мало трансформисати. Пре свега, дефинисаћемо $\tilde{e}(\boldsymbol{\pi}) = \theta^i \tilde{e}_i(\boldsymbol{\pi})$. Такође, пошто је

$$\begin{aligned} \theta^i \dot{\pi}^B c_A \partial_B h_i^A &= \theta^i \dot{\pi}^B \partial_B (h_i^A c_A) - \theta^i \dot{\pi}^B h_i^A \partial_B c_A \\ &= \theta^i \frac{\partial}{\partial t} (h_i^A c_A) - \theta^i \dot{\pi}^B h_i^A \partial_B c_A, \end{aligned} \quad (3.383)$$

услов (3.382) можемо записати као

$$\theta^i \dot{\pi}^B h_i^A (\partial_A c_B - \partial_B c_A) = \theta^i \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{e}_i - h_i^A c_A). \quad (3.384)$$

Односно, дефинисањем

$$\tilde{e}_i(\boldsymbol{\pi}) = e_i(\boldsymbol{\pi}) + h_i^A(\boldsymbol{\pi})c_A(\boldsymbol{\pi}) \quad (3.385)$$

налазимо диференцијалну једначину коју задовољавају функције $c_A(\boldsymbol{\pi})$

$$h_i^A(\partial_{AcB} - \partial_{BcA}) = \partial_B e_i. \quad (3.386)$$

Да бисмо на основу једначине (3.386) одредили функције $c_A(\boldsymbol{\pi})$ најпре морамо специфицирати три функције $e_i(\boldsymbol{\pi})$.

У Одељку 1.3.2 смо показали да свака глобална симетрија дејства за последицу има закон одржања. Такође, нашли смо и експлицитан израз за струје J_i^μ када је густина лагранжијана инваријантна (1.174) или када се мења до на дивергенцију векторског поља (1.183). На основу (1.183) се лако налазе и величине $\rho_i = J_i^0$ у случају када се густина лагранжијана мења до на парцијални члан облика $\partial_i \tilde{e}(\boldsymbol{\pi}) \theta^i$ [ради погодности, овде бирамо супротан предзнак за величине J_i^μ],

$$\rho_i = \tilde{e}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\pi}^A} h_i^A. \quad (3.387)$$

За густину лагранжијана наведену у (3.379), налазимо [Watanabe, H., Murayama, H. (2014); Leutwyler, H. (1994)]

$$\rho_i = \tilde{e}_i - \frac{\partial}{\partial \dot{\pi}^A} h_i^A \left(c_B \dot{\pi}^B + \frac{\bar{F}^2}{2} G_{CD} \dot{\pi}^C \dot{\pi}^D \right). \quad (3.388)$$

Односно, коришћењем дефиниције (3.385), добијамо

$$\rho_i(\boldsymbol{\pi}) = e_i(\boldsymbol{\pi}) - \bar{F}^2 h_i^A(\boldsymbol{\pi}) G_{AB}(\boldsymbol{\pi}) \dot{\pi}^B. \quad (3.389)$$

У квантној верзији теорије Хајзенберговог феромагнета поља π^A постају оператори а параметар уређености је [Видети (3.239)]

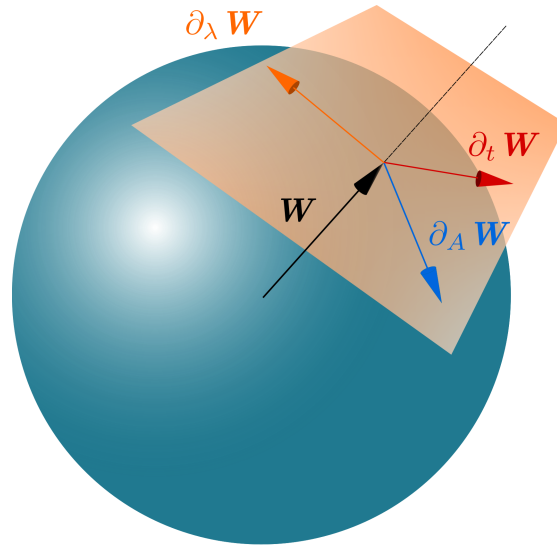
$$M = \left\langle 0 \left| \int_x \rho_i(x) \right| 0 \right\rangle = V \langle 0 | \rho_i(0) | 0 \rangle = \mathcal{N} S \delta_i^3 \quad (3.390)$$

где је S квантни број локализованог спина, $|0\rangle$ означава магنونски вакуум док смо, по обичају, за осу магнетизације узели правац 3 унутрашњег простора. Будући да је S константа кретања [Видети (3.212)], M не сме зависити од времена. Тако добијамо услов

$$\langle 0 | \rho_i(0) | 0 \rangle = \frac{\mathcal{N} S}{V} \delta_i^3 = e_i(\mathbf{0}). \quad (3.391)$$

Са друге стране, $\delta_i^3 = U_i(\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0})$ па, будући да се U_i и e_i трансформишу као компоненте тродимензионих вектора, морају бити пропорционални један другом. Дакле [Leutwyler, H. (1994)]

$$e_i(\boldsymbol{\pi}) = \Sigma U_i(\boldsymbol{\pi}), \quad \Sigma = \frac{\mathcal{N} S}{V}. \quad (3.392)$$



Слика 3.10: Вектори $\partial_A \mathbf{W}$, $\partial_\lambda \mathbf{W}$ и $\partial_t \mathbf{W}$ се налазе у тангентној равни у односу на сферу генерисану јединичним вектором \mathbf{W} .

Величина Σ очигледно представља запреминску густину магнетизације у основном стању. Према томе, једначина (3.386) се своди на

$$h_i^A (\partial_{ACB} - \partial_{BCA}) = \Sigma \partial_B U_i. \quad (3.393)$$

Множењем обе стране ове једначине са h_i^D и сумирањем по i , уз коришћење везе (3.370) и израза (3.376), коначно налазимо [Leutwyler, H. (1994)]

$$\partial_{ACB} - \partial_{BCA} = -\Sigma \epsilon_{ijk} \partial_A U^i \partial_B U^j U^k = -\Sigma \mathbf{U} \cdot (\partial_A \mathbf{U} \times \partial_B \mathbf{U}) \quad (3.394)$$

што је тражена диференцијална једначина.

Решење помоћу WZ интеграла

Да бисмо записали решење једначине (3.394) у компактној $O(3)$ инваријантној форми, увешћемо додатни параметар $\lambda \in [0, 1]$ и дефинисати функције $\sigma^A(\boldsymbol{\pi}, \lambda)$, тако да је $\sigma^A(\boldsymbol{\pi}, 0) = 0$ и $\sigma^A(\boldsymbol{\pi}, 1) = \pi^A$ [Leutwyler, H. (1994)]. Сада ћемо показати да се функције c_A могу изразити помоћу интеграла по новом параметру λ

$$c_A(\boldsymbol{\pi}) = \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\partial_A \mathbf{W} \times \partial_\lambda \mathbf{W}) \quad (3.395)$$

где је $\mathbf{W} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi}, \lambda))$ а ∂_A као и до сада означава $\partial/\partial\pi^A$. Може се показати да класична теорија поља која се конструише помоћу овако дефинисаних интеграла не зависи од вредности $0 \leq \lambda < 1$ [Детаљи се могу наћи у Радосевић, С., Мали, П. (2020)]. Пре него што се уверимо да интеграл (3.395) задовољава једначину (3.394) и услов (3.382), приметимо да због $|\mathbf{U}|^2 = |\mathbf{W}|^2 = 1$, важи

$$\mathbf{W} \cdot \partial_A \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \partial_t \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \partial_\lambda \mathbf{W} = 0 \quad (3.396)$$

тако да три вектора $\partial_A \mathbf{W}$, $\partial_t \mathbf{W}$ и $\partial_\lambda \mathbf{W}$ леже у тангентној равни на јединичну сферу [Видети Сл. 3.10]. Због тога је

$$\partial_\lambda \mathbf{W} \cdot (\partial_A \mathbf{W} \times \partial_t \mathbf{W}) = 0. \quad (3.397)$$

На основу (3.395) и услова (3.397) можемо писати

$$\partial_B c_A = \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\partial_{AB}^2 \mathbf{W} \times \partial_\lambda \mathbf{W}) + \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\partial_A \mathbf{W} \times \partial_{\lambda B}^2 \mathbf{W}) \quad (3.398)$$

тако да је

$$\begin{aligned} \partial_A c_B - \partial_B c_A &= \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{U} \cdot (\partial_B \mathbf{W} \times \partial_{\lambda A}^2 \mathbf{W} - \partial_A \mathbf{W} \times \partial_{\lambda B}^2 \mathbf{W}) \\ &= -\Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot \partial_\lambda (\partial_A \mathbf{W} \times \partial_B \mathbf{W}) \\ &= -\Sigma \mathbf{W} \cdot (\partial_A \mathbf{W} \times \partial_B \mathbf{W}) \Big|_{\lambda=0}^1 \\ &= -\Sigma \mathbf{U} \cdot (\partial_A \mathbf{U} \times \partial_B \mathbf{U}) \end{aligned} \quad (3.399)$$

при чему смо још једном искористили (3.397), као и чињеницу да је $\mathbf{W}(\sigma) = \mathbf{e}_3$ за $\lambda = 0$ и $\mathbf{W} = \mathbf{U}$ за $\lambda = 1$. Дакле, интеграл (3.395) заиста задовољава једначину (3.394).

Потражимо сада малу промену од $\mathcal{L}^{(0,1)}$ када је $c_A(\boldsymbol{\pi})$ изражено помоћу (3.395). Трансформација (3.366) индукује трансформацију поља \mathbf{W} према

$$\delta \mathbf{W}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi})) = \mathbf{W}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi})) \times \boldsymbol{\theta} = \partial_A \mathbf{W}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi})) \delta \pi^A = \theta^1 h_i^A(\boldsymbol{\pi}) \partial_A \mathbf{W}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi})). \quad (3.400)$$

Пошто је $|\mathbf{W}| = 1$, мора важити и

$$\mathbf{W} \cdot \delta \mathbf{W} = \delta \mathbf{W} \cdot (\dot{\mathbf{W}} \times \partial_\lambda \mathbf{W}) = 0. \quad (3.401)$$

Како је

$$\mathcal{L}^{(0,1)} = c_A(\boldsymbol{\pi}) \dot{\pi}^A = \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\partial_A \mathbf{W} \times \partial_\lambda \mathbf{W}) \dot{\pi}^A = \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\dot{\mathbf{W}} \times \partial_\lambda \mathbf{W}), \quad (3.402)$$

налазимо

$$\delta \mathcal{L}^{(0,1)} = \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\delta \dot{\mathbf{W}} \times \partial_\lambda \mathbf{W}) + \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\dot{\mathbf{W}} \times \partial_\lambda \delta \mathbf{W}). \quad (3.403)$$

Због (3.401) се други интеграл може преписати као

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\dot{\mathbf{W}} \times \partial_\lambda \delta \mathbf{W}) &= \int_0^1 d\lambda \partial_\lambda [\delta \mathbf{W} \cdot (\mathbf{W} \times \dot{\mathbf{W}})] - \int_0^1 d\lambda \delta \mathbf{W} \cdot (\mathbf{W} \times \partial_\lambda \dot{\mathbf{W}}) \\ &= \delta \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U} \times \dot{\mathbf{U}}) + \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\delta \mathbf{W} \times \partial_t \partial_\lambda \dot{\mathbf{W}}). \end{aligned} \quad (3.404)$$

Заменом (3.404) у (3.403) добијамо

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(0,1)} &= \Sigma\delta\mathbf{U} \cdot (\mathbf{U} \times \dot{\mathbf{U}}) + \Sigma\partial_t \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\delta\mathbf{W} \times \partial_\lambda \dot{\mathbf{W}}) \\ &= \Sigma\partial_t \left[\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\theta} + \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\partial_A \mathbf{W} \times \partial_\lambda \dot{\mathbf{W}}) h_i^A \theta^i \right] = \partial_t (\theta^i \tilde{e}_i(\boldsymbol{\pi}))\end{aligned}\quad (3.405)$$

у складу са (3.382) и (3.385).

Једначина кретања

Ефективни лагранжијан за феромагнет можемо изразити помоћу јединичног векторског поља \mathbf{U} као

$$\mathcal{L}_{\text{FM}} = \Sigma \int_0^1 d\lambda \mathbf{W} \cdot (\dot{\mathbf{W}} \times \partial_\lambda \mathbf{W}) - \frac{F^2}{2} \partial_r \mathbf{U} \cdot \partial_r \mathbf{U} \quad (3.406)$$

при чему смо занемарили члан који садржи два временска извода и експлицитно смо увели константу F . Такође, индекс r пребројава просторне координате. Константе F и Σ можемо одредити тако што ћемо успоставити везу са линеарном теоријом спинских таласа из Одељка 3.7.2.

