[1] Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси **creativecommons.org.rs/?page_id=74.**

Универзитет у Новом Саду
Природно-математички факултет
Департман за математику и информатику

Бојан Башић

Нестандардни математички проблеми

уџбеник за мастер студенте математике

Нови Сад, 2022

Назив: Нестандардни математички проблеми – уџбеник за мастер студенте математике

Аутор: Др Бојан Башић

Рецензенти: Др Кристина Аго, доцент ПМФ-а у Новом Саду
Др Ана Сливкова, доцент ПМФ-а у Новом Саду
Др Марко Радовановић, ванр. проф. МФ-а у Београду

Издавач: Природно-математички факултет,
Универзитет у Новом Саду

ISBN: 978-86-7031-484-9

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

51(075.8)

БАШИЋ, Бојан, 1986–
Нестандардни математички проблеми : уџбеник за мастер студенте математике [Електронски извор] / Бојан Башић. - Нови Сад : Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику, 2022. - 100 стр.

Начин приступа (URL): https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/basic_nestandardni_matematicki_problemi_udzbenik_master.pdf. - Опис заснован на стању на дан 21.09.2022. - Насл. са насловног екрана. - Библиографија.

ISBN 978-86-7031-484-9

а) Математика

COBISS.SR-ID 75112713

Садржај

Предговор

Уџбеник који управо држите на монитору или телефону намењен је предмету Нестандардни математички проблеми, који се налази у курикулуму мастер студија математике на Природно-математичком факултету у Новом Саду. На ових (округло) 100 (нестандардних, квадратних) страница налази се укупно 31 проблем, који су разврстани у 13 глава. Свака глава обухвата садржај по једног двочаса предавања из наведеног предмета. У првих неколико глава груписани су проблеми из комбинаторике, затим у наредним главама проблеми из алгебре и анализе, потом проблеми из теорије бројева, и најзад проблеми из геометрије.

Већ и из самог наслова уџбеника, јасно је да за решавање изложених проблема нису довољне само „класичне“ технике одређених области, већ је потребно посегнути и за неким нестандардним идејама (притом, аконто сложености представљених проблема, читалац може лако израчунати да је, у просеку, за један проблем предвиђен готово један 45-минутни час времена, мада има и оних тематских јединица где се читав двочас утроши на обрађивање само једног проблема). Није реткост ни да исти проблем има додирних тачака с више наизглед неповезаних математичких области (такви проблеми су, говорећи генерално у математици, често и најзанимљивији), и стога разврставање напоменуто скраја претходног параграфа није (нити може бити) у потпуности прецизно, већ је диктирано ауторовом (субјективном, можда понекад и произвољном) проценом. Како год, доста је већ текста утрошено на разјашњавање разврставања, што свакако није битно ни за шта. Оно пак што јесте битно, то је да аутор изражава наду/жељу да ће књигу наћи занимљивом и корисном (или бар једним од тога) не само студенти зарад којих је примарно и настала, већ и (други) љубитељи математике, будући да, с обзиром на шароликост садржаја, није (можда?) неоправдано веровати да би многи могли ту пронаћи нешто спрам сопственог укуса. Скроман ауторов допринос таквој визији представљају проблеми 1.3, 2.2, 3.2, 4.2, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.1, 11.1, 11.2 и 13.1, који су оригинална креација потписника ових редова.

Дугујем захвалност рецензентима, који су пажљиво прочитали рукопис и изнели низ корисних сугестија, што је допринело квалитету материјала. Како је основни текст уџбеника био већ неко време слободно доступан (у форми 13 засебних скрипата) путем личног веб-сајта (и у моменту писања ових редова и даље се може наћи на истом месту, мада у моменту читања вероватно неће више бити тамо, иако и то зависи од читаоца), благодарим и свима осталима који су током тог периода указивали на пропусте који су се провукли. Бескрајна захвалност будућих генерација студената обасјаваће вас у даљем животу.

У Новом Саду,
септембра 2022.

Бојан Башић

Глава 1

Проблеми са затвореницима и шеширима

1.1 *Стражар предлаже затвореницима следећу игру. Сви ће бити изведени у двориште и поређани у врсту тако да свако види само оне затворенике испред себе. Потом ће свакоме од њих бити стављен на главу шешир у црној или белој боји. Стражар ће затим питати последњег у врсти (оног који види све испред себе) да погађа боју свог шешира. Затвореник треба да гласно одговори „црна“ или „бела“. Ако је одговор тачан, тај затвореник биће ослобођен. Стражар потом прилази следећем затворенику у реду и понавља исти поступак, и тако све до краја врсте. Затвореници имају могућност да осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква ко-*

муникација међу затвореницима није дозвољена. Ако у затвору има n затвореника, који је максималан број затвореника који ће загарантовано бити ослобођени уколико затвореници примењују оптималну стратегију?

Решење. Може се загарантовано ослободити $n-1$ затвореник.

Шта год рекао последњи затвореник у врсти (онај који је први питан), увек се може догодити да је на његовој глави шешир супротне боје од тога што је рекао, па се за њега не може гарантовати слобода. Докажимо да затвореници могу осмислити стратегију која ће гарантовати слободу свима осталима (осим њега).

Последњи затвореник у врсти треба да изброји црне шешире које види испред себе, и да каже „црна“ ако је њихов број непаран, а да каже „бела“ ако је њихов број паран. Другим речима, он на тај начин свима осталима даје информацију о парности броја црних шешира на главама првих $n-1$ затвореника у врсти. Наредни затвореник, уколико (гледајући шешире испред себе) уочи да се та парност променила (види испред себе паран број црних шешира а претходни затвореник је рекао „црна“, или обратно), закључиће да је и на његовој глави црни шешир (јер једино тако он и затвореник иза њега могу видети различите парности); слично, уколико уочи да се парност није променила, закључиће да је на његовој глави бели шешир. Сваки следећи затвореник ће чути који су шешири прошли иза њега, па може израчунати парност укупног броја црних шешира иза и испред себе (не рачунајући шешир на глави последњег затвореника); ако је та парност другачија у односу на информацију коју је саопштио последњи затвореник у врсти, закључује да он на глави има црни шешир, а ако је парност иста, закључује да на глави има бели шешир. □

1.2 *Стражар предлаже затвореницима следећу игру. Сви ће бити изведени у двориште и поређани у врсту тако да свако види само оне затворенике испред себе. Потом ће свакоме од њих бити стављен на главу шешир у једној од k, $k > 1$, могућих боја. Стражар ће затим питати последњег у врсти (оног који види све испред себе) да погађа боју свог шешира. Затвореник треба да гласно изговори једну од предвиђених k боја. Ако је одговор тачан, тај затвореник биће ослобођен. Стражар потом прилази следећем затворенику у реду и понавља исти поступак, и тако све до краја врсте. Затвореници имају могућност да осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу затвореницима није дозвољена. Ако у затвору има n затвореника, који је максималан број затвореника који ће загарантовано бити ослобођени уколико затвореници примењују оптималну стратегију?*

Решење. Може се загарантовано ослободити $n-1$ затвореник.

Шта год рекао последњи затвореник у врсти (онај који је први питан), увек се може догодити да је на његовој глави шешир другачије боје од тога што је рекао, па се за њега не може гарантовати слобода. Докажимо да затвореници могу осмислити стратегију која ће гарантовати слободу свима осталима (осим њега).

Затвореници идентификују боје са бројевима $0, 1, \ldots, k-1$. Последњи затвореник у врсти треба да израчуна суму свих боја које види испред себе, и да наглас саопшти ту суму по модулу k (то ће, дакле, бити неки број од 0 до $k-1$, што је, с обзиром на идентификацију боја и бројева, у складу с оним што затвореник сме да каже као одговор). Рецимо да је први затвореник изговорио број S. Наредни затвореник треба да сабере боје које види испред себе, и да тај збир одузме од S, рачунајући по модулу k; резултат ће бити управо боја његовог шешира. Сваки следећи затвореник ће чути који су шешири прошли иза њега, па може израчунати укупан збир боја иза и испред себе (не рачунајући шешир на глави последњег затвореника); одузимањем тог збира од S (радећи по модулу k) добија управо боју свог шешира. $\square$

1.3 *Стражар предлаже затвореницима следећу игру. Сви ће бити изведени у двориште, где ће свакоме од њих бити стављен на главу шешир у једној од 5 могућих боја. Сваки затвореник видеће све шешире сем сопственог. Стражар ће их потом поређати у врсту и питати првог затвореника у врсти да ли зна боју свог шешира. Затвореник гласно одговара „да“ или „не“. Ако одговори „не“, биће одмах закључан у самицу. Ако одговори „да“, стражар ће га питати које је боје његов шешир, на шта затвореник треба да одговори на такав начин да остали затвореници не чују одговор. Уколико је одговор погрешан, тај затвореник биће одмах закључан у самицу пред свима, а ако је одговор тачан, тај затвореник биће одмах ослобођен пред свима. Стражар потом прилази следећем затворенику у реду и понавља исти поступак, и тако све до последњег затвореника. Затвореници имају могућност да осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу затвореницима није дозвољена. Ако у затвору има 2015 затвореника, који је максималан број затвореника који ће загарантовано бити ослобођени уколико затвореници примењују оптималну стратегију?*

Решење. Чак 2013 затвореника може имати гарантовану слободу.

Опишимо најпре стратегију која обезбеђује слободу за 2013 затвореника. Доделимо вредности 0, 1, 2, 3 и 4 могућим бојама. Главна идеја је осмислити такву стратегију на основу које ће, након одговора прва два затвореника, свим затвореницима бити позната сума по модулу 5 боја шешира преосталих 2013 затвореника. Уколико ово постигнемо, лако је видети да свих преосталих 2013 затвореника може обезбедити слободу: заиста, ако описану суму означимо са S, сваки затвореник треба да од S одузме суму боја шешира ових 2013 затвореника изузимајући себе, и резултат по модулу 5 даје боју његовог шешира. Дакле, сада ћемо показати како прва два затвореника треба да одговарају да би постигли описани циљ.

Први затвореник одговара „не“ ако и само ако важи нека од следеће четири могућности: i) S је једнако боји шешира другог затвореника; ii) S је за 1 веће од боје шешира другог затвореника; iii) $S = 0$; iv) боја шешира другог затвореника је 4 и притом важи $S = 1$. Други затвореник одговара „не“ ако и само ако важи $S = 0$, а иначе одговара „да“ и погађа (успешно или неуспешно) да је боја његовог шешира управо S. Покажимо да сви остали затвореници на овај начин могу одредити S. Заиста, ако оба прва затвореника кажу „не“, тада следи $S = 0$. Претпоставимо сада да други затвореник одговори „да“. Тада сви знају да важи неки од услова i), ii) или iv). Уколико други затвореник буде ослобођен након свог погађања, S је боја шешира другог затвореника; у супротном, ако други затвореник буде затворен у самицу, S је или за 1 веће од боје шешира другог затвореника, или, уколико други затвореник има шешир боје 4, тада важи $S = 1$.

Сада описујемо како се стратегија даље одвија уколико први затвореник одговори „да“. Први затвореник нагађа да је његов шешир произвољне боје (ово није од значаја за наставак). Други затвореник одговара „да“ ако и само ако је S парно, и у том случају погађа да је његов шешир боје 0 ако важи $S = 2$, а погађа да му је шешир било које друге боје у супротном. Покажимо да сви остали затвореници на овај начин могу одредити S. Како је први затвореник рекао „да“, следи да није испуњена ниједна од могућности i), ii), iii) нити iv) из претходног пасуса. С обзиром на iii), следи $S \in \{1, 2, 3, 4\}$. Претпоставимо за моменат да други затвореник има шешир боје 1, 2, 3 или 4 (тј. да није 0). Тада, с обзиром на i), ii) и iv), преостале могућности за S су $\{3, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2\}$ или $\{2, 3\}$, редом. Будући да одговор другог затвореника открива парност броја S, довољно је података да се одреди S. Најзад, претпоставимо да други затвореник има шешир боје 0. Тада следи $S \in \{2, 3, 4\}$. Ако други затвореник одговори „не“, тада је S непарно, тј. $S = 3$. Ако други затвореник одговори „да“, следи $S \in \{2, 4\}$; тада, уколико други затвореник буде ослобођен након свог погађања, важи $S = 2$ (ако је он коректно погодио, следи да је погађао да му је боја шешира 0, што ради само у случају $S = 2$), а ако буде затворен у самицу након погађања, важи $S = 4$ (будући да није погодио, следи да је погађао да му је боја шешира нешто различито од 0, што ради само у случају $S \neq 2$).

Овим смо доказали да бар 2013 затвореника може обезбедити слободу.

Покажимо још да, за ма какву стратегију, постоји распоред шешира такав да бар два затвореника не погоде боју својих шешира; штавише, показаћемо да постоји распоред шешира такав да прва два затвореника не погоде. Претпоставимо супротно: затвореници могу осмислити такву стратегију да за све могуће распореде шешира бар један од прва два затвореника коректно погоди. Посматрајмо скуп од пет распореда који се разликују само у боји шешира другог затвореника (тј. сви затвореници сем другог имају произвољне али фиксиране боје). Додатно захтевамо да постоји највише један од ових пет распореда у ком први затвореник успешно погађа своју боју (овај захтев је могуће испунити: наиме, за сваки могућ распоред шешира од другог до последњег затвореника, постоји највише једна могућа боја шешира првог затвореника која се у ову комбинацију „уклапа“ тако да први погоди; дакле, пошто смо фиксирали пет могућих распореда од другог до последњег, а постоји избор између пет могућих боја шешира које могу бити на глави првог затвореника, следи да можемо за првог затвореника одабрати шешир чија боја ће бити погођена за највише један од ових пет распореда). Међу тако одабраних пет распореда може постојати највише један за који осмишљена стратегија предвиђа да први затвореник одговори „не“: заиста, ако би постојала бар два таква распореда, тада након што први затвореник одговори „не“, други затвореник, шта год урадио, не би погодио боју свог шешира у бар једном од ова два распореда (тј. ниједан од прва два затвореника не би погодио, што је контрадикција). Дакле, постоје бар четири распореда у којима први затвореник одговара „да“. По избору посматраног скупа од пет распореда, за бар три од ова четири распореда први затвореник не би погодио боју шешира, што значи да би други затвореник морао коректно погодити у сва ова три случаја; међутим, ово је очито немогуће, будући да, ма каква је стратегија другог затвореника, у бар два од ова три распореда неће погодити боју шешира. Овим је доказ завршен. $\square$

Глава 2

Неки проблеми на шаховској табли

2.1 *Под* торусном шаховском таблом $n \times n$ *подразумевамо таблу* $n \times n$ *чије су доња и горња ивица „слепљене“, као и лева и десна ивица. (На пример, дама која се на таквој табли налази на пољу с координатама* $(3, 2)$ *може се померити на сва поља на која би могла и на уобичајеној шаховској табли, али још и на поједина друга поља: примера ради,* $(5, n)$, $(6, n-1)\ldots$, *будући да поља* $(3, 2), (4, 1), (5, n), (6, n-1)\ldots$ *чине низ дијагонално суседних поља.) Доказати да се на торусну таблу* $n \times n$ *може поставити* n *дама које се међусобно не нападају ако и само ако је* n *облика* $6k \pm 1$.

Решење. Приметимо да, у сваком валидном распореду n дама на табли $n \times n$, у свакој колони постоји тачно једна дама, и у свакој врсти постоји тачно једна дама. Сваки валидан распоред n дама на табли $n \times n$ може се представити пермутацијом σ бројева $\{1, 2, \ldots, n\}$, где $\sigma(i)$ казује на ком пољу у i-тој колони се налази дама која је у тој колони (другим речима, даме су на пољима $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \ldots, (n, \sigma(n))$; можемо сматрати да прва координата представља колону а друга врсту, где су колоне нумерисане слева надесно а врсте одоздо навише). Услов да је σ пермутација гарантује да се никоје две дама неће нападати ни по хоризонтали, ни по вертикали. Погледајмо још како се услов да се даме не нападају по дијагонали „преводи“ у неку рестрикцију о пермутацији σ. Приметимо да се даме на пољима (i, i') и (j, j') нападају по југозападно-североисточној дијагонали на „обичној“ (тј. не торусној) табли ако и само ако важи $j - i = j' - i'$; за торусну таблу услов је сличан: $j - i \equiv j' - i' \pmod n$ (заиста, приметимо да свођење координата по модулу n управо омогућава прелазак по „слепљеној“ ивици). Слично, даме на пољима (i, i') и (j, j') нападају се по југоисточно-северозападној дијагонали (на торусној табли) ако и само ако важи $j - i \equiv i' - j' \pmod n$. Дакле, закључимо, пермутација σ мора бити таква да је за свако i и j, $i \neq j$, испуњено $j - i \not\equiv \sigma(j) - \sigma(i) \pmod n$ и $j - i \not\equiv \sigma(i) - \sigma(j) \pmod n$. Притом важи и обратно: свака пермутација σ која испуњава ове услове даје један валидан распоред дама.

