[1] Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno-matematički fakultet

Departman za matematiku i informatiku

Milana Čolić

Matematika za studente fizike

diferencijalne jednačine i elementi teorije verovatnoće i statistike

Novi Sad, 2020

Predgovor

Ovaj udžbenik je prvenstveno namenjen studentima fizike Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Sadržaj udžbenika prati kurs *Matematike 3* svih modula na studijama fizike, koji je osmišljen da predstavi oblasti matematike najznačajnije za primene, obične i parcijalne diferencijalne jednačine sa jedne strane i teoriju verovatnoće i statistike sa druge strane. U postojećoj literaturi je teško naći ove oblasti objedinjene, te je jedan od ciljeva udžbenika da prevaziđe ovaj nedostatak i time olakša studentima savladavanje gradiva.

Udžbenik je podeljen u tri celine, *Obične diferencijalne jednačine*, *Parcijalne diferencijalne jednačine* i *Teorija verovatnoće i statistike.* Tekst udžbenika obiluje primerima koji se prezentuju paralelno sa gradivom, pri čemu je poseban akcenat stavljen na primere koji imaju fizičku interpretaciju. Takođe, izložena teorija je ilustrovana i zadacima na kraju svake celine.

Zahvaljujem se recenzentima, prof. dr Milanu Pantiću, prof dr. Marku Nedeljkovu i dr Damiru Mađareviću, koji su svojim sugestijama doprineli kvalitetu udžbenika. Posebno se zahvaljujem prof. dr Milanu Pantiću na beleškama koje su mi bile osnov za pisanje dela udžbenika koji se odnosi na teoriju običnih diferencijalnih jednačina, kao i prof. dr Srboljubu Simiću i dr Petru Malom na doprinosu u sagledavanju primera sa konotacijom iz fizike.

U Novom Sadu, Milana Čolić
Maj 2020.

Sadržaj

Uvod

Diferencijalne jednačine

Reči "diferencijalne" i "jednačine" ukazuju na to da ćemo rešavati jednačine koje sadrže izvode određene funkcije. Zaista, prvi cilj ovog kursa će biti da rešimo, na primer, jednačinu $y'' + 2y' + y = 0$ po nepoznatoj funkciji $y = \phi(x)$.

Diferencijalne jednačine su od izuzetnog značaja u nauci i u svakodnevnom životu. Matematički opis realnog sveta ili *matematički model* je polazna tačka za većinu objašnjenja fenomena u današnjoj nauci. Diferencijalne jednačine zauzimaju posebno mesto u matematičkim modelima, jer se mnogi principi ili zakoni realnog sveta baziraju na relacijama koje iskazuju kako se menjaju veličine koje posmatramo. Matematičkim jezikom rečeno, ove relacije su zapravo jednačine koje sadrže izvode posmatrane veličine, odnosno diferencijalne jednačine. Tako su primene diferencijalnih jednačina nemerljive, od fizike i tehnike, preko populacione dinamike, biologije i medicine do finansijske matematike.

Poznato nam je da je izvod $\frac{dy}{dx}$ funkcije $y = \phi(x)$ neka druga funkcija $\phi'(x)$ koja se dobija na osnovu pravila diferenciranja. Na primer, eksponencijalna funkcija $y(x) = e^{0.1x^2}$ je diferencijabilna na skupu $\mathbb{R}$ i njen prvi izvod je $y'(x) = 0.2\,x\,e^{0.1x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Drugim rečima,

$$y' = 0.2\,x\,y. \tag{1}$$

Zamislimo da ne znamo put do jednačine (1), već nam je jedino ona poznata. Pitamo se: koja funkcija $y = \phi(x)$ zadovoljava jednačinu (1), odnosno koje je rešenje jednačine (1)? Jednačina (1) je primer jedne diferencijalne jednačine.

Definicija 1

Jednačina koja sadrži izvode jedne ili više nepoznatih funkcija po jednoj ili više promenljivih naziva se diferencijalna jednačina.

Drugim rečima, diferencijalna jednačina u odnosu na neku funkciju je jednačina koja povezuje tu funkciju, njene nezavisno promenljive i njene izvode.

Definicija 2

Red diferencijalne jednačine je red najvećeg izvoda koji se u njoj pojavljuje.

Upoznajmo se sa jednom diferencijalnom jednačinom na sledećem primeru.

Primer 1: Kretanje u sredini sa otporom

Posmatrajmo kretanje tela mase m kroz atmosferu (sredina sa otporom) koje slobodno pada u polju gravitacione sile. Kretanje se odvija u neposrednoj blizini Zemljine površine (g=const). Napišimo diferencijalnu jednačinu koja opisuje kretanje ovog tela.

Najpre uvedimo veličine koje će opisati kretanje i njihove oznake. Pošto se kretanje odvija tokom određenog vremena, neka t označava vreme. Neka je $\vec{v}$ vektor brzine tela koji pada. Vektor brzine se menja tokom vremena, dakle $\vec{v}$ je funkcija od t ili drugačije rečeno, t je nezavisno, a $\vec{v}$ zavisno promenljiva.

Zakon koji opisuje kretanje tela mase m čiji oblik i dimenzije možemo zanemariti (materijalna tačka) je drugi Njutnov zakon, koji kaže da je ubrzanje tela pomoženo njegovom masom jednako ukupnoj sili koja dejstvuje na posmatrano telo. Matematički,

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{2}$$

gde je m masa, $\vec{a}$ ubrzanje tela, a $\vec{F}$ sila koja dejstvuje na njega. Naš cilj je da izvedemo jednačinu za brzinu tela $\vec{v}(t)$. Da bismo to postigli, potrebno je obe strane jednačine (2) izraziti pomoću $\vec{v}(t)$.

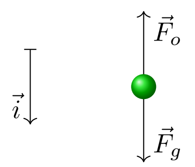
Pošto se kretanje odvija u jednoj dimenziji (vertikalan pad), usvojimo

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{i},$$

gde je $\vec{i}$ jedinični vektor usmeren u smeru kretanja tela.

Sa jedne strane znamo da je ubrzanje mera promene brzine, tj.

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{i}. \tag{3}$$



Slika 1: Analiza sila

Sa druge strane je potrebno da analiziramo sile koje utiču na telo (Slika 1). Na telo dejstvuju dve sile, sila gravitacije $\vec{F}_g = m\vec{g}$, gde je $\vec{g}$ vektor gravitacionog ubrzanja i sila otpora vazduha $\vec{F}_o$. Relacija koja opisuje silu otpora sredine je konstitutivnog tipa, odnosno ona je predmet modeliranja. U ovom primeru, uzmimo najjednostavniji model po kojem je sila otpora proporcionalna brzini tela $\vec{F}_o = -\gamma\vec{v}$, sa koeficijentom proporcionalnosti γ koji se naziva koeficijent otpora. Kako sila otpora uvek dejstvuje u suprotnom smeru od smera kretanja odnosno smera vektora brzine, imamo negativan predznak. Dakle, u odnosu na postavljeni koordinatni sistem, rezultujuća sila je data sledećim izrazom

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_o = m\,g\,\vec{i} - \gamma\,v(t)\,\vec{i}. \tag{4}$$

Sada sa izrazom za ubrzanje (3) i modelom za silu (4) drugi Njutnov zakon (2) postaje

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{i} = m\,g\,\vec{i} - \gamma\,v(t)\,\vec{i}.$$

Skalarno množeći sa $\vec{i}$, dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja tela

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v. \tag{5}$$

Ovo je diferencijalna jednačina ili matematički model koji opisuje kretanje tela koje vrši slobodan pad u okolini Zemljine površine. Primetimo, ovo je jedna diferencijalna jednačina prvog reda. Model sadrži tri konstante: m, γ i g, koje zovemo parametrima modela. Konstante m i γ zavise od tela koje pada, dok je g univerzalna za sva tela (eksprerimentalno je utvrdjeno $g \approx 9.8m/s^2$). Da bismo rešili diferencijalnu jednačinu (5) potrebno je da nađemo funkciju $v = v(t)$ koja zadovoljava jednačinu (5).

Jedan od ciljeva ovog kursa je diskusija o ponašanju rešenja diferencijalnih jednačina ili opis metoda koje se koriste za rešavanje određenih jednačina. Da bismo napravili okvir za rad, potrebno je najpre da grupišemo jednačine koje imaju neka zajednička svojstva. U tom smislu, klasifikujemo diferencijalne jednačine na sledeći način:

1. U zavisnosti od toga da li nepoznata funkcija zavisi od jedne ili više promenljivih, diferencijalna jednačina može biti:

(a) *obična diferencijalna jednačina* (ODJ) - nepoznata funkcija zavisi od *jedne* nezavisne promenljive. Tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju samo obični izvodi.

(b) *parcijalna diferencijalna jednačina* (PDJ) - nepoznata funkcija zavisi od *više* nezavisnih promenljivih. Tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju parcijalni izvodi.

2. U zavisnosti od broja nepoznatih funkcija, možemo imati:

(a) jednu diferencijalnu jednačinu, kada je potrebno odrediti jednu nepoznatu funkciju.

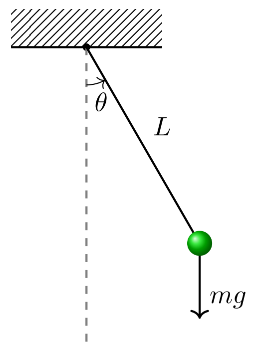
(b) sistem diferencijalnih jednačina, kada su nepoznate dve ili više funkcija.

Primer 2: Klasifikacija diferencijalnih jednačina

Ugao otklona $\theta = \theta(t)$ matematičkog klatna dužine L zadovoljava jednačinu

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0, \tag{6}$$

gde je g gravitaciono ubrzanje (Slika 2). Ova jednačina matematičkog klatna je *jedna obična diferencijalna jednačina.*



Slika 2: Matematičko klatno

Jednačina provođenja toplote opisuje provođenje toplote u čvrstom telu. Ako je temperatura označena sa funkcijom $u = u(t, x)$ koja je funkcija vremena t i položaja x, onda je jednačina provođenja toplote

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

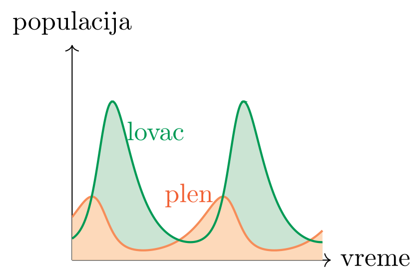
gde je c konstanta. Ovo je *jedna parcijalna diferencijalna jednačina.*

Poznati Lotka-Voltera sistem ("predator-prey", lovac-plen) opisuje suptilan odnos populacije lovca $y(t)$ (npr. lisica) i populacije plena $x(t)$ (npr. zečeva),

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x - \beta xy,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\gamma y + \delta xy,$$

gde su $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ konstante (Slika 3). Ovo je *sistem običnih diferencijalnih jednačina.*

Sa jedne strane, populacija plena $x(t)$ raste u odsustvu lovca, sto je opisano članom αx. U prisustvu lovca, pretpostavlja se da je stopa lovljenja plena proporcionalna stopi po kojoj se lovac i plen susreću, modelirano članom βxy. Sada jednačinu za plen možemo izraziti na sledeći način: brzina promene populacije plena je proporcionalna sopstvenoj stopi rasta minus stopi po kojoj je lovljena od strane populacije lovca.



Slika 3: Sistem lovac-plen

Sa druge strane, populacija lovca raste zbog lova, odnosno susreta sa populacijom plena, što je opisano članom δxy, a opada u odsustvu populacije plena, odakle član γy. Dakle, brzina promene populacije lovca je proporcionalna stopi lovljenja plena minus stopi po kojoj izumire u odsustvu populacije plena.

Napomena 1 (Napomena o oznakama)**.** *U daljem tekstu ćemo kraće označavati*

1. *običnu diferencijalnu jednačinu sa ODJ,*
2. *parcijalnu diferencijalnu jednačinu sa PDJ,*

bez obzira na množinu i promenu imenice.

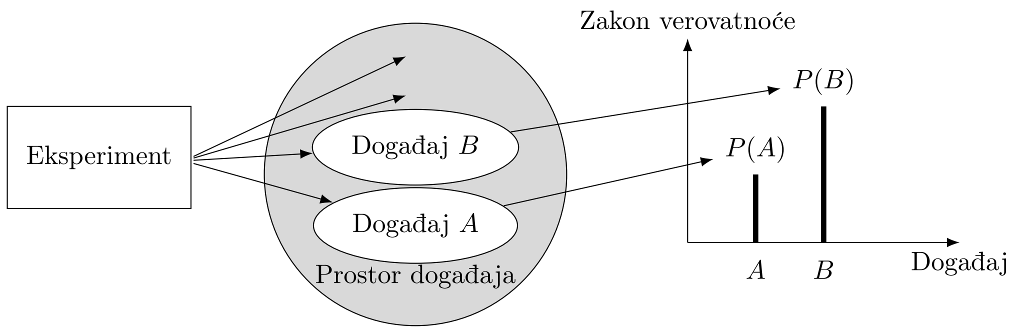
Elementi teorije verovatnoće i statistike

Ideja teorije verovatnoće jeste da opiše neodređenost matematički precizno pomoću svojih modela. Koncept verovatnoće se pojavljuje u problemima sa događajima čiji ishod ne možemo sa sigurnošću da predvidimo. To se dešava kada na primer nemamo kompletnu informaciju o početnom stanju ili o dinamici posmatranog sistema ili kada je u dinamiku sistema ugrađena nesigurnost. Tako u statističkoj mehanici se pojavljuju sistemi koji sadrže veliki broj čestica. Nemoguće je izmeriti početno stanje svih čestica, te deterministički ne možemo odrediti stanje sistema. Umesto ovog pristupa, pribegava se takozvanom statističkom opisu sistema, a zapravo se koristi koncept verovatnoće.

Osnovni model teorije verovatnoće jeste eksperiment koji pod zadatim uslovima ne dovodi uvek do istog rezultata.

Tada je uobičajeno da sakupimo sve moguće ishode datog eksperimenta i da govorimo o verovatnoći da se realizuje jedan ili više ishoda tog eksperimenta. Dakle, datom eksperimentu pridružujemo skup koji opisuje njegove sve moguće ishode – prostor događaja. Podskup ovog skupa, dakle skup jednog ili nekoliko ishoda se naziva događaj. Ideja je da svakom događaju dodelimo broj iz intervala $[0, 1]$ – verovatnoću događaja – koji govori o tome koliko je verovatno da se dati događaj realizuje. Na taj način formiramo zakon verovatnoće za dati eksperiment. Ovim je formirana baza za potonju matematičku analizu problema koji u sebi sadrži neizvesnost. Osnovni alat koji se koristi je koncept slučajne promenljive.

Eksperiment: bacanje novčića jedanput, čiji je rezultat: pala je glava ili pismo.
Skup svih mogućih ishoda eksperimenta ili prostor događaja: pala je glava, palo je pismo.
Događaj: palo je pismo.
Verovatnoća događaja je 0.5.



Slika 4: Eksperiment, prostor događaja, zakon verovatnoće

Sa druge strane, veliki značaj teorije verovatnoće je i njena primena u teoriji statistike. Jedan od osnovnih ciljeva statistike je korišćenje pravilno prikupljenih podataka sa ciljem da se izvedu zaključci i donesu odluke koje se najčesće odnose na celu populaciju, a na osnovu njenog reprezentativnog uzorka. Statistika se koristi za davanje procena, odmeravanje rizika, ona istražuje tendencije, analizira odnose i faktore koji utiču na posmatranu pojavu. Sada je jasno da zbog slučajnog karaktera faktora koji određuju sve ove postupke teorija verovatnoće leži u pozadini teorije statistike.