Варирање дејства $\int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\text{FM}}$ води на једначину кретања [Детаљи се могу наћи у Радосевић, С., Мали, П. (2020)]

$$\Sigma \mathbf{U} \times \dot{\mathbf{U}} + \frac{F^2}{2} \nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (3.407)$$

која се може записати и као

$$\dot{\mathbf{U}} + \frac{F^2}{\Sigma} (\nabla^2 \mathbf{U}) \times \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (3.408)$$

То је позната Ландау-Лифшицова једначина и представља класични аналогон једначине (3.242) која описује динамику спинских оператора у случају Хајзенберговог феромагнета. Пре свега, на основу (3.392), видимо да је $\Sigma = S/v_0$, где је S вредност спина локализованог на чвору решетке а v_0 запремина елементарне ћелије. Користећи кореспонденцију $\mathbf{S} \rightarrow S\mathbf{U}$ у једначини (3.242) и прелазећи на континуум са $\nabla^2 \rightarrow \nabla^2$ држећи константе фиксним фиксним, добијамо следећу идентификацију [Radošević, S.M., Pantić M.R., Ravkov – Hrvojević, M.V., Kapor, D.V. (2013)]

$$F^2 = \frac{JS^2 Z_1 |\boldsymbol{\lambda}|^2}{2Dv_0}, \quad \Sigma = \frac{S}{v_0}. \quad (3.409)$$

одакле видимо да константе F^2 и Σ зависе од вредности локализованог спина и геометрије решетке. Такође, сличним поступком је могуће добити и ефективни лагранжијан који урачунава ефекте спољашњег магнетног поља [Leutwyler, H. (1994)].

Шредингерово поље у линеарној апроксимацији

Раније је већ наглашено да ефективно дејство које описује динамику Голдстонових бозона у феромагнету не зависи од начина на који смо са поља \mathbf{U} прешли на поље \mathbf{W} . То нам оставља слободу да изаберемо једну једноставну параметризацију и израчунамо WZ интеграл. Бирајући [Leutwyler, H. (1994)]

$$W^1 = \lambda U^1, \quad W^2 = \lambda U^2, \quad W^3 = \sqrt{1 - \lambda^2[(U^1)^2 + (U^2)^2]} \quad (3.410)$$

налазимо [Детаљи рачуна су дати у Радошевић, С., Мали, П. (2020)]

$$\mathcal{L}_{\text{FM}} = \Sigma \frac{\dot{U}^1 U^2 - U^1 \dot{U}^2}{1 + U^3} - \frac{F^2}{2} \partial_r \mathbf{U} \cdot \partial_r \mathbf{U}, \quad (3.411)$$

при чему је $U^3 = \sqrt{1 - [(U^1)^2 + (U^2)^2]}$. Линеарна апроксимација се сада добија потпуним релаксирањем услова $|\mathbf{U}| = 1$, односно стављајући $U^3 \approx 1$. Тада се лагранжијан (3.411) своди на лагранжијан за Шредингерово поље (1.36), при чему је

$$\psi = \sqrt{\frac{\Sigma}{2}} [U^1 + iU^2], \quad m = \frac{\Sigma}{2F^2} \quad (3.412)$$

док су F^2 и Σ дати у (3.409). Имајући на располагању линеарни лагранжијан, можемо прећи на квантну теорију применом правила канонске квантизације као што смо већ дискутовали у овом одељку. Пажљивим третирањем услова $|\mathbf{U}| = 1$ се добијају чланови који описују интеракцију између Голдстонових бозона (магнона). Предност метода ефективних лагранжијана у односу на операторски третман Хајзенберговог хамилтонијана се огледа у томе што се пертурбативни рачун може систематски организовати тако да не зависи од малог параметра $1/S$. Такође, у методу ефективних лагранжијана се од почетка ради са бозонским операторим и стањима па се не јављају компликације узроковане Хилбертовим простором спинских оператора [Hofmann, S.P. (1999, 2011); Radošević, S.M. (2015); Radošević, S.M., Pantić M.R., Pavkov – Hrvojević, M.V., Karor, D.V. (2013)].

Прилог

Додатак А

Релативистичка нотација и Фуријеова трансформација

Иако се у овом тексту разматра већи број модела базираних на теоријама поља које нису Лоренц-инваријантне (попут теорија заснованих на Шредингеровом пољу или Изинговог модела који је дефинисан на просторној решетки), релативистичка нотација је често веома корисна. Због тога ћемо на овом месту навести основне дефиниције и релације које се провлаче кроз текст. Постоји више различитих конвенција за дефинисање величина у простору Минковског, а ми ћемо овде пратити нотацију која преовлађује у удбеницима [Пантић, М. (2005); Милић, Б. (2002); Ryder, L.H. (1996); Хибш Т. (2011)].

Квадривекторе понекад означавамо великим словима и користимо стандардни базис $\{e_\alpha\}$ у \mathbb{R}^4 :

$$X = \sum_{\alpha=0}^3 X^\alpha e_\alpha = \begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X^0 \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

при чему са \mathbf{X} означавамо три просторне компоненте квадривектора¹. Квадривектори се сабирају и множе скаларом на стандардни начин. Такође, обично нећемо експлицитно писати знак за сумирање и тако да грчки индекси у сумама, $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$, узимају вредности од 0 до 3, а латинични индекси i, j, k, l, \dots узимају вредности од 1 до 3. У изузетним ситуацијама је наглашено које вредности узимају индекси или да се сумирање не подразумева. Дуални базис сачињавају вектори врсте $\{e^{*\alpha}\}$ тако да је

$$e^{*\alpha}(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha. \quad (\text{A.2})$$

Скаларни производ два квадривектора дефинишемо као њихову контракцију са метричким тензором, кој се по конвенцији означава са η :

$$\eta = \eta_{\alpha\beta} e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}. \quad (\text{A.3})$$

Дакле,

$$X \cdot Y := \eta(X, Y) = \eta_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta. \quad (\text{A.4})$$

¹Треба обратити пажњу да се простор Минковског, са скаларним производом уведеним у (A.4), разликује од простора \mathbb{R}^4 са стандардним скаларним производом.

Иако метрички тензор *није* тензор типа (1, 1) већ тензор типа (0, 2), према распрострањеној злоупотреби нотације, његове компоненте се често приказују распоређене у квадратној матрици. Конкретно, у случају метрике простора Минковског, имамо

$$\eta = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

На основу (A.5) је лако видети да је $\eta^{-1} = \eta$. Компоненте од η^{-1} означавамо са $\eta^{\alpha\beta}$. Имајући у виду компоненте метричког тензора, видимо да се скаларни производ два квадживектора може записати и као

$$X \cdot Y = X^0 Y^0 - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}, \quad (\text{A.6})$$

где $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ означава стандардни скаларни производ у \mathbb{R}^3 .

Као што је добро познато [Милошевић, И. (1997)], у просторима са скаларним производом постоји привилеговани изоморфизам који повезује векторе и величине из одговарајућег дуалног простора. У релативистичкој терминологији се ова операција обично означава као спуштање/подизање индекса а одговарајућа дуална величина се означава истим симболом. Рецимо, квадживектору X је на овај начин придружен дуални вектор $\tilde{X} = \eta(X, _) = \eta(_, X)$ и његове компоненте су

$$\tilde{X}_\alpha = \eta_{\alpha\beta} X^\beta, \quad \text{odnosno} \quad \tilde{X}_0 = X^0, \quad \tilde{X}_i = -X^i \equiv -(\mathbf{X})_i. \quad (\text{A.7})$$

Операције подизања и спуштања индекса се могу применити и на тензоре произвољног ранга. Тако је, рецимо,

$$G_{\alpha\beta}{}^\gamma = \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta^{\gamma\sigma} G^{\mu\nu}{}_\sigma. \quad (\text{A.8})$$

Понекад је потребно применити ову операцију само на просторне индексе. Тада је

$$F_{0i} = \eta_{0\alpha} \eta_{i\beta} F^{\alpha\beta} = \eta_{00} \eta_{ij} F^{0j} = -F^{0i}, \quad (\text{A.9})$$

јер је

$$\eta_{ij} = -\delta_{ij}. \quad (\text{A.10})$$

Слично,

$$F_{ij} = \eta_{i\alpha} \eta_{j\beta} F^{\alpha\beta} = \eta_{ik} \eta_{jm} F^{km} = F^{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Лоренцове трансформације су, по дефиницији, све трансформације које не мењају интервал $\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. Ако се координате x^α трансформишу са матрицом $\Lambda^\mu{}_\nu$, инваријантност интервала нам даје услов који матрица Λ мора задовољити да би репрезентовала Лоренцову трансформацију

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.12})$$

Множењем последње релације са компонентама $\eta^{\rho\sigma}$ и контракцијом по једном индексу, уз коришћење чињенице да је $\eta_{\alpha\mu}\eta^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$, добијамо $\Lambda_{\alpha}^{\mu}\Lambda^{\alpha}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$. Дакле, матрица Λ^{-1} је одређена са компонентама

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} = \Lambda_{\alpha}^{\beta}\eta_{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}. \quad (\text{A.13})$$

У зависности од тога како се понашају њихове компоненте у односу на Лоренцове трансформације, разликујемо тензорска поља различитог типа. Приликом примене Лоренцових трансформација на тензорска поља треба водити рачуна о томе да Лоренцова трансформација делује како на просторно-временске координате x (независно промењиве), тако и на компоненте тензора (зависне промењиве). Ово двоструко дејство Лоренцове трансформације се прегледно може представити графички а на овом месту ћемо разматрање ограничити на скаларна и векторска поља. Ради прегледности, са $\bar{\Lambda}$ ћемо означити трансформацију координата а са Λ трансформацију зависно промењивих.

У случају скаларног поља, независно промењива се трансформиса као $\Lambda : x \rightarrow \bar{\Lambda}(x)$, а зависно промењива као $\Lambda : \phi(\) \rightarrow \phi(\)$. Ако са ϕ' означимо трансформисано поље, дејство Λ на x и ϕ се може представити дијаграмом

$$\begin{array}{ccc} \phi(x) & \xrightarrow{\Lambda} & \phi(x) = \phi'(\bar{\Lambda}(x)) \\ \uparrow \phi & & \uparrow \phi' \\ x & \xrightarrow{\bar{\Lambda}} & \bar{\Lambda}(x) \end{array} \quad (\text{A.14})$$

који заправо дефинише ϕ' . Пошто мора бити $\phi(x) = \phi'(\bar{\Lambda}(x))$, видимо да је $\phi'(x) = \phi(\bar{\Lambda}^{-1}(x))$, што је тражени закон трансформације за скаларно поље. Алтернативно, са дијаграма се директно може прочитати и композиција $\phi' = \Lambda \circ \phi \circ \bar{\Lambda}^{-1} = \phi \circ \bar{\Lambda}^{-1}$, јер је $\Lambda \circ \phi = \phi$.

У случају векторских поља, Лоренцова трансформација делује на зависно промењиве као $\Lambda : V(\) \rightarrow \Lambda V(\)$, где је $\Lambda V(\)$ векторско са компонентама $\Lambda^{\mu}_{\nu}V^{\nu}$. Према томе, у овом случају имамо дијаграм

$$\begin{array}{ccc} V(x) & \xrightarrow{\Lambda} & (\Lambda V)(x) = V'(\bar{\Lambda}(x)) \\ \uparrow V & & \nearrow V' \\ x & \xrightarrow{\bar{\Lambda}} & \bar{\Lambda}(x) \end{array} \quad (\text{A.15})$$

где је $V(x)$ вектор (вредност поља $V(\)$ у тачки x) а са V' смо означили трансформисано поље чију вредност у тачки x желимо да одредимо. Са дијаграма директно читамо $V' = \Lambda \circ V \circ \bar{\Lambda}^{-1} = (\Lambda V) \circ \bar{\Lambda}^{-1}$, што је еквивалентно стандардном закону трансформација компоненти векторског поља $V^{\mu}(x) \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu}V^{\nu}(\bar{\Lambda}^{-1}(x))$. На сличан начин се могу дискутовати ротације скалара и вектора, као и Лоренцове трансформације тензорских поља вишег реда.

Што се тиче Фуријеове трансформације и равних таласа, користимо дефиницију

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{A.16})$$

Фуријеов развој величине f , у ознаци \tilde{f} , дефинисан је са

$$f(x) = \int_k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{f}(k) \quad (\text{A.17})$$

при чему је $k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ а \int_k представља скраћену ознаку за $D + 1$ димензиони интеграл

$$\int_k := \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv \int_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.18})$$

Инверзна трансформација је

$$\tilde{f}(k) = \int_x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(x), \quad \int_x := \int d^3 \mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt \equiv \int_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dt. \quad (\text{A.19})$$

У појединим случајевима су коришћени и D димензиони интегрални и они су дефинисани у Одељцима 2.2.4 и 3.5. Коначно, конвенција о нормирању стања $|\mathbf{k}\rangle$ је

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^D \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (\text{A.20})$$

Додатак Б

Варијациони Извод

На овом месту су приказане основе диференцијалног рачуна са функционалима. Излагање није строго и углавном прати дискусију из [Altland, A., Simons, B. (2010); Greiner, W. (1996); Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995)]. Више примера се може наћи у [Радошевић, С., Мали, П. (2020)].