Показаћемо сада једно помоћно тврђење које ће бити од користи у наставку рада. Нека је сада дата пермутација σ која одговара једном валидном распореду дама. Докажимо да функција $i \mapsto (\sigma(i) + i) \bmod n$ (где на десној страни узимамо број из класе $\{1, 2, \ldots, n\}$) такође представља пермутацију скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ (не тврдимо да та пермутација мора одговарати валидном распореду дама). Претпоставимо супротно:

за неке i и j, $i \neq j$, важи $\sigma(i) + i \equiv \sigma(j) + j \pmod{n}$. Међутим, ово се своди на $j - i \equiv \sigma(i) - \sigma(j) \pmod{n}$, што је у контрадикцији са условом да је σ пермутација која одговара валидном распореду дама. На сличан начин, показујемо да је и $i \mapsto (\sigma(i) - i) \bmod n$ такође пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ (уколико не би била, добили бисмо $j - i \equiv \sigma(j) - \sigma(i) \pmod{n}$ за неке различите i и j, контрадикција).

Сада смо спремни да решимо задатак. Раздвојићемо два смера.

($\Rightarrow$): Нека је σ пермутација која одговара једном валидном распореду дама на торусној табли $n \times n$. Треба показати да је n облика $6k \pm 1$. Како бисмо ово утврдили, показаћемо да је n непаран број, као и да $3 \nmid n$; јасно, из ова два закључка следиће управо да је n облика $6k \pm 1$.

Приметимо, по ранијем помоћном тврђењу важи:

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma(i) + i) \equiv \sum_{i=1}^{n} i \pmod{n}$$

(заиста, како смо показали, скуп сабирака на левој страни по модулу n чини управо бројеве од 1 до n, у некој пермутацији). Такође очигледно имамо и:

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma(i) + i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i) + \sum_{i=1}^{n} i.$$

Приметимо да, након потирања израза $\sum_{i=1}^{n} i$, остаје $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) \equiv 0 \pmod{n}$. Међутим, на левој страни имамо управо све бројеве од 1 до n (јер је σ пермутација), па сума на левој страни износи $\frac{n(n+1)}{2}$. Дакле, све заједно, $n \mid \frac{n(n+1)}{2}$, одакле следи да је $\frac{n+1}{2}$ природан број, што значи да је n непарно.

Даље, поново по ранијем помоћном тврђењу, важи и следеће:

$$\sum_{i=1}^{n}(\sigma(i)+i)^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} i^2 \pmod{n}.$$

С друге стране, леву суму можемо трансформисати и овако:

$$\sum_{i=1}^{n}(\sigma(i)+i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\sigma(i)^2+2i\sigma(i)+i^2) = \sum_{i=1}^{n}\sigma(i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i\sigma(i) + \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Након потирања израза $\sum_{i=1}^{n} i^2$ остаје:

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i\sigma(i) \equiv 0 \pmod{n}.$$

На потпуно аналоган начин (започињући од $\sum_{i=1}^{n}(\sigma(i)-i)^2$ уместо $\sum_{i=1}^{n}(\sigma(i)+i)^2)$ долазимо до:

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i\sigma(i) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Из последња два закључка, сабирањем добијамо:

$$2\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)^2 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Под сумом се налазе управо квадрати природних бројева од 1 до n (у неком поретку), а познато је да њихова сума износи $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Дакле, све заједно, $n \mid \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$, одакле следи да је $\frac{(n+1)(2n+1)}{3}$ природан број, па закључујемо $3 \nmid n$ (јер, у случају $3 \mid n$, ниједна од две заграде у бројиоцу не би била дељива са 3, па ни разломак не би тада могао бити природан број). Овим је смер $(\Rightarrow)$ доказан.

$(\Leftarrow)$: Нека је n природан број облика $6k \pm 1$ (другим речима, $2 \nmid n$ и $3 \nmid n$). Треба показати да постоји валидан распоред дама на торусној табли $n \times n$.

Поставимо даме на координате $(i, 2i \bmod n)$. Очигледно, никоје две даме нису у истој колони. Такође, никоје две даме не могу бити у истој врсти, јер из $2i \equiv 2j \pmod{n}$ следи $i \equiv j \pmod{n}$ (приметимо овде, скраћивање је дозвољено извршити због $2 \nmid n$), тј. $i = j$. Остаје још проверити да ли се неке две даме могу нападати по дијагонали.

Претпоставимо да је то случај за неку југозападно-североисточну дијагоналу; другим речима, за неке различите i и j важи $i - j \equiv 2i - 2j \pmod{n}$. Одатле следи $i \equiv j \pmod{n}$, тј. $i = j$, контрадикција. Претпоставимо сада да се неке две даме нападају по некој југоисточно-северозападној дијагонали; другим речима, за неке различите i и j важи $i - j \equiv 2j - 2i \pmod{n}$. Ово се своди на $3i \equiv 3j \pmod{n}$, а будући да важи $3 \nmid n$, можемо скратити обе стране са 3; након тога остаје $i \equiv j \pmod{n}$, тј. поново $i = j$ и поново контрадикција. Тиме је задатак решен. $\square$

2.2

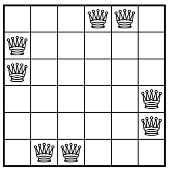
Одредити колико се највише дама може поставити на таблу 2017×2017*, при чему свака дама сме да напада највише једну од преосталих.*

Решење. Одредићемо најпре горњу границу за број дама које се под датим условима могу поставити на таблу $n \times n$, и то у случају када је постављено више од n дама. Претпоставимо да смо на таблу поставили

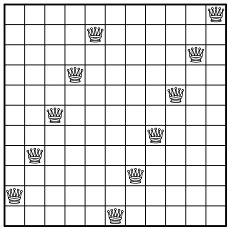
m дама, $m > n$. Како ни у једној врсти не могу бити више од две даме (јер би онда „средња“ од њих нападала две друге), следи да постоји бар $m-n$ врста у којима су по две даме, а одатле израчунавамо да има највише $n-(m-n)$, тј. највише $2n-m$ дама које су саме у својој врсти. Аналогно, постоји највише $2n-m$ дама које су саме у својој колони. Како свака дама мора бити сама у својој врсти или сама у својој колони (јер би у супротном нападала две друге даме), при оваквом рачуну свака дама је убројана бар једном, тј. важи $(2n-m)+(2n-m) \geqslant m$. Ово се своди на $4n \geqslant 3m$, тј. $m \leqslant \frac{4n}{3}$. Како је m природан број, мора важити заправо $m \leqslant \lfloor \frac{4n}{3} \rfloor$. Дакле, по добијеној граници, на табли $n \times n$ потенцијално може бити више од n дама, али не више од $\lfloor \frac{4n}{3} \rfloor$. За $n = 2017$ (што је вредност из поставке) добијена граница износи 2689.

Према томе, да би се решење комплетирало, потребно је још наћи распоред 2689 дама на табли 2017×2017 (при чему свака од њих сме да напада највише једну од преосталих).

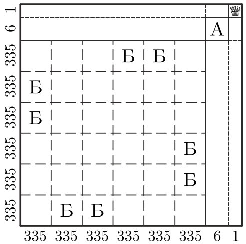
А – табла 6×6



Б – табла 335×335



В – табла 2017×2017



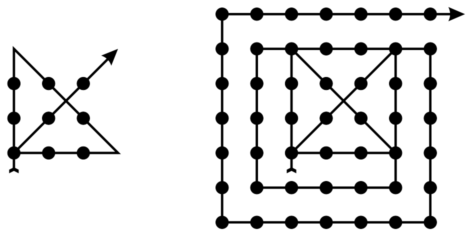
Означимо са А таблу 6×6 са осам дама распоређених као на слици лево (приметимо, на овој табли је испуњено да свака дама напада највише једну од преосталих). Означимо са Б таблу 335×335 са 335 дама распоређених тако да се никоје две не нападају чак ни по торусу: један одговарајућ распоред приказан је на слици у средини (где је на слици, разумљиво, приказана мања табла, али образац је јасан, штавише, ово је управо распоред описан у смеру ($\Leftarrow$) претходног задатка; приметимо да број 335 јесте облика $6k-1$). Коначно, посматрајмо таблу 2017×2017 склопљену од табли А и Б као на слици десно. Приметимо, ту је постављено укупно $8 \cdot 335 + 8 + 1$ дама, што је управо 2689. Било која дама на било којој табли означеној са Б напада даму на истој позицији на суседној табли Б, и никога више (за хоризонтале и вертикале ово се лако види, а за дијагонале приметимо следеће: ако би било која дама с неке табле Б дијагонално нападала даму с неке друге табле Б, тада би она по торусној дијагонали нападала и даму на одговарајућој позицији на полазној табли Б, што је у контрадикцији са избором табли Б). Било која дама на табли означеној са А напада само по једну даму на табли А и никога више. Коначно, дама у горњем десном углу не напада ниједну другу даму. Тиме је задатак решен. $\square$

Глава 3

Неки проблеми са изломљеним линијама

3.1 *Дато је n^2 тачака поређаних у равни у форми квадратне мреже $n \times n$.* Изломљеном линијом дужине l *називамо унију затворених дужи A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{l-1}A_l$ у тој равни. Одредити најмањи природан број l за који постоји изломљена линија дужине l на којој леже свих n^2 посматраних тачака.*

Решење. За $n = 1$ очигледно је одговор $l = 1$, а за $n = 2$ одговор је $l = 3$. За $n = 3$ на слици лево видимо како се може постићи изломљена линија дужине 4, а на слици десно видимо како се ова идеја може дорадити тако да, за мрежу $n \times n$, имамо изломљену линију дужине $2n-2$ (дакле, прва четири корака су као у случају $n = 3$, а потом само настављамо правећи спиралну форму у смеру казаљке на сату).



Покажимо сада да је $2n-2$ заиста најмањи такав број l (са изузетком већ поменутих случајева $n = 1$ и $n = 2$). Нека је мрежа $n \times n$ покривена изломљеном линијом дужине l. Претпоставимо да постоји r редова и s колона на којима не лежи ниједно парче (хоризонтално, односно вертикално) уочене изломљене линије. Размотримо прво случај $r = 0$. Тада у сваком реду постоји бар неко хоризонтално парче изломљене линије, па линија има бар n хоризонталних дужи. Додатно, како би све ове хоризонталне дужи чиниле једну изломљену линију, оне морају бити „повезане“ помоћу бар $n - 1$ других дужи. Дакле, у случају $r = 0$ изломљена линија се састоји од бар $2n - 1$ дужи (што очито није оптимално, јер већ имамо конструкцију која даје $2n - 2$ дужи). Размотримо сада случај $r = 1$. Тада постоји тачно један ред без хоризонталних дужи, што значи да хоризонталних дужи има бар $n - 1$ (у сваком од преосталих редова по бар једна). Додатно, у посматраном реду без хоризонталних дужи имамо n тачака, а свака дуж која није хоризонтална може покрити највише по једну од ових тачака; дакле, треба нам бар n дужи које нису хоризонталне. Закључујемо да и у овом случају укупно има бар $2n - 1$ дужи, што опет није оптимално.

Све аналогно закључујемо и за случајеве $s = 0$ или $s = 1$.

Преостаје да размотримо случај када су и r и s бар 2. Посматрајмо оних r редова и s колона на којима не лежи ниједна хоризонтална односно вертикална дуж. Тачке у пресеку тих редова и колона формирају неку мрежу димензија $r \times s$ (оне не морају бити на подједнаком одстојању једне од других, што неће правити проблема у наставку). Посматрајмо тачке на рубу те мреже. Њих има $2r + 2s - 4$. Пошто ниједна од тих тачака није покривена ни хоризонталном ни вертикалном дужи, све оне морају бити покривене косим дужима (под косим дужима подразумевамо оне које нису ни хоризонталне ни вертикалне). Свака коса дуж може покривати највише две од ових рубних тачака, па следи да косих дужи мора бити бар $r+s-2$. Додатно, како у сваком реду осим ових r уочених имамо бар по једну хоризонталну дуж, следи да постоји бар $n - r$ хоризонталних дужи; слично, постоји бар $n - s$ вертикалних дужи. Све заједно, укупно постоји бар $(r + s - 2) + (n - r) + (n - s)$, тј. $2n - 2$ дужи, што је и требало доказати. $\square$

3.2 *Шифра за закључавање „андроид“ телефона формира се на следећи начин. На мрежи тачака 3×3 потребно је нацртати путању сачињену од неколико дужи, где свака дуж повезује неке две од посматраних тачака, и притом је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне. Током исцртавања путање, сваки пут када путања пређе преко неке тачке (било као унутрашње или крајње тачке неке дужи), та тачка више не може бити коришћена као крајња тачка ниједне наредне дужи (с изузетком услова да је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне), али јесте дозвољено да таква тачка буде унутрашња тачка наредних дужи. Колико постоји различитих шифара на телефону (до на ротацију и/или симетрију) које испуњавају следећа три услова:*

1° *свих 9 тачака морају лежати на исцртаној путањи;*

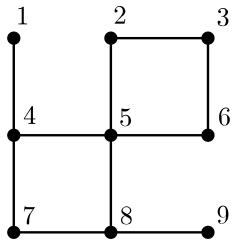
2° *траг који путања остави је основиметричан (под* трагом *подразумевамо унију дужи као геометријских објеката, дакле без информација о њиховом редоследу, смеру кретања и евентуалном преклапању неких делова различитих дужи);*

3° *на трагу путање постоје тачно две тачке (од посматраних 9) које су спојене само с по једном другом тачком?*

Решење. Постоји јединствена таква шифра:

$$8 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9.$$

Њен траг је приказан на слици.



Нумеришимо тачке бројевима од 1 до 9 слева надесно и одозго надоле. Посматрајмо оне две дужи које спајају тачке које имају јединственог суседа (из услова 3°) с њиховим суседима. Те две дужи очигледно морају бити осносиметричне, и не смеју имати заједничку тачку (јер у супротном путања не би могла да обухвата свих 9 тачака).

Дакле, постоје свега три суштински различите могућности за те две дужи: 1-4 и 8-9 (уз осу симетрије 3-5-7), 1-4 и 3-6 (уз осу симетрије 2-5-8) или, последње, 2-4 и 6-8 (уз осу симетрије 3-5-7). Раздвајамо ова три случаја.

- 1-4 и 8-9: Претпоставимо прво да две тачке с јединственим суседом (што су овде или 1 и 9, или 4 и 8) представљају управо почетак и крај путање. Ако путања креће нпр. од тачке 1, тада она најпре иде до тачке 4 (а последњи део путање је померај од 8 до 9); сада, уколико је наредна дуж нека од 4-3, 4-5 или 4-7, тада, због симетричности, на трагу путање мора постојати и дуж 3-8, 5-8 односно 7-8. У првом и трећем случају она онда мора бити управо наредна дуж (јер се не можемо после вратити у тачку 3, односно 7), и потом се путања мора завршити померајем од 8 до 9, контрадикција (јер нису све тачке покривене). У другом случају постоји још и могућност да после 4-5 наставимо са дужи 5-6, а да у неком каснијем кораку од 2 дођемо до 8 (и потом до 9); приметимо, међутим, да то можемо извести на следећих пет начина: $6 \to 2$, $6 \to 3 \to 2$, $6 \to 7 \to 2$, $6 \to 3 \to 7 \to 2$ и $6 \to 7 \to 3 \to 2$, а у сваком од њих или путања не пролази кроз свих 9 тачака, или траг није осносиметричан. Уједно, овим смо размотрили и могућност да наредна дуж буде 4-6. Дакле, наредна дуж мора бити 4-2. Тада, уколико од тачке 2 даље идемо до тачке 6, потом морамо одатле отићи до 8 па завршити у 9, контрадикција, а уколико од тачке 2 идемо до 3, 5 или 7, тада опет добијамо контрадикцију истим аргументом као малопре.

  Уколико путања креће од тачке 4, врло сличним резоном добијамо контрадикцију.

Коначно, преостаје могућност да почетна тачка путање није тачка с јединственим суседом, тј. да на путањи постоји део, без умањења општости, $4 \to 1 \to 7$ (где тачка 1 има јединственог суседа на трагу путање). Тада, због симетричности, на путањи мора постојати и дуж 7-9, па је последњи део управо померај од 7 до 9. Према томе, путања не може почети од тачке 4, па тачка 4 има још једног суседа осим 1 и 7. Међутим тада и тачка 8 има још једног суседа (осим 7 и 9, за које знамо да су јој суседи због последњег потеза), па следи да путања мора почети баш из тачке 8. Ако је први корак $8 \to 3$, одмах добијамо контрадикцију због симетрије (путања би морала бити $8 \to 3 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9$, што не обухвата све тачке). Ако је први корак $8 \to 6$, тада на путањи мора постојати и дуж 2-4, па уколико из тачке 6 одмах одемо у тачку 2, путања мора бити $8 \to 6 \to 2 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9$, те неће обухватити тачке 3 и 5, а уколико из тачке 6 одемо у тачку 3, односно 5, тада следећи померај свакако мора бити до тачке 2 (јер и дуж 3-2, односно 5-2, мора бити на трагу путање, а она онда мора бити управо наредна дуж), па се путања опет завршава као малопре и не обухвата тачку 5, односно 3; контрадикција у сваком случају. Коначно, ако је први корак $8 \to 5$ (у шта убрајамо и $8 \to 2$), тада на трагу путање мора постојати и дуж 5-4, али она у овом случају не мора бити наредна дуж, будући да је њу могуће нацртати и касније као део дужи 6-4. Лако видимо да се ово заиста може постићи на следећи начин: $8 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9$.