Deo I

Obične diferencijalne jednačine

1 Osnovni pojmovi

1.1 Pojam ODJ

Definicija 1.1

Jednačina u kojoj se javljaju obični izvodi nepoznate funkcije y nezavisno promenljive x naziva se obična diferencijalna jednačina (u daljem tekstu ODJ shodno napomeni 1). Opšti oblik ODJ $n-$tog reda za funkciju $y = y(x)$ je

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1.1}$$

dok je njen normalni oblik

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

gde su F i f poznate funkcije.

U primenama ili prilikom modeliranja često nas zanimaju problemi u kojima tražimo funkciju koja pored toga što treba da zadovolji datu ODJ, zadovoljava i određene dodatne uslove koji proističu iz neke konkretne, dopunske informacije koja nam je o problemu poznata. Na primer, ukoliko posmatramo kretanje tela koje slobodno pada u polju gravitacione sile (primer 1), obično nam je poznata informacija o inicijalnom stanju, odnosno o vektoru položaja i brzine u početnom trenutku. Cilj ovog problema je da nađemo vektor brzine kao funkciju koja se menja u vremenu i koja u početnom trenutku odgovara inicijalnom stanju. Kažemo da nam je zadat jedan početni problem.

Sa teorijske strane, više funkcija može da zadovoljava jednu te istu jednačinu, npr. $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ za svako $x \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju jednačinu $y'' = y$, te očigledno i $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Međutim, obično se ne traže i ne proučavaju sve moguće funkcije koje zadovoljavaju datu jednačinu, već samo one koje ispunjavaju dopunske uslove. U našem primeru, potrebna nam je vrednost funkcije y u dve tačke da bismo fiksirali konstante c_1 i c_2 i time odredili jedinstvenu funkciju koja zadovoljava datu jednačinu i dopunske uslove.

Tako dolazimo do dva osnovna problema koja se proučavaju u teoriji ODJ,

1. početni (Košijev) problem, kada su uz ODJ (1.1) dati i početni uslovi, odnosno vrednosti funkcije $y = y(x)$ i njenih izvoda do reda $n-1$ u jednoj tački x_0,

$$y^{(k)}(x_0) = y_k,$$

gde je k red izvoda, $k = 0, \dots, n-1$, $x_0 \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ tačka iz posmatranog intervala i $y_k \in \mathbb{R}$ su zadate vrednosti,

$$\begin{cases} y'' = y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad \text{je jedan početni problem.}$$

$$\begin{cases} y'' = y, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = -2 \end{cases} \quad \text{je jedan granični problem.}$$

2. granični problem, kada su uz ODJ dati i granični uslovi, odnosno vrednosti funkcije $y = y(x)$ u n različitih tačaka,

$$y(x_k) = y_k,$$

gde je k brojač tačaka, $k = 1, \ldots, n$, $x_k \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ su n tačaka iz posmatranog intervala i $y_k \in \mathbb{R}$ su zadate vrednosti.

1.2 Rešenje ODJ

Definicija 1.2

Funkcija $y = \phi(x)$ koja je definisana i n puta diferencijabilna na intervalu $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ je rešenje (integral) ODJ (1.1),

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

na intervalu $\mathbb{I}$ ako za svako $x \in \mathbb{I}$ važi

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0.$$

Funkcija $y = e^{0.1x^2}$ je rešenje ODJ $y' = 0.2xy$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Drugim rečima, rešenje ODJ je funkcija koja datu jednačinu prevodi u identitet, pri čemu se za tu funkciju pretpostavlja da je bar onoliko puta diferencijabilna koliki je red ODJ. Grafik ovakve funkcije ima posebno ime.

Definicija 1.3

Grafik rešenja $y = \phi(x)$, $x \in \mathbb{I}$, ODJ (1.1)

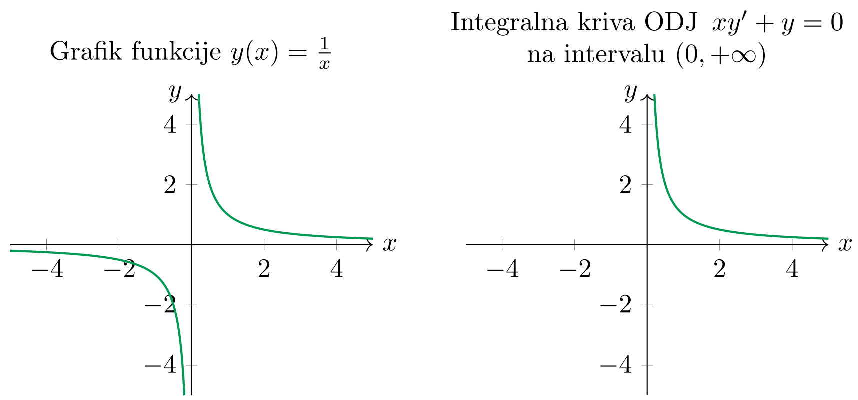
$$\{(x, \phi(x)) : x \in \mathbb{I}\}$$

nazivamo integralnom krivom ODJ (1.1).

Ne možemo da govorimo o rešenju a da ne spomenemo interval $\mathbb{I}$. Treba posebno istaknuti da domen funkcije $y = \phi(x)$ ne mora da se poklapa sa intervalom $\mathbb{I}$.

Primer 1.4

Neka je data funkcija $y(x) = \dfrac{1}{x}$. Domen ove funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posmatrajmo sada ODJ $xy'(x) + y(x) = 0$. Funkcija $y(x) = \dfrac{1}{x}$ jeste rešenje ove ODJ na bilo kom intervalu koji ne sadrži nulu. Uzmimo najveći mogući takav interval, i dobijamo da za $\mathbb{I}$ možemo uzeti $(-\infty, 0)$ ili $(0, +\infty)$. Primer je ilustrovan na slici 1.1.



Slika 1.1: Grafik funkcije i grafik rešenja ODJ

Kada rešavamo ODJ prvog reda

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

obično dobijamo rešenje koje sadrži proizvoljnu konstantu $c \in \mathbb{R}$ (slično kao kod neodređenog integrala). Rešenje koje sadrži proizvoljnu konstantu c predstavljamo jednačinom

$$G(x, y(x), c) = 0$$

i zovemo ga *(jednoparametarska) familija krivih* (u ravni).

Slično, za ODJ $n-$tog reda

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

dobijamo *$n-$parametarsku familiju krivih*

$$G(x, y(x), c_1, \dots, c_n) = 0.$$

Dakle, jedna jedina ODJ može da ima beskonačno mnogo rešenja – svako rešenje odgovara nekom izboru konstante.

Rešenje ODJ koje ne sadrži proizvoljnu konstantu se naziva *partikularno* rešenje. Dakle, partikularno rešenje dobijamo od $n-$parametarske familije krivih za konkretan izbor konstanti $c_1, \dots, c_n$.

Ponekad ODJ ima rešenje koje nije član familije krivih tj. rešenje koje se ne može dobiti specijalnim izborom konstante. Takvo rešenje naziva se *singularno* rešenje.

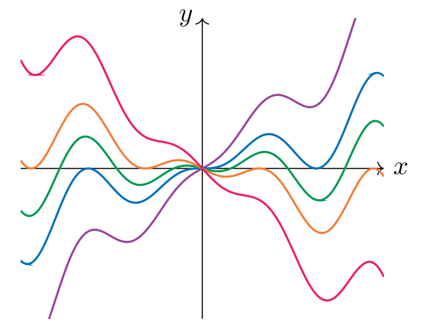
Ukoliko se svako rešenje ODJ

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

na intervalu $\mathbb{I}$ može dobiti iz $n-$parametarske familije krivih $G(x, y(x), c_1, \dots, c_n) = 0$ izborom konstanti $c_1, \dots, c_n$, tada kažemo da je ta familija krivih *opšte* rešenje te jednačine.

Specijalno, kod početnog problema konstante određujemo iz početnih uslova. Takođe, treba primetiti da interval $\mathbb{I}$ može da zavisi od početnih uslova.

Primer 1.5



Slika 1.2: Nekoliko integralnih krivih za ODJ $xy'(x) - y(x) = x^2 \sin x$

Jednoparametarska familija

$$y(x) = cx - x\cos x$$

je rešenje ODJ prvog reda

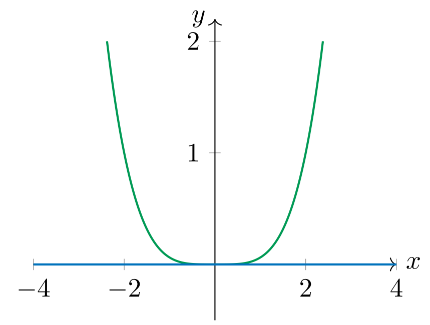
$$xy'(x) - y(x) = x^2 \sin x$$

.
Rešenje

$$y(x) = -x\cos x$$

je partikularno rešenje ove jednačine koje odgovara izboru $c = 0$.

Primer 1.6



Slika 1.3: Dva rešenja jednačine, jedno za izbor konstante $c = 0$ (——) i drugo singularno (——)

Posmatrajmo ODJ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^{1/2}.$$

Familija krivih

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$$

je rešenje ove jednačine.
Primetimo, i $y = 0$ je rešenje ove jednačine, ali nije član familije. Dakle, $y = 0$ je singularno rešenje ODJ.

Primer 1.7

Funkcija $y(x) = c\,e^x$ je jednoparametarsko rešenje ODJ $y' = y$ na $\mathbb{R}$. Neka nam je dat početni uslov $y(0) = 3$. Dakle, dobijamo da je $c = 3$ (sa jedne strane, $y(0) = ce^0 = c$, a sa druge $y(0) = 3$). Sada je $y(x) = 3e^x$ rešenje početnog problema

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Primer 1.8

Posmatrajmo ODJ

$$y' + 2xy^2 = 0.$$

Jednoparametarsko rešenje ove ODJ je

$$y = \frac{1}{x^2 + c}.$$

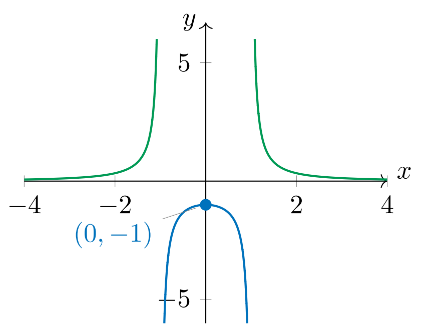
Ako je dat i početni uslov

$$y(0) = -1,$$

sledi $c = -1$, pa je rešenje početnog problema

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}. \tag{1.2}$$

Primetimo, domen funkcije $y = \frac{1}{x^2-1}$ je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.



Slika 1.4: Rešenje početnog problema (——) kao „parče" grafika funkcije $y = \frac{1}{x^2-1}$.

Gledano kao rešenje ODJ, za interval $\mathbb{I}$ uzimamo najveći interval na kom je funkcija diferencijabilna, a to je interval $(-\infty, -1)$ ili $(-1, 1)$ ili $(1, +\infty)$.

Gledano kao rešenje početnog problema, interval $\mathbb{I}$ mora da sadrži tačku x_0 iz početog uslova, u ovom slučaju tačku $x = 0$. Najveći takav interval je $(-1, 1)$. Zaključujemo, rešenje početnog problema je (1.2) na intervali $(-1, 1)$.

1.3 Linearna ODJ

Od posebnog interesa i u teoriji i u primenama je klasa linearnih ODJ, kojoj ćemo u ovom kursu posvetiti značajnu pažnju.

Definicija 1.9

ODJ (1.1) je linearna ako je F linearna funkcija po $y(x)$, $y'(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ tj. oblika

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \tag{1.3}$$

gde su $a_k(x)$, $k = 0, \ldots, n$ i $g(x)$ funkcije definisane na nekom intervalu, i $a_n(x) \neq 0$ na tom intervalu.

Jednačina koja nije ovog oblika je nelinearna. Tako, nelinearne funkcije nepoznate funkcije ili njenih izvoda, kao što su $\sin y$ ili $e^{y'}$ ne mogu da se pojave u linearnoj ODJ.

Primer 1.10

Sledeće ODJ su linearne:

(1) $4xy' + y = x$; (2) $y'' - 2y' + y = 0$; (3) $x^3 \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 5y = e^x$.

Sledeće ODJ su nelinearne:

(1) $(1-y)y' + 2y = e^x$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \sin y = 0$; (3) $\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} + y^2 = 0$.

Prva ODJ je nelinearna jer jedan od koeficijenata zavisi od y, dok su druga i treća nelinearne jer je član nelinearana funkcija od y.

1.3.1 Zapis linearne ODJ pomoću diferencijalnog operatora

Linearnu ODJ možemo kraće da zapišemo ukoliko uvedemo pojam diferencijalnog operatora.

Najpre se podsetimo Teoreme iz diferencijalnog računa jedne realne promenljive,

Teorema. Ako funkcije f i g imaju izvod u tački x, tada

1. funkcija $f+g$ ima izvod u tački x i on je $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. funkcija cf, za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$, ima izvod u x i on je $(cf)'(x) = c\,f'(x)$.

Odavde sledi zapažanje

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x),$$

ili drugim rečima,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af + bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g.$$

Možemo da zaključimo da izvod $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, posmatrano kao diferencijalni operator koji transformiše $k-$puta diferencijabilnu funkciju u $(k-1)-$puta diferencijabilnu funkciju, je jedan linearan operator. U opštem slučaju, diferencijalni operator reda n se definiše na sledeći način.

Definicija 1.11

Diferencijalni operator stepena n je

$$\mathcal{L} := a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x)I, \tag{1.4}$$

gde su $a_k(x)$, $k = 0, \ldots, n$ funckije definisane na nekom intervalu, i $a_n(x) \neq 0$ na tom intervalu, dok je I identički operator definisan sa $Ix = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Diferencijalni operator je jedan linearan operator. Sada opšta linearna ODJ (1.3) može da se zapiše u kraćem obliku

$$\mathcal{L}y = g.$$

Primer 1.12

Operator $\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}I$, gde su g i L konstante, predstavlja primer diferencijalnog operatora drugog reda. Pomoću njega možemo zapisati linearizovanu jednačinu matematičkog klatna dužine L uvedenu u (6), $\mathcal{L}\theta = 0$, gde je θ ugao otklona, a g gravitaciono ubrzanje.

2 ODJ prvog reda

Na osnovu definicije 1.1 za ODJ proizvoljnog reda znamo da ODJ prvog reda sadrži argument x, samu nepoznatu funkciju $y(x)$ i njen izvod $y'(x)$. Možemo je zapisati u *opštem* (implicitnom) obliku

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \tag{2.1}$$

normalnom (eksplicitnom) obliku

$$y' = f(x, y(x)), \tag{2.2}$$

ili *simetričnom* obliku

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0,$$

gde su F, f, P i Q neke poznate funkcije.

Podsetimo se, diferencijabilna funkcija na intervalu $\mathbb{I}$ je rešenje ODJ (2.1) na $\mathbb{I}$ ukoliko identički zadovoljava tu jednačinu. Naš osnovni cilj u ovom poglavlju je da pronađemo uslove pod kojima možemo da nađemo takvu funkciju, i da razvijemo metode kojim bi dolazili do nje. Nažalost, za proizvoljnu funkciju F, ne postoji opšti metod kojim bi se rešila ODJ (2.1). Umesto toga, u poglavlju 2.1 opisaćemo nekoliko metoda pomoću kojih možemo rešiti određene klase ODJ. Ovaj pristup ćemo nazivati *analitičkim*. Pored analitičkog izraza za rešenje ODJ, postoje i drugi načini da se opišu rešenja, a koja ne zahtevaju samo rešavanje ODJ. Jednom takvom alternativnom reprezentacijom rešenja ODJ ćemo se baviti u poglavlju 2.2, a koja je bazirana na geometrijskoj interpretaciji izvoda. Ovakav pristup se naziva *kvalitativnim*. Da bismo uopšte analitički rešavali ODJ, i kvalitativno analizirali njeno rešenje, potrebno je najpre da znamo da li rešenje ODJ postoji. S toga se poglavlje 2.4 bavi teorijskim aspektima vezanim za egzistenciju rešenja ODJ, odnosno egzistenciju i jedinstvenost početnog problema.