Како бисмо што лакше дошли до оперативног израза за варијациони извод (који се назива и функционалним изводом) и који се често користи у физичарској литератури, корисно је да се подсетимо неких дефиниција из теорије функција више промењивих. Ради једноставност, уводно излагање ћемо ограничити на реалне просторе. Нека је дата функција f на \mathbb{R}^n . То значи да $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$. Као што је добро познато, диференцијал функције f је дат изразом

$$df = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (\text{Б.1})$$

Са друге стране, може се дати и нешто општија дефиниција диференцијала функције која је zgodнија за разматрање преласка на функционале. Ако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, тада се диференцијал функције $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дефинише помоћу

$$f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \epsilon df_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{Б.2})$$

при чему је ϵ мали параметар а $df_{\mathbf{x}}$ је линеарна функција по компонентама вектора \mathbf{y} и, у општем случају, зависи од компоненти вектора \mathbf{x} . Лако је видети да су изрази (Б.1) и (Б.2) заправо еквивалентни. Ако у (Б.2) узмемо гранични случај $\epsilon \rightarrow 0$, што је практично еквивалентно замени $\epsilon \mathbf{y}$ са $d\mathbf{x}$, добијамо (Б.1). Дакле, диференцијал $df_{\mathbf{x}}$ је заправо дуални вектор јер вектору \mathbf{y} придружује реалан број тако да је пресликавање

$$\mathbf{y} \mapsto df_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv \langle df_{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle \quad (\text{Б.3})$$

линеарно. Шта више, на основу (Б.1) и (Б.2) видимо да је дејство дуалног вектора $df_{\mathbf{x}}$ на вектор \mathbf{y} дато са

$$\langle df_{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} y^\alpha, \quad (\text{Б.4})$$

тако да су његове компоненте

$$(df_{\mathbf{x}})_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{e}_{\alpha}) - f(\mathbf{x})}{\epsilon}. \quad (\text{Б.5})$$

У (Б.5) фигурише вектор \mathbf{e}_{α} који је један од ортова векторског простора \mathbb{R}^n . Пошто је у \mathbb{R}^n дефинисан стандардни скаларни производ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_{\alpha} y^{\alpha}$, дејство \mathbf{e}_{α} на \mathbf{x} је увек могуће заменити дејством елемента дуалног базиса

$$\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{e}^{*\alpha}, \mathbf{x} \rangle = x^{\alpha}. \quad (\text{Б.6})$$

Погледајмо сада шта се догађа у случају кда са \mathbb{R}^n пређемо на бесконачно-димензиони простор функција. Вектори у новом простору су функције f, g, \dots на \mathbb{R} , чије је сабирање и множење константом дефинисано на стандардни начин, а скаларни производ је дат са

$$(f, g) = \int_a^b dx f(x)g(x). \quad (\text{Б.7})$$

Функционал сада дефинишемо као пресликавање са нормираног линеарног простора функција на поље реалних бројева $F : f \mapsto F[f] \in \mathbb{R}$. Код формулисања варијационог принципа кључан је појам промене дејства приликом "мале промене" функције $f(x) \rightarrow f(x) + \delta f(x)$, где је $\delta f(x)$ "инфинитезимално" мала функција која ишчезава на границама интеграције, $\delta f(a) = \delta f(b) = 0$. Слично као и у анализи из \mathbb{R}^n , понашање функционала приликом мале промене његовог аргумента је одређено изводом функционала. По аналогији са (Б.2), каже се да је функционал F диференцијабилан ако важи

$$F[f + \epsilon g] - F[f] = \epsilon DF_f[g] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{Б.8})$$

где је ϵ мали параметар а DF_f је линеаран функционал

$$DF_f[\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 DF_f[g_1] + \alpha_2 DF_f[g_2], \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const}. \quad (\text{Б.9})$$

За функционал $F[f]$ се каже да је стационаран у односу на промену аргумента f ако и само ако је $DF_f = 0$. У случају бесконачно димензионог простора функција, једнакост (Б.6) прелази у

$$f(c) = \langle \delta_c, f \rangle = \int_a^b dx \delta(x - c)f(x), \quad (\text{Б.10})$$

при чему је $\delta(x - a)$ тзв. Диракова δ -функција а δ_a је ознака за Дираков функционал. Слично, једнакост (Б.4) прелази у

$$DF_f[g] \equiv \langle DF_f, g \rangle = \int_a^b dx \frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} g(x) \quad (\text{Б.11})$$

при чему, по аналогији са (Б.5), уводимо варијациони извод

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon \delta_y] - F[f]}{\epsilon}, \quad y \in (a, b) \quad (\text{Б.12})$$

Дефиницију варијационог извода треба допунити још условом да се гранична вредност $\epsilon \rightarrow 0$ узима пре свих других које се могу појавити у посматраном изразу јер се на тај начин осигурава одсуство проблематичних чланова који садрже $[\delta(x-y)]^m$, $m > 1$. У дефиницији (Б.12) је варијација функције f очигледно дата са $\epsilon\delta_y$ и ишчезавање варијације на границама интеграције рефлектује кроз услов $\delta(x-y) = 0$ сваки пут када тачка x припада границама интеграције ($x = a, b$) а y се односи на неку тачку из унутрашњости тог домена, $y \in (a, b)$. У проблемима од физичког интереса је чест и случај када је граница интеграције одређена са $x \rightarrow \pm\infty$. Тада је поново $\delta(x-y) = 0$ за све тачке $-\infty < y < \infty$. Такође, све дефиниције се директно преносе на случај када уместо функција на \mathbb{R} посматрамо функције на \mathbb{R}^k . Тада се уместо интервала (a, b) појављује област интеграције M и варијација ишчезава на свим тачкама границе ∂M .

Пример Б.1. Нека је функционал F дат са

$$f \mapsto F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx (f(x))^2. \quad (\text{Б.13})$$

Тада дефиниција из (Б.12) даје

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(f(x) + \epsilon\delta(x-y))^2 - (f(x))^2 \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(f(x))^2 + 2\epsilon\delta(x-y)f(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) - (f(x))^2 \right] \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y)f(x) = 2f(y). \end{aligned}$$

■

Пример Б.2. Посматрајмо сада функционал G дат са

$$f \mapsto G[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx (f'(x))^2. \quad (\text{Б.14})$$

У општем изразу за функционални извод (Б.12) фигурише варијација функције f , тј. $f + \epsilon\delta_y$. Међутим, функционал G је дефинисан тако да му је аргумент извод функције. Тада се уместо варијације функције, у дефиницији функционалног извода експлицитно појављује $(f + \epsilon\delta_y)'$ и налазимо

$$\frac{\delta G[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(f'(x) + \epsilon\delta'(x-y))^2 - (f'(x))^2 \right], \quad (\text{Б.15})$$

где $'$ означава диференцирање по x . Сада, слично као у претходном примеру, налазимо

$$\frac{\delta G[f]}{\delta f(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx 2f'(x)\delta'(x-y) = 2\langle \delta'_y, f' \rangle. \quad (\text{Б.16})$$

Ако сада применимо парцијалну интеграцију и искористимо чињеницу да варијација мора ишчезавати на границама интеграције, што се у овом случају своди на $f'(x)\delta(x-y)|_{-\infty}^{\infty} = 0$, коначно добијамо

$$\frac{\delta G[f]}{\delta f(y)} = -2f''(y). \quad (\text{Б.17})$$

Напомоњемо да се последњи резултат могао добити и коришћењем релације $\langle \delta'_y, f \rangle = -\langle \delta_y, f' \rangle$; видети, рецимо [Радошевић, С., Мали, П. (2020)]. ■

За операцију извода функционала важе нека добро позната правила обичног калкулуса. На пример, ако је $F[f] = G[f]H[f]$, тада је извод функционала да са

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} = \frac{\delta G[f]}{\delta f(x)} H[f] + G[f] \frac{\delta H[f]}{\delta f(x)}, \quad (\text{Б.18})$$

што се лако показује коришћењем дефиниције (Б.12).

Понекад се извод функционала дефинише и помоћу промењиве, односно функције:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x - y), \quad (\text{Б.19})$$

као одговарајући континуални аналогон релације:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (\text{Б.20})$$

Да би показали како је (Б.19) у складу са (Б.12), може се увести помоћни функционал

$$\tilde{F}[f] = \int dx' \delta(x - x') f(x') \equiv f(x). \quad (\text{Б.21})$$

Примена (Б.12) на (Б.21) даје

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{F}[f]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int dx' \delta(x - x') \left(f(x') + \epsilon \delta(x' - y) \right) - \int dx' \delta(x - x') f(x') \right] \\ &= \int dx' \delta(x - x') \delta(x' - y) = \delta(x - y) = \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}. \end{aligned} \quad (\text{Б.22})$$

Такође, једна карактеристика функционалног извода је показана у (1.140)

$$\frac{\delta(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}))}{\delta\phi(\mathbf{x})} = \nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{Б.23})$$

Пошто је

$$\nabla_{\mathbf{y}} \left(\frac{\delta\phi(\mathbf{y})}{\delta\phi(\mathbf{x})} \right) = \nabla_{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{Б.24})$$

често се каже да функционални и парцијални изводи комутирају.

Иако је дефиниција (Б.12) погодна за практичне примене јер, у комбинацији са одговарајућим варијационим принципом, директно даје једначине кретања и као таква се често користи у физичарској литератури (видети књиге наведене на почетку овог поглавља или [текст](#)). Међутим, пошто f и δ_y не припадају истом векторском простору, операција $f + \delta_y$ није добро дефинисана па самим тим и дефиниција функционалног извода није сасвим коректна. Овај проблем се, наравно, може заобићи. Тачније, могуће је дати коректну дефиницију варијационог извода у којој не фигурише Диракова функција [Olver, P. (2000)]

Дефиниција Б.1. Нека је $F[f]$ функционал дефинисан за неку класу глатких функција f на $M \subset \mathbb{R}^k$. Функционални извод, у ознаци $\delta F/\delta f(\mathbf{x})$, одређен је са

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} F[f + \epsilon\eta] = \int_M d^k \mathbf{x} \frac{\delta F[f(\mathbf{x})]}{\delta f(\mathbf{x})} \eta(\mathbf{x}), \quad (\text{Б.25})$$

а η је глатка функција која ишчезава на граници ∂M .

Наравно, Дефиниција Б.1 даје исте резултате као и једначина (Б.12). Овде ћемо то демонстрирати на већ разматраним примерима.

Пример Б.3. Покажимо да је, за функционале из Примера Б.1 и Б.2, Дефиниција Б.1 еквивалентна са (Б.12). За функционал F из Примера Б.1 имамо

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} F[f + \epsilon\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(f(x) + \epsilon\eta(x) \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x)\eta(x). \quad (\text{Б.26})$$

Поређењем горње једначине и Дефиниције Б.1 директно читамо $\delta F/\delta f(x) = 2f(x)$. При томе смо, у првом кораку, заменили редослед интеграције по x и диференцирања по ϵ . Под претпоставком да су функције које се улазе у израз за функционал глатке, ове операције комутирају [Olver, P. (2000)]. Слично, за функционал из Примера Б.2 налазимо

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} G[f + \epsilon\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(f'(x) + \epsilon\eta'(x) \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} 2f'(x)\eta'(x), \quad (\text{Б.27})$$

при чему $'$ означава диференцирање по x . У преосталом интегралу морамо елиминисати $\eta'(x)$ у корист $\eta(x)$. То можемо постићи парцијалном интеграцијом

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} 2f'(x)\eta'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[f'(x)\eta(x) \right] - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df'(x)}{dx} \eta(x) \\ &= f'(x)\eta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\eta(x). \end{aligned} \quad (\text{Б.28})$$

Пошто је η пробна функција која ишчезава на границама интеграције, први сабирак у (Б.28) отпада и остаје

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} G[f + \epsilon\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-2f''(x) \right] \eta(x), \quad (\text{Б.29})$$

одакле читамо $\delta G/\delta f(x) = -2f''(x)$. ■

Забележимо на крају да се, уз помоћ експлицитног писања варијационог извода, једнакост (Б.8) може записати и као

$$F[f + \epsilon g] = F[f] + \epsilon \int_a^b dx \left. \frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} \right|_{f(x)} g(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{Б.30})$$

што је аналогон апроксимације функције првим чланом из Тејлоровог реда. Наравно, у горњи развој је могуће укључити и чланове вишег реда. Рецимо, следећи је [Altland, A., Simons, B. (2010)]

$$\epsilon^2 \frac{1}{2} \int_{x,y} \frac{\delta^2 F[f]}{\delta f(x) \delta f(y)} \Big|_{f(x)} g(x)g(y), \quad (\text{B.31})$$

при чему је

$$\frac{\delta^2 F[f]}{\delta f(x) \delta f(y)} := \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon_1 \delta_x + \epsilon_2 \delta_y] - F[f + \epsilon_1 \delta_x] - F[f + \epsilon_2 \delta_x y] + F[f]}{\epsilon_1 \epsilon_2}. \quad (\text{B.32})$$

Додатак Ц

Интеграли Гаусовог типа

Интеграли Гаусовог типа представљају различите генерализације основног Гаусовог (или Поасоновог) интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{Ц.1})$$

где је a позитивна реална константа. Генерализације укључују интеграле код којих је a чисто имагинарно, комплексно, као и вишедимензионе интеграле са одговарајућим матричним коефицијентима. Дискутоваћемо их редом. Пре него што детаљније размотримо сложеније интеграле, приметимо да је

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}}. \quad a \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{Ц.2})$$

Овај интеграл се може добити из (Ц.1) свођењем аргумента експоненцијалне функције на потпуни квадрат

$$\frac{a}{2}x^2 - bx = \left(\sqrt{\frac{a}{2}}x - \frac{b}{2}\sqrt{\frac{2}{a}} \right)^2 - \frac{b^2}{2a} \quad (\text{Ц.3})$$

и увођењем смене $x\sqrt{a/2} - b\sqrt{1/(2a)} = y$. Даље излагање углавном прати [Altland, A., Simons, B. (2010); Nakahara, M. (2003); Калопер, Н. (1987); Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)].