- 1-4 и 3-6: На исти начин као малопре добијамо контрадикцију с претпоставком да две тачке с јединственим суседом представљају управо почетак и крај путање. Преостаје случај да на путањи постоји део $6 \to 3 \to 9$. Као малопре добијамо да путања тада мора полазити из тачке 4, а за следећу тачку избор су једино 2, 5 или 8, које све припадају оси симетрије, па се у свим случајевима одмах добија контрадикција на већ виђен начин.

- 2-4 и 6-8: На исти начин као малопре добијамо контрадикцију с претпоставком да две тачке с јединственим суседом представљају управо почетак и крај путање. У овом случају, за разлику од претходна два, алтернативна могућност и не постоји, па овом контрадикцијом завршавамо доказ.

□

Глава 4

Функционалне једначине

4.1

Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такве да за све* $n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$f(f(n)) < f(n+1).$$

Решење. Докажимо прво да је $f(1)$ јединствени минимум посматране функције. Претпоставимо супротно: нека је минимум функције (не нужно јединствен) $f(a)$ за $a > 1$. Тада, убацивањем $n \mapsto a-1$ у неједнакост из поставке добијамо:

$$f(f(a-1)) < f(a),$$

контрадикција с чињеницом да је $f(a)$ минимум. Тиме смо показали да је $f(1)$ јединствени минимум.

Докажимо сада тоталном индукцијом по n следеће тврђење: за сваки природан број n, вредност $f(n)$ је јединствена минимална вредност у скупу $\{f(n), f(n+1), f(n+2)\dots\}$. Малочас је показана управо база индукције (за $n = 1$). Претпоставимо сада да тврђење важи за све бројеве не веће од фиксираног броја n, и докажимо га за $n+1$. Дакле, доказујемо да је $f(n+1)$ јединствена минимална вредност у скупу $\{f(n+1), f(n+2), f(n+3)\dots\}$. Претпоставимо супротно: нека је минимум посматраног скупа $f(a)$ за $a > n+1$. Тада, убацивањем $n \mapsto a-1$ у неједнакост из поставке добијамо:

$$f(f(a-1)) < f(a).$$

Приметимо: уколико би важило $f(a-1) \geqslant n+1$, тада би горња неједнакост давала контрадикцију (заиста, тада би израз на левој страни био у посматраном скупу, па не би могао бити строго мањи од $f(a)$, што је претпостављени минимум посматраног скупа). Докажимо зато $f(a-1) \geqslant n+1$. Приметимо, важи $f(a-1) > f(n)$: ово имамо по индуктивној хипотези за n, будући да важи $a-1 > n$ а $f(n)$ је јединствени минимум скупа $\{f(n), f(n+1), f(n+2)\dots\}$. Даље, по индуктивној хипотези за $n-1$ имамо $f(n) > f(n-1)$ (јер је $f(n-1)$ јединствени минимум скупа $\{f(n-1), f(n), f(n+1)\dots\}$). Аналогно добијамо $f(n-1) > f(n-2)$, затим $f(n-2) > f(n-3)$ итд. Све заједно:

$$f(a-1) > f(n) > f(n-1) > f(n-2) > f(n-3) > \cdots > f(1) \geqslant 1.$$

Према томе, постоји бар n различитих природних бројева који су строго мањи од $f(a-1)$. Одатле следи $f(a-1) \geqslant n+1$, што смо и хтели доказати, и што води до контрадикције на већ описан начин. Тиме је индукција завршена.

Приметимо, из тврђења које смо показали индукцијом директно следи да је f строго растућа функција. На основу тога се неједнакост из поставке своди на $f(n) < n+1$ за све природне бројеве n. Међутим, из

$$f(n) > f(n-1) > f(n-2) > \cdots > f(1) \geqslant 1$$

следи $f(n) \geqslant n$ за све природне бројеве n. Према томе, једина могућност је $f(n) = n$ за све природне бројеве n, а директно се уочава да ова функција заиста испуњава неједнакост из поставке. $\square$

4.2

Наћи све парове функција $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1.$$

Напомена: $f^k(n) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{k\ пута}(n)\cdots))$.

Решење. Из једнакости дате у поставци следи:

$$f^{g(n)+1}(n) < f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1 \leqslant f(n+1),$$

тј.

$$f^{g(n)+1}(n) < f(n+1).$$

Докажимо прво да је $f(1)$ јединствени минимум функције f. Претпоставимо супротно: нека је минимум функције (не нужно јединствен) $f(a)$ за $a > 1$. Тада, убацивањем $n \mapsto a-1$ у горњу неједнакост добијамо:

$$f^{g(a-1)+1}(a-1) < f(a),$$

контрадикција с чињеницом да је $f(a)$ минимум (приметимо да се на левој страни заиста налази једна од вредности које узима функција f, конкретно $f(f^{g(a-1)}(a-1))$. Тиме смо показали да је $f(1)$ јединствени минимум.

Докажимо сада тоталном индукцијом по n следеће тврђење: за сваки природан број n, вредност $f(n)$ је јединствена минимална вредност у скупу $\{f(n), f(n+1), f(n+2)\dots\}$. Малочас је показана управо база индукције (за $n = 1$). Претпоставимо сада да тврђење важи за све бројеве не веће од фиксираног броја n, и докажимо га за $n + 1$. Дакле, доказујемо да је $f(n + 1)$ јединствена минимална вредност у скупу $\{f(n + 1), f(n + 2), f(n + 3)\dots\}$. Претпоставимо супротно: нека је минимум посматраног скупа $f(a)$ за $a > n + 1$. Тада, поново убацивањем $n \mapsto a - 1$ у ранију неједнакост добијамо:

$$f(f^{g(a-1)}(a-1)) < f(a).$$

Приметимо: уколико би важило $f^{g(a-1)}(a-1) \geqslant n+1$, тада би горња неједнакост давала контрадикцију (заиста, тада би израз на левој страни био у посматраном скупу, па не би могао бити строго мањи од $f(a)$, што је претпостављени минимум посматраног скупа). Докажимо зато $f^{g(a-1)}(a-1) \geqslant n+1$. Прво ћемо доказати да за произвољно x, $x > n$, важи $f(x) \geqslant n + 1$. Приметимо, важи $f(x) > f(n)$: ово имамо по индуктивној хипотези за n, будући да је $f(n)$ јединствени минимум скупа $\{f(n), f(n+1), f(n+2)\dots\}$. Даље, по индуктивној хипотези за $n-1$ имамо $f(n) > f(n-1)$ (јер је $f(n-1)$ јединствени минимум скупа $\{f(n-1), f(n), f(n+1)\dots\}$). Аналогно добијамо $f(n-1) > f(n-2)$, затим $f(n-2) > f(n-3)$ итд. Све заједно:

$$f(x) > f(n) > f(n-1) > f(n-2) > f(n-3) > \cdots > f(1) \geqslant 1.$$

Према томе, постоји бар n различитих природних бројева који су строго мањи од $f(x)$. Одатле следи $f(x) \geqslant n+1$, што смо и хтели доказати. Међутим, сада применом истог поступка на број $f(x)$ уместо броја x добијамо $f^2(x) \geqslant n+1$, па понављањем процедуре добијамо $f^3(x) \geqslant n+1$ итд. Уколико начинимо $g(x)$ таквих корака, закључујемо $f^{g(x)}(x) \geqslant n+1$ за све x, $x > n$. Специјално, узимајући $x = a-1$, добијамо $f^{g(a-1)}(a-1) \geqslant n+1$, што води до контрадикције на већ описан начин. Тиме је индукција завршена.

Приметимо, из тврђења које смо показали индукцијом директно следи да је f строго растућа функција. На основу тога се неједнакост с почетка своди на $f^{g(n)}(n) < n+1$ за све природне бројеве n. Даље, приметимо да, за било који број y, из

$$f(y) > f(y-1) > f(y-2) > \cdots > f(1) \geqslant 1$$

следи $f(y) \geqslant y$. Одатле имамо:

$$n+1 > f^{g(n)}(n) \geqslant f^{g(n)-1}(n) \geqslant f^{g(n)-2}(n) \geqslant \cdots \geqslant f(n) \geqslant n$$

за све природне бројеве n. Према томе, једина могућност је $f(n) = n$ за све природне бројеве n.

Преостаје још одредити функцију g. Једначина из поставке се своди на:

$$n + g^n(n) = n + 1 - g(n+1) + 1,$$

тј.

$$g^n(n) + g(n+1) = 2.$$

Дакле, за све природне бројеве n важи $g^n(n) = g(n+1) = 1$. Друга једнакост из ланца даје $g(2) = 1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 1$ итд. Осим тога, убацујући $n = 1$ добијамо $g(1) = g(2) = 1$.

Према свему реченом, једини могућ пар функција које испуњавају једнакост из поставке јесте $f(n) = n$ и $g(n) = 1$ за све природне бројеве n. Директно се уочава да овај пар заиста јесте решење постављене функционалне једначине. $\square$

Глава 5

Нестандардне примене генеративних функција

5.1 *За мултискуп* A, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, *чији су елементи природни бројеви, дефинишимо*

$$A^* = \{a_i + a_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Ако за два различита n*-елементна мултискупа* A *и* B *важи* $A^* = B^*$, *доказати да је* n *степен броја* 2.

Решење. Означимо $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Дефинишимо следећа два полинома: $P(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$, $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}$. Можемо извести следећи рачун:

$$\begin{aligned} P(x)^2 - Q(x)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + \cancel{2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j}} - \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + \cancel{2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{b_i + b_j}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} - \sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} = P(x^2) - Q(x^2) \end{aligned}$$

(потирање у првом реду имамо на основу једнакости $A^* = B^*$). Даље, израз на левој страни можемо раставити на чиниоце као $(P(x) - Q(x))(P(x) + Q(x))$, па из тога свега добијамо једнакост

$$P(x) + Q(x) = \frac{P(x^2) - Q(x^2)}{P(x) - Q(x)}.$$

Означимо $S(x) = P(x) - Q(x)$. Приметимо, $S(1) = P(1) - Q(1) = n - n = 0$, тј. вредност 1 је нула полинома S; нека је k вишеструкост те нуле, тј. можемо записати $S(x) = (x-1)^k S_1(x)$ при чему важи $S_1(1) \neq 0$. Сада имамо:

$$P(x) + Q(x) = \frac{S(x^2)}{S(x)} = \frac{(x^2-1)^k S_1(x^2)}{(x-1)^k S_1(x)} = \frac{\cancel{(x-1)^k}(x+1)^k S_1(x^2)}{\cancel{(x-1)^k} S_1(x)}.$$

Убрштавајући $x = 1$ у последњу једнакост добијамо

$$P(1) + Q(1) = \frac{2^k S_1(1)}{S_1(1)} = 2^k.$$

Међутим, из дефиниције полинома P и Q видимо да важи $P(1) = Q(1) = n$, па се претходна једнакост своди на $2n = 2^k$, тј. $n = 2^{k-1}$, што је и требало доказати. $\square$

5.2

Дат је коначан скуп природних бројева S_0. Дефинишимо низ скупова $S_1, S_2, S_3 \ldots$ на следећи начин:

$a \in S_n$ ако и само ако тачно један од бројева $a, a-1$ припада скупу S_{n-1}.

Доказати да постоји бесконачно много природних бројева N таквих да важи

$$S_N = S_0 \cup \{a + N : a \in S_0\}.$$

Пример. Узмимо $S_0 = \{1, 2, 5\}$. Тада имамо $S_1 = \{1, 3, 5, 6\}$ (објашњење: $1 \in S_1$ јер $0 \notin S_0$ и $1 \in S_0$; $2 \notin S_1$ јер истовремено $1 \in S_0$ и $2 \in S_0$; $3 \in S_1$ јер $2 \in S_0$ и $3 \notin S_0$ итд.). Још неколико наредних скупова су:

$$\begin{aligned} &S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}; \quad S_3 = \{1, 6, 7, 8\}; \quad S_4 = \{1, 2, 6, 9\}; \\ &S_5 = \{1, 3, 6, 7, 9, 10\}; \quad S_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11\}; \\ &S_7 = \{1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}; \quad S_8 = \{1, 2, 5, 9, 10, 13\}. \end{aligned}$$

Примећујемо да за S_8 важи

$$S_8 = \{1, 2, 5\} \cup \{9, 10, 13\} = S_0 \cup \{a + 8 : a \in S_0\},$$

па је једна од тражених вредности $N = 8$ (можемо видети и да исто важи за $N = 2$, а потребно је наћи бесконачно много таквих).

Решење. Дефинишимо полиноме:

$$P_i(x) = \sum_{a \in S_i} x^a.$$

Тада за $n \geqslant 1$ важи:

$$P_n(x) \equiv (1+x)P_{n-1}(x) \pmod 2. \tag{5.1}$$

Објаснимо ово. Приметимо, уколико $a \in S_{n-1}$, тада ће се моном x^a појављивати у полиному $P_{n-1}(x)$, па ће x^a бити међу сабирцима на десној страни горњег израза; слично, уколико $a-1 \in S_{n-1}$, тада ће се моном x^{a-1} појављивати у полиному $P_{n-1}(x)$, а тада ће, после множења са $1+x$, опет x^a бити међу сабирцима на десној страни (због $x^a = x \cdot x^{a-1}$). Дакле, ако је испуњено обоје $a \in S_{n-1}$ и $a-1 \in S_{n-1}$, тада на десној страни имамо $2x^a$, уколико је испуњено тачно једно од тога двога, тада на десној страни имамо само једном x^a, а уколико није испуњено ниједно, тада на десној страни нема монома x^a. Свођењем по модулу 2, „нестаће“ сви мономи са коефицијентом 2, одакле закључујемо да ће моном x^a остати на десној страни по модулу 2 ако и само ако тачно један од бројева $a, a-1$ припада скупу S_{n-1}, а то значи управо да добијамо полином $P_n(x)$.

Из (5.1) лако добијамо

$$P_n(x) \equiv (1+x)P_{n-1}(x) \equiv (1+x)^2 P_{n-2}(x) \equiv \cdots \equiv (1+x)^n P_0(x) \pmod 2. \tag{5.2}$$

Да бисмо доказали тврђење задатка, довољно је да нађемо бесконачно много вредности N за које важи

$$P_N(x) = (1+x^N)P_0(x) \quad \text{и} \quad N > \max S_0$$

(објашњење је слично објашњењу за (5.1); за разјашњење неопходности услова $N > \max S_0$, погледати пример наведен пре овог доказа, па установити зашто за $N = 4$ жељена конгруенција јесте испуњена, али и поред тога вредност $N = 4$ не испуњава услове из поставке задатка). Користећи (5.2), ово се своди на

$$(1+x)^N P_0(x) \equiv (1+x^N)P_0(x) \pmod 2$$

(нема потребе водити рачуна о услову $N > \max S_0$, будући да, уколико пронађемо бесконачно много таквих вредности N, јасно је да ће бесконачно много међу њима бити веће од $\max S_0$), а одатле коначно добијамо да тражимо вредности N за које важи

$$(1+x)^N \equiv 1 + x^N \pmod 2.$$

Тврдимо да ова релација важи за све N облика $N = 2^k$ (могуће и за још неке друге вредности, што није релевантно, будући да је циљ само пронаћи бесконачно много таквих вредности, није неопходно одредити *све* такве). Доказ спроводимо индукцијом по k.

За $k = 0$, тј. $N = 1$, са обе стране конгруенције имамо исти израз, па тврђење тривијално важи. Претпоставимо сада да тврђење важи за фиксирану вредност k, и докажимо да тада важи и за $k+1$. Имамо:

$$\begin{aligned}(1+x)^{2^{k+1}} &= ((1+x)^{2^k})^2 \equiv (1+x^{2^k})^2 = 1 + 2x^{2^k} + x^{2^{k+1}} \\ &\equiv 1 + x^{2^{k+1}} \pmod 2\end{aligned}$$

(прва конгруенција важи на основу индуктивне хипотезе). Тиме је доказ завршен. □

5.3 *Коначан низ целих бројева $a_0, a_1, a_2 \ldots$ називамо p*-балансираним *акко је вредност $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \cdots$ константна за $k = 0, 1, 2 \ldots$. Доказати: уколико је 50-члани низ p-балансиран за $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, онда сви чланови тог низа морају бити једнаки 0.*

Решење. Дефинишимо полином

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{49} x^{49}.$$

Нека је ξ трећи корен јединице различит од 1. Тада имамо:

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3 + a_4\xi + a_5\xi^2 + a_6 + \cdots \\
&= \underbrace{(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots)}_{c} + \xi \underbrace{(a_1 + a_4 + a_7 + \cdots)}_{c} + \xi^2 \underbrace{(a_2 + a_5 + a_6 + \cdots)}_{c} \\
&= c(1 + \xi + \xi^2) = c\frac{\cancelto{0}{\xi^3 - 1}}{\xi - 1} = 0
\end{aligned}$$

(користили смо претпоставку да је посматрани низ 3-балансиран, на основу чега смо констатовали да све заграде имају исту вредност, коју смо означили са c). На исти начин добијамо $P(\xi) = 0$ кад год је ξ p-ти корен јединице различит од 1 за $p = 5, 7, 11, 13, 17$. Пошто за све ове вредности p постоји $p - 1$ таквих корена јединице, и сви су они различити међусобно, на овај начин смо пронашли укупно $2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16$, тј. 50 различитих нула полинома P. Међутим, полином P је степена не већег од 49, па како има 50 различитих нула, следи да је P нула-полином, тј. $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{49} = 0$. □

5.4

Дводимензионални низ рационалних бројева $f(n, i)$, где су n и i природни бројеви и $i \geqslant n$, дефинисан је рекурзивно на следећи начин:

$$\begin{aligned}
f(1, i) &= \frac{1}{i}; \\
f(n + 1, i) &= \frac{n + 1}{i}\big(f(n, n) + f(n, n + 1) + \cdots + f(n, i - 1)\big). \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Ако је p прост број, доказати да за $n > 1$ именилац разломка $f(n,p)$ (у скраћеном облику) није дељив са p.