2.1 Analitički pristup

U ovom poglavlju ćemo navesti dve metode za rešavanje ODJ, dok ćemo se ostalim metodama baviti u zadacima.

2.1.1 Rešavanje ODJ integracijom

Primer 2.1

Rešimo ODJ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sin x,$$

odnosno nađimo funkciju čiji je izvod $2\sin x$.

Takvu funkciju nalazimo integracijom desne strane jednačine. Dakle,

$$y(x) = \int 2\sin x \mathrm{d}x = -2\cos x + c$$

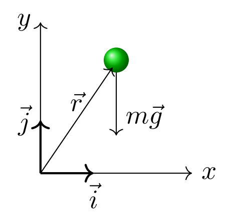
je opšte rešenje ove ODJ.

Ukoliko dodatno imamo i početni uslov $y(0) = 3$, dobijamo da je $y(0) = -2\cos 0 + c = 3$, odnosno $c = 5$. Dakle, $y(x) = 2\cos x + 5$ je rešenje ovog početnog problema.

U opštem slučaju, ODJ oblika
$$y'(x) = g(x),$$
(odnosno, kada $f(x, y)$ iz (2.2) ne zavisi od y) se rešava integracijom. Ukoliko je $g(x)$ neprekidna funkcija, integracijom obe strane dobijamo rešenje
$$y(x) = \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Primer 2.2

Ukoliko se telo (tačka) kreće u gravitacionom polju, i ukoliko zanemarimo silu otpora sredine, prema drugom Njutnovom zakonu (Primer 1) dobijamo
$$m\vec{a} = m\vec{g}.$$



Slika 2.1: Analiza sila koje dejstvuju na telo u gravitacionom polju

Vektor ubrzanja $\vec{g}$ ima negativnu projekciju na y-osu izabranog koordinatnog sistema,
$$\vec{g} = -g\vec{j},$$
dok se iz opšteg izraza za vektor položaja dobija vektor ubrzanja diferenciranjem, pri čemu treba uzeti u obzir da je kretanje u vertikalnom pravcu,
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}(t) = \dot{y}(t)\vec{j} = \vec{v}_y(t)$$
$$\Rightarrow \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}_y(t) = \ddot{y}(t)\vec{j}.$$

Dakle, drugi Njutnov zakon postaje
$$\ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} = -g\vec{j}.$$

Skalarno množeći ovu jednačinu sa $\vec{j}$, dobijamo ODJ drugog reda
$$\ddot{y}(t) = -g.$$

Jednom integracijom ove jednačine dobijamo ODJ prvog reda
$$\dot{y}(t) + c = \int(-g)\mathrm{d}t = -gt + c_1.$$

Da bismo nju rešili, treba da izvršimo još jednu integraciju
$$y(t) + \bar{c} = \int (-gt + c_1)\,\mathrm{d}t = -g\frac{t^2}{2} + c_1 t + \tilde{c}.$$

Dakle, dobijamo dvoparametarsku familiju rešenja:
$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

gde je $c_2 = \tilde{c} - \bar{c}$. Različita rešenja pripadaju ovoj familiji,

1. hitac naviše: početni uslovi su

$$y(0) = 0, \quad v_y(0) = v_0 > 0,$$

odakle dobijamo konstante $c_1 = v_0$ i $c_2 = 0$, i partikularno rešenje

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t.$$

2. hitac naniže: početni uslovi su

$$y(0) = h > 0, \quad v_y(0) = -v_0 < 0,$$

odakle dobijamo konstante $c_1 = -v_0$ i $c_2 = h$, i partikularno rešenje

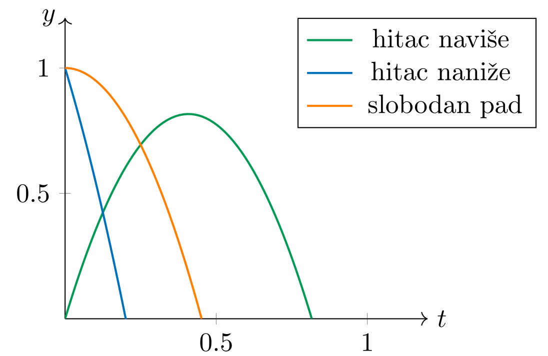
$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} - v_0 t + h.$$

3. slobodan pad: početni uslovi su

$$y(0) = h > 0, \quad v_y(0) = 0,$$

odakle dobijamo konstante $c_1 = 0$ i $c_2 = h$, i partikularno rešenje

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + h.$$



Slika 2.2: Hitac naviše i naniže i slobodan pad za vrednosti početne brzine $v_0 = 4$ i visine $h = 1$

2.1.2 ODJ koje razdvajaju promenljive

ODJ koje razdvajaju promenljive su oblika

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y).$$

Za $h(y) \neq 0$ zapisujemo

$$\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x,$$

odakle integracijom dobijamo rešenje ove ODJ,

$$\int \frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Na kraju treba proveriti da li funkcija h ima nulu: ukoliko je y_0 nula funkcije $h(y)$ tj. ukoliko je $h(y_0) = 0$, tada je i $y = y_0$ rešenje ODJ jer su obe strane jednačine jednake nuli.

Primer 2.3

Rešiti ODJ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Odavde sledi $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = k\mathrm{d}x$. Integracijom dobijamo $\ln|y| = kx + c \Rightarrow |y| = e^{kx+c} \Rightarrow y = \pm e^{kx+c}$. Pošto nam nije važno da eksplicitano izrazimo konstante, već da dobijemo što jednostavniji oblik rešenja, grupišemo član koji sadrži konstante, i označimo ga kao novu konstantu. U ovom slučaju, član koji sadrži konstante je $\pm e^c$ i njega označavamo kao novu konstantu. Uobičajeno je da se ovom prilikom ne nalazi nova oznaka za konstantu, već se jednostavno stavi $\pm e^c = c$. Sada je opšte rešenje ODJ $y(x) = ce^{kx}$.

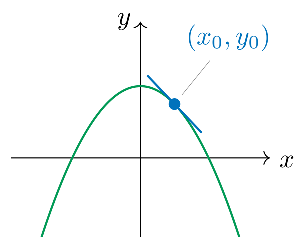
2.2 Kvalitativni pristup

Kvalitativna analiza rešenja ODJ se oslanja na geometrijsku interpretaciju izvoda, a pomoću nje možemo da opišemo ponašanje rešenja bez rešavanja ODJ. Ovaj pristup je zgodan kada ne možemo analitički da rešimo ODJ. Na primer, ODJ

$$y' = x - y^2,$$
$$y' = y - x^2,$$

izgledaju slično, ali su veoma različite: druga je lako rešiva, dok prvu ne možemo analitički da rešimo.

Dakle, grubo rečeno, kvalitativna analiza je proučavanje osobina rešenja ODJ na osnovu informacija koje može da nam pruži sama jednačina (bez njenog rešavanja!).



Slika 2.3: Tangenta na grafik funkcije u tački (x_0, y_0)

2.2.1 Geometrijska interpretacija $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$

Najpre se podsetimo da je izvod diferencijabilne funkcije $y(x)$ u tački x_0, $y'(x_0)$, nagib tangente na grafik funkcije $y(x)$ u tački $(x_0, y(x_0) =: y_0)$ (Slika 2.3), ili drugim rečima tangens ugla koji tangenta zaklapa sa pozitivnim delom $x-$ose.

Sada, ukoliko je funkcija $y(x)$ rešenje jednačine $y'(x) = f(x, y)$ na intervalu $\mathbb{I}$ i njen grafik prolazi kroz tačku (x_0, y_0), gde je $y_0 = y(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{I}$, onda nam ODJ kaže da je izvod $y'(x)$ u tački x_0 dat sa $f(x_0, y_0)$ tj. nagib tangente na grafik funkcije $y(x)$ u tački (x_0, y_0) je $f(x_0, y_0)$. Kako ovo važi u svakoj tački intervala $\mathbb{I}$, dobijamo, dakle, nagib tangente na svaku tačku grafika funkcije $y(x)$.

Dakle, ukoliko je data ODJ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{2.3}$$

grubu sliku o ponašanju rešenja možemo da dobijemo crtajući mali deo tangente: uočimo tačku (x_0, y_0), izračunamo $f(x_0, y_0)$ i ta vrednost je nagib tangente na grafik rešenja ODJ, odnosno tangens ugla koji tangenta zaklapa sa pozitivnim delom $x-$ose.

Definicija 2.4

Uređenu trojku $(x, y, f(x, y))$ nazivamo linijski element za ODJ (2.3).

Linijski element predstavljamo kao mali deo prave.

Definicija 2.5

Skup svih linijskih elemenata zovemo polje pravaca za ODJ (2.3).

Polje pravaca ukazuje na oblik grafika rešenja ODJ – svaka integrala kriva mora da sledi "tok" polja pravaca. Dakle, osnovni cilj kvalitativne analize jeste da iz ODJ dobijemo polje pravaca, a potom dobijemo predstavu o njenom rešenju.

U gornjem paragrafu smo opisali *prvu strategiju* za crtanje polja pravaca neke ODJ,

1. Uočiti (x_0, y_0),
2. Izračunati $f(x_0, y_0)$,
3. Nacrtati linijski element $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Polje pravaca efikasnije možemo da crtamo i pomoću izoklina.

Definicija 2.6

Izoklina za ODJ (2.3) je jednoparametarska familija krivih data jednačinom

$$f(x, y) = c, \quad \textit{gde je } c \textit{ konstanta.}$$

Drugim rečima, izoklina je nivo kriva za f koja odgovara c. Duž izokline linijski elementi imaju isti nagib c. Dobijamo opet polje pravaca na osnovu kog možemo da dobijemo integralne krive (opet, tangenta na integralnu krivu u svakoj tački je linijski element koji smo nacrtali).

Dakle, *druga strategija* za crtanje polja pravaca neke ODJ je:

1. Uočiti nagib c,
2. Nacrtati $f(x, y) = c$,
3. Nacrtati linijske elemente na izoklini.

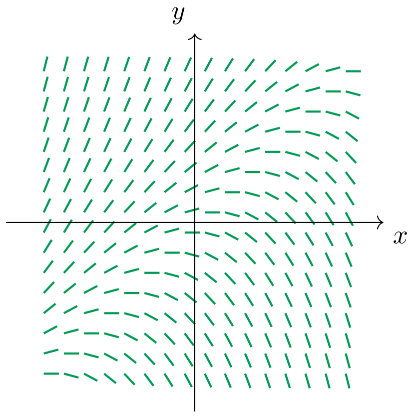
Primer 2.7

Posmatrajmo ODJ

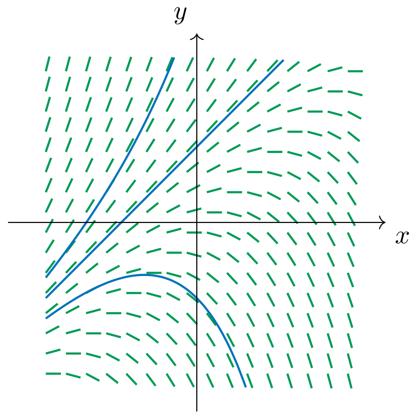
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x.$$

Nacrtajmo polje pravaca i analizirajmo ponašanje rešenja.

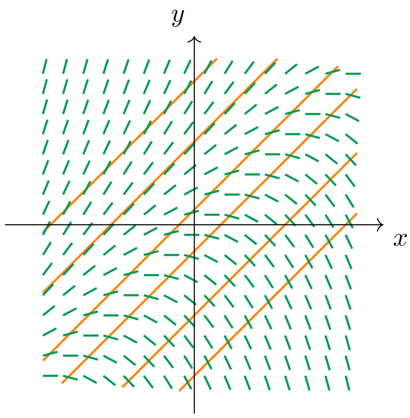
Sledimo prvu strategiju za crtanje polja pravaca. Izaberimo tačku $(1, -1)$. Tada je $f(1, -1) = -1 - 1 = -2$. Dakle, $(1, -1, -2)$ je jedan linijski element. Predstavljamo ga kao mali deo prave sa nagibom -2 u tački $(1, -1)$. Znamo, ako integralna kriva prolazi kroz tačku $(1, -1)$ onda ona to čini tako da joj je nagib tangente -2. Računajući više linijskih elemenata dobijamo polje pravaca (slika 2.4).



Slika 2.4: Polje pravaca



Slika 2.5: Nekoliko integralnih krivih



Slika 2.6: Polje pravaca i izokline

Posmatrajmo polje pravaca i analizirajmo rešenje. Prvo zapažamo da je grafik jednog rešenja prava koja prolazi kroz tačke $(-1, 0)$ i $(0, 1)$ (to je prava $y = x + 1$). Rešenja čiji su grafici ispod ove prave (to su rešenja sa početnim uslovima u tačkama koje se nalaze ispod prave) rastu dok ne dostignu maksimum, a potom opadaju, dok rešenja čiji su grafici iznad ove prave neograničeno rastu (vidi sliku 2.5). Ukoliko želimo da sledimo drugu strategiju, primetimo da su izokline date jednačinom

$$y = x + c.$$

Za konkretnu vrednost c duž cele prave $y = x+c$ crtamo mali deo prave sa nagibom c. Na taj način predstavljamo linijske elemente i dolazimo do polja pravaca.

Primer 2.8

Opišimo izokline i konstruišimo polje pravaca za ODJ

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

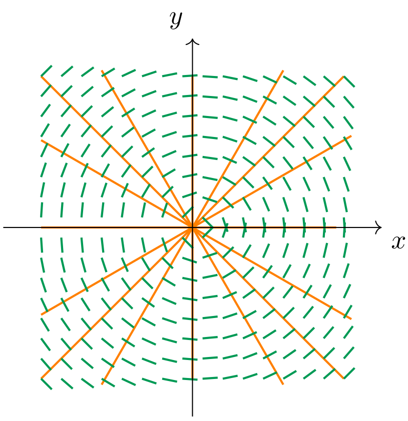
a potom nacrtajmo tri integralne krive za datu ODJ.

Izokline su opisane jednačinom

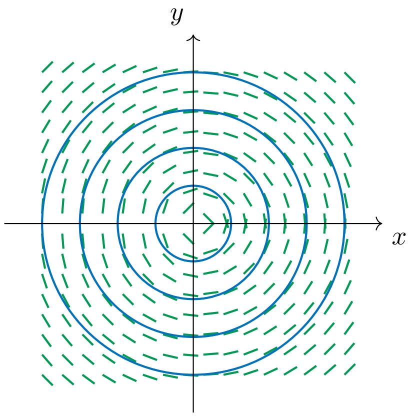
$$y = -\frac{1}{c}x.$$

Primetimo, dok prava kojom predstavljamo linijski element ima nagib c, nagib izokline je $-1/c$. Dakle, prava kojom predstavljamo linijski element je normalna na izoklinu.

Integralne krive su kružnice sa centrom u koordinatnom početku (potvrditi rešavanjem ODJ).



Slika 2.7: Polje pravaca i izokline



Slika 2.8: Polje pravaca i nekoliko integralnih krivih

Primer 2.9

Opišimo izokline i konstruišimo polje pravaca za ODJ

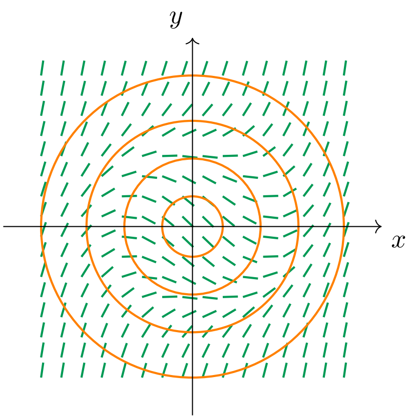
$$y'(x) = x^2 + y(x)^2 - 1,$$

a potom nacrtajmo tri integralne krive za datu ODJ.