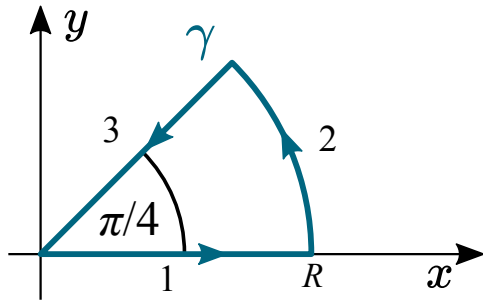
Ц.1 Гаусов интеграл са имагинарним коефицијентом

За почетак, посматрајмо интеграл

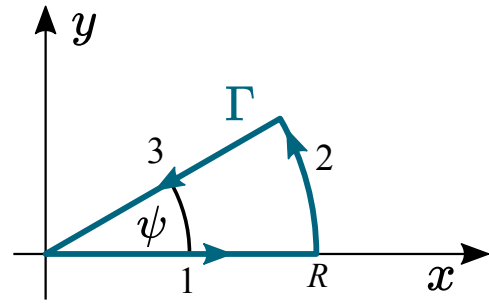
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iax^2}, \quad a \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{Ц.4})$$

Будући да је у овом случају експонент чисто имагинаран, интеграл на први поглед не конвергира. Ипак, могуће га је израчунати разматрањем комплексног интеграла

$$\oint_{\gamma} dz e^{-az^2}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{Ц.5})$$



Слика Ц.1: Контура у комплексној равни коришћена приликом рачунања интеграла (Ц.5)



Слика Ц.2: Контура у комплексној равни коришћена приликом рачунања интеграла (Ц.15)

где је γ контура представљена на Сл. Ц.1. Пошто функција e^{-az^2} нема сингуларитете унутар посматране контуре, нити било где друго, на основу Кошијеве интегралне формуле је [Nakahara, M. (2003); Калопер, Н. (1987)]

$$\oint_{\gamma} = \int_1 + \int_2 + \int_3 = 0, \quad (\text{Ц.6})$$

где смо користили скраћени запис за интеграле по одговарајућим деловима криве γ . Део криве који смо означили са 1 се поклапа са x -осом тако да се промењива z на том делу може параметризовати као $z = x$. То даље значи да је $dz = dx$ па имамо

$$\int_1 = \int_0^R dx e^{-ax^2}. \quad (\text{Ц.7})$$

Даље, за други део контуре узимамо $z = Re^{i\varphi}$, тј. $dz = iR e^{i\varphi} d\varphi$. Пошто је сада $z^2 = R^2 e^{2i\varphi}$, налазимо

$$\int_2 = \int_0^{\pi/4} d\varphi iR e^{i\varphi} \exp[-aR^2 e^{i2\varphi}] = iR \int_0^{\pi/4} d\varphi e^{i\varphi} \exp[-aR^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)]. \quad (\text{Ц.8})$$

Пошто косинусна функција узима позитивне вредности на интервалу $(0, \pi/4)$, при великим вредностима R ће се подинтегрална функција понашати $\sim Re^{-aR^2}$ па важи

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_2 = 0. \quad (\text{Ц.9})$$

Коначно, на трећем делу контуре стављамо $z = \rho e^{i\pi/4}$ и $dz = d\rho e^{i\pi/4}$ па добијамо

$$\int_3 = \int_R^0 d\rho e^{i\pi/4} \exp[-a\rho^2 e^{i\pi/2}] = -e^{i\pi/4} \int_0^R d\rho e^{-ia\rho^2}. \quad (\text{Ц.10})$$

Како једнакост (Ц.6) важи и при $R \rightarrow \infty$, на основу (Ц.7), (Ц.9) и (Ц.10)

$$\sqrt{e^{-i\pi/2}} \int_0^{\infty} dx e^{-ax^2} = \int_0^{\infty} d\rho e^{-ia\rho^2}. \quad (\text{Ц.11})$$

Будући да су и x и ρ реалне величине, увођењем смене $x \rightarrow -x$ у интеграл са леве и смене $\rho \rightarrow -\rho$ у интеграл са десне стране и сабирањем тако добијених интеграла добијамо (уз смену промењиве $\rho \rightarrow x$)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{Ц.12})$$

што је тражена вредност.

Ц.2 Гаусов интеграл са комплексним коефицијентима

У претходном одељку смо нашли вредност Гаусовог интеграла за имагинарну вредност параметра у експоненту. Погледајмо сада како изгледа општи случај, тј. када је параметар a комплексан. Испоставља се да је интеграл могуће израчунати и у овом случају ако је реални део комплексног параметра a већи од нуле. Поступак рачунања је доста сличан претходно описаном, само је избор контуре другачији. Наиме, контуру је потребно изабрати тако да интеграл по кружном луку ишчезне у граничном случају $R \rightarrow \infty$ тако да избор угла који трећи део контуре заклапа са x -осом зависи од вредности комплексног параметра a . Овде ће бити разматран случај када се комплексни параметар налази у првом квадранту, а остале ситуације се могу анализирати сличним поступком. Дефинисаћемо

$$a = be^{i\vartheta} = b(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad 0 < \vartheta < \pi/2, \quad (\text{Ц.13})$$

где је $b > 0$ будући да представља модуо комплексног броја a . Приметићемо да стандардни Гаусов интеграл одговара вредности $\vartheta = 0$ а Гаусов интеграл са имагинарним експонентом се добија за $\vartheta = \pi/2$.

Дакле, да бисмо израчунали интеграл

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}, \quad \operatorname{Re}(a) > 0 \quad (\text{Ц.14})$$

посматраћемо контурни интеграл у комплексној равни

$$\oint_{\Gamma} dz e^{-az^2}, \quad \operatorname{Re}(a) > 0 \quad (\text{Ц.15})$$

где је Γ контура са Сл. Ц.2. Угао ψ ћемо касније изабрати тако да добијемо жељени интеграл. Подинтегрална функција поново нема сингуларитете у области ограниченој контуром Γ , тако да важи

$$\oint_{\Gamma} = \int_1 + \int_2 + \int_3 = 0, \quad (\text{Ц.16})$$

Пошто је први део контуре исти као у претходном случају, одмах можемо писати

$$\int_1 = \int_0^R dx e^{-bx^2} \quad (\text{Ц.17})$$

при чему је сада b комплексни број са позитивним реалним делом. За део контуре означен са 2 поново бирамо параметризацију $z = Re^{i\varphi}$ па налазимо

$$\begin{aligned} \int_2 &= \int_0^\psi d\varphi iRe^{i\varphi} \exp[-aR^2e^{i2\varphi}] \\ &= iR \int_0^\psi d\varphi e^{i\varphi} \exp\left[-bR^2\left(\cos(\vartheta + 2\varphi) + i\sin(\vartheta + 2\varphi)\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{Ц.18})$$

Угао ψ сада можемо одредити наметањем услова

$$\vartheta + 2\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{односно} \quad \psi = \frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}. \quad (\text{Ц.19})$$

Са оваквим избором имамо

$$\vartheta < \vartheta + 2\varphi < \frac{\pi}{2} \quad (\text{Ц.20})$$

тако да је $\cos(\vartheta + 2\varphi) > 0$ на другом делу контуре (подсећамо да смо изабрали тачку a из првог квадранта) па поново важи (Ц.9). За трећи део контуре узимамо $z = \rho e^{i\psi}$ па имамо

$$\begin{aligned} \int_3 &= \int_R^0 d\rho e^{i\psi} \exp[-a\rho^2e^{i2\psi}] = -e^{i\psi} \int_0^R d\rho \exp[-ib\rho^2e^{i(\vartheta+2\psi)}] \\ &= -e^{i\pi/4}e^{i\vartheta/2} \int_0^R d\rho e^{-ib\rho^2}, \end{aligned} \quad (\text{Ц.21})$$

при чему смо искористили (Ц.19). Пуштајући лимес $R \rightarrow \infty$ и понављајући процедуру са краја претходног одељка, налазимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-be^{i\vartheta}x^2\right] = \sqrt{\frac{\pi}{be^{i\vartheta}}}, \quad 0 < \vartheta < \pi/2. \quad (\text{Ц.22})$$

Описани поступак се може поновити и у случају када $a = be^{i\vartheta}$ не лежи у првом квадранту са том разликом да је потребно пажљиво одабрати контуру интеграције. Тако за произвољно комплексно a важи, у општем случају,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2+bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}}, \quad \text{Re}(a) > 0, \quad (\text{Ц.23})$$

при чему b може бити и комплексан параметар (параметри a и b из горњег интеграла *нису* повезани условом (Ц.13)).

Коначно, директна генерализација интеграла (Ц.2) на случај комплексних интеграла се често записује као

$$I_3 = \int d(\bar{z}, z) e^{-\bar{z}\omega z + \bar{u}z + \bar{z}v} = \frac{\pi}{\omega} e^{\frac{\bar{u}v}{\omega}}, \quad \text{Re}(\omega) > 0 \quad (\text{Ц.24})$$

где \bar{z} означава комплексно-конјуговани број за z а интеграције је дефинисана као

$$\int d(\bar{z}, z) e^{-\bar{z}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\text{Re}(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\text{Im}(z), \quad (\text{Ц.25})$$

при чему су u и v два произвољна комплексна броја. Интеграл са комплексин промењивим се користе приликом рачунања интеграла Гаусовог типа изражених помоћу Фуријеових амплитуда [Wilson, K.G. (1975); Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010); Ma, S.K. (2018)].

Ц.3 Вишедимензиони реални интеграли

Први вишедимензиони интеграл који ћемо рачунати је

$$I_4 = \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}}, \quad (\text{Ц.26})$$

при чему смо увели скраћено означавање интеграције по компонентама вектора \mathbf{x} :

$$\int_{\mathbf{x}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx^N \quad (\text{Ц.27})$$

а \mathbf{A} је симетрична несингуларна матрица са позитивним константним коефицијентима

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{Ц.28})$$

Основна идеја рачунања интеграла (Ц.26) је да се он напише у облику производа независних једнодимензионих Гаусових интеграла и да се затим искористи резултат (Ц.1). У том циљу ћемо се подсетити стандардног резултата по којем је симетрична матрица (са реалним коефицијентима) на коначнодимензионом простору увек дијагонализабилна ортогоналном трансформацијом [Милошевић, И. (1997)]. То значи да постоји ортогонална матрица $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$ за коју важи $\mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{D}$, где је \mathbf{D} дијагонална матрица. Конкретно, нека је \mathbf{e}_α својствени проблем матрице \mathbf{A} дат са

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^{(\alpha)} = d_\alpha \mathbf{X}^{(\alpha)} \quad (\text{без суме по } \alpha) \quad (\text{Ц.29})$$

где су d_α својствене вредности а $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ својствени вектори матрице \mathbf{A} ; скуп вектора $\{\mathbf{X}^{(\alpha)}\}$ сачињава један ортонормирани базис у \mathbb{R}^N ($\mathbf{X}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{X}^{(\beta)} \equiv \langle \mathbf{X}^{(\alpha)} | \mathbf{X}^{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$) а $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ је стандардни базис у \mathbb{R}^N (тј. $(\mathbf{e}_\alpha)_\beta = \delta_{\alpha\beta}$). Матрица \mathbf{O} се сада може написати као

$$\mathbf{O} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{X}^{(\alpha)} \equiv \sum_{\alpha} |\mathbf{e}_\alpha\rangle \langle \mathbf{X}^{(\alpha)}|, \quad (\text{Ц.30})$$

тако да је

$$\mathbf{D} = \mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^{-1} = \sum_{\alpha,\beta} |\mathbf{e}_\alpha\rangle \langle \mathbf{X}^{(\alpha)} | \mathbf{A} | \mathbf{X}^{(\beta)} \rangle \langle \mathbf{e}_\beta| = \sum_{\alpha} d_\alpha |\mathbf{e}_\alpha\rangle \langle \mathbf{e}_\alpha|. \quad (\text{Ц.31})$$

Другим речима, $D_{\alpha\beta} = d_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. Такође, лако је видети да је \mathbf{O} ортогонална матрица јер је

$$\mathbf{O}^T \mathbf{O} = \sum_{\alpha,\beta} |\mathbf{e}_\alpha\rangle \langle \mathbf{X}^{(\alpha)} | \mathbf{X}^{(\beta)} \rangle \langle \mathbf{e}_\beta| = \sum_{\alpha} |\mathbf{e}_\alpha\rangle \langle \mathbf{e}_\alpha| = \mathbf{I} \quad (\text{Ц.32})$$

одакле следи да је $|\det \mathbf{O}| = 1$.