Решење. Дефинишимо

$$f_n(x) = f(n,n)x^n + f(n,n+1)x^{n+1} + f(n,n+2)x^{n+2} + \cdots .$$

Множећи $f_n(x)$ са $1+x+x^2+\cdots$ добијамо степени ред где је коефицијент уз x^{i-1} једнак $f(n,i-1)+f(n,i-2)+\cdots+f(n,n)$. Додатно множећи са $n+1$ добијамо степени ред где за коефицијент уз x^{i-1} примећујемо да је управо једнак изразу са десне стране (5.3), осим што нема i у имениоцу разломка; другим речима, посматрани коефицијент једнак је $if(n+1,i)$. Приметимо стога да је добијени степени ред управо први извод степеног реда $f_{n+1}(x)$, тј.:

$$f'_{n+1}(x) = (n+1)f_n(x)(1+x+x^2+\cdots). \tag{5.4}$$

Посматрајмо прво случај $n=1$:

$$f'_2(x) = 2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right).$$

Приметимо да је $1+x+x^2+\cdots$ заправо први извод степеног реда $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$, па је десна страна горње релације заправо извод сложене функције, и интеграцијом обе стране добијамо

$$f_2(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^2$$

(из дефиниције $f_2(x)$ видимо да се на десној страни не појављује слободан члан, тј. интеграциона константа је једнака 0). Сада из (5.4) индукцијом директно следи

$$f_n(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^n.$$

Вредност $f(n,p)$ представља коефицијент уз x^p у горњем изразу. Приметимо да се тај коефицијент добија као збир рационалних бројева облика $\frac{a}{b}$ где је a природан број а b производ неких n бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, p-n+1\}$ (наиме, из сваке од n заграда бирамо неко $\frac{x^i}{i}$ за $i \geqslant 1$, при чему збир свих одабраних експонената за x треба да износи тачно p; следи да за свако такво i мора важити $i \leqslant p-n+1$, будући да би у супротном њихов збир био већи од p). Дакле, именилац разломка добијеног на крају биће неки делилац броја $((p-n+1)!)^n$, што очигледно није дељиво са p. $\square$

Глава 6

Неједнакости

Теорема (Неједнакости између средина)**.** *За произвољне позитивне реалне бројеве* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *важи:*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$\leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

Притом се између било која два од наведених израза достиже једнакост ако и само ако важи $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Горња четири израза називају се, редом, *хармонијска*, *геометријска*, *аритметичка* и *квадратна средина* бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Дајемо одмах један пример којим се илуструје како се, на основу ових неједнакости, може врло брзо добити нека (на први поглед неповезана) неједнакост.

Пример. За произвољне позитивне реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ важи:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

Заиста, применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине (где обе стране помножимо са n) добијамо:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n\sqrt[n]{\cancelto{1}{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1}}} = n.$$

6.1 *Нека су a, b и c ненегативни реални бројеви за које важи $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доказати:*

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \leqslant 1, \tag{6.1}$$

и одредити када се достиже једнакост.

Решење. Множећи обе стране са $(a+2)(b+2)(c+2)$, неједнакост коју треба доказати се своди на:

$$a(a+2)(c+2) + b(a+2)(b+2) + c(b+2)(c+2) \leqslant (a+2)(b+2)(c+2).$$

После развијања леве и десне стране и потирања израза који се јављају на обе стране, преостаје доказати:

$$a^2c + ab^2 + c^2b + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \leqslant abc + 8.$$

Коришћењем услова $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, тј. $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 6$, добијена неједнакост се даље своди на

$$a^2c + ab^2 + c^2b \leqslant abc + 2. \tag{6.2}$$

Приметимо да циклична замена променљивих (тј. $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto a$) оставља полазну једнакост (6.1) непромењеном. Дакле, можемо, без умањења општости, претпоставити да је b „средња“ променљива по величини, тј. важи нешто од $a \leqslant b \leqslant c$ или $a \geqslant b \geqslant c$ (будући да, ако то није испуњено, оваквим цикличним изменама можемо жељену неједнакост свести на тај случај). У том случају важи

$$a(b-a)(b-c) \leqslant 0. \tag{6.3}$$

Развијањем леве стране добијамо $ab^2 - a^2b - abc + a^2c \leqslant 0$, тј. $ab^2 + a^2c \leqslant a^2b + abc$. Додавањем израза c^2b на обе стране, добијамо

$$ab^2 + a^2c + c^2b \leqslant a^2b + abc + c^2b.$$

Будући да важи ова неједнакост, примећујемо да, да бисмо доказали (6.2), довољно је доказати још $a^2b + abc + c^2b \leqslant abc + 2$. Ово се своди на $b(a^2 + c^2) \leqslant 2$, тј. (користећи опет услов $a^2 + b^2 + c^2 = 3$) остаје показати

$$b(3-b^2) \leqslant 2. \tag{6.4}$$

Једноставно се испитује када функција с леве стране достиже максимум: њен први извод је $3 - 3b^2$, и он има нулу у тачки $b = 1$ (и такође $b = -1$, што није релевантно због услова да су a, b, c ненегативни) и ту мења знак из позитивног у негативан, што значи да се у тачки $b = 1$ достиже максимум функције $b(3-b^2)$, и тај максимум износи 2; то управо даје (6.4), што је и требало доказати.

Преостаје још одговорити на питање када се у неједнакости (6.1) достиже једнакост. Да би се достигла једнакост, неопходно је да се у обе неједнакости (6.3) и (6.4) достигне једнакост. Већ смо видели да се у (6.4) једнакост достиже само за $b = 1$. Да би се у (6.3) достигла једнакост, мора важити нешто од $a = 0$, $b = a$ или $b = c$. У последња два случаја, из $a = b = 1$, односно $c = b = 1$, добијамо $a = b = c = 1$ (преко $a^2 + b^2 + c^2 = 3$). У случају $a = 0$, поново преко $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ налазимо $c = \sqrt{2}$. Коначно, треба узети у обзир и то да смо претпоставили да је b „средња“ променљива по величини, па уколико елиминишемо ову претпоставку, на пронађене случајеве једнакости треба додати и оне који се добијају цикличном заменом променљивих. Све заједно, једнакост се достиже за:

$$(a, b, c) \in \big\{(1, 1, 1), (0, 1, \sqrt{2}), (1, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0, 1)\big\}.$$

Тиме је задатак решен. □

6.2

Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a + b + c = 3$. Доказати:

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{6.5}$$

Решење. Покушајмо да на имениоце применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине: $b^2 + 1 \geqslant 2\sqrt{b^2 \cdot 1} = 2b$ итд. Тиме добијамо

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \leqslant \frac{a}{2b} + \frac{b}{2c} + \frac{c}{2a};$$

међутим, будући да ова неједнакост ограничава израз с леве стране *одозго*, а постављена неједнакост (6.5) тражи *доње* ограничење за тај израз, овај приступ не може довести до решења.

Сада ћемо видети како се ова идеја да искористимо примећену неједнакост између аритметичке и геометријске средине на имениоцима ипак може адаптирати на начин да добијемо неједнакост у „правом“ смеру и тако решимо задатак. Запишимо:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^2+1} = \frac{a}{b^2+1} - a + a = \frac{a - ab^2 - a}{b^2+1} + a = a - \frac{ab^2}{b^2+1};\\ \text{(слично)}\quad \frac{b}{c^2+1} = b - \frac{bc^2}{c^2+1};\\ \text{(слично)}\quad \frac{c}{a^2+1} = c - \frac{ca^2}{a^2+1}.\end{aligned}$$

Дакле, неједнакост (6.5) еквивалентна је са

$$a - \frac{ab^2}{b^2+1} + b - \frac{bc^2}{c^2+1} + c - \frac{ca^2}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{2},$$

па користећи $a+b+c=3$, горња неједнакост се своди на

$$\frac{ab^2}{b^2+1} + \frac{bc^2}{c^2+1} + \frac{ca^2}{a^2+1} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Приметимо, у овој неједнакости на левој страни се појављују разломци с истим имениоцима као и у полазној неједнакости, али сад треба показати *горње* ограничење тог израза, што је управо оно што се може добити применом идеје с почетка. Дакле, на основу те идеје имамо:

$$\frac{ab^2}{b^2+1} + \frac{bc^2}{c^2+1} + \frac{ca^2}{a^2+1} \leqslant \frac{ab^{\cancel{2}}}{2\cancel{b}} + \frac{bc^{\cancel{2}}}{2\cancel{c}} + \frac{ca^{\cancel{2}}}{2\cancel{a}},$$

па треба још доказати $\frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ca}{2} \leqslant \frac{3}{2}$, тј. $ab + bc + ca \leqslant 3$. Имамо $3 = \frac{9}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3}$, па је претходна неједнакост еквивалентна са

$$3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2.$$

После развијања десне стране и потирања израза који се појављују на обе стране, видимо да преостаје доказати још $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Множећи ово са 2 и пребацивањем свега на леву страну преостаје доказати $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geqslant 0$. Међутим, лева страна се може записати у облику $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, а овај израз је очигледно ненегативан, чиме је задатак решен. □

6.3

Доказати да за све реалне бројеве a, b и c важи:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Решење. Праволинијски се проверава идентитет:

$$2(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 6(a^3b + b^3c + c^3a) = \sum_{\substack{\text{по цикличним}\\ \text{пермутацијама}\\ (a,\, b,\, c)}} (a^2 - 2ab + bc - c^2 + ca)^2$$

(напоменимо,

$$\sum_{\substack{\text{по цикличним}\\ \text{пермутацијама}\\ (a,\, b,\, c)}} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b),$$

у случају да није јасна ознака), а како је десна страна очигледно ненегативна (јер је сума неких квадрата), тиме је задатак решен. □

Глава 7

Ирационалност

7.1 *Нека су a, b и c различити природни бројеви такви да бројеви ab, ac и bc нису сви потпуни квадрати. Доказати да је број $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ирационалан.*

Прво решење. Претпоставимо да је број $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ рационалан. Тада је и број $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$, тј. $a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$ рационалан, па је и број $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$ рационалан. Следи да је и број $(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})^2$, тј. $ab+ac+bc+2(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab})$ рационалан, па је и број $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$ рационалан. Из ове и претходне констатације добијамо да је и број $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}-a(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$, тј. $(b-a)\sqrt{ac}+(c-a)\sqrt{ab}$ рационалан, па је и број $((b-a)\sqrt{ac}+(c-a)\sqrt{ab})^2$, тј. $(b-a)^2ac+(c-a)^2ab+2(b-a)(c-a)a\sqrt{bc}$ рационалан. Одатле следи да је број $\sqrt{bc}$ рационалан, тј. да је bc потпун квадрат. На аналоган начин добијамо да су и бројеви ab и ac потпуни квадрати, контрадикција. $\square$

Друго решење. Као у првом решењу, ако претпоставимо да је број $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ рационалан, добијамо да је и број $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$ рационалан, те је и број $(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})^2$ рационалан. Њега ћемо сада записати као $ab+ac+bc+2\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$. За све сабирке и чиниоце сем $\sqrt{abc}$ имамо да су рационални, па следи да је и број $\sqrt{abc}$ рационалан. Посматрајмо сада полином:

$$P(x) = (x-\sqrt{a})(x-\sqrt{b})(x-\sqrt{c}) = x^3+px^2+qx+r.$$

Будући да су његове нуле $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$, према Вијетовим формулама и ранијим констатацијама имамо и да су сви коефицијенти овог полинома (тј. p, q и r) рационални. Међутим, сада из $0 = P(\sqrt{a}) = \sqrt{a}(a+q)+ap+r$, будући да имамо $a, q > 0$ и тиме $a+q \neq 0$, следи да је и број $\sqrt{a}$ рационалан, тј. да је a потпун квадрат. Аналогно су и b и c потпуни квадрати, али тада следи да су ab, ac и bc сви потпуни квадрати, контрадикција. Тиме је задатак решен. $\square$

Треће решење. Претпоставимо супротно: нека је $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ рационалан број q. Квадрирањем једнакости $\sqrt{a}+\sqrt{b} = q-\sqrt{c}$ добијамо $a+b+2\sqrt{ab} = q^2+c-2q\sqrt{c}$, одакле следи да је број $\sqrt{ab}+q\sqrt{c}$ рационалан (јер је једнак $q^2+c-a-b$, што је рационално); означимо га са r. Сада квадрирањем једнакости $\sqrt{ab} = r-q\sqrt{c}$ добијамо $ab = r^2+q^2c-2rq\sqrt{c}$, одакле следи да је и $\sqrt{c}$ рационалан број, тј. c је потпун квадрат. Аналогно су и a и b потпуни квадрати, па имамо контрадикцију као у претходном решењу. $\square$

Напомена. Приметимо, у другом и трећем решењу добили смо и јачи закључак: за тврђење из формулације довољно је претпоставити да a, b и c нису сви потпуни квадрати (што је блажа претпоставка).

7.2

Да ли је вредност израза

$$\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{6-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

рационалан број?

Решење. Приметимо одмах да је посматрани број реалан. Обележимо

$$x=\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}},\quad y=\sqrt[3]{6-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\quad \text{и}\quad A=x+y.$$

Тада имамо

$$xy=\sqrt[3]{36-\frac{121}{9}\cdot\frac{7}{3}}=\sqrt[3]{\frac{972-847}{27}}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\frac{5}{3}$$

и

$$x^3+y^3=12.$$

Из идентитета

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

добијамо $A^3=12+5A$, тј.

$$A^3-5A-12=0.$$

Леву страну можемо раставити на чиниоце, чиме добијамо $(A-3)(A^2+3A+4)=0$. Једна могућност је $A=3$. Како једначина $A^2+3A+4=0$ има негативну дискриминанту ($3^2-4\cdot4=-7<0$), она нема реалних решења, а пошто знамо да је A реалан број, заправо је једина могућност $A=3$. Дакле, A је рационалан број. □

7.3 *Показати да у децималном запису броја $\sqrt[3]{3}$ постоји цифра различита од 2 између цифара на позицијама* 1 000 000 *и* 3 141 592 *иза децималног зареза.*

Решење. Претпоставимо супротно, да су све цифре у децималном запису броја $\sqrt[3]{3}$ између цифара на позицијама 1 000 000 и 3 141 592 иза децималног зареза једнаке 2. Означимо $s = \lfloor 10^{1\,000\,000}\sqrt[3]{3}\rfloor$. Из претпоставке следи $|\sqrt[3]{3} - (s + \frac{2}{9})10^{-1\,000\,000}| < 10^{-3\,141\,591}$, што се своди на

$$\left|\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3} - (9s+2)\right| < 9\cdot 10^{-2\,141\,591} < 10^{-2\,141\,590}. \tag{7.1}$$

С друге стране, важи следећа процена:

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3} - (9s+2)\right| \\ &= \frac{|3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3 - (9s+2)^3|}{\left(\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3}\right)^2 + \sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3}(9s+2) + (9s+2)^2} \\ &> \frac{1}{3\cdot(10^{1\,000\,002})^2} > 10^{-2\,000\,005}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Објаснимо, у горњем рачуну неједнакост за бројилац имамо на основу чињенице да су умањеник и умањилац очито различити, будући да је један дељив са 3 а други није; неједнакост за именилац имамо на основу неједнакости

$$\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3} = \sqrt[3]{3}\cdot 9\cdot 10^{1\,000\,000} < 10^{1\,000\,002}$$

и

$$9s + 2 < 10s < 10\cdot 10^{1\,000\,000}\sqrt[3]{3} < 10^{1\,000\,002}.$$

Из (7.1) и (7.2) добијамо контрадикцију. □

7.4 *Доказати да је, за све $n \geqslant 3$, могуће одабрати n тачака у равни таквих да је растојање између сваког пара тих тачака ирационалан број а да су сваке три тачке темена (недегенерисаног) троугла рационалне површине.*

Решење. Најпре одаберимо n тачака у општем положају чије су обе координате целобројне. Сви троуглови које оне образују имају рационалну површину (ово се може установити нпр. примећујући да се површина сваког таквог троугла може изразити као разлика површина одређеног правоугаоника с целобројним страницама и одређених правоуглих троуглова с целобројним катетама, или још лакше, као специјалан случај Пикове теореме), док су сва растојања између њих облика $\sqrt{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$. Одаберимо сада прост број p такав да ниједно n_i није дељиво са p, и скалирајмо раван за фактор $\sqrt{p}$. Површина свих посматраних троуглова на тај начин множи се са $(\sqrt{p})^2$, тј. са p, па остаје рационална. Сва посматрана растојања постају облика $\sqrt{n_i p}$, па како $p \nmid n_i$, дакле $n_i p$ не може бити потпун квадрат. Овим је доказ завршен. $\square$

Глава 8

Нестандардни проблеми са Фибоначијевим бројевима

У наредним проблемима користићемо низ Фибоначијевих бројева, дефинисан рекурентно на следећи начин:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ за } n \geqslant 2.$$

Његови почетни чланови су: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots$ Познато је да се може дати и експлицитна формула за Фибоначијеве бројеве:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}},$$

за $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (тзв. *златни пресек*; приближна вредност је $1.61803\ldots$) и $\psi = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi}$ (приближно $-0.61803\ldots$).