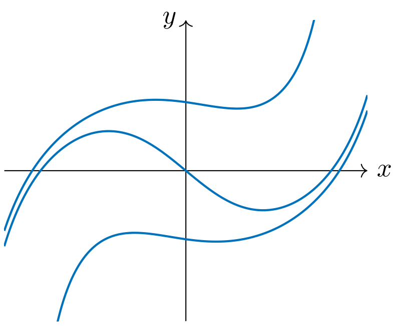
Sada su izokline koncentrične kružnice sa centrom u koordinatnom početku date jednačinom

$$x^2 + y(x)^2 = c - 1.$$

Na primer, birajući $c = 0$ dobijamo kružnicu poluprečnika 1.



Slika 2.9: Polje pravaca i izokline



Slika 2.10: Nekoliko integralnih krivih

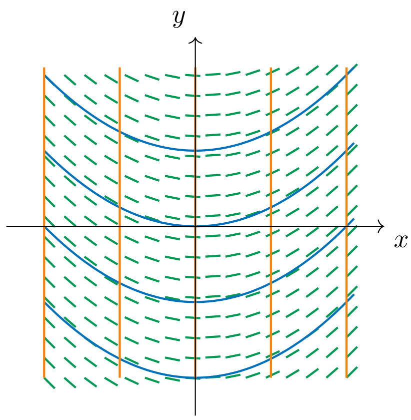
Primer 2.10

Opišimo izokline i konstruišimo polje pravaca za ODJ

$$y'(x) = \frac{x}{2},$$

a potom nacrtajmo četiri integralne krive za datu ODJ.

Lako dobijamo da su izokline opisane jednačinom $x = 2c$. Izokline, polje pravaca i nekoliko integralnih krivih je nacrtano na slici 2.11.



Slika 2.11: Izokline, polje pravaca i četiri integralne krive

2.3 Autonomna ODJ

Definicija 2.11

ODJ u kojoj se eksplicitno ne pojavljuje nezavisno promenljiva naziva se autonomna.

Specijalno, autonomna ODJ prvog reda je oblika $F(y(x), y'(x)) = 0$ ili kad možemo da rešimo po izvodu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y). \tag{2.4}$$

Automne ODJ predstavljaju pogodan model kada brzina promene neke veličine zavisi od same veličine. U nastavku ćemo videti brojne primere kod modeliranja kretanja tela kroz sredine sa otporom, kao i modele populacione dinamike. Takođe, ukoliko nezavisno promenljivu x interpretiramo kao vreme, onda autonomne ODJ nalaze svoju primenu i u problemima koji se ne menjaju sa vremenom (stacionarni problemi).

Definicija 2.12

Konstantna funkcija $y(x) = c$ takva da $f(c) = 0$ se naziva ravnotežno rešenje ODJ $y' = f(y)$, dok je $c \in \mathbb{R}$ njena kritična (ravnotežna, stacionarna) tačka.

Primer 2.13

ODJ

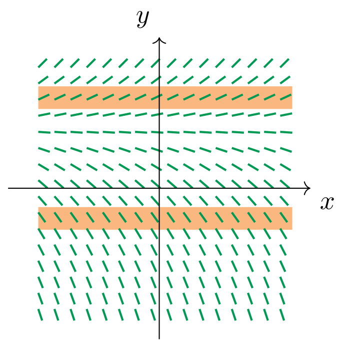
$$y' = 4y(1-y)$$

je autonomna, jer desna strana $f(y) = 4y(1-y)$ ne zavisi eksplicitno od x. Nule funkcije $f(y)$ su $y = 0$ i $y = 1$, te su ove dve konstantne funkcije ravnotežna rešenja ODJ.

2.3.1 Polje pravaca za autonomnu ODJ

Analizirajmo polje pravaca autonomne ODJ. Kako desna strana autonomne ODJ (2.4) ne zavisi od x, nagibi tangente na grafik rešenja ne zavise od x. Drugim rečima, ovi nagibi su paralelni duž svake horizontalne linije (paralelne sa x osom). Preciznije, linijski element autonomne ODJ je oblika $(x, y, f(y))$ i za njegovo crtanje je važna samo komponenta y. Dakle, za uočenu tačku (x_0, y_0) nagib $f(y_0)$ zavisi samo od y_0, te nacrtani linijski element $(x_0, y_0, f(y_0))$ će biti isti kao i $(x, y_0, f(y_0))$ za bilo koje x.

Ovo zapažanje nam olakšava crtanje polja pravaca autonomne ODJ, jer je potrebno samo da izračunamo linijske elemente za jedno fiksirano $x = x_0$. Odnosno, crtamo linijske elemente za različito y čime dobijamo linijske elemente u jednoj vertikalnoj traci koje posle transliramo horizontalno duž x-ose.



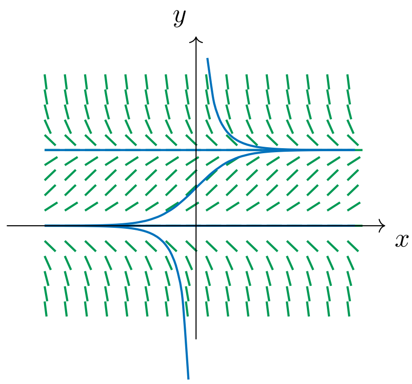
Slika 2.12: Polje pravaca autonomne ODJ

Primer 2.14: Nastavak primera 2.13

Nacrtajmo polje pravaca za autonomnu ODJ $y' = 4y(1-y)$ i analizirajmo njena rešenja.

Ravnotežna stanja su $y(x) = 0$ i $y(x) = 1$, kao što se može i uočiti na slici 2.13. Primetimo i da horizontalnom translacijom grafika jednog rešenja dobijamo grafike preostalih rešenja. Takođe zapažamo da rešenja čiji su grafici između ove dve prave su rastuća, a iznad prave $y = 1$ i ispod prave $y = 0$ su opadajuća. Ovo zapažanje može lako da se potvrdi analizom znaka desne strane jednačine, odakle dobijamo znak funkcije $y'(x)$, odnosno monotonost funkcije $y(x)$, kao što je prikazano u sledećoj tabeli.

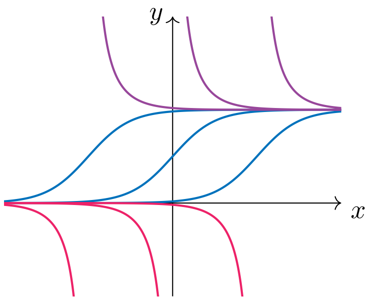
	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y	-	+	+
$1-y$	+	+	-
y'	-	+	-
y	opada	raste	opada



Slika 2.13: Polje pravaca i nekoliko integralnih krivih

Svojstvo translacije rešenja autonomne ODJ koje smo zapazili u prethodnom primeru ćemo analizirati u sledećem paragrafu.

2.3.2 Svojstvo translacije rešenja autonomne ODJ



Slika 2.14: Ilustracija svojstva translacije rešenja

Posmatrajmo autonomnu ODJ $y' = f(y)$. Neka je $y(x)$ jedno njeno rešenje. Tada je i $y_1(x) = y(x-k)$, $k \in \mathbb{R}$, takođe rešenje te ODJ. Podsetimo se, grafik funkcije $y = f(x-k)$, $k \in \mathbb{R}$, se dobija pomeranjem grafika funkcije $y = f(x)$ horizontalno duž $x-$ose za $|k|$ (translacija je udesno ako $k > 0$, a ulevo ako $k < 0$). Dakle, kako se $y_1(x)$ od $y(x)$ dobija translacijom, to ovo svojstvo rešenja autonomne ODJ zovemo svojstvo translacije.

Takođe, ako je $y(x)$ rešenje početnog problema

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

onda je $y_1(x) = y(x-x_0)$, rešenje početnog problema

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Primer 2.15

Funkcija $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, je rešenje početnog problema

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dok je $y_1(x) = y(x-5) = e^{x-5}$, $x \in \mathbb{R}$, rešenje početnog problema

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(5) = 1. \end{cases}$$

2.3.3 Modeliranje kretanja tela kroz sredine sa otporom

Autonomne ODJ se pojavljuju kao modeli raznih fizičkih pojava. U ovom poglavlju ćemo analizirati autonomne ODJ koje se pojavljuju prilikom opisivanja kretanja tela kroz sredine sa različitim silama otpora.

U svim primerima pretpostavljamo da se kretanje vrši u jednoj dimenziji, da je vektor brzine usmeren u smeru kretanja tela $\vec{v} = v(t)\vec{i}$, $\vec{i}$ je jedinični vektor brzine, kao i da je vektor sile otpora $\vec{F_o}$ usmeren suprotno od vektora brzine, tj. $\vec{F_o} = F_o\vec{i}$, gde je F_o negativno (slika 1). Jedan od primera za takvo kretanje je slobodan pad u sredini sa otporom, pod kojim se podrazumeva kretanje bez početne brzine u gravitacionom polju uz prisustvo sile otpora koja se može modelirati na različite načine.

Model 1: Kretanje u sredini sa otporom čija je sila $F_o = -\gamma v$

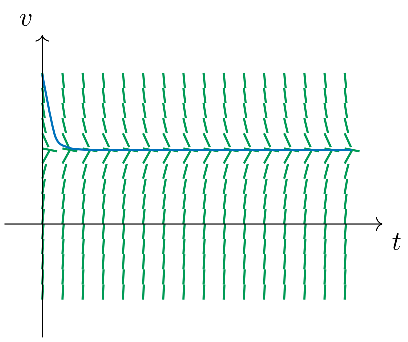
U primeru 1 smo izveli ODJ koja opisuje brzinu tela $v = v(t)$ mase m koje se kreće kroz sredinu sa otporom $F_o = -\gamma v$, $\gamma > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v, \tag{2.5}$$

gde je g gravitaciono ubrzanje. Ovo je jedna linearna autonomna ODJ. Odmah možemo da zaključimo da je njeno ravnotežno rešenje

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma},$$

Ovu ODJ možemo lako da rešimo, ali ćemo se radi ilustracije baviti samo kvalitativnom analizom. Polje pravaca za ovu ODJ je dato na slici 2.15.



Slika 2.15: Kretanje u sredini sa otporom modeliran silom $F_o = -\gamma v$; polje pravaca i rešenje

Zanimljivo je jednačinu (2.5) posmatrati i sa aspekta "takmičenja" dva uticaja od kojih jedan povećava veličinu, a drugi je smanjuje. U ovom slučaju, prvi uticaj je konstantan. Jednačina (2.5) je i primer saturacije.

Model 2: Kretanje u sredini sa otporom čija je sila $F_o = -\gamma v^2$

Ukoliko razmatramo istu situaciju kao u modelu 1, samo nam se razlikuje sila otpora koja je sada proporcionalna kvadratu brzine, onda je ODJ za brzinu tela

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v^2.$$

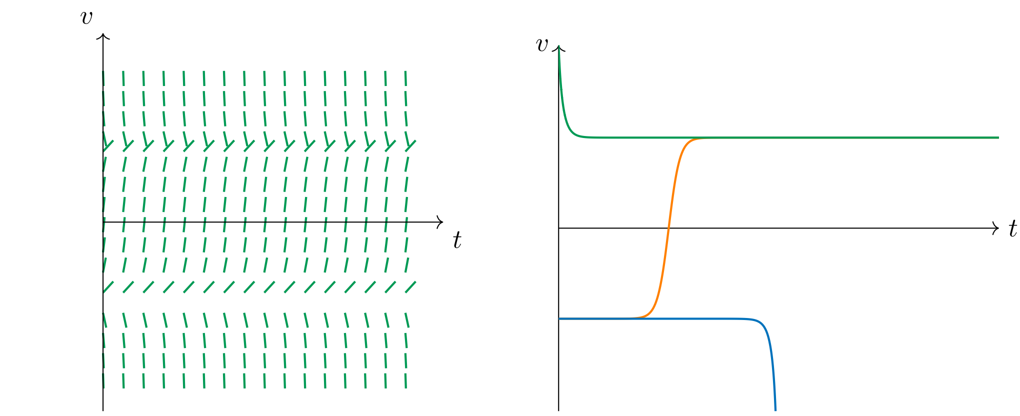
Ovo je jedna autonomna nelinearna ODJ. Ako desnu stranu jednačine faktorišemo

$$f(v) = g - \frac{\gamma}{m}v^2 = \left(\sqrt{g} - \sqrt{\frac{\gamma}{m}}v\right)\left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{\gamma}{m}}v\right), \tag{2.6}$$

dobijamo dva ravnotežna rešenja

$$v(t) = \pm\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}.$$

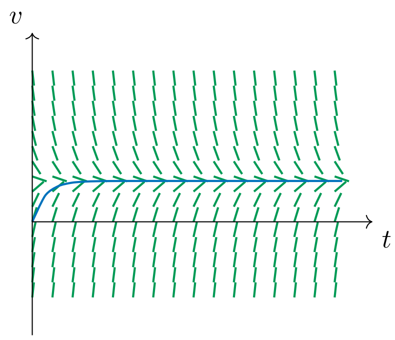
Polje pravaca i tri rešenja su data na slici 2.16.



Slika 2.16: Kretanje u sredini sa otporom modeliran silom $F_o = -\gamma v^2$; polje pravaca i rešenje

Model 3: Kretanje kroz sredinu sa otporom prema Stoksovom zakonu

Pretpostavimo kretanje kuglice poluprečnika r kroz tečnost gde se otpor sredine modelira prema Stoksovom zakonu. Ispitajmo kako se njena brzina menja u funkciji vremena.



Slika 2.17: Pad u viskoznoj sredini sa silom otpora modeliranom Stoksovim zakonom, polje pravaca i rešenje za vrednosti $g = 9,81$, $\rho_0 = 2$, $\rho = 3$, $r = 0.5$, $\eta = 1$

Kao i u prethodnim primerima, na telo dejstvuje sila teže i sila otpora. Međutim, kako telo pada kroz tečnost, u ovom primeru se javlja i sila potiska $\vec{F}_p$ koja je usmerena suprotno od kretanja tela, dakle $\vec{F}_p = F_p\vec{i}$, $F_p < 0$.

Ako sa ρ_0 označimo gustinu tečnosti viskoznosti η, sa ρ gustinu kuglice, onda

$$m = \rho V, \quad m_0 = \rho_0 V, \quad V = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Sada su sila potiska i sila otpora prema Stoksovom zakonu date sa

$$F_p = -m_0 g, \quad F_o = -6\,\pi\,\eta\,r\,v.$$

Sada naša diferencijalna jednačina glasi

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho} v.$$

Polje pravaca je nacrtano na slici 2.17.

2.3.4 Modeli populacione dinamike

Autonomne ODJ se susreću i u brojnim modelima populacione dinamike. U ovom odeljku ćemo proučiti modele koji se najčešće sreću u primenama.

U ovom odeljku, neka $P(t)$ označava veličinu populacije u trenutku t.