Вратимо се сада рачунању интеграла I_4 . Користећи (Ц.32), аргумент експоненцијалне функције из (Ц.24) можемо записати као

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^T \mathbf{O}\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{D}\mathbf{y} = \sum_{\alpha} (y^\alpha)^2 d_\alpha \quad (\text{Ц.33})$$

при чему смо увели ознаку.

$$\mathbf{y} := \mathbf{O}\mathbf{x} \quad (\text{Ц.34})$$

Заправо, релација (Ц.34) се може узети и за смену промењивих у интегралу (Ц.24). Будући да је $|\det \mathbf{O}| = 1$, елемент запремине се не мења при увођењу нових промењивих. Према томе, користећи (Ц.33), имамо

$$I_3 = \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}} = \int_{\mathbf{y}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{D}\mathbf{y}} = \prod_{\alpha=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy^\alpha e^{-\frac{(y^\alpha)^2 d_\alpha}{2}} \right] = \prod_{\alpha=1}^N \left[\sqrt{\frac{2\pi}{d_\alpha}} \right]. \quad (\text{Ц.35})$$

Сада ћемо се подсетити да се детерминанта матрице типа $N \times N$ дефинише као [Радосевић, С., Мали, П. (2020)]

$$\det \mathbf{M} := \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N} M_{1\alpha_1} M_{2\alpha_2} \dots M_{N\alpha_N}, \quad (\text{Ц.36})$$

тако да у случају дијагоналне матрице \mathbf{D} налазимо

$$\det \mathbf{D} = \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N} d_1 \delta_{1\alpha_1} d_2 \delta_{2\alpha_2} \dots d_N \delta_{N\alpha_N} = \epsilon_{12\dots N} d_1 d_2 \dots d_N = d_1 d_2 \dots d_N. \quad (\text{Ц.37})$$

Према томе, резултат (Ц.35) се компактно може записати као

$$I_4 = \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}, \quad (\text{Ц.38})$$

што је тражени резултат. При томе смо искористили да је

$$\det \mathbf{D} = \det [\mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^{-1}] = \det \mathbf{O} \det \mathbf{A} \det \mathbf{O}^T = \det \mathbf{A}. \quad (\text{Ц.39})$$

Приметићемо да је, због претпостављене несингуларности матрице \mathbf{A} , израз (Ц.38) добро дефинисан.

На сличан начин се може израчунати и интеграл

$$I_5 = \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{Ц.40})$$

при чему је \mathbf{b} произвољан (константни) вектор из \mathbb{R}^N . Најпре уводимо нове промењиве орогноалном трансформацијом

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{D}\mathbf{y} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{y}, \quad (\text{Ц.41})$$

где је $\mathbf{B} = \mathbf{O}\mathbf{b}$ а \mathbf{y} и \mathbf{D} су дефинисани раније. Према томе

$$I_5 = \int_{\mathbf{y}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{y}} = \prod_{\alpha=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy^\alpha e^{-\frac{(y^\alpha)^2 d_\alpha}{2} + B_\alpha y^\alpha} \right] = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} \exp \left[\sum_{\alpha} \frac{B_\alpha^2}{2d_\alpha} \right] \quad (\text{Ц.42})$$

где смо искористили и (Ц.2) и (Ц.38). Међутим,

$$\sum_{\alpha} \frac{B_\alpha^2}{d_\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} B^\alpha (d_\alpha)^{-1} \delta_{\alpha\beta} B^\beta = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \quad (\text{Ц.43})$$

јер су $(d_\alpha)^{-1}\delta_{\alpha\beta}$ елементи матрице D^{-1} (пошто је матрица A несингуларна, њене својствене вредности су различите од нуле. Самим тим је и матрица D добро дефинисана). Како из $OA O^{-1} = D$ следи $D^{-1} = OA^{-1}O^{-1}$, налазимо

$$\sum_{\alpha} \frac{B_{\alpha}^2}{d_{\alpha}} = \mathbf{B}^T \cdot D^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{b}^T \cdot O^{-1} O A^{-1} O^{-1} O \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot A^{-1} \mathbf{b}, \quad (\text{Ц.44})$$

тако да (Ц.42) коначно можемо записати као

$$I_5 = \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{x}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \cdot A^{-1} \mathbf{b} \right]. \quad (\text{Ц.45})$$

Израз (Ц.45) је добро дефинисан јер је A несингуларна матрица.

Коначно, преостала је још и генерализација вишедимензионих интеграла на случај матрица са комплексним елементима. Тако, у случају ермитске матрице A имамо интеграл

$$I_6 = \int d(\mathbf{z}^\dagger, \mathbf{z}) e^{-\mathbf{z}^\dagger \cdot A \mathbf{z} + \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}^\dagger \cdot \mathbf{v}} = \frac{\pi^N}{\det A} e^{\mathbf{u}^\dagger \cdot A^{-1} \mathbf{v}} \quad (\text{Ц.46})$$

где су \mathbf{z} , \mathbf{u} и \mathbf{v} N -димензиони вектори са комплексним коефицијентима а интеграција је дефинисана као

$$\int d(\mathbf{z}^\dagger, \mathbf{z}) := \prod_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\text{Re}(z^\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} d\text{Im}(z^\alpha). \quad (\text{Ц.47})$$

Доказ релације (Ц.46), који се заснива на чињеници да је ермитска матрица дијагонализабилна унитарном трансформацијом, врло је сличан доказу решења (Ц.45), односно (Ц.38).

Ц.4 Викова теорема

Ц.4.1 Средње вредности и моменти расподела

У претходном одељку смо видели како се егзактно рачунају одређени интеграли Гаусовог типа. Сада ћемо видети примену тих интеграла на случај када подинтегрална функција Гаусовог типа описује расподелу векторске промењиве. Испоставља се да је у том случају, који представља директну генерализацију добро познате Гаусове расподеле, могуће наћи егзактна решења интеграла који представљају производе компоненти случајног вектора. Овај резултат, познат под називом Викова теорема, представља основу за теорију пертурбација у Лагранжевој, односно Фајнмановој, формулацији физике мноштва интерагујућих честица. Пре него што формулишемо Викову теорему, подсетићемо се неких основних резултата [Zinn – Justin, J. (2007)].

Нека је $\Omega : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ функција расподеле, тј. густина вероватноће. Тада се, за неку величину $F(\mathbf{x})$, средња вредност рачуна као

$$\langle F \rangle := \int_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x}). \quad (\text{Ц.48})$$

Специјално, за $F(\mathbf{x}) = 1$, добијамо тзв. услов нормирања

$$\langle 1 \rangle = \int_{\mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x}) = 1. \quad (\text{Ц.49})$$

Средњу вредност функције $\exp[\mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{x}]$, где је \mathbf{b} константни вектор, називамо генератрисом момената расподеле Ω . Конкретно, нека је

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \langle e^{\mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{x}} \rangle = \int_{\mathbf{x}} e^{\mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x}). \quad (\text{Ц.50})$$

Диференцирањем (Ц.50) по компонентама вектора \mathbf{b} , налазимо моменте расподеле

$$\left. \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_k}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \right|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} = \int_{\mathbf{x}} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k} \Omega(\mathbf{x}) e^{\mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} = \langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k} \rangle \quad (\text{Ц.51})$$

Познавање свих момената $\langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k} \rangle$ омогућава да се, у принципу, одреди средња вредност произвољне величине F . Ако је функција F одређена Тејлоровим редом

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n F(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_n}} F(\mathbf{x}) a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_n}, \quad (\text{Ц.52})$$

тада можемо писати и

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n}, \quad (\text{Ц.53})$$

где су коефицијенти из развоја дефинисани као

$$F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \left. \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_n}} F(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}. \quad (\text{Ц.54})$$

На основу (Ц.53) видимо да се средња вредност од $F(\mathbf{x})$ може изразити помоћу момената расподеле Ω

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle. \quad (\text{Ц.55})$$

Сада из (Ц.51) и (Ц.55) налазимо

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{x}) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &= F\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\right) \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (\text{Ц.56})$$

при чему $F(\partial/\partial \mathbf{b})$ тумачимо као диференцијални оператор, који је у општем случају дефинисан бесконачним редом са коефицијентима (Ц.54).

Пример Ц.1. Нека је функција F дата са $F(\mathbf{x}) = 3(x_1)^2 + 6(x_1)^2(x_3)^4$. Тада имамо

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{x}) \rangle &= F\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\right) \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} = \left[3 \frac{\partial^2}{\partial b_1^2} + 6 \frac{\partial^6}{\partial b_1^2 \partial b_3^4} \right] \int_{\mathbf{x}} e^{\mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &= \int_{\mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x}) [3(x_1)^2 + 6(x_1)^2(x_3)^4] = 3\langle (x_1)^2 \rangle + 6\langle (x_1)^2(x_3)^4 \rangle, \end{aligned}$$

при чему смо искористили дефиницију (Ц.50). ■

Дакле, видимо да се и у једноставном случају функције из Примера Ц.1 појављује члан $\langle (x_1)^2(x_3)^4 \rangle$ који садржи средњу вредност производа 6 компоненти вектора \mathbf{x} . Викова теорема нам, у случају када је функција расподеле Гаусовог типа, даје рецепт за изражавање оваквих средњих вредности *само* помоћу средњих вредности парова компоненти вектора \mathbf{x} .

Ц.4.2 Генералисана Гаусова расподела

Погледајмо сада пажљивије случај у којем је функција расподеле Гаусовог типа:

$$\Omega(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\mathbf{A})} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}} \quad (\text{Ц.57})$$

где је \mathbf{A} симетрична несингуларна матрица са позитивним константним коефицијентима а $\mathcal{Z}(\mathbf{A})$ фактор који обезбеђује нормирање. Знајући за резултат (Ц.38), имамо

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}. \quad (\text{Ц.58})$$

Сада можемо увести и функцију генератрису која зависи од произвољног вектора \mathbf{b} и компоненти симетричне матрице \mathbf{A}

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\mathbf{A})} \int_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{x}} = \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right], \quad (\text{Ц.59})$$

при чему смо искористили (Ц.45) и (Ц.58). Дакле, у случају расподеле Гаусовог типа, рачунање момената се своди на диференцирање експоненцијалне функције

$$\langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k} \rangle = \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_k}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}. \quad (\text{Ц.60})$$

Конкретно,

$$\begin{aligned} \langle x_\alpha \rangle &= \frac{\partial}{\partial b_\alpha} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial b_\alpha} \left[\sum_{\mu, \nu} (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\nu} b_\mu b_\nu \right] \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &= \sum_{\mu} (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\alpha} b_\mu \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{Ц.61})$$

при чему смо користили да је инверзна матрица симетричне матрице и сама симетрична¹. Слично,

$$\begin{aligned} \langle x_\alpha x_\beta \rangle &= \frac{\partial}{\partial b_\alpha} \frac{\partial}{\partial b_\beta} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial b_\beta} \sum_{\mu} (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\alpha} b_\mu \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &+ \sum_{\mu} (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\alpha} b_\mu \frac{\partial}{\partial b_\beta} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &= (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{Ц.62})$$

јер сабирак који садржи члан линеаран по b_μ ишчезава при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Имајући у виду претходно добијене резултате, можемо формулисати и Викову теорему

Теорема Ц.1. Нека је са (Ц.57) дефинисана расподела Гаусовог типа, тако да је функција генератора момената расподеле дата са (Ц.59). Тада су од нуле различити само моменти парног реда и они се свде на суму производа свих могућих средњих вредности $\langle x_\alpha x_\beta \rangle = (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha\beta} \bar{\eta}_j$.

$$\langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle = \sum_{\substack{\text{по свим паровима} \\ \text{из скупа } \{i_1, i_2, \dots, i_n\}}} \langle x_{\alpha_{i_1}} x_{\alpha_{i_2}} \rangle \langle x_{\alpha_{i_3}} x_{\alpha_{i_4}} \rangle \dots \langle x_{\alpha_{i_{n-1}}} x_{\alpha_{i_n}} \rangle. \quad (\text{Ц.63})$$

Доказ. Доказ прати [Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010)] и његова основна идеја је да се пажљиво избаце сви сабирци који након диференцирања по компонентама вектора \mathbf{b} имају чланове пропорционалне b_μ јер они ишчезавају при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Полазећи од (Ц.60), можемо најпре диференцирати по b_{α_1} . Тако добијамо

$$\begin{aligned} \langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle &= \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &= \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_3}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \left\{ \sum_{\mu} (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\alpha_1} b_\mu \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \right\} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (\text{Ц.64})$$

¹Нека је \mathbf{A} симетрична матрица, $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$. Ако је $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, имамо $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^\top = \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{I}$. Из последње једнакости следи $(\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{A}^{-1}$, што значи да је и \mathbf{A}^{-1} симетрична матрица.