Биће нам потребно и следеће тврђење о Фибоначијевим бројевима (познато из комбинаторике, а може се и лако показати индукцијом за вежбу).

Тврђење. *За произвољан природан број l важе следеће једнакости:*

a) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2l+1} = F_{2l+2}$;

b) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2l} = F_{2l+1} - 1$.

8.1

За задат природан број k, нека је n_k најмањи природан број такав да постоји коначан скуп A целих бројева са следећим особинама:

- *за свако $a \in A$ постоје $x, y \in A$ (не обавезно различити) такви да $n_k \mid a - x - y$;*
- *не постоји подскуп B скупа A, $1 \leqslant |B| \leqslant k$, такав да $n_k \mid \sum_{b\in B} b$.*

Доказати да за све k, $k \geqslant 3$ важи $n_k < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}$.

Пример. Узмимо $k = 3$. Показаћемо да за $n_k = 8$ можемо конструисати тражени скуп A (како је у поставци n_k дефинисано као *најмања* вредност која испуњава задате услове, ако покажемо да вредност $n_k = 8$ испуњава те услове, тада ће најмања таква вредност бити 8 или још мање). Узећемо $A = \{1, 4, 5, 6\}$. Тада имамо:

$$8 \mid 1 - 4 - 5; \qquad 8 \mid 4 - 6 - 6; \qquad 8 \mid 5 - 1 - 4; \qquad 8 \mid 6 - 1 - 5,$$

па скуп A испуњава први услов. Његови непразни подскупови са не више од три елемента су:

$$\{1\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{4,5\},$$
$$\{4,6\}, \{5,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{4,5,6\},$$

и збир елемената ниједног од њих није дељив са 8, па скуп A испуњава и други услов.

Решење. За задат број k, доказаћемо да за $n_k = F_{k+2} + 3$ можемо конструисати тражени скуп A.

Претпоставимо да је k паран број. Посматрајмо скуп

$$A = \{(-1)^i F_i : 2 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{F_k + 1, F_k + 2\}.$$

(За непарно k доказ тече потпуно аналогно, уз једину разлику што два последњенаведена броја узимамо с предзнаком „$-$“.) На пример, за $k = 6$, имаћемо $n_k = F_8 + 3 = 21 + 3 = 24$ и $A = \{1, -2, 3, -5, 8, 9, 10\}$.

Проверимо да ли скуп A испуњава постављене услове. Испуњеност првог услова следи из релација:

- $(-1)^i F_i = (-1)^{i+1} F_{i+1} + (-1)^{i+2} F_{i+2}$ за све i, $2 \leqslant i \leqslant k-2$ (тј. $n_k \mid 0 = (-1)^i F_i - (-1)^{i+1} F_{i+1} - (-1)^{i+2} F_{i+2}$; ово „покрива“ све бројеве $a \in A$ облика $a = (-1)^i F_i$ за $2 \leqslant i \leqslant k-2$);

- $F_k + 2 = (F_k + 1) + F_2$ (дакле, за $a = F_k + 2$ имамо $n_k \mid a - (F_k + 1) - F_2$);

- $F_k + 1 = F_k + F_2$ (за $a = F_k + 1$, слично као претходно);

- $F_k = (F_k + 2) + (-F_3)$ (за $a = F_k$, слично као претходно);

- $n_k = F_{k+2}+3 \mid (-F_{k-1})-(F_k+1)-(F_k+2) = -F_{k+1}-F_k-3 = -F_{k+2}-3$ (за $a = -F_{k-1}$).

Потребно је још показати да скуп A не садржи непразан подскуп B који има не више од k елемата, и чији је збир елемената дељив са n_k. Претпоставимо супротно: нека је B такав подскуп скупа A. Како имамо $|A| = k+1$, услов $|B| \leqslant k$ се своди на $B \subsetneq A$. Приметимо прво:

$$\begin{aligned}\sum A &= (F_2 - F_3 + F_4 - \cdots + F_k) + (F_k+1) + (F_k+2)\\ &= (F_2 + F_4 + \cdots + F_k) - (F_3 + F_5 + \cdots + F_{k-1}) + (F_k+1) + (F_k+2)\\ &= (F_{k+1}-1) - (F_k - 1) + (F_k+1) + (F_k+2) = F_{k+1} + F_k + 3\\ &= F_{k+2} + 3 \equiv 0 \pmod{n_k}.\end{aligned}$$

Дакле, ако скуп B испуњава наведени услов, онда то испуњава и скуп $A \setminus B$ (и притом важи $A \setminus B \neq \varnothing$ због $B \subsetneq A$). Приметимо, неки од скупова B и $A \setminus B$ садржи највише један од бројева F_k, F_k+1, F_k+2 (немогуће је да оба та скупа садрже бар по два од ових бројева, јер би онда тих бројева морало бити укупно бар четири). Можемо претпоставити, без умањења општости, да управо скуп B садржи највише један од ових бројева (ако то није испуњено, онда уместо B узмемо скуп $A \setminus B$ и даље радимо с њим). Покушајмо да одредимо највећу могућу вредност израза $\sum B$. Ова вредност ће бити највећа ако у скупу B немамо ниједан негативан број а имамо све позитивне, уз то ограничење да од (позитивних) бројева F_k, F_k+1, F_k+2 можемо узети само један (и то ћемо узети баш F_k+2, ако тражимо горње ограничење за $\sum B$). Дакле:

$$\sum B \leqslant (F_k+2) + (F_2 + F_4 + \cdots + F_{k-2}) = F_k + 2 + (F_{k-1} - 1) = F_{k+1} + 1.$$

Слично, уколико желимо да ограничимо вредност $\sum B$ одоздо, примећујемо да се минимум достиже ако се у скупу B налазе сви негативни бројеви и ниједан позитиван, тј. имамо:

$$\sum B \geqslant -(F_3 + F_5 + \cdots + F_{k-1}) = -(F_k - 1).$$

Дакле, сада из неједнакости

$$-n_k < -(F_k - 1) \leqslant \sum B \leqslant F_{k+1} + 1 < n_k$$

и услова $n_k \mid \sum B$ следи да је једина могућност $\sum B = 0$.

Означимо $C_t = \{(-1)^i F_i : 2 \leqslant i \leqslant t\}$. Показаћемо индукцијом по t да скуп C_t, за $t \geqslant 3$, не садржи непразан подскуп чија је сума елемената једнака нули. За базу узимамо случај $t = 3$: тада имамо $C_3 = \{1, -2\}$, и у овом случају тврђење очигледно важи. Претпоставимо сада да тврђење важи за $t - 1$, и докажимо га за t. Претпоставимо супротно: нека скуп C_t садржи непразан подскуп D за који важи $\sum D = 0$. Како имамо $C_t = C_{t-1} \cup \{(-1)^t F_t\}$, а по индуктивној хипотези је немогуће $D \subseteq C_{t-1}$, мора важити $(-1)^t F_t \in D$. Међутим, тада за парно t имамо

$$\sum D \geqslant F_t - F_3 - F_5 - \cdots F_{t-1} = F_t - (F_3 + F_5 + \cdots + F_{t-1}) = F_t - (F_t - 1) = 1,$$

а за непарно t имамо

$$\sum D \leqslant -F_t + F_2 + F_4 + \cdots + F_{t-1} = -F_t + (F_t - 1) = -1;$$

у оба случаја добијамо контрадикцију са $\sum D = 0$. Дакле, тиме смо доказали да скуп C_t не садржи непразан подскуп чија је сума елемената једнака нули.

Вратимо се на решавање постављеног задатка. Добили смо да мора важити $\sum B = 0$, а како имамо $A = C_k \cup \{F_k + 1, F_k + 2\}$, следи да B

садржи бар један од бројева F_k+1 и F_k+2 (наиме, по претходном пасусу је немогуће $B \subseteq C_k$). Но, одатле следи

$$\sum B \geqslant (F_k+1)-(F_3+F_5+\cdots+F_{k-1}) = F_k+1-(F_k-1) = 2,$$

контрадикција са $\sum B = 0$. Тиме је коначно показано да не постоји такав скуп B, тј. да скуп A испуњава и други тражени услов.

Преостаје још доказати неједнакост $n_k < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}$ (за $n_k = F_{k+2}+3$). Приметимо неједнакост $\varphi < \frac{13}{8}$ (што се директно проверава). Дакле, имамо:

$$n_k = F_{k+2}+3 = \frac{\varphi^{k+2}-\psi^{k+2}}{\sqrt{5}}+3 = \varphi^{k+2}\cdot\frac{1+\frac{3\sqrt{5}-\psi^{k+2}}{\varphi^{k+2}}}{\sqrt{5}} < \varphi^{k+2}\cdot\frac{1+\frac{8}{\varphi^{k+2}}}{\sqrt{5}}$$
$$< \varphi^{k+2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} < \varphi^{k+2} < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2},$$

(директно се проверавају све успут коришћене неједнакости, наиме: $3\sqrt{5}<7$, $|\psi^{k+2}|<1$ и $\varphi^{k+2}\geqslant\varphi^5>8$), чиме је задатак решен. □

8.2

Доказати да за сваки природан број K постоји база b и K уређених тројки Фибоначијевих бројева (F_u, F_v, F_w) таквих да, када се запишу у бази b, њихова конкатенација $\overline{F_uF_vF_w}$ такође представља неки Фибоначијев број записан у бази b.

Решење. С циљем да најпре потражимо неке што једноставније примере, поставимо $F_u = F_w = 1$ (што јесу Фибоначијеви бројеви). Дакле, занима нас за које је базе b број b^2+bF_v+1 Фибоначијев (где бирамо још и F_v, и притом ћемо га тражити таквог да важи $F_v < b$, тј. да буде једноцифрен у бази b). Овакве примере тражимо на следећи начин: најпре фиксирамо да вредност посматраног израза буде једнака неком Фибоначијевом броју, а затим за F_v испробавамо мање Фибоначијеве бројеве и проверавамо када постоји природан број b који је решење тако добијене квадратне једначине. Налазимо следеће примере за (b, F_v): $(4, F_1) = (4, 1)$ (тада је вредност израза једнака $F_8 = 21$), $(11, F_3) = (11, 2)$ (тада је вредност израза једнака $F_{12} = 144$), $(29, F_5) = (29, 5)$ (тада је вредност израза једнака $F_{16} = 987$). Број могућности које проверавамо можемо знатно сузити уколико искористимо чињеницу да F_v морамо бирати такво да $2F_v^2$ буде мање од вредности коју смо фиксирали за посматрани израз (с обзиром на $b^2 + bF_v + 1 > 2F_v^2$, због $b > F_v$); примера ради, у овом последњем случају, када је за вредност посматраног израза узето $F_{16} = 987$, за F_v довољно је тестирати Фибоначијеве бројеве мање од $\sqrt{\frac{987}{2}}$, тј. мање од 22.

Досад пронађени примери сугеришу да се за v појављују све непарне вредности, и да тада постоји одговарајућа база b таква да важи

$$b^2 + bF_v + 1 = F_{2v+6}. \tag{8.1}$$

Сада ћемо размотрити вредности које се појављују за b, али пре тога уведимо појам тзв. *Ликаових бројева* (које је први изучавао француски математичар Édouard Lucas, по коме су добили име). Они задовољавају исту рекурентну везу као Фибоначијеви бројеви: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, али почетне вредности су другачије: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Првих неколико вредности су: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 \dots$ И за Ликаове бројеве постоји и експлицитна формула (чак једноставнија него за Фибоначијеве бројеве): $L_n = \varphi^n + \psi^n$.

Сада наслућујемо да вредности за b представљају непарно индексиране Ликаове бројеве $(L_3, L_5, L_7 \dots)$. Додајмо ипак, анализа се може спровести и без икаквог знања о Ликаовим бројевима: у том случају се може приметити да низ вредности које се јављају за b задовољава рекурентну везу $b_i = 3b_{i-1} - b_{i-2}$ (по потреби је могуће израчунати још неколико наредних могућих вредности за b пре погађања ове рекурентне везе, будући да рачунање наредних могућих вредности за b постаје врло једноставно након хипотезе (8.1); наредна могућа вредност је 76, након тога 199 итд.). У наставку решења радимо прекоЛикаових бројева, а врло слично иде и без њих, само треба додатно решавати рекурентну везу за b_i уместо да користимо већ готову формулу за Ликаове бројеве.

Фиксирајмо сада једну од могућих вредности за b, рецимо $b = 76 = L_9$, и покушајмо да нађемо још неке примере тројки (F_u, F_v, F_w) које задовољавају услов из поставке за $b = 76$. Није тешко пронаћи следеће тројке:

$$\begin{aligned}(F_u, F_v, F_w) \in \{&(1,13,1), (3,5,3), (8,2,8), (21,1,21)\} \\ &= \{(F_2, F_7, F_2), (F_4, F_5, F_4), (F_6, F_3, F_6), (F_8, F_1, F_8)\}\end{aligned}$$

(такође налазимо и тројке $(34, 0, 34)$ и $(55, 1, 55)$, али за њих ће се испоставити да су ван обрасца који уобличујемо). Дакле, сада коначно можемо формулисати и затим доказати тврђење које решава задатак: *за ма који непаран број n и ма који паран број k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, конкатенација Фибоначијевих бројева $\overline{F_k F_{n-k} F_k}$ записаних у бази L_n такође представља неки Фибоначијев број записан у бази L_n.*

Покажимо ово. Како важи $F_k, F_{n-k} < L_n$, следи да су бројеви F_k и

F_{n-k} једноцифрени у бази L_n. Одатле имамо:

$$\begin{aligned}
&\overline{F_k F_{n-k} F_k}\\
&\quad= L_n^2 F_k + L_n F_{n-k} + F_k = (\varphi^n+\psi^n)^2 \cdot \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}} + (\varphi^n+\psi^n)\cdot\frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}}\\
&\quad= (\varphi^n+\psi^n)\left((\varphi^n+\psi^n)\cdot\frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}}\\
&\quad= (\varphi^n+\psi^n)\left(\frac{\varphi^{n+k}-\varphi^{n-k}(\varphi\psi)^k+\psi^{n-k}(\psi\varphi)^k-\psi^{n+k}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}}\\
&\quad= (\varphi^n+\psi^n)\left(\frac{\varphi^{n+k}-\varphi^{n-k}+\psi^{n-k}-\psi^{n+k}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}}\\
&\quad= (\varphi^n+\psi^n)\cdot\frac{\varphi^{n+k}-\psi^{n+k}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}}\\
&\quad= \frac{\varphi^{2n+k}-(\varphi\psi)^n\psi^k+(\psi\varphi)^n\varphi^k-\psi^{2n+k}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}}\\
&\quad= \frac{\varphi^{2n+k}+\psi^k-\varphi^k-\psi^{2n+k}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{2n+k}-\psi^{2n+k}}{\sqrt{5}} = F_{2n+k}
\end{aligned}$$

(успут смо користили $(\varphi\psi)^k = (-1)^k = 1$ јер је k парно, и $(\varphi\psi)^n = (-1)^n = -1$ јер је n непарно). Тиме је доказ завршен. $\square$

Глава 9

Проблеми о цифарској репрезентацији бројева

9.1

Производ биномног коефицијента $\binom{64}{21}$ и непознатог непарног броја износи

$$5{*}\,6{*}0\,{*}8{*}\,862\,{*}1{*}\,7{*}7\,{*}4{*}\,4{*}5\,12{*}\,9{*}{*}.$$

Одредити цифре означене звездицом.

Решење. Из записа $\binom{64}{21} = \frac{64!}{21!\cdot 43!}$ добијамо да највећи степен броја 5 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$5^{\lfloor\frac{64}{5}\rfloor+\lfloor\frac{64}{25}\rfloor-\lfloor\frac{21}{5}\rfloor-\lfloor\frac{43}{5}\rfloor-\lfloor\frac{43}{25}\rfloor} = 5^{12+2-4-8-1} = 5,$$

док највећи степен броја 2 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$2^{32+16+8+4+2+1-10-5-2-1-21-10-5-2-1} = 2^{63-18-39} = 2^6.$$

Дакле, број из поставке дељив је са 5, и дељив је са 2^6 али не и са 2^7. Одатле следи да је његова последња цифра једнака 0. Обележимо преостале непознате цифре на следећи начин:

$$\overline{5a\,6b0\,c8d\,862\,e1f\,7g7\,h4i\,4j5\,12k\,9l0}. \tag{9.1}$$

Приметимо да због дељивости броја (9.1) са 2^6 троцифрени завршетак $\overline{9l0}$ мора бити дељив са 8, тј. $\overline{9l}$ мора бити дељиво са 4, одакле добијамо $l \in \{2, 6\}$. Највећи степени бројева 3 и 11 који деле $\binom{64}{21}$ јесу $3^{21+7+2-7-2-14-4-1} = 3^2$ и $11^{5-1-3} = 11$. Одатле, број (9.1) дељив је са 9 и са 11, па добијамо

$$\begin{aligned}0 &\equiv 5+a+6+b+0+c+8+d+8+6+2+e+1+f+7+g+7\\ &\qquad +h+4+i+4+j+5+1+2+k+9+l+0\\ &= 75+a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l \equiv 3+S \pmod 9\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}0 &\equiv 5-a+6-b+0-c+8-d+8-6+2-e+1-f+7-g+7\\ &\qquad -h+4-i+4-j+5-1+2-k+9-l+0\\ &= 61-S \equiv 6-S \pmod{11},\end{aligned}$$

где смо са S означили суму $a+b+c+\cdots+l$. Претходне две релације своде се на $S \equiv 6 \pmod 9$ и $S \equiv 6 \pmod{11}$, тј. $99 \mid S-6$. Како је

S збир 12 цифара и за цифру l имамо ограничење $2 \leqslant l \leqslant 6$, следи $2 \leqslant S \leqslant 105$, па из овог и претходног закључка добијамо $S = 6$ или $S = 105$. Претпоставимо најпре $S = 105$. Ово је могуће само у случају $a = b = c = \cdots = k = 9$ и $l = 6$. Но, тада би четвороцифрени завршетак броја (9.1) износио $\overline{k9l0} = 9960$ и он би морао да буде дељив са $2^4 = 16$, а што није тачно (јер 996 није дељиво са 8). Према томе, остаје $S = 6$.