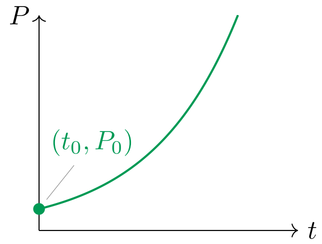
Model 1: model eksponencijalnog rasta

Model eksponencijalnog rasta predstavlja najjednostavniji model, baziran na pretpostavci da je relativna stopa rasta populacije konstantna:

$$\frac{\mathrm{d}P/\mathrm{d}t}{P} = k, \tag{2.7}$$

gde se k, konstanta proporcionalnosti, naziva stopa rasta ili stopa opadanja, u zavisnosti od toga da li je pozitivna ili negativna. Rešavajući (2.7) uz početni uslov $P(t_0) = P_0$, dobijamo rešenje

$$P(t) = P_0\, e^{kt}. \tag{2.8}$$



Slika 2.18: Eksponencijalni rast

Dakle, ako je $k > 0$ zaključujemo da će veličina populacije eksponencijalno rasti u svakom trenutku vremena. Ovaj model je u određenim situacijama pouzdan i često se koristi, pogotovo kada se posmatra kratak vremenski interval. Jasno je da za duže vremenske intervale model nije realističan, s obzirom na npr. prostorno ograničenje, količinu hrane ili drugih resursa. Svi ovi faktori utiču na smanjenje stope rasta.

Napomena 2.2. *Model eksponencijalnog rasta ili opadanja se često sreće i u fizici. Pretpostavimo da neka fizička veličina y zavisi od fizičke veličine x, recimo od vremena (brzina, radioaktivni raspad) ili debljine ili broja čestica (apsorpcija). Obično polazimo od pretpostavke da su promene međusobno srazmerne: $\mathrm{d}y \sim \mathrm{d}x$. Često se dešava da je promena neke veličine srazmerna i samoj veličini: $\mathrm{d}y \sim y\mathrm{d}x$. Uvodimo i koeficijent srazmernosti, konstantu $k \in \mathbb{R}$:*

$$\mathrm{d}y = ky\mathrm{d}x,$$

i dobijamo jednačinu eksponencijalnog rasta

$$y(x) = ce^{kx},$$

koja odgovara (2.7). Ukoliko imamo i početni uslov $y(0) = y_0$, onda je rešenje početnog problema

$$y(x) = y_0 e^{kx},$$

koje odgovara (2.8). Primer je lančana reakcija fisije, gde svako jezgro koje se raspalo proizvodi neutrone koji izazivaju dalji raspad.

Međutim, česti slučaj je da $y\mathrm{d}x$ prouzrokuje smanjenje. Recimo, sila otpora srazmerna je sa v ($F = -kv$) i smanjuje ubrzanje ($\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$). Debljina $\mathrm{d}x$ smanjuje intenzitet zračenja koje prođe kroz nju:

$$\mathrm{d}y = -ky\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; y(x) = y_0 e^{-kx}.$$

Primer je takođe i radioaktivni raspad. Za broj raspadnutih jezgara važi

$$\mathrm{d}N \sim -N\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; N(t) = N_0 e^{-kt},$$

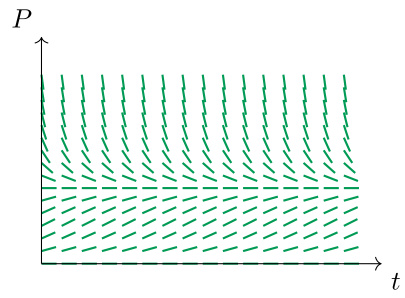
gde je k konstanta radioaktivnog raspada.

Model 2: logistički model

S obzirom na prirodne faktore koji ograničavaju rast populacije, realnije je pretpostaviti da stopa rasta zavisi od same populacije. Dakle, razmatrajmo sad slučaj kada je konstanta k iz prethodnog modela (2.7) funkcija od P,

$$\frac{\mathrm{d}P/\mathrm{d}t}{P} = f(P).$$

Pretpostavimo još i da su okolnosti takve da u populaciji ne može da bude više od (fiksnog) broja K jedinki. Broj K se naziva i kapacitet sredine. Dakle, imamo uslov $f(K) = 0$. Neka je u početnom trenutku $f(0) = r$.



Slika 2.19: Polje pravaca za logističku jednačinu za izbor $a = 2, b = 2$

Među svim funkcijama koje zadovoljavaju uslove $f(0) = r$ i $f(K) = 0$, najjednostavnije je da izaberemo da je $f(P)$ linearna funkcija po P, tj. $f(P) = -\frac{r}{K}P + r$. Kada preimenujemo konstante $a = r$, $b = \frac{r}{K}$, dobijamo model

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P\,(a - bP)\,. \tag{2.9}$$

Ova jednačina se naziva logistička jednačina. Njeno polje pravaca je prikazano na Slici 2.19.

Ukoliko je dat početni uslov $P(0) = P_0$, onda je rešenje početnog problema

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

Vidimo, $P(t) \to a/b$ kada $t \to \infty$, i $P(t) \to 0$, kada $t \to -\infty$.

Model 3: model sa migracijom

Postoji mnogo varijacija logističke jednačine. Navedimo jednu od njih,

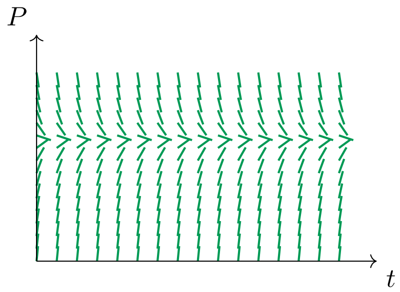
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P\,(a - bP) + h,$$

koja predstavlja model sa migracijom. U zavisnosti od funkcije h, možemo imati različitu interpretaciju modela: ako je h konstanta, onda dobijamo model populacije divljači koja se lovi stopom h, ako je h funkcija vremena t onda može da se radi npr. o periodičnom lovu. Ako je h funkcija populacije P, kao u slučaju

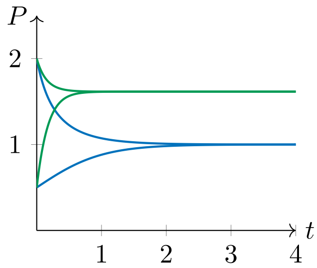
$$P'(t) = P\,(a - bP) + ce^{-kP}, \quad c > 0, \quad k > 0, \tag{2.10}$$

onda može da se modelira imigracija, ukoliko je doprinos imigracije bio velik kada je populacija stanovnika P bila mala, i obrnuto kada je on mali kada je populacija velika.

Uporedimo na slici 2.21 integralne krive za logističku jednačinu (2.9) i njenu modifikaciju (2.10) koje odgovaraju početnim uslovima $P(0) = 2$ i $P(0) = \frac{1}{2}$.



Slika 2.20: Polje pravaca za modifikaciju logističke jednačine (2.10) za izbor $a = 2, b = 2, c = 10, k = 1$



Slika 2.21: Poređenje rešenja logističkog (obeleženo plavom bojom) i modela sa migracijom (obeleženo zelenom bojom)

2.4 Teorijski rezultati za ODJ prvog reda

Videli smo određene analitičke metode za rešavanje ODJ prvog reda i kvalitativne tehnike za analizu rešenja ODJ bez njenog rešavanja. Postavlja se pitanje: kada možemo da znamo da li rešenje uopšte postoji? Matematičkim modelima fizičkih (ili bilo kakvih drugih realnih) procesa nameće se zahtev egzistencije rešenja ODJ koje modeliraju dati proces, jer bi nepostojanje rešenja ODJ značilo da model nije dobar.

Da bismo dobili ideju o egzistenciji rešenja, posmatrajmo algebarsku jednačinu: $2x^5 - 10x + 5 = 0$. Rešenje ove jednačine je ona vrednost x za koje je leva strana jednakosti jednaka 0. Drugim rečima, to je koren polinoma petog stepena $2x^5 - 10x + 5$. Možemo lako izračunati: za $x = 1$ vrednost polinoma je -3, za $x = -1$ vrednost polinoma je 13. Kako je polinom neprekidna funkcija sledi da postoji vrednost od x (i to između -1 i 1) za koju je leva strana jednaka 0. Dakle, utvrdili smo egzistenciju (bar jednog) rešenja naše jednačine.

Neka je funkcija $f(x, y)$ definisana u nekoj oblasti $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^2_{xy}$ (pod oblašću podrazumevamo otvoren i povezan skup), $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$. Pitamo se kada postoji rešenje početnog problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Najpre definišimo pojam rešenja početnog problema.

Definicija 2.16

Početni problem (2.11) ima rešenje ako postoji okolina $\mathbb{I}_0$ tačke x_0 i rešenje $y = y(x)$ jednačine $y' = f(x, y)$ definisano na $\mathbb{I}_0$ koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$.

Teorema koja nam daje dovoljan uslov za egzistenciju rešenja početnog problema (2.11) je Peanova teorema.

Teorema 2.17 (Peanova)

Ako je funkcija f neprekidna na $\mathbb{G}$ i $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$, tada početni problem (2.11) ima rešenje.

Teorema koja nam daje dovoljan uslov za egzistenciju i jedistvenost rešenja početnog problema (2.11) je Pikarova teorema.

Teorema 2.18 (Pikarova)

Ako su f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne funkcije na $\mathbb{G}$ i $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$, tada početni problem (2.11) ima jedinstveno rešenje.

Napomena 2.3. *Uslov neprekidnosti funkcije $\frac{\partial f}{\partial y}$ na $\mathbb{G}$ može da se zameni slabijim uslovom (Lipšicovim uslovom):*

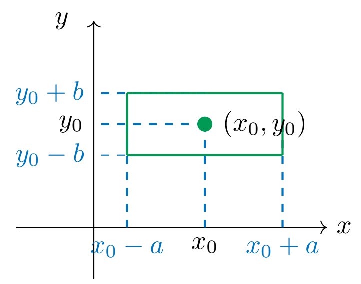
$$\exists k > 0 \text{ tako da } \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{G} \text{ važi } \; |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|.$$

Napomena 2.4. *Teorema o jedinstvenosti ima prostu geometrijsku interpretaciju: kroz svaku tačku (x_0, y_0) prolazi samo po jedna integralna kriva date jednačine.*

Napomena 2.5. *Obe teoreme imaju lokalni karakter – utvrđuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja u dovoljno maloj okolini tačke x_0.*

Precizniji osećaj o lokalnosti rešenja početnog problema možemo dobiti ukoliko posmatramo podskup oblasti $\mathbb{G}$, pravougaonik simetričan u odnosu na tačku iz početnog uslova (x_0, y_0):

$$\mathbb{P} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\right\} \subset \mathbb{G}.$$



Slika 2.22: Pravougaonik $\mathbb{P}$

Ukoliko su ispunjeni uslovi Peanove ili Pikarove teoreme na pravougaoniku $\mathbb{P}$, tada nam ove teoreme garantuju egzistenciju ili egzistenciju i jedinstvenost rešenja početnog problema (2.11), respektivno, na intervalu $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, pri čemu se α može izračunati:

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in\mathbb{P}} |f(x, y)|.$$

Analizirajmo par primera.

Primer 2.19

Primenom Pikarove teoreme naći interval na kom početni problem

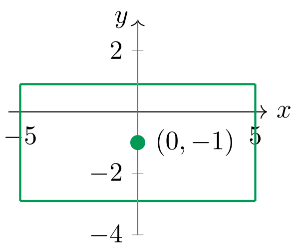
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje.

Sada je

$$f(x,y) = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)^2}.$$

Obe funkcije nisu definisane za $y = 1$. Pošto tačka iz početnog uslova $(0,1)$ leži na pravoj $y = 1$, Pikarova teorema nam ne daje odgovor na pitanje.



Slika 2.23: Pravougaonik $\mathbb{P}$ iz Primera 2.19.

Posmatrajmo sada istu ODJ , sa drugačijim početnim uslovom

$$y(0) = -1.$$

Pošto tačka iz početnog uslova $(0,-1)$ ne leži na pravoj $y = -1$, onda nam Pikarova teorema kaže da postoji neki interval $\mathbb{I}_0$ oko tačke $x = 0$ gde početni problem ima jedistveno rešenje. Ako želimo više informacija o intervalu $\mathbb{I}_0$, primenimo Napomenu 2.5. Sada je $x_0 = 0, y_0 = -1$. Pošto mora da važi $y \neq 1$, sledi da b treba da zadovolji $b < 2$, uzmimo $b = 2 - \frac{1}{10}$. Za a možemo uzeti bilo koji broj, na primer 5. Sada je pravougaonik

$$\mathbb{P} = [-5,5] \times \left[-3 + \frac{1}{10}, 1 - \frac{1}{10}\right].$$

Takođe možemo da izračunamo

$$M = \max_{(x,y)\in\mathbb{P}} \left|\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}\right| = 485.$$

Sada je

$$\alpha = \min\left\{5, \frac{2-\frac{1}{10}}{485}\right\} = \frac{2-\frac{1}{10}}{485} \approx 0.04.$$

Dakle, Pikarova teorema nam garantuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja početnog problema za $x \in \left[-\frac{19}{4850}, \frac{19}{4850}\right]$.

Primer 2.20

Analizirajmo početni problem

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2y}{x} \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

i odredimo one početne uslove za koje dobijamo egzistenciju rešenja ovog početnog problema primenom Peanove teoreme.

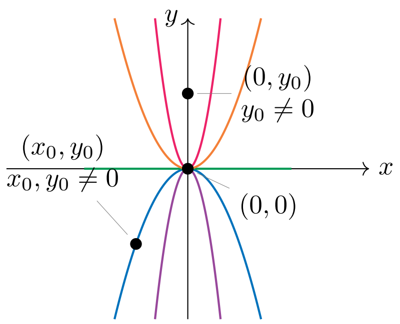
Funkcija

$$f(x,y) = \frac{2y}{x}$$

je definisana i neprekidna za $x \neq 0$. Dakle, Peanova teorema nam ne daje odgovor o egzistenciji rešenja za početne uslove oblika $y(0) = y_0$.

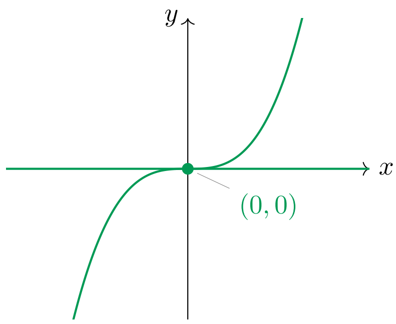
Za sve ostale početne uslove, $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$, Peanova teorema nam garantuje egzistenciju rešenja početnog problema na nekom intervalu oko tačke x_0.

Zaista, ako rešimo početni problem, dobijamo $y(x) = cx^2$. Ukoliko za početni uslov uzmemo $x_0 = 0$ i $y_0 \neq 0$, onda vidimo da ne možemo da pronađemo nijednu integralnu krivu koja prolazi kroz tu tačku, te početni problem nema rešenje. Takođe vidimo da za početni uslov $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ imamo beskonačno mnogo rešenja. Za sve početne uslove oblika $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$, odgovarajući početni problem će imati rešenje i ono će biti jedinstveno (dodatno treba proveriti).



Slika 2.24: Nekoliko integralnih krivih za Primer 2.20

Primer 2.21: Gubitak jedinstvenosti



Slika 2.25: Dva rešenja početnog problema čiji se grafici seku u $(0,0)$

Posmatrajmo ODJ

$$y' = 3y^{2/3}.$$

Funkcija $f(x,y) = 3y^{2/3}$ je neprekidna funkcija na celom $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, te su ispunjeni uslovi Peanove teoreme za bilo koje početne uslove. Međutim,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y^{-1/3}$$

nije definisana za $y = 0$. Dakle, Pikarova teorema nam ne daje odgovor o broju rešenja za početne uslove oblika $y(x_0) = 0$.

Zaista, rešavanjem ODJ dobijamo familiju rešenja

$$\frac{\mathrm{d}y}{3y^{2/3}} = \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y^{1/3} = x + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = (x+c)^3,$$

ali i singularno rešenje $y(x) = 0$. Ako sada posmatramo početni problem

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

rešenje je $y(x) = x^3$, ali rešenje je i $y(x) = 0$.