Сваки од преосталих извода делује на производ функција: прва је линеарна по компонентама вектора \mathbf{b} а друга је експоненцијална функција. Међутим, сви чланови код којих изводи делују на експоненцијалну функцију ишчезавају при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Одавде видимо да се средња вредност $\langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle$ састоји од $n - 1$ чланова од којих сваки има по $n - 2$ оператора извода

$$\begin{aligned} \langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle &= (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_3}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_4}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_1 \alpha_3} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_4}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} + \dots \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_1 \alpha_n} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_3}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_{n-1}}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (\text{Ц.65})$$

Сконцентришимо се сада на сабирак уз $(\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_1 \alpha_2}$ и означимо га са $S_{\alpha_1 \alpha_2}$. Делујући прво са $\partial/\partial b_{\alpha_3}$, налазимо

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1 \alpha_2} &= \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_3}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_4}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &= \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_4}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_5}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \sum_{\mu} (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \mu} b_{\mu} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (\text{Ц.66})$$

Као и у случају (Ц.65), доприносе различите од нуле налазимо само када изводи по компонентама вектора \mathbf{b} делују на члан пропорционалан са b_{μ} . Тако налазимо да се $S_{\alpha_1 \alpha_2}$ састоји од $n - 3$ сабирка

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1 \alpha_2} &= (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_4} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_5}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_6}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_5} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_4}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_6}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_n}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} + \dots \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_n} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_4}} \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_5}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{\alpha_{n-1}}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right] \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (\text{Ц.67})$$

Овај поступак понављамо све док не "потрошимо" све изводе и тако налазимо да се $S_{\alpha_1 \alpha_2}$ састоји од $(n - 3)(n - 5)(n - 7) \dots 3 \dots 1$ сабирака

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1 \alpha_2} &= (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_4} (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_5 \alpha_6} \dots (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_{n-1} \alpha_n} + (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_4} (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_5 \alpha_7} (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_6 \alpha_6} \dots (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_{n-1} \alpha_n} \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_4} \times \left(\begin{array}{c} \text{чланови са свим осталим спаривањима индекса} \\ \text{из скупа } \{\alpha_5, \alpha_6, \dots, \alpha_n\} \end{array} \right) \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_5} \times \left(\begin{array}{c} \text{чланови са свим спаривањима индекса} \\ \text{из скупа } \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots, \alpha_n\} \end{array} \right) \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_3 \alpha_n} \times \left(\begin{array}{c} \text{чланови са свим спаривањима индекса} \\ \text{из скупа } \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots, \alpha_{n-1}\} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{Ц.68})$$

Сабирака типа $S_{\alpha_1\alpha_2}$ у (Ц.65) има $(n-1)$ и њихов збир даје

$$\begin{aligned} \langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle &= (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_1\alpha_2} \times \left(\begin{array}{c} \text{чланови са свим спаривањима индекса} \\ \text{из скупа } \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n\} \end{array} \right) \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_1\alpha_3} \times \left(\begin{array}{c} \text{чланови са свим спаривањима индекса} \\ \text{из скупа } \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n\} \end{array} \right) + \dots \\ &+ (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_1\alpha_n} \times \left(\begin{array}{c} \text{чланови са свим спаривањима индекса} \\ \text{из скупа } \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1}\} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{Ц.69})$$

Укупан број сабирака је $(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)\dots 3 \cdot 1 = (n-1)!!$ што је баш једнако укупном броју свих могућих спаривања n објеката. Другим речима,

$$\langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle = \sum_{\substack{\text{по свим паровима} \\ \text{из скупа } \{i_1, i_2, \dots, i_n\}}} (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}} (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_{i_3}\alpha_{i_4}} \dots (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha_{i_{n-1}}\alpha_{i_n}}, \quad (\text{Ц.70})$$

чиме је доказ завршен. ■

Погледајмо сада два основна примера примене Викове теореме

Пример Ц.2. Средња вредност која се састоји од производа четири компоненте вектора \mathbf{x} се факторише као

$$\langle x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta \rangle = \langle x_\alpha x_\beta \rangle \langle x_\gamma x_\delta \rangle + \langle x_\alpha x_\gamma \rangle \langle x_\beta x_\delta \rangle + \langle x_\alpha x_\delta \rangle \langle x_\beta x_\gamma \rangle. \quad (\text{Ц.71})$$

При томе, три сабирка долазе од $(4-1)!! = 3$. У случају производа 6 компоненти вектора \mathbf{x} , имамо $(6-1)!! = 15$ сабирака. Они се формално могу написати као

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \rangle &= \langle x_1 x_2 \rangle \left(\langle x_3 x_4 \rangle \langle x_5 x_6 \rangle + \langle x_3 x_5 \rangle \langle x_4 x_6 \rangle + \langle x_3 x_6 \rangle \langle x_4 x_5 \rangle \right) \\ &+ \langle x_1 x_3 \rangle \left(\langle x_2 x_4 \rangle \langle x_5 x_6 \rangle + \langle x_2 x_5 \rangle \langle x_3 x_6 \rangle + \langle x_2 x_6 \rangle \langle x_4 x_5 \rangle \right) \\ &+ \langle x_1 x_4 \rangle \left(\langle x_2 x_3 \rangle \langle x_5 x_6 \rangle + \langle x_2 x_5 \rangle \langle x_3 x_6 \rangle + \langle x_2 x_6 \rangle \langle x_3 x_5 \rangle \right) \\ &+ \langle x_1 x_5 \rangle \left(\langle x_2 x_3 \rangle \langle x_4 x_6 \rangle + \langle x_2 x_4 \rangle \langle x_3 x_6 \rangle + \langle x_2 x_6 \rangle \langle x_4 x_5 \rangle \right) \\ &+ \langle x_1 x_6 \rangle \left(\langle x_2 x_3 \rangle \langle x_4 x_5 \rangle + \langle x_2 x_4 \rangle \langle x_3 x_5 \rangle + \langle x_2 x_5 \rangle \langle x_4 x_6 \rangle \right), \end{aligned} \quad (\text{Ц.72})$$

при чему смо, ради прегледности, користили скраћени запис $x_{\alpha_i} \equiv x_i$. ■

Доказ за случај Гаусове расподеле са ермитском матрицом \mathbf{A} прескачемо и наводимо крајњи резултат [Altland, A., Simons, B. (2010)]

Теорема Ц.2. Нека је са расподела Гаусовој \bar{z} и \bar{z}^\dagger са

$$\Omega(\mathbf{A}) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\mathbf{A})} \exp[-\bar{z}^\dagger \cdot \mathbf{A} \mathbf{z}], \quad \mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \int d(\bar{z}^\dagger, \mathbf{z}) \exp[-\bar{z}^\dagger \cdot \mathbf{A} \mathbf{z}] = \frac{\pi^N}{\det \mathbf{A}}, \quad (\text{Ц.73})$$

где је \mathbf{A} ермитска матрица а генераториса момената расподеле је

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^\dagger, \mathbf{v}) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\mathbf{A})} \int d(\bar{z}^\dagger, \mathbf{z}) e^{-\bar{z}^\dagger \cdot \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{z} + \bar{z}^\dagger \cdot \mathbf{v}} = e^{\mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}}. \quad (\text{Ц.74})$$

Тага је

$$\langle \bar{z}_{\alpha_1} \bar{z}_{\alpha_2} \dots \bar{z}_{\alpha_n} z_{\beta_1} z_{\beta_2} \dots z_{\beta_n} \rangle = \sum_{\substack{\text{по свим пермутацијама} \\ \text{из скупа } \{i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n\}}} \langle \bar{z}_{\alpha_{i_1}} z_{\beta_{j_1}} \rangle \langle \bar{z}_{\alpha_{i_2}} z_{\beta_{j_2}} \rangle \dots \langle \bar{z}_{\alpha_{i_n}} z_{\beta_{j_n}} \rangle. \quad (\text{II.75})$$

При томе је

$$\langle \bar{z}_{\alpha} z_{\beta} \rangle = (\mathbf{A}^{-1})_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.76})$$

Додатак Д

Лијеве групе и алгебре

Теорија Лијевих група игра важну улогу у класичној и квантној теорији поља. На овом месту дајемо само неке основне чињенице потребне за доказ Голдстонове теореме. Више детаља и примера се може наћи у [Isham, C. (1999); Arvanitoyeorgos, A. (2003); Fecko, M. (2006); Hilgert, J., Neeb, K.H. (2011); Sternberg, S. (1964); Hall, B. (2015); Радошевић, С., Мали, П. (2020)]. У општем случају, Лијева група је диференцијабилна многострукост која има додатну структуру групе. Ипак, на овом месту нећемо улазити у детаље теорије већ ће излагање бити ограничено на матричне Лијеве групе. За почетак, дајемо дефиницију генералне линеарне групе над Пољем \mathbb{F} .

Дефиниција Д.1. Генерална (или општа) линеарна група над пољем \mathbb{F} , у ознаци, $GL(N, \mathbb{F})$, преставаља скуп инвертибилних матрица типа $N \times N$ таквих да су матрични елементи из поља \mathbb{F} .

Такође, под низом у $GL(N, \mathbb{C})$ подразумевамо низ матрица $\{A_m\}$, одређен низом одговарајућих матричних елемената $\{(A_m)_{\alpha\beta}\}$ где $\alpha, \beta = 1, 2 \dots N$. Сада можемо дефинисати и матричну Лијеву групу:

Дефиниција Д.2. Матрична Лијева група G је подгрупа од $GL(N, \mathbb{C})$ тако да важи следеће: ако је $\{A_k\}$ низ матрица у G и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \tag{Д.1}$$

тада $A \in G$ или A није инвертибилна матрица. При томе је гранична вредност матрице одређена помоћу граничне вредности матричних елемената $\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k)_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}$.

Под (реалном) димензијом Лијеве групе подразумевамо број независних реалних параметара који у потпуности одређују дату матрицу. Рецимо, $\dim[GL(N, \mathbb{R})] = N^2$ и $\dim[GL(N, \mathbb{C})] = 2N^2$.

Основни примери матричних Лијевих група су:

1. Специјална линеарна група

$$SL(N, \mathbb{R}) = \{A \in GL(N, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}, \quad \dim[SL(N, \mathbb{R})] = N^2 - 1 \tag{Д.2}$$

2. Унитарна група

$$U(N) = \{A \in GL(N, \mathbb{C}) \mid A^\dagger A = AA^\dagger = I\}, \quad \dim[U(N)] = N^2 \tag{Д.3}$$

3. Ортогонална група

$$O(N) = \{A \in GL(N, \mathbb{R}) \mid A^T A = A A^T = I\}, \quad \dim[O(N)] = \frac{N(N-1)}{2} \quad (\text{Д.4})$$

4. Специјална унитарна група

$$SU(N) = \{A \in U(N) \mid \det A = 1\}, \quad \dim[SU(N)] = N^2 - 1 \quad (\text{Д.5})$$

5. Специјална ортогонална група

$$SO(N) = \{A \in O(N) \mid \det A = 1\}, \quad \dim[SO(N)] = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (\text{Д.6})$$

Следећи битан појам је Лијева алгебра:

Дефиниција Д.3. Лијева алгебра је векторски простор (у ознаци \mathfrak{g}) над пољем \mathbb{F} у којем је уведена додатна операција $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ која задовољава три услова ($\alpha, \beta \in \mathbb{F}$)

1. $[\cdot, \cdot]$ је билинеарна, тј. $[\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = \alpha[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + \beta[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]$, $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{g}$. Слична релација важи и за линеарну комбинацију на месту друге променљиве
2. $[\cdot, \cdot]$ је антисиметрична, тј. $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$, $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{g}$
3. Важи Јакобијев идентитет: $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]] = 0$, $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{g}$.

Димензија Лијеве алгебре је димензија одговарајућег векторског простора. Веза између Лијеве групе G и одговарајуће алгебре \mathfrak{g} је дата експоненцијалним пресликавањем (видети [Hall, В. (2015); Радошевић, С., Мали, П. (2020)] за особине матричне експоненцијалне функције и примере везане за конкретне групе и алгебре):

Дефиниција Д.4. Нека је G матрична Лијева група. Тада Лијеву алгебру Лијеве Групе G , у ознаци \mathfrak{g} , дефинишемо као скуп свих матрица \mathbf{X} таквих да $\exp(t\mathbf{X}) \in G$ за реалан параметар t .