Подсетимо се, $l \in \{2, 6\}$. Размотримо прво случај $l = 2$. Како мора важити $2^3 \mid \overline{k9l} = \overline{k92}$, следи $k = 1$ или $k = 3$ (не може бити $k \geqslant 5$ због $S = 6$). Могућност $k = 3$ отпада јер мора важити $2^4 \mid \overline{2k9l}$, али $16 \nmid 2392$. Преостаје $k = 1$. Тада седмоцифрени завршетак броја (9.1) износи 5 121 920; но, како је ово дељиво са 2^7 (што се лако може видети примећујући да $2^6 = 64 \mid 512192$ због $64 \mid 512000$ и $64 \mid 192$), и број (9.1) био би дељив са 2^7, али раније је констатовано да је он дељив са 2^6 али не и са 2^7, контрадикција. Коначно закључујемо $l = 6$. Сада из $S = 6$ следи $a = b = c = \cdots = k = 0$. Посматрани број је

$$50\,600\,080\,862\,010\,707\,040\,405\,120\,960.$$

$\square$

9.2

Означимо са $S(k)$ суму цифара природног броја k. Доказати да постоји $k \in \mathbb{N}$ које не садржи цифру 9 у свом децималном запису, такво да важи $S(2^{24^{2017}}k) = S(k)$.

Решење. Означимо $n = 2^{24^{2017}}$. У првој фази доказујемо да за дато n постоји $k' \in \mathbb{N}$ које не садржи цифру 9 у свом децималном запису, такво да важи $S(nk') \leqslant S(k')$. Нека је s број цифара броја n.

Приметимо да се n завршава цифром 6. Дефинишимо функцију f на скупу $\mathbb{N}_0$ на следећи начин: ако се j завршава цифром 0 или 1, узмимо тада $f(j) = 7$, а у свим осталим случајевима $f(j) = 8$. На овај начин постигли смо да је последња цифра израза $6f(j)+j$ увек мања од $f(j)$. Дефинишимо $d_0 = f(0) = 7$, $k'_0 = d_0$, и за $u = 1, 2, \ldots$ дефинишимо рекурзивно $d_u = f\left(\left\lfloor \frac{nk'_{u-1}}{10^u} \right\rfloor\right)$, $k'_u = 10^u d_u + k'_{u-1} = \overline{d_u \ldots d_1 d_0}$. Фиксирајмо сада $u \in \mathbb{N}_0$. За све $0 \leqslant v \leqslant u$, цифра на позицији $v+1$ здесна у производу nk'_u износи:

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{nk'_u}{10^v} \right\rfloor \bmod 10 &= \left\lfloor \frac{n(10^v \cdot \overline{d_u d_{u-1} \ldots d_v} + \overline{d_{v-1} \ldots d_1 d_0})}{10^v} \right\rfloor \bmod 10 \\
&= \left\lfloor n \cdot \overline{d_u d_{u-1} \ldots d_v} + \frac{n \cdot \overline{d_{v-1} \ldots d_1 d_0}}{10^v} \right\rfloor \bmod 10 \\
&= \left(n \cdot \overline{d_u d_{u-1} \ldots d_v} + \left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) \bmod 10 \\
&= \left(6d_v + \left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) \bmod 10 \\
&= \left(6f\left(\left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) \bmod 10 \\
&\leqslant f\left(\left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) - 1 = d_v - 1
\end{aligned}$$

(неједнакост на крају следи по дефиницији функције f). Како важи $nk'_u < n \cdot 10^{u+1}$, добијамо да nk'_u има највише $s + u + 1$ цифру, па из претходног и овог запажања следи:

$$S(nk'_u) \leqslant 9s + \sum_{z=0}^{u} (d_z - 1) = \sum_{z=0}^{u} d_z + 9s - u - 1 = S(k'_u) + 9s - u - 1.$$

Одатле, за довољно велико u важи $S(nk'_u) \leqslant S(k'_u)$, што је и требало доказати. Узмимо $k' = k'_u$ за такво довољно велико u.

Довршимо сада доказ. Ако важи $S(nk') = S(k')$, задатак је решен. Претпоставимо зато $S(nk') < S(k')$. Нека је r број цифара броја nk'. Дефинишимо

$$k = \sum_{z=0}^{S(k')-S(nk')-1} 10^{sz} + 10^{s(S(k')-S(nk'))} \sum_{z=0}^{S(n)-2} 10^{rz} k'.$$

Важи $S(k) = (S(k') - S(nk')) + (S(n) - 1)S(k') = S(n)S(k') - S(nk')$. Даље, број nk заправо представља конкатенацију броја nk' поновљеног $S(n)-1$ пута и броја n поновљеног $S(k') - S(nk')$ пута, па следи $S(nk) = S(nk')(S(n)-1)+S(n)(S(k')-S(nk')) = S(n)S(k')-S(nk')$. Овим је задатак решен. $\square$

Напомена 1. Тврђење задатка заправо важи за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$, не само $n = 2^{24^{2017}}$. Скицираћемо доказ. Јасно, можемо претпоставити да се n не завршава цифром 0. Уколико се n завршава цифром a различитом од 1, доказ је директно уопштење првог решења: дефинишемо функцију $f(a, j)$ која пресликава пар (a, j) у број l такав да се $la + j$ завршава цифром различитом од l (ово је увек могуће; штавише, можемо увек одабрати $l \in \{6, 7, 8\}$); наставак функционише исто као малопре. Међутим, за $a = 1$, доказ је, иако се заснива на истој идеји, технички знатно изазовнији.

Напомена 2. Избор $n = 2^{24^{2017}}$ у формулацији је мотивисан следећим разлозима. Прво, најдеснија ненула цифра броја n не сме бити једнака 1 (због претходне напомене). Друго, битно је то што за одабрано n важи $n \equiv 1 \pmod 9$, јер за било коју другу класу остатака по модулу 9 постоји знатно једноставније решење: наиме, за $n \equiv 0 \pmod 9$ лако се показује да можемо узети довољно дугачко $k' = 333\ldots3336$, а за $n \not\equiv 0, 1 \pmod 9$ можемо узети довољно дугачко $k' = 888\ldots888$.

Глава **10**

Нестандардне трансформације на паровима и n-торкама бројева

10.1 *Назовимо* кораком *функцију која уређен пар природних бројева* (x, y) *коме је тачно једна координата парна пресликава у пар* $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2})$ *ако* $2 \mid x$*, односно у пар* $(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ *ако* $2 \mid y$*. Доказати да за сваки непаран природан број* n*,* $n > 1$*, постоји паран природан број* b*,* $b < n$*, такав да се сукцесивном применом* *коначно много корака од уређеног пара* (n, b) *добија уређен пар* (b, n).

Решење. Нека су дати природни бројеви x и y, и претпоставимо $2 \mid x$ и $2 \nmid y$. Како важи $y \equiv -x \pmod{x+y}$, имамо $(x, y) \equiv (x, -x) \pmod{x+y}$ и $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2}) \equiv (\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) \pmod{x+y}$; другим речима, дефинисан корак полови обе координате по модулу $x + y$ (што је константно). Дакле, ако се пар (b, n) добија после k корака од пара (n, b), закључујемо $(\frac{n}{2^k}, -\frac{n}{2^k}) \equiv (b, n) \equiv (-n, n) \pmod{m}$, за $m = n + b$. Ово се своди на $n(2^k + 1) \equiv 0 \pmod{m}$. Приметимо да важи и обратно: ако n, k и m задовољавају претходну конгруенцију, тада имамо $\frac{n}{2^k} \equiv -n \pmod{m}$ (обратимо само пажњу, да би имплицирани модуларни инверз броја 2^k имао смисла, m мора бити непаран број, што јесте испуњено због $m = n + b$ где су n и b различите парности), па се у том случају од пара (n, b) после k корака добија пар (b, n).

Дакле, можемо узети $m = 2^k + 1$, тј. $b = 2^k + 1 - n$, где је k најмањи природан број такав да важи $2^k + 1 > n$. Како по дефиницији имамо $2^{k-1} + 1 \leqslant n$, следи $2^k + 1 < 2n$, тј. $b < n$, чиме је доказ завршен. $\square$

10.2

Одредити све природне бројеве n *за које постоје ненегативни цели бројеви* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *такви да важи*

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Решење. Претпоставимо да природан број n испуњава услове задатка, и нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одговарајући ненегативни цели бројеви. Из услова

$$\frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1, \tag{10.1}$$

посматрањем по модулу 2, добијамо $1 + 2 + \cdots + n \equiv 1 \pmod 2$, тј. $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 1 \pmod 2$. Приметимо, ако је n дељив са 4, или ако даје остатак 3 при дељењу са 4, тада је број $\frac{n(n+1)}{2}$ паран, што је у контрадикцији с добијеном конгруенцијом. Дакле, преостају могућности $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 2 \pmod 4$.

(Напоменимо, у горњем посматрању једнакости (10.1) по модулу 2, због разломака на левој страни имплицитно смо користили појам и особине модуларног инверза. За студенте који нису упознати с овим појмом, даћемо и алтернативни пут до истог закључка. Помножимо обе стране једнакости (10.1) са $3^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$. Тиме добијамо:

$$3^{\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq 1} a_i} + 2\cdot 3^{\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq 2} a_i} + \cdots + n\cdot 3^{\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq n} a_i} = 3^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Сада видимо да се ова једнакост по модулу 2 поново своди на $1+2+\cdots+n \equiv 1 \pmod 2$, па даље настављамо као малопре.)

Потребно је још доказати да за свако n које испуњава $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 2 \pmod 4$ постоје тражени $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За n-торку реалних бројева $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рећи ћемо да је *фантастична* акко постоје ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такви да важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{x_n}{3^{a_n}} = 1.$$

Дакле, уз ову терминологију, треба показати да, уколико важи $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, тада је n-торка $(1, 2, \ldots, n)$ фантастична. Доказ ћемо спровести индукцијом по n. Пре него што пређемо на доказ индукцијом, наводимо једно корисно запажање, које ћемо касније користити више пута: ако желимо да утврдимо да је n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ фантастична, довољно је показати да је $(n-1)$-орка $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, \frac{x_{n-1}+x_n}{3})$ фантастична.

Заиста, уколико је ова другонаведена $(n-1)$-орка фантастична, тада постоје ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ такви да важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_{n-1}}} = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{3^{a_{n-2}}} + \frac{\frac{x_{n-1}+x_n}{3}}{3^{a_{n-1}}} = 1,$$

али ово се може записати и у облику

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_{n-2}}} + \frac{1}{2^{a_{n-1}+1}} + \frac{1}{2^{a_{n-1}+1}}& \\ = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{3^{a_{n-2}}} + \frac{x_{n-1}}{3^{a_{n-1}+1}} + \frac{x_n}{3^{a_{n-1}+1}} &= 1,\end{aligned}$$

одакле видимо да је и n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ фантастична (њој одговарајући бројеви су $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}+1, a_{n-1}+1$).

Приметимо, у формулацији претходног помоћног запажања, није обавезно да два броја која замењујемо трећином њиховог збира буду баш *последња* два броја, него могу бити на произвољним местима (јер дефиниција фантастичне n-торке очито не зависи од поретка бројева). Даље, приметимо још да из горњег помоћног запажања специјално добијамо и следеће: уколико се у некој n-торци појављују бројеви x и $2x$, и уколико је $(n-1)$-орка добијена брисањем броја $2x$ фантастична, тада је и полазна n-торка фантастична (ово директно следи применом помоћног запажања на бројеве x и $2x$, с обзиром на $\frac{x+2x}{3} = x$).

Вратимо се сада доказу индукцијом. Као базу урадићемо случајеве $n = 1$ и $n = 5$ (видећемо током доказа да ће се сви преостали случајеви свести на неки од ова два, или на неки претходно урађени). За $n = 1$ тврђење је очигледно (треба показати да је једночлани низ који сачињава само број 1 фантастичан, што следи из $\frac{1}{2^0} = \frac{1}{3^0} = 1$, тј. можемо узети $a_1 = 0$). Узмимо сада $n = 5$. Посматрајмо следећи низ трансформација:

$$(1,2,3,4,5) \mapsto (1,2,3,3) \mapsto (1,2,2) \mapsto (1,2) \mapsto (1) \tag{10.2}$$

(у прва два корака смо заменили два последња броја трећином њиховог збира, а у наредна два смо „обрисали“ двојке, што представља, с обзиром на присуство броја 1, већ истакнут специјалан случај помоћног запажања). Применом помоћног запажања (више пута) добијамо да је петорка $(1,2,3,4,5)$ фантастична (наиме, како је једночлани низ добијен на крају фантастичан, то важи и за пар $(1,2)$; сада, како је пар $(1,2)$ фантастичан, то важи и за тројку $(1,2,2)$ итд. све до почетка).

Тиме је показана база индукције. Нека је сада задат природан број n, $n \equiv 1,2 \pmod 4$, и претпоставимо да тврђење важи за све бројеве мање од n (наравно, који су притом конгруентни са 1 или 2 по модулу 4). Разматрамо два случаја.

- $n \equiv 2 \pmod 4$:

  Треба показати да је n-торка $(1,2,\ldots,n)$ фантастична. Како је n паран број, и како се у овој n-торци појављује и број $\frac{n}{2}$, брисањем броја n из уочене n-торке добијамо $(1,2,\ldots,n-1)$, а како је ова $(n-1)$-орка фантастична по индуктивној хипотези (приметимо и, $n-1 \equiv 1 \pmod 4$), по помоћном запажању (прецизније, његовом истакнутом специјалном случају) следи да је и n-торка $(1,2,\ldots,n)$ фантастична.

- $n \equiv 1 \pmod 4$:

  У овом случају можемо претпоставити $n \geqslant 9$ (мањи случајеви су показани засебно у бази индукције). И овде је идеја да сукцесивним трансформацијама које допушта помоћно запажање сведемо n-торку $(1, 2, \ldots, n)$ на нешто што јесте фантастично (и тада ће и полазна n-торка бити фантастична). Запишимо n-торку $(1, 2, \ldots, n)$ у облику

$$(1, 2, \ldots, 6m-3, 6m-2, 6m-1, 6m, 6m+1, \ldots, n-1, n)$$

за $m = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$. Како се у горњој n-торци појављује број $3m$, можемо одмах обрисати број $6m$. Даље, сваки пар бројева $6m-i, 6m+i$ можемо заменити бројем $4m$ (због $\frac{(6m-i)+(6m+i)}{3} = 4m$). Урадимо ово за све i, $1 \leqslant i \leqslant n-6m$ (тј. за све бројеве од $6m+1$ па до краја низа, уз њихове парове). Притом, потребно је проверити да ли за цео овај распон заиста оба броја која упарујемо постоје у посматраном низу, што конкретно значи, да ли за $i = n-6m$ важи $6m-i \geqslant 1$ (ако ово покажемо за $i = n-6m$, важиће, јасно, и за мање вредности i). Показаћемо чак јаче: $6m-(n-6m) > 2m$ (касније ће нам требати баш ова јача неједнакост); и заиста, написана неједнакост је еквивалентна са $n < 10m$, а ово је тачно због $\frac{n}{6} < m+1$ (према дефиницији функције $\lfloor\cdot\rfloor$), тј. $n < 6m+6 < 10m$ за $m \geqslant 2$ (тј. $n \geqslant 13$), док за $n = 9$ директно имамо $m = 1$ и $9 = n < 10m = 10$. Дакле, коначно, када извршимо све ове замене, и при свакој таквој замени добијемо по једну копију броја $4m$, све ове добијене копије можемо обрисати будући да се у низу на крају и даље налази број $2m$ (на основу малопређашње неједнакости). Тиме нам после свега остаје низ бројева од 1 до $6m-(n-6m)-1$, тј. $(1, 2, \ldots, 12m-n-1)$. Како имамо $12m-n-1 < n$ (због $12m < 2n$) и $12m-n-1 \equiv -1-1 \equiv 2 \pmod 4$, на основу индуктивне хипотезе закључујемо да је низ добијен на крају фантастичан, па то важи и за n-торку од које смо кренули.