Primer 2.22: Interval egzistencije i jedinstvenosti zavisi od početnih uslova

Posmatrajmo početni problem

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Jasno je da su i $f(x, y) = y^2$ i $\partial_y f(x, y)$ neprekidne na celom $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ipak, rešenje kreira singularitet, i on zavisi od početnog uslova. Zaista, ako rešimo ODJ, dobijamo rešenje

$$y(x) = -\frac{1}{x+c}.$$

Iz početnog uslova fiksiramo c, $c = -1/y_0$, te je rešenje početnog problema

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{y_0}},$$

koje je definisano na $\mathbb{I} = (-\infty, 1/y_0)$, ako $y_0 > 0$ ili $\mathbb{I} = (1/y_0, \infty)$, ako $y_0 < 0$. Pored ovog rešenja, pojavljuje se i singularno $y(x) = 0$.
Ako želimo da odredimo interval $\mathbb{I}_0$ iz Pikarove teoreme, posmatrajmo pravougaonik

$$\mathbb{P}: \qquad |x| \leq a, |y - y_0| \leq b.$$

Maksimum funkcije f na ovom pravougaoniku je

$$M = (b + y_0)^2.$$

Sada je interval egzistencije i jedinstvenosti $[-\alpha, \alpha]$, pri čemu α

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{(b+y_0)^2}\right\}.$$

zavisi od početnog uslova.

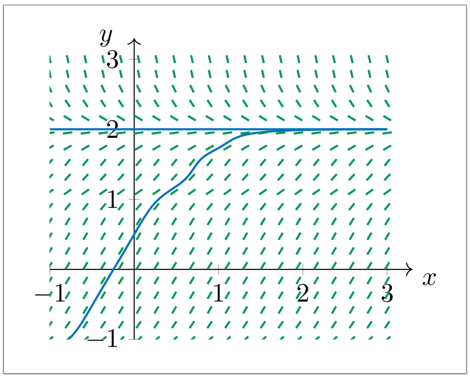
2.4.1 Primena Pikarove teoreme

Pikarova teorema nam kaže da su dva rešenja istog početnog problema iste funkcije. Drugim rečima, ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva rešenja ODJ $y'(x) = f(x, y)$, gde $f(x, y)$ zadovoljava uslove

Pikarove teoreme, i ako za neko x_0 važi $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, onda Pikarova teorema garantuje $y_1(x) = y_2(x)$ za svako x za koje je rešenje definisano ("ako se dva rešenja susretnu u nekom trenutku u istom položaju, onda su to iste funkcije").

Na osnovu ovog zapažanja, Pikarova teorema igra značajnu ulogu u poređenju rešenja početnih problema sa istom ODJ i različitim početnim uslovima. Opišimo njen značaj na par primera.

Primer 2.23



Posmatrajmo početni problem

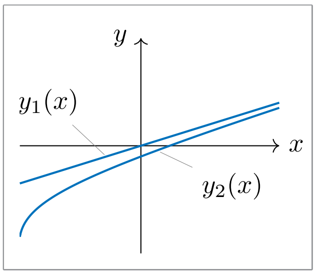
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}(y^2 - 4)(\sin^2(y^3) + \cos y - 2) \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vidimo, $y_1(x) = 2$ je jedno (ravnotežno) rešenje ODJ. Neka je $y_2(x)$ rešenje početnog problema. U tački $x = 0$ dakle imamo

$$y_2(0) < y_1(0).$$

Pikarova teorema implicira da $y_2(x) < 2$ za svako x za koje je rešenje definisano. Dakle, integralna kriva rešenja $y_2(x)$ ne može da "preskoči" pravu $y_1(x) = 2$. To znači da je rešenje početnog problema ograničeno sa 2.

Primer 2.24



Možemo imati i složenije poređenje rešenja neke ODJ sa jednim početnim uslovom sa rešenjem iste ODJ koje se lako uočava a uz drugi početni uslov.

Posmatrajmo ODJ

$$y' = \frac{(1+x)^2}{(1+y)^2}.$$

Vidimo da je $y_1(x) = x$ rešenje početnog problema koji se sastoji od ove ODJ i početnog uslova $y(0) = 0$.
Neka je sada $y_2(x)$ rešenje početnog problema koji se sastoji od ove ODJ i početnog uslova $y(0) = -0.1$. Pošto u tački $x = 0$, važi $y_2(0) < y_1(0)$, ovaj poredak rešenja ostaje za svako x za koje su rešenja definisana, odnosno sledi $y_2(x) < y_1(x) = x$, za svako x za koje je rešenje definisano.

Primer 2.25: Nastavak primera 2.13

Na osnovu Pikarove teoreme sada znamo da nema samopresecanja kod autonomne odj $y' = 4y(1-y)$. Takođe, možemo da uporedimo rešenja za različite početne uslove. Ako u početnom trenutku za rešenje ODJ $y(x)$ važi

- ako $y(0) < 0$, onda $y(x) < 0$,
- ako $0 < y(0) < 1$, onda $0 < y(x) < 1$,
- ako $y(0) > 1$, onda $y(x) > 1$,

za svako x za koje je rešenje definisano.

2.5 Linearna ODJ prvog reda

Linearne ODJ zauzimaju posebno mesto kako sa teorijskog aspekta, tako i u primenama. U ovom poglavlju ćemo dati opšte metode rešavanja i formulisati teoremu egzistencije i jedinstvenosti rešenja. Na kraju, istaći ćemo razlike između linearnih i nelinearnih ODJ.

Najpre se podsetimo definicije linearne ODJ prvog reda.

Definicija 2.26

ODJ prvog reda je linearna ako se može zapisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x), \tag{2.12}$$

gde su p i q proizvoljne funkcije od x definisane na nekom intervalu. Specijalno, linearna jednačina je homogena ukoliko je $q(x) = 0$ za svako x na posmatranom intervalu, odnosno homogena linearna ODJ reda je oblika

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0. \tag{2.13}$$

U suprotnom je nehomogena linearna jednačina, a član $q(x)$ se naziva nehomogen član.

2.5.1 Recepti za rešavanje linearnih ODJ prvog reda

Prvi recept – integracioni množitelj

1. Jednačinu zapisati u obliku (2.12).
2. Naći integracioni množitelj
$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$
Pri integraljenju $p(x)$ izostaviti integracionu konstantu.
3. Pomnožiti obe strane jednačine (2.12) sa integralnim množiteljem. Leva strana postaje izvod proizvoda integracionog množitelja i nepoznate funkcije y:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y\right) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x).$$
4. Integraliti obe strane jednakosti i rešiti po y:
$$y(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right). \tag{2.14}$$

Drugi recept – metod varijacije konstante

1. Jednačinu zapisati u obliku (2.12).
2. Prvo rešiti odgovarajuću homogenu ODJ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0$. Rešenje je
$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$
3. Pustimo da integraciona konstanta C zavisi od x:
$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.15}$$
4. Diferenciranjem gornje jednakosti dobijamo
$$y'(x) = -p(x)y(x) + C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$
5. Uvrstimo u ODJ (2.12) i dobijamo jednačinu za $C(x)$
$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c$$
6. Vraćanjem ovog rezultata u (2.15) dobijamo rešenje (2.14).

Treći recept – smena

1. Jednačinu zapisati u obliku (2.12).
2. Uvodimo smenu
$$y(x) = u(x)v(x).$$
3. Uvrstimo u jednačinu i dobijamo
$$u'(x)v(x) + u(x)\left(v'(x) + p(x)v(x)\right) = q(x).$$
4. Tražimo funkciju $v(x)$ tako da $v'(x) + p(x)v(x) = 0$, dakle
$$v(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$
5. Sada gornja jednačina postaje
$$u'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x),$$
što je jednačina koja razdvaja promenljive.
6. Rešavanjem dolazimo do konačnog rešenja (2.14).

2.5.2 Egzistencija i jedinstvenost rešenja početnog problema sa linearnom ODJ

Videćemo da, ukoliko pretpostavimo da su funkcije p i q neprekidne na nekom intervalu $\mathbb{I}$, onda je (2.14) opšte rešenje ODJ (2.12) na intervalu $\mathbb{I}$. Drugim rečima, ukoliko posmatramo početni problem:
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{2.16}$$
imamo jedinstveno rešenje definisano na intervalu $\mathbb{I}$ koji sadrži tačku x_0. Ono se dobija od opšteg rešenja (2.14) izborom proizvoljne konstante C tako da je zadovoljen početni uslov. Preciznije, važi sledeća teorema:

Teorema 2.27

Neka su funkcije $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne na intervalu $\mathbb{I}$ koji sadrži tačku x_0. Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema (2.16) definisano na $\mathbb{I}$. To rešenje je dato sa

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}\right).$$

Primetimo, u slučaju linearne ODJ je

$$f(x,y) = -p(x)y + q(x), \quad \text{odakle dobijamo} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -p(x).$$

Iz neprekidnosti $p(x)$ i $q(x)$ na $\mathbb{I}$ sledi neprekidnost $f(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ na $\mathbb{G} = \mathbb{I}\times\mathbb{R}$. Dakle, na osnovu Pikarove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti ODJ prvog reda $y' = f(x,y)$, sledi da početni problem (2.16) ima rešenje na nekom intervalu $\mathbb{I}_0$ koji sadrži x_0. Međutim, zbog neprekidnosti funkcija p i q na $\mathbb{I}$ integrali koji se javljaju su definisani na celom intervalu $\mathbb{I}$. Drugim rečima, interval $\mathbb{I}_0$ može da se proširi na ceo interval $\mathbb{I}$.

Primer 2.28

Na ovom primeru pokažimo kako se tačka prekida koeficijenta može preneti i na rešenje ODJ. Nađimo opšte rešenje ODJ

$$(x^2-9)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = 0.$$

Ukoliko zapišemo jednačinu u standardnom obliku dobijamo

$$y'(x) + \frac{x}{x^2-9}y(x) = 0.$$

Jasno, $p(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ je definisano na $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. Sa druge strane, opšte rešenje ODJ je $y(x) = \dfrac{c}{\sqrt{x^2-9}}$, te za interval $\mathbb{I}$ možemo da uzmememo ili $(-\infty,-3)$ ili $(3,\infty)$.

Lema 2.29 (Osobine rešenja linearne ODJ prvog reda)

1. *Homogena linearna jednačina (2.13) uvek ima trivijalno rešenje $y = 0$.*
2. *(Princip superpozicije) Neka je $y_1(x)$ rešenje homogene linearne jednačine (2.13), tada je opšte rešenje te ODJ $y_h(x) = cy_1(x)$, gde je c konstanta.*
3. *Posmatrajmo nehomogenu linearnu jednačinu (2.12) i njoj odgovarajuću homogenu jednačinu (2.13). Neka je y_h opšte rešenje homogene (2.13), a y_p jedno rešenje nehomogene (2.12). Tada je opšte rešenje linearne nehomogene jednačine (2.12)*

   $$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

4. *Ako su y_p i y_q dva rešenja nehomogene jednačine (2.12), onda je $y_p - y_q$ rešenje pridružene homogene jednačine (2.13).*

Primer 2.30

Da drugi princip superpozicije važi samo za linearne jednačine pokazuje primer ODJ $y' = y^2$. Jedno rešenje ove ODJ je $y_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$, dok $y_2(x) = 2y_1(x) = \dfrac{2}{1-x}$ to nije.

Primer 2.31

Strujno kolo koje sadrži termogeni otpor R i induktivnost L priključeno je na izvor elektromotorne sile (EMS) koji se menja u vremenu po zakonu $E = E_0 \sin \omega t$ (E_0, ω su konstante). Odredimo promenu jačine struje u funkciji vremena $i(t)$ ako se zna da je $i(0) = 0$. Prema drugom Kirhofovom zakonu zbir elektromotornih sila u zatvorenom kolu je jednak nuli, tj.

$$E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri,$$

odnosno u našem slučaju promena jačine struje $i(t)$ zadovoljava linearnu ODJ

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E_0 \sin \omega t.$$

Rešavanjem ove ODJ dobijamo $i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left(R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)\right)$.

Primer 2.32

Rešimo ODJ $e^y \mathrm{d}x + (xe^y - 2y)\mathrm{d}y = 0$.

Na prvi pogled, ovo je jedna nelinearna ODJ za funkciju $y = y(x)$. Međutim, ako shvatimo x kao funkciju od y, onda dobijamo linearnu ODJ za tu funkciju,

$$x'(y) + x(y) = 2ye^{-y}.$$

2.5.3 Poređenje teorijskih rezultata za linearnu i nelinearnu ODJ

Istaknimo još jednom razlike koje se javljaju prilikom proučavanja linearnih i nelinearnih problema.

1. Ukoliko pretpostavimo da su koeficijenti u linearnoj ODJ neprekidne funckije, možemo da garantujemo egzistenciju i jedinstvenost opšteg rešenja. Partikularno rešenje se dobija iz početnih uslova. Kod nelinearnih ODJ često se dešava da ODJ ima singularna rešenja.

2. Postoji formula za opšte rešenje linearne ODJ, i to eksplicitna. Ovo nije slučaj kod nelinearne ODJ. Ukoliko uspemo analitički da dođemo do rešenja nelinearne ODJ, ono je gotovo uvek implicitno zadato.

3. Kandidati za singularitet rešenja linearne ODJ se mogu odrediti direktno iz ODJ: određivanjem tačaka prekida koeficijenata. Ako su koeficijenti neprekidne funkcije za sve $x \in \mathbb{R}$, onda postoji rešenje takođe na celom $\mathbb{R}$. Singulariteti rešenja nelinearne ODJ se najčesće određuju rešavanjem ODJ, te analizom rešenja. Takođe, singulariteti mogu da zavise i od početnih uslova, a ne samo od ODJ.

3 ODJ drugog reda

Opšti oblik ODJ drugog reda je

$$F(x, y, y'(x), y''(x)) = 0,$$

a kada možemo da rešimo po drugom izvodu dobijamo normalni oblik jednačine

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)).$$

Rešenje ODJ drugog reda sadrži dve konstante tj. imamo dvoparametarsku familiju krivih

$$G(x, y(x), c_1, c_2) = 0.$$

ODJ drugog reda dopuštaju formulisanje dva različita problema,

1. početni problem: uz ODJ su dati i početni uslovi koji predstavljaju dopunske uslove za vrednost funkcije i njene izvodne funkcije u istoj (početnoj) tački x_0:

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1.$$

Ovi uslovi se sreću, na primer, u mehanici kod kretanja tela kada zadajemo položaj tela i njegovu brzinu u početnom trenutku $t = 0$: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

2. granični problem: uz ODJ su dati i granični uslovi, dopunski uslovi za vrednost funkcije u dve tačke:

$$\text{u tački } x = x_1, \ y(x_1) = y_1, \quad \text{i u tački } x = x_2, \ y(x_2) = y_2.$$

Granični problem se formuliše, na primer, prilikom opisivanja elongacije kod oscilacija ili talasa – kada je žica dužine ℓ učvršćena na dva kraja zadajemo $y(0) = y(\ell) = 0$.