На основу ове дефиниције се показује да је

1. $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{F}) = M(N, \mathbb{F})$, $\dim[\mathfrak{gl}(N, \mathbb{F})] = \dim[GL(N, \mathbb{F})]$,
2. $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R}) = \{\mathbf{X} \in M(N, \mathbb{R}) \mid \text{Tr} \mathbf{X} = 0\}$, $\dim[\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})] = \dim[SL(N, \mathbb{R})] = N^2 - 1$,
3. $\mathfrak{o}(N) = \{\mathbf{X} \in M(N, \mathbb{R}) \mid \mathbf{X}^T = -\mathbf{X}\}$, $\dim[\mathfrak{o}(N)] = \dim[O(N)] = \frac{N(N-1)}{2}$,
4. $\mathfrak{u}(N) = \{\mathbf{X} \in M_N(\mathbb{R}) \mid \mathbf{X}^\dagger = -\mathbf{X}\}$, $\dim[\mathfrak{u}(N)] = \dim[U(N)] = N^2$
5. $\mathfrak{so}(N) = \mathfrak{o}(N)$,
6. $\mathfrak{su}(N) = \{\mathbf{X} \in M(N, \mathbb{R}) \mid \mathbf{X}^\dagger = -\mathbf{X} \wedge \text{Tr} \mathbf{X} = 0\}$, $\dim[\mathfrak{su}(N)] = \dim[SU(N)] = N^2 - 1$,

где је $M(N, \mathbb{R})$ скуп матрица типа $N \times N$ над пољем \mathbb{R} . За наведене примере је $\dim[G] = \dim[\mathfrak{g}]$ а испоставља се да та релација важи и у општем случају Лијеве групе и одговарајуће Лијеве алгебре. Некада је корисно дефинисати везу између Лијеве групе и одговарајуће алгебре тако да су генератори репрезентовани ермитским операторима. У том случају је $\exp(it\mathbf{X}) \in G$, за $\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}$ и реалан параметар t [Видети, рецимо Радошевић, С., Мали, П. (2020)].

Коначно, наводимо и основне резултате везане за Лијеве подгрупе и подалгебре.

Теорема Д.1. Нека је G Лијева група (са Лијевом алгебром \mathfrak{g}) и нека је H затворени подскуп (у смислу диференцијабилне многострукости) од G који је у алгебарском смислу подгрупа. Тада H има структуру Лијеве групе (тј. H је Лијева подгрупа групе G). Ако је \mathfrak{h} Лијева алгебра групе H , тада је \mathfrak{h} подалгебра од \mathfrak{g} .

За примену Лијевих група и алгебри на различите моделе који се користе у физици, важну улогу има теорија репрезентација.

Дефиниција Д.5. Репрезентација групе G је хомоморфизам са групе G на групу линеарних оператора који делују на неком векторском простору V .

Практично, репрезентација групе G обезбеђује скуп матрица које имплементирају одговарајуће трансформације на простору векторских величина (које су често динамички елементи физичких теорија). Рецимо, у Глави 2 је дискутован $O(N)$ модел код којег су степени слободе компоненте N димензионог векторског поља. Иако се векторски простори често појављују као простори у којима физичке величине узимају вредности, то није једина могућност. На пример, у случају нелинеарног σ модела је простор могућих стања G/H [Weinberg, S. (2010)]. По дефиницији, G/H је простор тачака

$$G/H := \{gH | g \in G\} \quad (\text{Д.7})$$

уз

$$gH = \{g \sim g \circ h | h \in H\}, \quad (\text{Д.8})$$

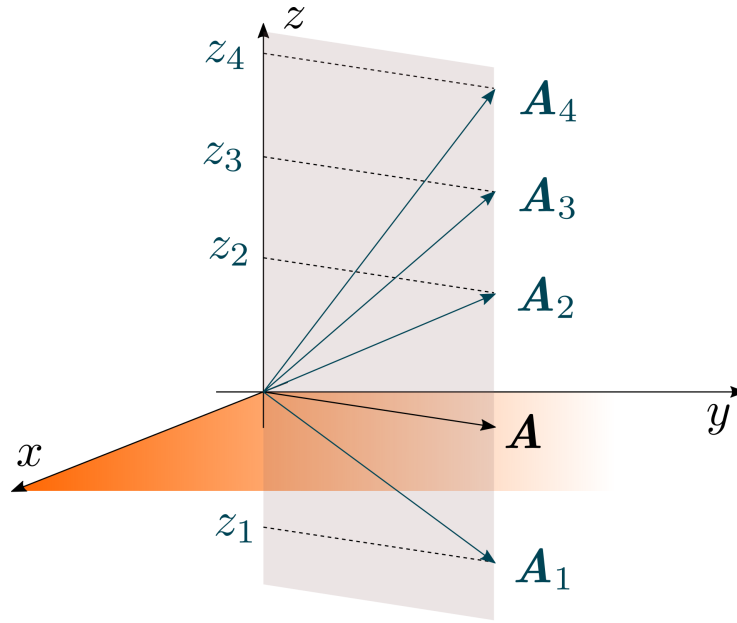
симбол \circ је бинарна операција у G а \sim означава идентификацију два елемента у G који се разликују до на множење елементом из $H \subseteq G$. Ако је G Лијева група а H затворена подгрупа од H , простору G/H (који се назива хомогени простор) се може придружити структура диференцијабилне многострукости¹

Дефиниција Д.6. Дејство (са леве стране) Лијеве групе G на диференцијабилну многострукост M је пресликавање $\sigma : G \times M \rightarrow M$ које задовољава

1. $\sigma(e, p) = p, \forall p \in M,$
2. $\sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 \circ g_2, p)$

где је e јединични елемент у G .

¹Грубо говорећи, диференцијабилна многострукост је простор који локално изгледа као \mathbb{R}^N . Детаљи се могу наћи у књигама наведеним у овом Прилогу.



Слика Д.1: Шематски приказ класе сквиваленције $\mathbf{A} + U$, где је U потпростор од \mathbb{R}^3 генерисан ортом \mathbf{e}_z : $\mathbf{A}_i = \mathbf{A} + z_i \mathbf{e}_z$ за $i = 1, 2, 3, 4$.

Уколико се за сваке две тачке $p_1, p_2 \in M$ може пронаћи $g \in G$ тако да важи $p_2 = \sigma(g, p_1)$, кажемо да је дејство транзитивно. Показује се да у случају транзитивног левог дејства Лијеве групе G на многострукост M важи $M \cong G/H$, где H представља групу трансформација које остављају $p \in M$ инваријантним. Познат пример је транзитивно дејство групе $O(N)$ на $S^N \cong O(N)/O(N-1)$ [Видети Nakahara, M. (2003); Isham, C. (1999); Fecko, M. (2006)].

Нека су u^A координатне функције на G/H . Тада је $\pi^A = u^A \circ \pi$ компонентна репрезентација Голдстоновог поља, $\pi : M \rightarrow G/H$, при чему је M ознака за просторвреме дате теорије. Килингова векторска поља на G/H се тада могу записати као $\mathbf{h}_i = h_i^A \mathbf{e}_A$, где је $\{\mathbf{e}_A = \partial/\partial u^A\}$ локални базис векторских поља. Слично, метрички тензор се може записати као $G_{AB} du^A \otimes du^B$, при чему је $\{du^A\}$ дуални базис у смислу $du^A(\partial/\partial u^B) = \delta_B^A$ [Видети, рецимо Isham, C. (1999); Fecko, M. (2006); Nakahara, M. (2003)].

На сличан начин се може дефинисати и простор V/U , где је V векторски простор а U његов потпростор. За почетак, дефинишемо класу еквиваленције

$$x + U := \{x + u | u \in U\} \quad (\text{Д.9})$$

као скуп вектора из V који који се разликују до на произвољни елемент потпростора U . Простор V/U је скуп

$$V/U := \{x + U | x \in V\}. \quad (\text{Д.10})$$

Према томе, простор V/U се ефективно добија од V тако што се цео потпростор U замени нула-вектором. Испоставља се да V/U има структуру векторског простора тако да је $\mathbb{R}^{n+m}/\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ [видети, рецимо, Axler, S. (2015)].

Као пример ове конструкције узмимо простор \mathbb{R}^3 и потпростор \mathbb{R} који је генерисан ортом \mathbf{e}_z . На Сл. Д.1 су приказани вектори $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_4$ који припадају једној класи

еквиваленције, јер се разликују до на вектор облика $z_i e_z$. За представника ове класе узимамо \mathbf{A} који лежи у $x - y$ равни тако да је $\mathbb{R}^3/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$. Пошто важе изоморфизми векторских простора $\mathfrak{o}(3) \cong \mathbb{R}^3$ и $\mathfrak{o}(2) \cong \mathbb{R}$, видимо да је $\mathfrak{o}(3)/\mathfrak{o}(2) \cong \mathbb{R}^2$, што је коришћено на више места у тексту.

Литература

- Abrikosov, A., Gorkov, L., Dzyaloshinski, I. (1963). *Methods of quantum field theory in Statistical Physics*. Dover Publications.
- Alet, F., Wessel, S., Troyer, M. (2005). [Generalized Directed Loop Method for Quantum Monte Carlo Simulations](#). *Physical Review E*, **71**, 036706.
- Altland, A., Simons, B. (2010). *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press.
- Andersen, J.O., Brauner, T., Hofmann, C.P., Vuorinen, A. (2014). [Effective Lagrangians for Quantum Many – Body Systems](#). *Journal of High Energy Physics*, **2014**, 1.
- Anderson, P.W. (1952). [An Approximate Quantum Theory of the Antiferromagnetic Ground State](#). *Physical Review*, **86**, 694.
- Anderson, P.W. (1984). *Basic Notions of Condensed Matter Physics*. The Benjamin/Cummings Publishing Company.
- Arodz, H., Hadasz, L. (2010). *Lectures on Classical and Quantum Theory of Fields*. Springer.
- Arvanitoyeorgos, A. (2003). *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*. American Mathematical Society.
- Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976). *Solid State Physics*. Brooks Cole.
- Auerbach, A. (2012). *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Springer.
- Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right*. Springer.
- Bauer, B. et al. (2011). [The ALPS Project Release 2.0 : Open Source Software for Strongly Correlated Systems](#). *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2011(05), П05001.
- Beekman, A.J., Rademaker, L., van Wezel, J. (2019). [An Introduction to Spontaneous Symmetry Breaking](#). *SciPost Physics Lecture Notes*, **11**.
- Binder, K., Luijten, E. (2001). [Monte Carlo Tests of Renormalization – Group Predictions for Critical Phenomena in Ising Models](#). *Physics Reports*, **344**(4), 179.

- Brauner, T. (2010). [Spontaneous Symmetry Breaking and Nambu – Goldstone Bosons in Quantum Many – Body Systems](#). *Symmetry*, **2**, 609.
- Brauner, T., Jakobsen, M.F. (2018). [Scattering Amplitudes of Massive Nambu–Goldstone Bosons](#). *Physical Review D*, **97**, 025021.
- Burgess, C.P. (2020). *Introduction to Effective Field Theory*. Cambridge University Press.
- Burgess, C.P. (2000). [Goldstone and Pseudo – Goldstone Bosons in Nuclear, Particle and Condensed – Matter Physics](#). *Physics Reports*, **330**, 193.
- Capitani, S. (2003). [Lattice Perturbation Theory](#). *Physics Reports*, **382**, 113.
- Cheng, T.P., Li, L.F. (2000). *Gauge Theory of Elementary Particle Physics – Problems and Solutions*. Oxford University Press.
- Chow, C.K. (1999). [Discretization Errors and Rotational Symmetry : the Laplacian Operator on non – Hypercubical Lattices](#). *Nuclear Physics B*, **547**, 281.
- Coleman, S. (1973). [There are no Goldstone Bosons in Two Dimensions](#). *Communications in Mathematical Physics*, **31**, 259.
- Colussi, V., Wickramasekara, S. (2008). [Galilean and U\(1\) – Gauge Symmetry of the Schrödinger Field](#). *Annals of Physics*, **323**, 3020.
- Elizalde, E. (2008). *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*. Springer.
- Fazekas, P. (1999). *Lecture Notes on Electron Correlation and Magnetism*. World Scientific.
- Fecko, M. (2006). *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press.
- Fetter, A., Walecka, J. (1971). *Quantum Theory of Many – Particle Systems*. McGraw – Hill.
- Feynman, R.P. (1973). *Statistical Mechanics : a Set of Lectures*. W.A. Benjamin Press.
- Fradkin, E. (2013). *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press.
- Fröbrich, P., Kuntz, P.J. (2006). [Many – Body Green's Function Theory of Heisenberg Films](#). *Physics Reports*, **432**, 223.
- Garbaczewski, P. (1978). [The Method of Boson Expansions in Quantum Theory](#). *Physics Reports*, **36**, 65.
- Gombar, S., Mali, P., Pantić, M., Pavkov – Hrvojević, M.V., Radošević, S.M. (2018). [Dynamics of Frenkel Excitons in Pentacene](#). *Materials*, **11**(11).