Тиме је задатак решен. $\square$

Пример. Показаћемо на примеру $n = 5$ (урађеном у бази индукције) на који начин процедура из решења доводи до вредности a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Како на крају (10.2) у низу имамо само јединицу, овај случај смо видели у бази за $n = 1$, и (подсетимо се) констатовали смо:

$$\frac{1}{2^0} = \frac{1}{3^0} = 1.$$

Сада, „брисање двојке“ у трансформацији $(1, 2) \mapsto (1)$ заправо представља замену пара $1, 2$ са $\frac{1+2}{3}$, па на основу доказа помоћног запажања долазимо до једнакости

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^1} = 1.$$

У кораку пре овог: $(1, 2, 2) \mapsto (1, 2)$, такође смо пар $1, 2$ заменили бројем 1, па долазимо до једнакости

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^1} = 1.$$

Даље, корак $(1, 2, 3, 3) \mapsto (1, 2, 2)$ (замена пара $3, 3$ бројем 2) доводи до једнакости

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^2} = 1.$$

И коначно, на основу корака $(1, 2, 3, 4, 5) \mapsto (1, 2, 3, 3)$ стижемо до једнакости

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^3} = 1.$$

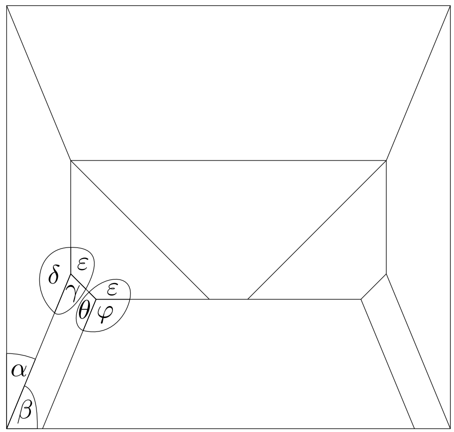
Глава 11

Нестандардни проблеми о подели геометријских фигура

11.1 *Назовимо* правим једнакокраким трапезом *једнакокраки трапез чији краци нису паралелни (дакле, паралелограми и правоугаоници нису прави једнакокраки трапези). Посматрамо поделу правоугаоника на n (могуће различитих) правих једнакокраких трапеза. За такву поделу кажемо да је* стриктна *ако унија никојих i трапеза у подели, за $2 \leqslant i \leqslant n$, не чини прави једнакокраки трапез (другим речима, подела је стриктна ако се не може до-*

бити од неке поделе тог правоугаоника на мање од n правих једнакокраких трапеза, додатним дељењем неких трапеза из поделе на нове трапезе). Доказати да за све природне бројеве n, $n \geqslant 9$, постоји стриктна подела правоугаоника 2017×2018 на n правих једнакокраких трапеза.

Решење. Конструисаћемо прво тражену поделу на 9 трапеза. Идеја је скицирана на слици, и очито је да оваква подела јесте стриктна, под условом (што треба проверити) да је заиста могуће одабрати означене углове на такав начин да се постигне ова конфигурација.

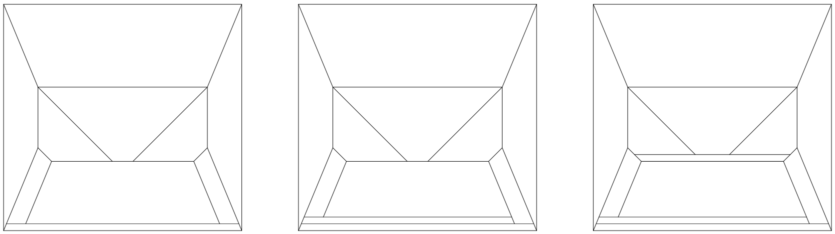


Очигледно имамо $\beta = 90^\circ - \alpha$ и $\gamma = \beta = 90^\circ - \alpha$, затим $\delta = 180^\circ - \alpha$, $\theta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$, $\varepsilon = 360^\circ - \gamma - \delta = 360^\circ - (90^\circ - \alpha) - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + 2\alpha$, и коначно $\varphi = 180^\circ - \beta = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$. Међутим, приметимо да мора важити једнакост $\varepsilon + \theta + \varphi = 360^\circ$, што се своди на:

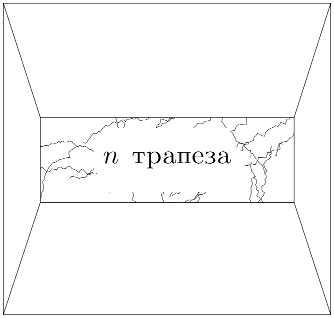
$$\begin{aligned}(90^\circ + 2\alpha) + (90^\circ + \alpha) + (90^\circ + \alpha) &= 360^\circ;\\ 270^\circ + 4\alpha &= 360^\circ;\\ 4\alpha &= 90^\circ;\\ \alpha &= 22.5^\circ.\end{aligned}$$

Дакле, за $\alpha = 22.5^\circ$ (остали углови се одатле директно израчунавају) можемо направити жељену поделу на 9 трапеза.

Модификацијом добијене поделе можемо добити и поделе на 10, 11, односно 12 трапеза (приказане на слици).



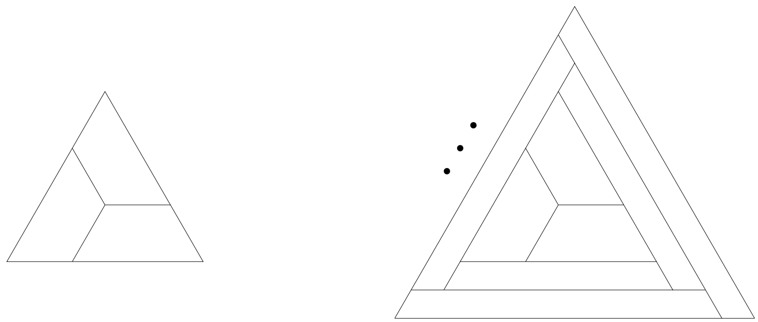
Да бисмо завршили доказ, довољно је показати још како се од произвољне поделе правоугаоника на n трапеза може добити подела правоугаоника на $n+4$ трапеза (ово је заиста довољно, будући да тада од наше поделе на 9 трапеза можемо, сукцесивном применом ове идеје, добити поделе на $13, 17, 21\ldots$ трапеза, тј. за све бројеве који дају остатак 1 при дељењу са 4; од наше поделе на 10 трапеза добијамо поделе за све бројеве који дају остатак 2 при дељењу са 4 итд.). Идеја је приказана на следећој слици.



Другим речима, ако је „унутрашњи“ правоугаоник подељен на n трапеза, од њега можемо добити поделу „спољашњег“ правоугаоника на $n+4$ трапеза. Притом једино треба обратити пажњу на то да четири приказане косе дужи не смеју бити продужетак неке деобене дужи у унутрашњем правоугаонику (будући да би то могло нарушити услов да је подела стриктна). Међутим, ово је увек могуће испунити јер примећујемо да нам, кроз читав ток решења, димензије правоугаоника нису биле никакав ограничавајућ фактор (тј. све досад приказано могло се примењивати на правоугаонике било којих димензија), па стога димензије унутрашњег правоугаоника увек можемо прилагодити тако да се избегне поменути нежељен случај. Тиме је задатак решен. $\square$

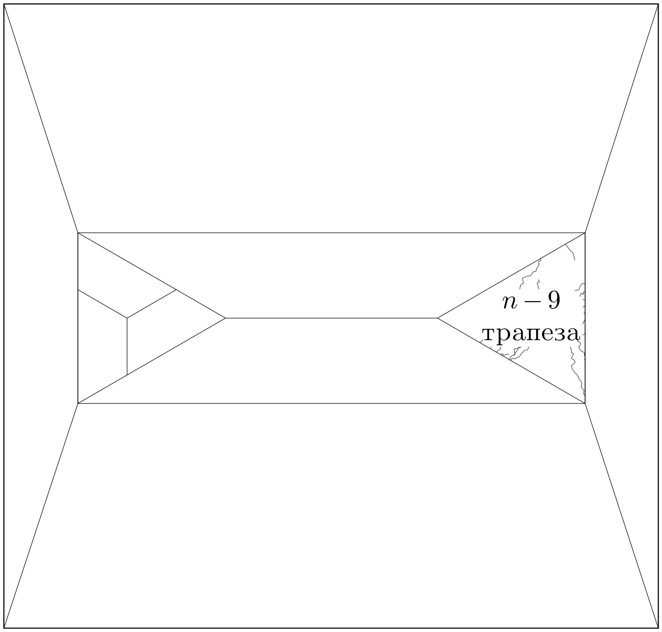
Напомена 1. Тежина овог задатка највећим делом лежи у томе што није сасвим једноставно доћи до поделе на 9 трапеза с почетка (сви кораци после тога су знатно уочљивији). Показаћемо и алтернативно решење (које је вероватно једноставније пронаћи) уколико се услов $n \geqslant 9$ у поставци ослаби на $n \geqslant 12$.

Најпре покажимо да, за произвољно k, $k \geqslant 3$, постоји стриктна подела једнакостраничног троугла на k правих једнакокраких трапеза. На наредној слици с леве стране је приказана подела на 3 трапеза, а с десне стране је приказано како се од те поделе, додавањем једног по једног трапеза, може доћи до поделе на k трапеза за произвољно k.



Посматрајмо сада наредну поделу правоугаоника на 8 трапеза.

Приметимо, оваква подела не може се спровести за правоугаоник 2017×2018; прецизније, услов да би се оваква подела могла спровести јесте да дужина правоугаоника буде већа од његове висине помножене са $\sqrt{3}$ (како се два једнакостранична троугла не би „преклопили“). Међутим, надоградњом ове идеје може се добити подела произвољног правоугаоника на n трапеза за ма које n, $n \geqslant 12$, као што је приказано на следећој слици.

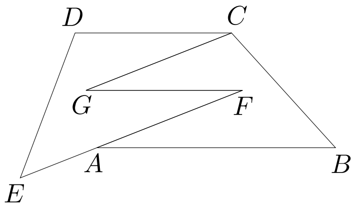


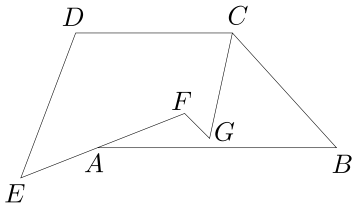
Напомена 2. Уколико би услов био још слабији, тј. уколико би се тражила подела за $n \geqslant 16$, тада би се задатак могао решити и само помоћу идеје с једнакостраничним троугловима из претходне напомене, без идеје с додавањем четири „околна“ трапеза виђене на крају (што је, приметимо, иста идеја виђена и у првобитном решењу за прелаз $n \mapsto n+4$). Наиме, у том случају било би довољно поделити по дужини

задати правоугаоник на два подударна правоугаоника; тада би сваки од два тако добијена правоугаоника имао дужину бар двоструко дужу од висине, па би се један од њих могао поделити на 8 трапеза на начин виђен у претходној напомени, а други на 8 или више (колико год је потребно) трапеза на сличан начин (један од два једнакостранична троугла поделимо поново на 3 трапеза, а други на онолико колико је још потребно).

11.2 *Уочени петоугао изломљеном линијом која повезује два његова темена подељен је на два међусобно подударна петоугла. Доказати да полазни петоугао има пар подударних углова, и да петоуглови на које је подељен имају по два пара паралелних страница.*

Решење. Нека је $ABCDE$ уочени петоугао. Нека је посматрана изломљена линија сачињена од d дужи. Ако она повезује два суседна темена, с једне њене стране ће остати 1 ивица полазног петоугла а с друге 4; ако она повезује два несуседна темена, с једне њене стране ће остати 2 ивице полазног петоугла, а с друге 3. Одатле наизглед следи да фигуре које се добијају након поделе не могу обе бити петоуглови (будући да би имале $d+1$ и $d+4$, односно $d+2$ и $d+3$ ивице), али постоји специјалан случај у ком је то могуће: уколико изломљена линија у једном темену представља продужетак једне ивице полазног петоугла (очигледно, угао полазног петоугла у том темену тада мора бити неконвексан), и то једне од 3 ивице које преостају са исте стране изломљене линије (док су с друге стране 2 ивице), тада оба многоугла која се добијају након поделе имају по $d+2$ странице, па ће за $d = 3$ ово заиста бити петоуглови. Дакле, рецимо да је посматрана изломљена линија $AFGC$, при чему је F на продужетку ивице EA.





Приметимо, међу угловима петоуглова $ABCGF$ и $CDEFG$ укупно морају бити бар два неконвексна: у темену F тачно један од ова два петоугла има неконвексан угао, и исто тако за теме G; међутим, осим ова два неконвексна угла, укупно још највише један може бити неконвексан (јер би тај додатни неконвексан угао морао да буде код темена код ког је и у полазном петоуглу угао неконвексан, и то не код темена A, будући да је угао код темена A у полазном петоуглу подељен на један опружен и један оштар угао; међутим како збир углова у петоуглу износи $540°$, следи да, осим угла код темена A, још највише код једног темена полазног петоугла угао може бити неконвексан). Како укупан број неконвексних углова за ова два петоугла не може бити 3 (јер су та два петоугла подударна), следи да су тачно два угла неконвексна, тј. у сваком петоуглу по један, и то управо угао код темена F у једном петоуглу и угао код темена G у другом. Према томе, трансформација подударности која пресликава петоугао $ABCGF$ у $CDEFG$, назовимо је ψ, мора пресликавати теме F у теме G (ако је у петоуглу $ABCGF$ неконвексан угао код F) или обратно (ако је у петоуглу $ABCGF$ неконвексан угао код G). Размотримо ова два случаја.

- $\psi(F) = G$:

  Приметимо, у петоуглу $ABCGF$ теме G је суседно темену F, па зато слика $\psi(G)$ треба да буде суседна темену $\psi(F)$ (што је G) у петоуглу $CDEFG$. То оставља две могућности: $\psi(G) = F$ или $\psi(G) = C$. У свакој од њих ψ је једнозначно одређено, наиме:

$$\psi : \begin{pmatrix} A & B & C & G & F \\ C & D & E & F & G \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \psi : \begin{pmatrix} A & B & C & G & F \\ F & E & D & C & G \end{pmatrix}.$$

У првој могућности из $\psi(AF) = CG$ и $\psi(CG) = EF$ добијамо $AF \cong CG \cong EF$, што је очигледно немогуће (јер је дуж EF строго садржана у AF). Преостаје друга могућност (управо је она приказана на левој половини слике). У њој имамо $\psi(\measuredangle ABC) = \measuredangle FED$, а ово су управо углови код темена B и E у полазном петоуглу, тј. закључили смо да полазни петоугао има пар подударних углова (што је и било тражено). Осим тога, из $\psi(\measuredangle GFA) = \measuredangle CGF$ и $\psi(\measuredangle CGF) = \measuredangle DCG$ следи $\measuredangle GFA \cong \measuredangle CGF \cong \measuredangle DCG$, а одатле следи (по особинама трансверзалних углова) $FE \parallel GC$ и $FG \parallel CD$, тј. у петоуглу $CDEFG$ имамо два пара паралелних страница (а онда исто важи и за петоугао $ABCGF$, јер су подударни). Дакле, у овом случају смо добили све што је захтевано у поставц (лева половина слике представља уједно и пример да се ово може геометријски реализовати).

- $\psi(G) = F$:

  Слично као малопре, видимо да се теме F (пошто је суседно темену G у петоуглу $ABCGF$) мора пресликати или у теме G, или у теме E. У првој могућности поново добијамо случај који смо већ размотрили у претходном делу. Остаје:

$$\psi : \begin{pmatrix} A & B & C & G & F \\ D & C & G & F & E \end{pmatrix}.$$

(Ова могућност је приказана на десној половини слике.) Одавде имамо $\measuredangle BCG \cong \measuredangle CGF \cong \measuredangle GFE$, одакле следи $BC \parallel GF$ и $CG \parallel FE$, а такође имамо и $BC \cong CG \cong GF \cong FE$. То значи да су тачке B, G и E колинеарне, али тада би дуж BA секла CG и GF, што је контрадикција. Дакле, и овај случај је немогућ, чиме је задатак решен.

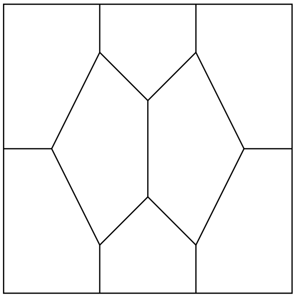
□

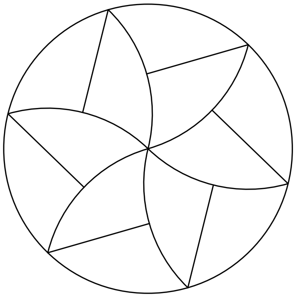
11.3

a) *Да ли је могуће поделити квадрат на коначан број конвексних петоуглова?*

b) *Да ли је могуће поделити круг на коначан број подударних делова на такав начин да бар један од тих делова не садржи центар круга (ни на рубу)?*

Решење. Могуће је:

a) 

b) 

□

Глава 12

Примена комплексних бројева у решавању геометријских задатака

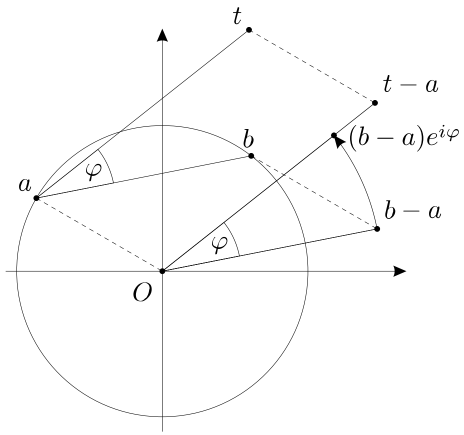
12.1 *У унутрашњости задатог правилног n-тоугла $A_1A_2\dots A_n$ одредити геометријско место тачака M за које важи*

$$\measuredangle MA_1A_2 + \measuredangle MA_2A_3 + \cdots + \measuredangle MA_{n-1}A_n + \measuredangle MA_nA_1 = \frac{(n-2)\pi}{2}.$$

Решење. Одговор: тражено геометријско место тачака чине све тачке које леже на некој оси симетрије задатог многоугла, и притом се налазе у његовој унутрашњости.