Početni problem za pravolinijsko kretanje materijalne tačke

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Granični problem za elongaciju pri oscilovanju žice koja je učvršćena na krajevima

$$\begin{cases} y'' + ky = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(\ell) = 0. \end{cases}$$

3.1 Snižavanje reda integracijom

Postoje dva opšta slučaja u kojima je moguće sniziti red ODJ drugog reda, tj. kada se ODJ drugog reda može svesti na sistem od dve ODJ prvog reda. To su sledeći slučajevi:

1. Jednačina koja ne sadrži nepoznatu funkciju $y(x)$:

$$F(x, y'(x), y''(x)) = 0.$$

Smena je $y'(x) = p(x)$, te dakle jednačina postaje ODJ prvog reda:

$$F(x, p(x), p'(x)) = 0.$$

Rešenje ove jednačine sadrži jednu konstantu : $G(x, p(x), c_1) = 0$ ili ako možemo da izrazimo po $p(x)$: $p(x) = g(x, c_1)$. Odatle integracijom dobijamo konačno rešenje

$$y(x) = \int g(x, c_1)\mathrm{d}x + c_2.$$

2. Jednačina koja ne sadrži nezavisno promenljivu x:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

U ovom slučaju y preuzima ulogu nezavisno promenljive, a $y'(x) = p(y)$ ulogu zavisno promenljive. Dakle, uvodimo smenu $y'(x) = p(y(x))$ i zapisujemo:

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

Sada ODJ postaje:

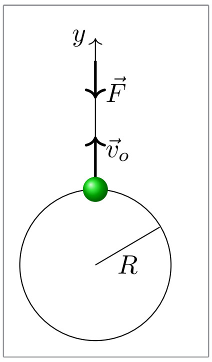
$$F\left(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = 0.$$

Rešimo po $p(y)$ i onda iz smene dobijamo jednačinu koja razdvaja promenljive

$$\frac{\mathrm{d}y}{p(y)} = \mathrm{d}x.$$

Primer 3.1

Telo mase m lansirano je sa površine Zemlje vertikalno uvis početnom brzinom v_0. Odrediti visinu penjanja uzimajući u obzir da je sila teže obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja od centra Zemlje. Zanemariti otpor atmosfere.



Neka je $\vec{j}$ jedinični vektor na y-osi. Sila teže je

$$\vec{F} = -\gamma\,\frac{m\,M}{y^2}\,\vec{j},$$

gde je γ gravitaciona konstanta, a M masa Zemlje. Vektor ubrzanja je

$$\vec{a} = \ddot{y}\,\vec{j}.$$

Skalarno množeći drugi Njutnov zakon $m\vec{a} = \vec{F}$ sa $\vec{j}$ dobijamo nelinearnu ODJ drugog reda

$$\ddot{y} = -\gamma\,\frac{M}{y^2}. \tag{3.1}$$

Takođe, poznati su početni uslovi: u početnom trenutku $t = 0$, telo se nalazi na površini Zemlje, i brzina mu je $\vec{v}_0 = v_0\vec{j}$, dakle

$$y(0) = R, \qquad \dot{y}(0) = v_0. \tag{3.2}$$

ODJ (3.1) ne sadrži nezavisno promenljivu, te po gore navedenom postupku, y preuzima ulogu nezavisno promenljive. Zavisno promenljiva je sada

$$p(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{3.3}$$

(primetimo, p se interpretira kao brzina u ovom primeru). Uvodimo ovu smenu u jednačinu (3.1). Prvo računamo izvod

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

koji uvrštavamo u (3.1),

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\gamma\,\frac{M}{y^2}. \tag{3.4}$$

Dakle, dobili smo sada ODJ za funkciju p koja zavisi od y. Drugim rečima ODJ drugog reda (3.1) smo zamenili sa dve ODJ prvog reda, to su (3.4) i (3.3). Osim toga, početni uslovi se transformišu na osnovu smene (3.4) i zapažanja $\dot{y}(0) = p(y(0))$ u

$$y(0) = R, \quad p(R) = v_0. \tag{3.5}$$

Rešavamo prvo ODJ za p, (3.4), koja razdvaja promenljive, uz početni uslov $(3.5)_2$,

$$p\,\mathrm{d}p = -\gamma\,\frac{M}{y^2}\,\mathrm{d}y,$$

čije je rešenje

$$\frac{p^2}{2} = \gamma\,\frac{M}{y} + C_1.$$

Konstantu integracije određujemo iz početnog uslova $(3.5)_2$, stavljajući $y = R$,

$$\frac{v_0^2}{2} = \gamma\,\frac{M}{R} + C_1 \;\rightarrow\; C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \gamma\,\frac{M}{R}.$$

Dakle, rešenje početnog problema koji se sastoji iz ODJ (3.4) i početnog uslova $(3.5)_2$ je

$$\frac{p^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \gamma\,\frac{M}{y} - \gamma\,\frac{M}{R}.$$

Visinu penjanja sada određujemo iz uslova $p(H) = 0$, dakle

$$0 - \frac{v_0^2}{2} = \gamma\,\frac{M}{H} - \gamma\,\frac{M}{R} \quad\Rightarrow\quad H = \frac{\gamma M}{\frac{\gamma M}{R} - \frac{v_0^2}{2}}.$$

Primetimo, za $\dfrac{\gamma M}{R} = \dfrac{v_0^2}{2}$ dobijamo $H \rightarrow \infty$, odakle je $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{R}}$ druga kosmička brzina.

3.2 Linearna ODJ drugog reda

Navedimo najpre linearnu ODJ drugog reda, koja se iz definicije linearne ODJ n-tog reda (1.3) dobija za izbor $n = 2$.

Definicija 3.2

ODJ drugog reda je linearna ako se može zapisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = g(x), \tag{3.6}$$

gde su p, q i g proizvoljne funkcije od x.
Linearna jednačina je homogena ukoliko je $g(x) = 0$ za svako x, odnosno homogena linearna jednačina drugog reda je oblika

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0. \tag{3.7}$$

U suprotnom je nehomogena linearna jednačina, a član $g(x)$ se naziva nehomogen član. Specijalno, (3.7) je sa konstantnim koeficijentima ukoliko su $p(x)$ i $q(x)$ konstante.

Ukoliko definišemo diferencijalni operator $\mathcal{L}$ sa

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + q(x)I, \tag{3.8}$$

onda jednačinu (3.6) možemo zapisati kao $\mathcal{L}y = g$.

Za ODJ drugog reda su nam potrebna dva početna uslova, jer, grubo govoreći, su nam potrebne dve intergracije da bismo našli rešenje, a iz svake integracije proizilazi po jedna proizvoljna konstanta. Dakle, potrebna su nam dva početna uslova da bismo fiksirali te dve konstante.

Neka nam je uz ODJ (3.6) dat i početni uslov

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{3.9}$$

gde $x_0 \in \mathbb{I}$ i $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.3 (Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti)

Posmatrajmo početni problem (3.6) i (3.9). Ako su p, q i g neprekidne funkcije na intervalu $\mathbb{I}$ koji sadrži tačku x_0, onda postoji jedinstveno rešenje posmatranog početnog problema na celom intervalu $\mathbb{I}$.

Primer 3.4

Naći jedinstveno rešenje početnog problema

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0, \\ \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0, \end{cases} \end{gathered} \tag{3.10}$$

gde su p i q neprekidne funkcije na otvorenom intervalu $\mathbb{I}$ koji sadrži tačku x_0.

Vidimo, $y(x) = 0$ zadovoljava i ODJ i početne uslove, te na osnovu teoreme znamo da je ovo i jedinstveno rešenje.

Primer 3.5

Naći interval egzistencije i jedinstvenosti rešenja početnog problema

$$\begin{cases} (x^2-x-6)y''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=0, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-1. \end{cases}$$

ODJ najpre treba zapisati u standardnom obliku, čime se dobijaju koeficijenti

$$p(x)=-\frac{x+1}{x^2-x-6}, \quad q(x)=\frac{1}{x^2-x-6}.$$

Funkcije p i q su neprekidne za $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$. Pošto tačka iz početnog uslova $x_0 = 0$ pripada intervalu $(-2,3)$, početni problem ima jedinstveno rešenje na $\mathbb{I}=(-2,3)$.

3.3 Homogena linearna ODJ drugog reda

Pojmovi linearne kombinacije dve funkcije i linearne zavisnosti dve funkcije, pojmovi neophodni za razumevanje ovog poglavlja, su obrađeni u Prilogu B.6.

U ovom poglavlju ćemo videti da je bilo koja linearna kombinacija dva rešenja ODJ takođe rešenje, a ono će biti i opšte rešenje ukoliko su ova dva rešenja linearno nezavisna. Takođe, rešavanje homogene jednačine igra suštinsku ulogu u rešavanju njoj odgovarajuće nehomogene.

Teorema 3.6 (Princip superpozicije za rešenja homogene linearne ODJ drugog reda)

Ukoliko su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva partikularna rešenja homogene linearne ODJ (3.7), onda je linearna kombinacija

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

takođe rešenje za bilo koje vrednosti konstanti c_1 i c_2.

Postavlja se pitanje da li postoje druga rešenja drugačijeg oblika. Odgovor je negativan ukoliko postavimo dodatni uslov o linearnoj nezavisnosti dva rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Pre nego što obrazložimo ovaj odgovor uvedimo pojmove koje ćemo koristiti.

Definicija 3.7

Neka su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ neprekidne funkcije sa neprekidnim prvim izvodima na nekom intervalu $\mathbb{I}$. Determinanta

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

se naziva Vronskijeva determinanta (determinanta Vronskog ili Vronskijan) funkcija $y_1(x)$ i $y_2(x)$ na intervalu $\mathbb{I}$.

Lema 3.8

Ako su funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno zavisne na $\mathbb{I}$, onda je njihov Vronskijan jednak nuli za svako $x \in \mathbb{I}$.

Dokaz. Pošto su funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno zavisne na $\mathbb{I}$, sledi $y_2(x) = c\,y_1(x)$, gde je c konstanta. Uzimajući izvod, $y_2'(x) = c\,y_1'(x)$. Sada je Vronskijan

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & cy_1(x) \\ y_1'(x) & cy_1'(x) \end{vmatrix} = c\,(y_1(x)y_1'(x) - y_1'(x)y_1(x)) = 0,$$

za sve $x \in \mathbb{I}$. □

Obrnuto ne mora da važi. Međutim, ako je u samo jednoj tački intervala $x_0 \in \mathbb{I}$ važi da $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, onda su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno nezavisne na $\mathbb{I}$.

Navedimo teoremu koja precizira uslove kada je linearna kombinacija dva rešenja zapravo jedino rešenje homogene linearne ODJ drugog reda.

Teorema 3.9

Neka su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva rešenja (3.7) na intervalu $\mathbb{I}$. Tada je

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

opšte rešenje jednačine (3.7) na intervalu $\mathbb{I}$ ako i samo ako postoji tačka $x_0 \in \mathbb{I}$ u kojoj

$$W(y_1, y_2)(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0.$$

Mi zapravo postavljamo uslov o linearnoj nezavisnosti rešenja, odnosno tražimo da $y_2/y_1 \neq$ const.

Definicija 3.10

Za dva rešenja $y_1 = y_1(x)$ i $y_2 = y_2(x)$ (3.7) za koja $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, za neko x, kaže se da formiraju fundamentalni skup rešenja.

Teorema 3.11

Ako znamo jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ za (3.7), tada uvek možemo naći drugo, njemu linearno nezavisno rešenje

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1(x)^2} \mathrm{d}x,$$

a samim tim i opšte rešenje.

Dokaz. Pretpostavimo da je $y_1(x)$ jedno poznato partikularno rešenje ODJ (3.7). Cilj je da konstruišemo njemu linearno nezavisno rešenje, te drugo rešenje $y_2(x)$ tražimo u obliku

$$y_2(x) = z(x)\, y_1(x). \tag{3.11}$$

Sada je cilj da pronađemo funkciju $z(x)$. Uvrštavanjem oblika (3.11) za drugo rešenje u ODJ (3.7) korišćenjem činjenice da je $y_1(x)$ rešenje te ODJ, dolazimo do ODJ za nepoznatu funkciju $z(x)$:

$$y_1 z'' + (2y_1' + p\,y_1)\,z' = 0.$$

Ovoj ODJ se može sniziti red uvođenjem smene $z' = u$,

$$y_1 u' + (2y_1' + p\,y_1)\,u = 0.$$

Sada možemo razdvojiti promenljive,

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}\,(\ln|y_1'|) - p\,\mathrm{d}x,$$

Računamo prvi izvod

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\,(|x|)'$$
$$= \frac{1}{|x|}\mathrm{sign}x = \frac{1}{x},$$

za sve $x \neq 0$.

odakle integracijom dobijamo

$$\ln|u| = -2\ln|y_1| - \int p\,\mathrm{d}x + c,$$

odnosno

$$\ln\left|u\,y_1^2\right| = -\int p\,\mathrm{d}x + c \quad \to \quad u\,y_1^2 = ce^{-\int p\,\mathrm{d}x}.$$

Vraćajući smenu dolazimo do ODJ prvog reda za funkciju z

$$z'(x) = \frac{1}{y_1^2}ce^{-\int p\,\mathrm{d}x},$$

koju rešavamo integracijom

$$z(x) = \int \frac{1}{y_1^2}ce^{-\int p\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c_2.$$

Pošto nam je potrebna samo jedna funkcija z, za konstante biramo $c = 1$ i $c_2 = 0$, te dakle dobijamo

$$z(x) = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

odakle sledi tvrđenje uzevši u obzir (3.11). □

3.4 Homogena linearna ODJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Klasa homogenih linearnih ODJ sa konstantnim koeficijentima je značajna po tome što su ove jednačine uvek rešive. Podsetimo se najpre pojma ODJ ovog tipa.

Definicija 3.12

Homogena linearna ODJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima je oblika

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \tag{3.12}$$

gde su a i b konstante.

Videćemo da ova jednačina uvek može da se reši, a priroda rešenja će zavisiti od konstanti a i b.

Tražimo rešenje (3.12) u obliku

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

gde je λ parametar koji treba odrediti.

Diferenciranjem dobijamo

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Uvrštavanjem u ODJ (3.12) dobijamo

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0.$$

Pošto $e^{\lambda x} \neq 0$ za sve x, sledi da je λ rešenje sledeće algebarske jednačine:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{3.13}$$

Ova jednačina se naziva karakteristična jednačina za ODJ (3.12). Ukoliko je λ rešenje ove (algebarske) jednačine, onda je $e^{\lambda x}$ rešenje ODJ (3.12). Pošto je u pitanju kvadratna jednačina sa realnim koeficijentima, ona će imati dva rešenja

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

koja mogu biti realna i različita $\big(a^2 - 4b > 0\big)$, realna i ista $\big(a^2 - 4b = 0\big)$, kompleksno-konjugovana $\big(a^2 - 4b < 0\big)$. Svaki od ovih slučajeva ćemo zasebno razmatrati.

Posmatrajmo ODJ

$$y''(x) - y(x) = 0$$

($a = 0, b = 1$). Tražimo funkciju čiji je drugi izvod isti kao i sama funkcija. Odmah uviđamo da je to funkcija e^x. Ali je takođe i e^{-x} rešenje, kao i ove dve funkcije pomožene konstantom, npr. $-3e^x$, $5e^{-x}$. Sa druge strane, i njihov zbir $e^x + e^{-x}$ je rešenje, kao i linearna kombinacija $c_1e^x + c_2e^{-x}$, gde su c_1, c_2 proizvoljne konstante.

3.4.1 Rešenja karakteristične jednačine su realna i različita

Ukoliko su rešenja karakteristične jednačine (3.13) realna i različita, tada su

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

dva rešenja (3.12), za koje je Vronskijan $W(y_1, y_2)(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$, te su linearno nezavisna i dakle čine fundamentalan skup rešenja.