- Gongyo, S., Kikuchi, Y., Hyodo, T., Kunihiro, T. (2016). [Effective Field Theory and the Scattering Process for Magnons in Ferromagnets, Antiferromagnets and Ferrimagnets.](#) *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, **2016**.
- Greiner, W. (1996). *Field Quantization*. Springer.
- Greiter, M. (2005). [Is Electromagnetic Gauge Invariance Spontaneously Violated in Superconductors?](#). *Annals of Physics*, **319**, 217.
- Gross, D. (1996). [The Role of Symmetry in Fundamental Physics.](#) *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **93**, 14256.
- Guralnik, G., Hagen, R., Kibble, T. (1968). [Broken Symmetries and the Goldstone Theorem.](#) *Advances in Particle Physics*, **2**, 567.
- Haldane, F.D.M. (1986). [Geometrical Interpretation of Momentum and Crystal Momentum of Classical and Quantum Ferromagnetic Heisenberg Chains.](#) *Physical Review Letters*, **57**, 1488–1491.
- Hall, B. (2015). *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*. Springer.
- Herbut, I. (2007). *A Modern Approach to Critical Phenomena*. Cambridge University Press.
- Hilgert, J., Neeb, K.H. (2011). *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer.
- Hofmann, C.P. (1999a). [Еффецтиве анализис оф тхе О \(Н\) антиферромагнет: Лоя-температуре експансион оф тхе ордер параметер.](#) *Physical Review B*, **60**, 406.
- Hofmann, C.P. (1999b). [Effective Analysis of the O\(N\) Antiferromagnet : Low Temperature Expansion of the Order Parameter.](#) *Physical Review B*, **60**, 406.
- Hofmann, C.P. (1999). [Spin – Wave Scattering in the Effective Lagrangian Perspective.](#) *Physical Review B*, **60**, 388.
- Hofmann, C.P. (2010). [Thermodynamics of O\(N\) Antiferromagnets in 2 + 1 Dimensions.](#) *Physical Review B*, **81**, 014416.
- Hofmann, C.P. (2011). [Spontaneous Magnetization of an Ideal Ferromagnet : Beyond Dyson's Analysis.](#) *Physical Review B*, **84**, 064414.
- Hohenberg, P.C. (1967). [Existence of Long – Range Order in One and Two Dimensions.](#) *Physical Review*, **158**, 383.
- Hohenberg, P.C., Krekhov, A.P. (2015). [An introduction to the Ginzburg – Landau Theory of Phase Transitions and Nonequilibrium Patterns.](#) *Physics Reports*, **572**, 1.
- Honerkamp, J. (1972). [Chiral Multi – Loops.](#) *Nuclear Physics B*, **36**, 130.
- Huang, K. (1987). *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons.
- Isham, C. (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*. WorldScientific.

- Jones, W., March, N. (1973). *Theoretical Solid State Physics, Vol 1 and Vol 2*. Dover Publications.
- Kapor, D., Pantić, M., Škrinjar, M., Pavkov, M., Radošević, S., Rutonjski, M. (2007). [Boson Green's Functions Treatment of Three – Layer Ferrimagnetic Superlattice](#). *physica status solidi (b)*, **243**, 3750.
- Kämpfer, F., Moser, M., Wiese, U.J. (2005). [Systematic Low – Energy Effective Theory for Magnons and Charge Carriers in an Antiferromagnet](#). *Nuclear Physics B*, **729**(3), 317.
- Kogut, J.B. (1979). [An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems](#). *Reviews of Modern Physics*, **51**, 659.
- Kopietz, P., Bartosh, L., Schütz, B. (2010). *Introduction to the Functional Renormalization Group*. Springer.
- Lévy, L.P. (2000). *Magnetism and Superconductivity*. Springer.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M. (2013). *Course of Theoretical Physics – Mechanics*. Pergamon.
- Leutwyler, H. (1994). [Nonrelativistic Effective Lagrangians](#). *Physical Review D*, **49**, 3033.
- Leutwyler, H. (1994). [On the Foundations of Chiral Perturbation Theory](#). *Annals of Physics*, **235**, 165.
- Ma, S.K. (2018). *Modern Theory of Critical Phenomena*. Routledge.
- Mahan, G.D. (2000). *Many – Particle Physics*. Kluwer Academic/Plenum Publishers.
- Manojlović, M., Pavkov, M., Škrinjar, M., Pantić, M., Kapor, D., Stojanović, S. (2003). [Spin – Wave Dispersion and Transition Temperature in the Cuprate Antiferromagnet \$\text{La}_2\text{CuO}_4\$](#) . *Пъсницал Ревиея Б*, **68**, 014435.
- Manousakis, E. (1991). [The Spin – \$\frac{1}{2}\$ Heisenberg Antiferromagnet on a Square Lattice and its Application to the Cuprous Oxides](#). *Reviews of Modern Physics*, **63**, 1.
- McKane, A., Stone, M. (1980). [Non – Linear \$\sigma\$ Models : A Perturbative Approach to Symmetry Restoration](#). *Nuclear Physics B*, **163**, 169.
- Mermin, ND. (1967). [Absence of Ordering in Certain Classical Systems](#). *Journal of Mathematical Physics*, **8**, 1061.
- Mermin, N.D., Wagner, H. (1966). [Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One – or Two – Dimensional Isotropic Heisenberg Models](#). *Physical Review Letters*, **17**, 1133.
- Nair, V.P. (2005). *Quantum Field Theory – A Modern Perspective*. Springer.
- Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics.

- Nambu, Y. (2004). [Spontaneous Breaking of Lie and Current Algebras](#). *Journal of Statistical Physics*, **115**, 7.
- Negle, J.W., Orland, H. (1998). *Quantum Many – particle Systems*. Westview Press.
- Nolting, W., Ramakanth, A. (2009). *Quantum Theory of Magnetism*. Springer.
- Oguchi, T. (1960). [Theory of Spin – Wave Interactions in Ferro – and Antiferromagnetism](#). *Physical Review*, **117**, 117.
- Oitmaa, J., Hamer, C.J., Zheng, W. (1994). [Heisenberg Antiferromagnet and the XY Model at \$T = 0\$ in Three Dimensions](#). *Physical Review B*, **50**, 3877.
- Olver, P. (2000). *Application of Lie Groups to Differential Equations*. Springer.
- Pelissetto, A. Vicari, E. (2002). [Critical Phenomena and Genormalization – Group Theory](#). *Physics Reports*, **368**, 549.
- Peskin, M.E., Schroeder, D.V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview.
- Preis, T., Virnau, P., Paul, W., Schneider, J. (2009). [GPU Accelerated Monte Carlo Simulation of the 2D and 3D Ising Model](#). *Journal of Computational Physics*, **228**(12), 4468.
- Radošević, S., Pavkov – Hrvojević, M., Pantić, M., Rutonjski, M., Kapor, D., Škrinjar, M. (2009). [Magnetic Properties of quasi Two – Dimensional Antiferromagnet \$\text{Rb}_2\text{MnCl}_4\$ with XXZ Interaction Anisotropy](#). *European Physical Journal B*, **68**, 511.
- Radošević, S., Rutonjski, M., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M., Kapor, D., Škrinjar, M.G. (2011). [The Néel Temperature of a D – dimensional bcc Heisenberg Antiferromagnet](#). *Solid State Communications*, **151**, 1753.
- Radošević, S., Pantić, M., Kapor, D., Pavkov – Hrvojević, M., Škrinjar, M. (2010). [Evaluation of Watson – Like Integrals for a Hyper bcc Antiferromagnetic Lattice](#). *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, **43**, 155206.
- Radošević, S.M. (2015). [Magnon – Magnon Interactions in O\(3\) Ferromagnets and Equations of Motion for Spin Operators](#). *Annals of Physics*, **362**, 336.
- Radošević, S.M., Pantić M.R., Pavkov – Hrvojević, M.V., Kapor, D.V. (2013). [Magnon Energy Renormalization and low – Temperature Thermodynamics of O\(3\) Heisenberg Ferromagnets](#). *Annals of Physics*, **339**, 382.
- Rutonjski, M., Radošević, S., Škrinjar, M., Pavkov – Hrvojević, M., Kapor, D., Pantić, M. (2007). [Temperature Dependence of Sublattice Magnetization in Quasi Two Dimensional \$S = \frac{1}{2}\$ Cuprate Antiferromagnets : Green’s Function Approach](#). *Physical Review B*, **76**, 172506.
- Ryder, L.H. (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.

- Sandvik, A.W. (1997). [Finite – Size Scaling of the Ground – State Parameters of the two Dimensional Heisenberg Model](#). *Physical Review B*, **56**, 11678.
- Sandvik, A.W. (1998). [Critical Temperature and the Transition from Quantum to Classical Order Parameter Fluctuations in the Three – Dimensional Heisenberg Antiferromagnet](#). *Physical Review Letters*, **80**, 5196.
- Scheck, F. (2018). *Classical Field Theory*. Springer.
- Schultz, T.D., Mattis, D.C., Lieb, E.H. (1964). [Two – Dimensional Ising Model as a Soluble Problem of Many Fermions](#). *Reviews of Modern Physics*, **36**, 856.
- Srednicki, M. (2007). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- Stanley, H.E. (1971). *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Clarendon Press, Oxford.
- Sternberg, S. (1964). *Lectures on Differential Geometry*. Prentice – Hall, inc.
- Stone M., Goldbart, P. (2009). *Mathematics for Physics*. Cambridge University Press.
- Strocchi, F. (2005). *Symmetry Breaking*. Springer.
- Syromyatnikov, A.V. (2010). [Spectrum of Short – Wavelength Magnons in a Two Dimensional Quantum Heisenberg Antiferromagnet on a Square Lattice : Third – Order Expansion in \$1/S\$](#) . *Journal of Physics : Condensed Matter*, 22(21), 216003.
- Tasaki, H. (2019). [Long – Range Order, Tower of States and Symmetry Breaking in Lattice Quantum Systems](#). *Journal of Statistical Physics*, **174**, 735.
- Troyer, M., Wessel, S., Alet, F. (2003). [Flat Histogram Methods for Quantum Systems : Algorithms to Overcome Tunneling Problems and Calculate the Free Energy](#). *Physical Review Letters*, **90**, 120201.
- Tsvetlik, A.M. (2003). *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press.
- Umantsev, A. (2012). *Field Theoretic Method in Phase Transformations*. Springer.
- Utkarsh B., Suresh, A., Nikolić, B.K. (2021). [Quantum Many – Body States and Green’s Functions of Nonequilibrium Electron – Magnon Systems : Localized Spin Operators versus Their Mapping to Holstein – Primakoff Bosons](#). *Physical Review B*, **104**, 184425.
- Wang, F., Landau, D.P. (2001). [Efficient, Multiple – Range Random Walk Algorithm to Calculate the Density of States](#). *Physical Review Letters*, **86**, 2050.
- Watanabe, H., Brauner, T., Murayama, H. (2013). [Massive Nambu – Goldstone Bosons](#). *Physical Review Letters*, **111**, 021601.
- Watanabe, H., Murayama, H. (2012). [Unified Description of Nambu – Goldstone Bosons without Lorentz Invariance](#). *Physical Review Letters*, **108**, 251602.

- Watanabe, H., Murayama, H. (2014). [Effective Lagrangian for Nonrelativistic Systems](#). *Physical Review X*, **4**, 031057.
- Weinberg, S. (2008). *The Quantum Theory of Fields, Vol. I – Foundations*. Cambridge University Press.
- Weinberg, S. (2010). *The Quantum Theory of Fields, Vol. II – Modern Applications*. Cambridge University Press.
- Weinberg, S. (2012). *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.
- Wen, X. G. (2007). *Quantum Field Theory of Many Body Systems*. Oxford University Press.
- Wessel, S. (2010). [Critical Entropy of Quantum Heisenberg Magnets on Simple – Cubic Lattices](#). *Physical Review B*, **81**, 052405.
- Wilson, K.G. (1975). [The Renormalization Group : Critical Phenomena and the Kondo Problem](#). *Reviews of Modern Physics*, **47**, 773.
- Wilson, K.G., Kogut, J.B. (1974). [The Renormalization Group and the \$\epsilon\$ Expansion](#). *Physics Reports*, **12**, 75.
- Witten, E. (2018). Symmetry and Emergence. *Nature Physics*, **14**, 116 (2018) [[arXiv : 1710.01791](#)].
- Zee, A. (2010). *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press.
- Zhitomirsky, M.E., Chernyshev, A.L. (2013). [Colloquium : Spontaneous Magnon Decays](#). *Reviews of Modern Physics*, **85**, 219.
- Zinn – Justin, J. (2007). *Phase Transitions and Renormalization Group*. Oxford University Press.
- Милић, Б. (1997). *Њујтнова механика*. Студентски трг.
- Милић, Б. (2002). *Маквелова електродинамика*. Студентски трг.
- Милошевић, И. (1997). *Векторски простори и елементи векторске анализе*. Универзитет у Београду.
- Милошевић, С. (1979). *Основи феноменолошке термодинамике*. Универзитет у Београду.
- Мушицки, Ђ. (1987). *Увод у теоријску физику – теоријска механика*. Природно математички факултет, Београд.
- Пантић, М. (2005). *Увод у Ајнштајновоу теорију гравитације*. ПМФ Нови Сад.
- Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007). *Збирка задатака по одабраним поглављима савремене физике*. Универзитет у Новом Саду.

- Радосевић, С., Мали, П. (2020). *Збирка задатака из математичке физике – друго проширено издање*. ПМФ Нови Сад.
- Хибш Т. (2011). *Фундаментална физика елементарних честица*. Природно-математички факултет, Нови Сад.
- Калопер, Н. (1987). *Функционални интегрални у модерној теоријској физици - дипломски рад*. ПМФ, Нови Сад.
- Шиф, Л. (1968). *Квантна механика*. Вук Караџић, Београд.