Нека је M тачка са наведеном особином. Поставимо посматрани n-тоугао у комплексну раван, на такав начин да темену A_i одговара комплексан број ε^i, за $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, а тачки M одговара комплексан број m. Означимо $P(x) = x^n - 1$; приметимо, како су бројеви ε^1, ε^2, $\ldots$, ε^n тачно сви n-ти корени броја 1, следи

$$P(x) = x^n - 1 = (x - \varepsilon^1)(x - \varepsilon^2)\cdots(x - \varepsilon^n).$$



Нека су T, A и B три различите тачке у комплексној равни, којима одговарају комплексни бројеви t, a и b, и притом важи $|a| = |b| = 1$. Ако означимо $\varphi = \measuredangle BAT$, важи $\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}} \in \mathbb{R}$ (видети слику), тј.

$$\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}} = \overline{\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}}} = \frac{\overline{t} - \overline{a}}{(\overline{b} - \overline{a})e^{-i\varphi}},$$

те коришћењем $\overline{a} = \frac{1}{a}$ и $\overline{b} = \frac{1}{b}$ налазимо

$$t - a = e^{2i\varphi} \frac{b-a}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \left(\bar{t} - \frac{1}{a} \right) = -e^{2i\varphi} ab \left(\bar{t} - \frac{1}{a} \right).$$

Отуда, ако означимо $\varphi_j = \measuredangle A_{j+1} A_j M$ за $j = 1, 2, \ldots, n$ (идентификујемо $A_{n+1} \equiv A_1$), имамо, за све j,

$$m - \varepsilon^j = -e^{2i\varphi_j} \varepsilon^j \varepsilon^{j+1} (\overline{m} - \varepsilon^{n-j}).$$

Множењем свих ових једнакости добијамо:

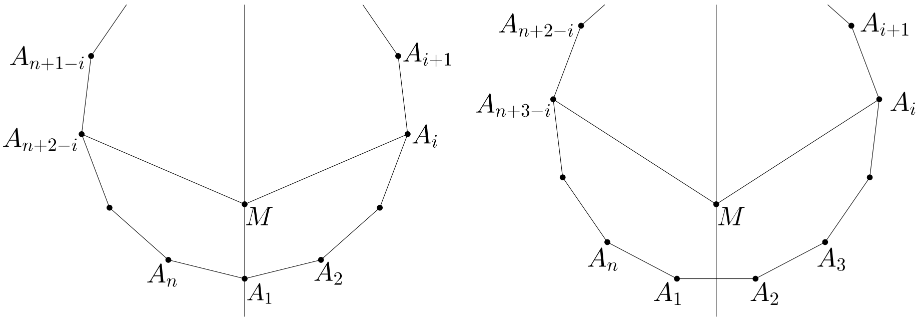
$$P(m) = (-1)^n e^{2i \sum_{j=1}^n \varphi_j} \varepsilon^{n(n+2)} P(\overline{m}).$$

Одавде, како имамо (према услову задатка) $\sum_{j=1}^n \varphi_j = \frac{(n-2)\pi}{2}$ и $\varepsilon^n = 1$, следи

$$P(m) = (-1)^n e^{i(n-2)\pi} P(\overline{m}) = (-1)^n (-1)^{n-2} P(\overline{m}) = P(\overline{m}).$$

Дакле, ако тачка M задовољава услове задатка, онда важи $m^n = \overline{m}^n$. За $m = 0$ услов је свакако испуњен, а за $m \neq 0$ имамо $m = |m| e^{i\varphi}$ за неко $\varphi \in [0, 2\pi)$, и онда $1 = m^n \cdot (\overline{m})^{-n} = e^{2in\varphi}$. Из последње једнакости, имајући на уму $\varphi \in [0, 2\pi)$, добијамо $\varphi = \frac{k\pi}{n}$ за неко k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Овим смо доказали да тачка M лежи на једној од оса симетрије задатог n-тоугла.

Докажимо сада да свака тачка са осе симетрије задатог n-тоугла, која је притом у његовој унутрашњости, задовољава наведени услов. Нека је најпре тачка M на оси симетрије која пролази кроз неко теме n-тоугла. Без умањења општости, можемо узети да та оса симетрије пролази кроз тачку A_1. Тада имамо $\measuredangle M A_i A_{i+1} = \measuredangle M A_{n+2-i} A_{n+1-i}$ за



све i, $i = 1, 2, \ldots, n$, па важи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_{n+2-i}A_{n+1-i}$, а с друге стране, приметимо да је збир свих углова и на левој и на десној страни ове једнакости укупно једнак збиру свих углова у датом n-тоуглу, тј. $(n-2)\pi$. Одавде директно добијамо $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \frac{(n-2)\pi}{2}$, што је и требало доказати. Слично, ако је M на оси симетрије која је симетрала неке странице, без умањења општости можемо узети да је то страница A_1A_2. Тада имамо $\measuredangle MA_iA_{i+1} = \measuredangle MA_{n+3-i}A_{n+2-i}$, па важи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_{n+3-i}A_{n+2-i}$, а збир леве и десне стране опет износи $(n-2)\pi$, па поново следи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \frac{(n-2)\pi}{2}$. Тиме је задатак решен. $\square$

Глава 13

Тепих који су изгризли мољци

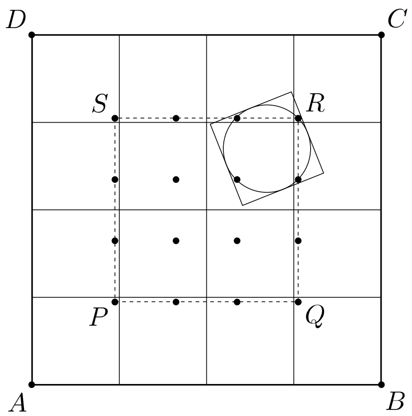
13.1 *Дат је квадрат $ABCD$ странице 4. Одредити највећи природан број k такав да, за ма какав распоред k тачака унутар квадрата $ABCD$, увек постоји квадрат странице 1, садржан у квадрату $ABCD$, у чијој унутрашњости нема ниједне од посматраних k тачака.*

Решење. Одговор: $k = 15$. Јасно је да 15 тачака има тражену особину: квадрат $ABCD$ можемо изделити на 16 квадрата странице 1, те ма како да је 15 тачака распоређено унутар квадрата $ABCD$, Дирихлеов принцип гарантује да постоји квадрат странице 1 унутар ког се не налази ниједна од посматраних тачака. Докажимо сада да k не може бити веће од 15, тј. да се 16 тачака може распоредити унутар квадрата $ABCD$ на тај начин да се унутар квадрата $ABCD$ не може наћи квадрат странице 1 у ком нема ниједне од посматраних тачака.

Претпоставимо да је теме A квадрата $ABCD$ у тачки $(0,0)$, а теме B у тачки $(4,0)$. Поставимо 16 тачака на следеће координате:

$$\left(1-\varepsilon+i\frac{2+2\varepsilon}{3}, 1-\varepsilon+j\frac{2+2\varepsilon}{3}\right),\ 0\leqslant i,j\leqslant 3,$$

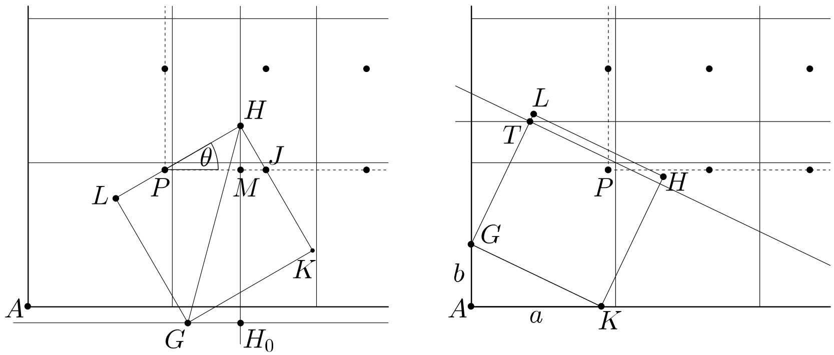
где је ε величина која ће бити накнадно одабрана. На тај начин постављених 16 тачака чине квадратну мрежу с кораком $\frac{2+2\varepsilon}{3}$. Нека је $PQRS$ квадрат којим је ова мрежа омеђена (видети слику).



Потребно је показати да се у унутрашњости сваког јединичног квадрата садржаног у квадрату $ABCD$ налази бар једна од ових тачака (за погодно ε). Посматрамо најпре јединичан квадрат чији се центар налази у квадрату $PQRS$. Приметимо да, за сваку тачку унутар квадрата $PQRS$, постоји бар једна од постављених 16 тачака удаљена од посматране тачке не више од $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2+2\varepsilon}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1+\varepsilon)$. Одатле, ако је ε довољно мало, сваки круг чији је центар унутар квадрата $PQRS$ и полупречник $\frac{1}{2}$ садржи бар једну од постављених 16 тачака, па тим пре то важи и за јединични квадрат чији је центар унутар квадрата $PQRS$.

Посматрајмо сада јединични квадрат чији се центар не налази у квадрату $PQRS$. Тада можемо, без умањења општости, претпоставити да важи један од следећа два случаја:

- на двема суседним страницама посматраног јединичног квадрата налази се по једна од постављених 16 тачака, и то од оних са руба квадрата $PQRS$ (слика лево);
- два суседна темена посматраног јединичног квадрата налазе се на двема суседним страницама квадрата $ABCD$ (слика десно).



Размотримо најпре први случај. Нека је $KHLG$ јединични квадрат и нека се на његовим страницама KH и HL налазе тачке J и P (две од постављених 16 тачака, са руба квадрата $PQRS$). Означимо $\measuredangle HPJ = \theta$ (можемо претпоставити: $\theta \leqslant 45^\circ$), нека је M подножје нормале из H на PJ, и нека је H_0 подножје нормале из G на $p(H, M)$. Доказаћемо да се теме G налази изван квадрата $ABCD$; довољно је доказати $|H_0H| > (1-\varepsilon) + |MH|$. Како важи и $\measuredangle JHM = \theta$, израчунавамо

$$|MH| = |JH| \cos\theta = |JP| \sin\theta \cos\theta = \frac{2+2\varepsilon}{3} \sin\theta\cos\theta.$$

Даље, важи $\measuredangle GHH_0 = 45^\circ - \measuredangle JHM = 45^\circ - \theta$, одакле следи

$$\begin{aligned} |HH_0| &= |HG| \cos\measuredangle GHH_0 = \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ - \theta) \\ &= \sqrt{2}(\cos 45^\circ \cos\theta + \sin 45^\circ \sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta. \end{aligned}$$

Одатле, треба заправо доказати неједнакост $\cos\theta + \sin\theta - (1-\varepsilon) - \frac{2+2\varepsilon}{3} \sin\theta\cos\theta > 0$. Приметимо:

$$\begin{aligned} \cos\theta + \sin\theta - (1-\varepsilon) - \tfrac{2+2\varepsilon}{3} \sin\theta\cos\theta \\ &= \cos\theta + \sin\theta - (1-\varepsilon) - \frac{1+\varepsilon}{3}(\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) + \frac{1+\varepsilon}{3} \\ &= \cos\theta + \sin\theta - \frac{2-4\varepsilon}{3} - \frac{1+\varepsilon}{3}(\sin\theta + \cos\theta)^2. \end{aligned}$$

Квадратна функција $f(x) = -\frac{1+\varepsilon}{3}x^2 + x - \frac{2-4\varepsilon}{3}$ позитивна је за $x \in \left(\frac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon}, 2\right)$. Како за $0 \leqslant \theta \leqslant 45^\circ$ важи $\sin\theta + \cos\theta < 2$ и $\sin\theta + \cos\theta > \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 > \frac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon}$, тиме је овај случај завршен.

Пређимо сада на други случај. Означимо $|AK| = a$, $|AG| = b$ (при чему важи $a^2 + b^2 = 1$). Једначина праве GL јесте $y = \frac{a}{b}x + b$. Посматрајмо нормалу из тачке $(1, 1)$ на праву GL. Једначина ове нормале је $y = -\frac{b}{a}x + 1 + \frac{b}{a}$. Одатле се лако налази да ова нормала сече праву GL у тачки $T : (ab+b^2-ab^2, a^2+ab+b^3)$. Тврдимо да важи $|GT| < 1$. Заиста,

$$\begin{aligned}
|GT|^2 &= (a^2 + ab + b^3 - b)^2 + (ab + b^2 - ab^2)^2 \\
&= (a^2 + ab + b(b^2 - 1))^2 + (ab + b^2 - ab^2)^2 \\
&= (a^2 + ab - a^2b)^2 + (ab + b^2 - ab^2)^2 = a^2(a + b - ab)^2 + b^2(a + b - ab)^2 \\
&= (a + b - ab)^2(a^2 + b^2) = (a + b - ab)^2;
\end{aligned}$$

дакле, потребно је доказати $a + b - ab < 1$, што је еквивалентно са $(1 - a)(1 - b) > 0$, а ово је очигледно тачно.

Из $|GT| < 1$ следи да се тачка $(1, 1)$ налази унутар квадрата $ABCD$, а тиме и тачка P. Контрадикција. Тиме је задатак решен. □

Литература

[1] The 6$^{\text{th}}$ Mediterranean Mathematical Competition, The World Federation of National Mathematics Competitions, 2003.

[2] 9. Српска математичка олимпијада ученика средњих школа, Друштво математичара Србије, Београд, 2015.

[3] The 9$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition: Extralist, Romanian Mathematical Society, Bucharest, 2017.

[4] The 10$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition: Extralist, Romanian Mathematical Society, Bucharest, 2018.

[5] 11. Српска математичка олимпијада ученика средњих школа, Друштво математичара Србије, Београд, 2017.

[6] 12. Српска математичка олимпијада ученика средњих школа, Друштво математичара Србије, Београд, 2018.

[7] The 19$^{\text{th}}$ International Mathematical Olympiad, Belgrade, 1977.

[8] XXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников, *Квант* **5** (1997), 46–48.

[9] The 28$^{\text{th}}$ International Mathematical Olympiad, Havanna, 1987.

[10] The 31$^{\text{st}}$ International Mathematical Olympiad: Longlist, Beijing, 1990.

[11] The 41$^{\text{st}}$ William Lowell Putnam Mathematical Competition, Mathematical Association of America, 1980.

[12] The 52nd International Mathematical Olympiad: Problem Shortlist with Solutions, Amsterdam, 2011.

[13] The 53rd International Mathematical Olympiad, Mar del Plata, 2012.

[14] The 61st William Lowell Putnam Mathematical Competition, Mathematical Association of America, 2000.

[15] Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2008, Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe, Deutschland, 2008.

[16] B. Bašić, A. Slivková, On optimal piercing of a square, *Discrete Appl. Math.* **247** (2018), 242–251.

[17] V. Cîrtoaje, *Algebraic Inequalities: Old and New Methods,* GIL Publishing House, Zalău, 2006.

[18] H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Section C8, Springer, New York, 1991.

[19] *Gazeta Matematică, Seria B* **7-8** (1992).

[20] Изборно такмичење за учешће на Међународној математичкој олимпијади 2017, Друштво математичара Србије, Београд, 2017.

[21] Изборно такмичење за учешће на Међународној математичкој олимпијади 2018, Друштво математичара Србије, Нови Сад, 2018.

[22] Изборно такмичење за учешће на такмичењу „Romanian Master of Mathematics“ 2016, Друштво математичара Србије, Београд, 2016.

[23] M. S. Klamkin, Problem E1123, *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 423; решење: *ibid.* **62** (1955), 124; J. Selfridge, *ibid.* **62** (1955), 443.

[24] Ленинградская Математическая Олимпиада 1991: Отборочный тур, у: Д. М. Фомин, *Санкт-Петербургские Математические Олимпиады,* Политехника, Санкт-Петербург, 1994.

[25] Математичка такмичења средњошколаца 2015/2016, Друштво математичара Србије, Краљево, 2016.

[26] Математичка такмичења средњошколаца 2016/2017, Друштво математичара Србије, Београд, 2017.

[27] Математичка такмичења средњошколаца 2017/2018, Друштво математичара Србије, Београд, 2018.

[28] G. Pólya, Über die „doppelt-periodischen“ Lösungen des n-Damen-Problems, у: W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Vol. 2,* B. G. Teubner, Leipzig, 1918, pp. 364–374.

[29] S. Róka, *2000 feladat az elemi matematika köréből,* Typotex, Budapest, 2003.

[30] J. L. Selfridge, E. G. Straus, On the determination of numbers by their sums of a fixed order, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 847–856.