Opšte rešenje je linearna kombinacija ova dva rešenja:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}, \tag{3.14}$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Ukoliko uz ODJ imamo i početne uslove,

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

onda dobijamo sistem jednačina za konstante c_1 i c_2:

$$\begin{aligned} c_1e^{\lambda_1 x_0} + c_2e^{\lambda_2 x_0} &= y_0 \\ c_1\lambda_1e^{\lambda_1 x_0} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 x_0} &= y_1, \end{aligned}$$

čije je rešenje:

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{-\lambda_1 x_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0\lambda_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{-\lambda_2 x_0}.$$

Napomena 3.6. *Koristeći*

$$e^{\pm kx} = chkx \pm shkx,$$

opšte rešenje (3.14) *možemo predstaviti i pomoću hiperboličnih funkcija*

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left(\alpha\, chkx + \beta\, shkx\right),$$

$$\alpha = c_1 + c_2,\ \ \beta = c_1 - c_2.$$

3.4.2 Rešenja karakteristične jednačine su kompleksno-konjugovana

Rešenja karakteristične jednačine su

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \imath\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Označimo:

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Sada se koren karakteristične jednačine $\lambda \in \mathbb{C}$ može predstaviti kao $\lambda = \alpha + \imath\beta$, sa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gore definisanim. Sada je rešenje ODJ

$$y(x) = e^{\lambda x} = e^{(\alpha+\imath\beta)x} = e^{\alpha x}e^{\imath\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + \imath\sin\beta x\right).$$

Međutim, ovo je kompleksna funkcija realne promenljive, a nas zanimaju samo realna rešenja, pa iz dobijenog kompleksnog rešenja formiramo realna rešenja koristeći sledeću lemu, koja će kasnije biti dokazana u nesto opštijem obliku (vidi lemu 4.7).

Lema 3.13

Ako je $y(x) = u(x) + \imath v(x)$ rešenje ODJ (3.12)*, tada su $u(x)$ i $v(x)$ rešenja te ODJ.*

Dakle, od jednog kompleksnog rešenja $y(x) = e^{\lambda x}$ dobijamo dva realna

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{3.15}$$

čiji je Vronskijan $W(y_1, y_2)(x) = e^{\alpha x} \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, te su ona linearno nezavisna na $\mathbb{R}$.

Na isti način se od konjugovanog kompleksnog broja $\bar{\lambda}$ za broj λ dobijaju dva realna rešenja koja se od (3.15) razlikuju samo po znaku.

Zaključujemo da je opšte rešenje

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left(c_1\, \cos\beta x + c_2\sin\beta x\right),$$

gde su c_1, c_2 proizvoljne konstante.

Napomena 3.7. *Često se koristi i sledeći zapis: neka je $\alpha = A\sin\varphi$, $\beta = A\cos\varphi$, pa je*

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{a}{2}x}\left(A\sin\varphi\cos kx + A\cos\varphi\sin kx\right) \\ &= e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(kx + \varphi\right). \end{aligned}$$

3.4.3 Rešenja karakteristične jednačine su realna i ista

U ovom slučaju je $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$. Dakle, oba korena generišu jedno rešenje. Drugim rečima, $y_2/y_1 = 1$, te rešenja nisu linearno nezavisna. Dakle, imamo jedno rešenje

$$y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x},$$

a drugo rešenje tražimo u obliku

$$y_2(x) = z(x)y_1(x) = z(x)e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Proveriti sa formulom za drugo linearno nezavisno rešenje iz Teoreme 3.3.

Dva puta diferenciramo i kad zamenimo u ODJ dobijamo jednačinu za $z(x)$:

$$z''(x) = 0 \;\Rightarrow\; z'(x) = c_2 \;\Rightarrow\; z(x) = c_1 + c_2 x.$$

Može se lako izračunati da je Vronskojan za ova dva rešenja $W(e^{-\frac{a}{2}x}, xe^{-\frac{a}{2}x}) = e^{-\frac{a}{2}x} \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sada je

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{-\frac{a}{2}x} = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$$

opšte rešenje (3.12).

3.5 Nehomogena linearna ODJ drugog reda

Kada smo rešili homogenu ODJ, prelazimo na rešavanje kompletne odgovarajuće linearne ODJ. Dakle, u ovom poglavlju posmatramo nehomogenu linearnu ODJ drugog reda (3.6)

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x). \tag{3.16}$$

Opšte rešenje ove ODJ je zbir odgovarajuće homogene ODJ i jednog partikularnog rešenja nehomogene, o čemu govori sledeća teorema.

Teorema 3.14

Opšte rešenje nehomogene linearne ODJ drugog reda (3.16) je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \tag{3.17}$$

gde je y_h opšte rešnje pridružene homogene jednačine (3.7), a y_p partikularno rešenje nehomogene jednačine (3.16).

Dokaz da je (3.17) rešenje nelinearne homogene ODJ (3.16) može lako da se izvede pomoću osobina linearnog diferencijalnog operatora $\mathcal{L}$ definisanog u (3.8). Naime, kako je y_h rešenje pridružene homogene ODJ, znamo $\mathcal{L}y_h = 0$, a pošto je y_p partikularno rešenje nehomogene ODJ sledi $\mathcal{L}y_p = g$. Sada iz linearnosti operatora $\mathcal{L}$ dobijamo

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}(y_h + y_p) = \mathcal{L}y_h + \mathcal{L}y_p = 0 + g = g,$$

odakle sledi zaključak da je y zaista rešenje nehomogene ODJ.

Dakle, da bismo znali opšte rešenje nehomogene ODJ, potrebno je da rešimo odgovarajuću homogenu i nađemo samo jedno rešenje nehomogene. Postavlja se pitanje kako da nađemo to jedno partikularno rešenje nehomogene ODJ. Predstavićemo dve metode: metodu varijacije konstanti koja je opšta metoda i metodu pogađanja koja se koristi samo u specijalnim slučajevima.

3.5.1 Metoda varijacije konstanti

Pretpostavimo da znamo da rešimo odgovarajuću homogenu jednačinu (3.7) tj. da poznajemo

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{3.18}$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante, a y_1 i y_2 dva linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene ODJ (3.7).

Pronađimo partikularno rešenje (3.6) metodom varijacije konstanti. Ideja je da umesto konstanti u (3.18) stavimo funkcije od x tj. da tražimo rešenje u obliku

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x).$$

Cilj nam je da nađemo ove dve funkcije: $c_1(x)$ i $c_2(x)$. Dakle, potrebne su nam dve jednačine. Jedna će biti sama ODJ, a drugu biramo da nam bude što jednostavnije. Ukoliko diferenciramo prethodnu jednakost dobijamo

$$y_p'(x) = c_1'(x) y_1(x) + c_1(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_2(x) y_2'(x).$$

Da bi bilo što jednostavnije, biramo:

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0. \tag{3.19}$$

Sada je

$$y_p'(x) = c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x).$$

Diferenciranjem i zamenom u ODJ (3.6) dobijamo jednačinu:

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = g(x). \tag{3.20}$$

Rešavamo sistem (3.19) i (3.20) po c_1' i c_2'. Determinanta ovog sistema je upravo $W(y_1, y_2)(x)$. Pošto su, po pretpostavci, $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva linearno nezavisna rešenja, znamo $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ za svako posmatrano x, pa je rešenje sistema jedinstveno:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

Integracijom dobijamo

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \mathrm{d}x, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \mathrm{d}x.$$

Sada je partikularno rešenje nehomogene ODJ (3.6) dato sa

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \mathrm{d}x + y_2(x) \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \mathrm{d}x.$$

3.5.2 Metoda pogađanja za specijalne slučajeve nehomogenosti

Posmatramo sledeću linearnu nehomogenu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) = g(x), \tag{3.21}$$

gde su a i b konstante. Opšte rešenje je dato uobičajenom formulom (3.17). Ovo poglavlje je posvećeno specijalnim oblicima nehomogenog člana $g(x)$, kada do partikularnog rešenja nehomogene jednačine možemo doći lakšim putem.

Slučaj 1

Nehomogeni član je oblika
$$g(x) = e^{rx} P_m(x),$$
gde je $P_m(x)$ polinom stepena m. Primetimo, ovim je pokriven i slučaj samo polinoma ($r = 0$) i slučaj samo eksponencijalne funkcije ($m = 0$). Recept za traženje partikularnog rešenja je sledeći:

1. ako r nije rešenje karakteristične jednačine (tj. e^{rx} nije rešenje odgovarajuće homogene jednačine), onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = e^{rx} Q_m(x),$$
gde je $Q_m(x)$ nepoznati polinom stepena m. Da bismo ga odredili, uvrstimo ga u ODJ, čime ćemo naći njegove nepoznate koeficijente.

2. ako r jeste rešenje karakteristične jednačine i to višestrukosti k, onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = x^k e^{rx} Q_m(x),$$
gde je $Q_m(x)$ nepoznati polinom stepena m čije koeficijente određujemo uvrštavanjem u ODJ.

Slučaj 2

Nehomogeni član je oblika
$$g(x) = e^{ax} \left(P_m(x) \sin bx + Q_n(x) \cos bx\right),$$
gde su $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n, redom. Partikularno rešenje nalazimo po sledećemo receptu:

1. ako $a \pm \imath b$ nije rešenje karakteristične jednačine (tj. $e^{ax} (c_1 \sin bx + c_2 \cos bx)$ nije rešenje odgovarajuće homogene jednačine), onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = e^{ax} \left(R_N(x) \sin bx + S_N(x) \cos bx\right), \qquad N = \max\{m, n\},$$
gde su $R_N(x)$ i $S_N(x)$ nepoznati polinomi istog stepena N čije koeficijente nalazimo uvrštavanjem u ODJ.

2. ako $a \pm \imath b$ jeste rešenje karakteristične jednačine i to višestrukosti k, onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = x^k e^{ax} \left(R_N(x) \sin bx + S_N(x) \cos bx\right).$$

Slučaj 3 - mešavina 1 & 2

Ako je nehomogeni član $g(x)$ zbir nehomogenih članova iz Slučaja 1 i 2, onda partikularna rešenja tražimo nezavisno. Na primer, ako je $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, gde su $g_1(x)$ i $g_2(x)$ oblika nehomogenosti iz Slučaja 1 ili 2, onda partikularna rešenja tražimo u obliku $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$, pri čemu je $y_{p_i}(x)$ rešenje ODJ (3.21) sa nehomogenim članom $g_i(x)$, $i = 1, 2$. Preciznije, koristimo sledeću teoremu koja će biti dokazana za bilo koji red linearne ODJ (vidi lemu 4.9).

Teorema 3.15

Ako je $y_{p_i}(x)$ rešenje ODJ

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g_i(x),$$

za $i = 1, 2, \ldots, k$, onda je $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \ldots y_{p_k}(x)$ rešenje ODJ

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x).$$

Metoda pogađanja, iako primenljiva samo u specijalnim slučajevima, je naišla na široku primenu u teoriji oscilacija. Oslikajmo metodu pogađanja upravo na ovim primerima iz fizike.

3.6 Primeri iz fizike vezani za teoriju oscilacija

U ovom poglavlju ćemo se baviti primenama linearne ODJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima u raznim problemima teorije oscilacija. Uvedimo najpre osnovni pojam linearnih harmonijskih oscilacija.

3.6.1 Linearni harmonijski oscilator (LHO)

Neka čestica ima potencijalnu energiju $V(x)$ koja ima minimum u tački x_0. Ako se čestica kreće u okolini tačke x_0 (tj. kada imamo tzv. male oscilacije), $V(x)$ možemo razviti u red oko x_0:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}V'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots .$$

Pošto minimum odgovara tački x_0, znamo $V'(x_0) = 0$ i $V''(x_0) > 0$. Neka je $V''(x_0) = k$, $k > 0$. Potencijalna energija je određena do na konstantu, merimo je od minimuma, tj. od $V(x_0)$. Dakle, kvadratni član je prvi član različit od nule, a pošto su oscilacije male zanemarujemo više stepene. Dakle,

$$V(x) \approx \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \quad x \approx x_0.$$

Ako pomerimo koordinatni početak u x_0, dobijamo

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \qquad k > 0.$$

Potencijalna sila koja se računa kao negativni gradijent potencijala je u ovom slučaju

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -kx.$$

Prema drugom Njutnovom zakonu imamo

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \tag{3.22}$$

odnosno

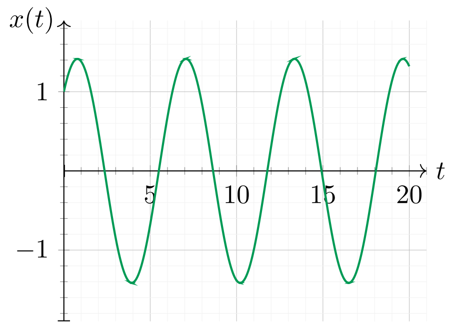
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0. \tag{3.23}$$

Ovo je jednačina linearnog harmonijskog oscilovanja. Primetimo, ovo je jedna linearna homogena ODJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Karakteristična jednačina je $\lambda^2+\omega_0^2=0$, čije je rešenje par kompleksno konjugovanih brojeva $\lambda_{1,2}=\pm\imath\,\omega_0$.

Opšte rešenje jednačine LHO (3.23) je

$$x(t)=A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t. \tag{3.24}$$



Slika 3.1: LHO, za vrednosti $A=B=\omega_0=1$

Ukoliko su zadati i početni uslovi

$$\begin{cases} x(0)=x_0, \\ v(0)=v_0, \end{cases}$$

možemo da odredimo konstante $B=x_0$, $A=\frac{v_0}{\omega}$. Sada je rešenje početnog problema

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t.$$

Primetimo, da bi bilo oscilovanja, ili x_0 ili v_0 mora biti različito od nule.

Druga mogućnost za izbor konstanti, odnosno za izbor početnih uslova je da prikažemo $A=a\cos\varphi_0$, $B=a\sin\varphi_0$ ($a=\sqrt{A^2+B^2}$, $\mathrm{tg}\varphi_0=B/A$). Tada je

$$x(t)=a\sin\left(\omega t+\varphi_0\right),$$

gde je a amplituda, φ_0 početna faza, a ω frekvencija.

3.6.2 Oscilovanje u viskoznoj sredini

U viskoznoj sredini je otpor sredine (u prvoj aproksimaciji) proporcionalan brzini ($F_o=-rv$). Sada je drugi Njutnov zakon:

$$ma=-kx-rv, \tag{3.25}$$

gde je r koeficijent prigušenja. Imajući u vidu $a=\ddot{x}$ i $v=\dot{x}$, dobijamo ODJ

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0, \qquad \omega_0^2=\frac{k}{m},\ 2\alpha=\frac{r}{m}. \tag{3.26}$$

Karakteristična jednačina je $\lambda^2+2\alpha\lambda+\omega_0^2=0$, čija su rešenja

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}.$$

Razmotrimo različite situacije u zavisnosti od odnosa ω_0 i α.

1. Preprigušenje

Preprigušenje se dešava u slučaju $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$ kada su oba korena karakteristične jednačine realna i različita, te su dva linearno nezavisna rešenja ODJ (3.26)

$$x_1(t) = e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t}, \quad x_2(t) = e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t}.$$

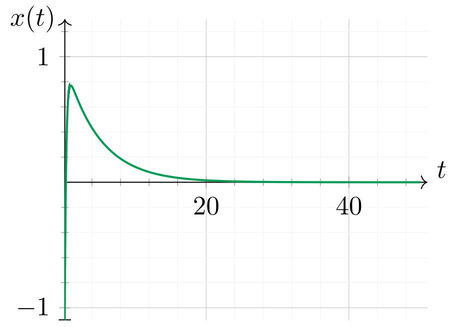
Međutim, kako važi $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ oba rešenja eksponencijalno opadaju.

Dakle, nema oscilovanja – sistem koji je izveden iz ravnoteže vraća se u ravnotežni položaj.

Opšte rešenje u slučaju preprigušenja je

$$x(t) = A\, e^{-\alpha\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2}\right)t} + B\, e^{-\alpha\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2}\right)t}, \qquad (3.27)$$

što je ilustrovano na slici 3.2.



Slika 3.2: Aperiodično rešenje (3.27) za $\alpha = \frac{5}{2}$ i $\omega_0 = 1$, $A = -5$, $B = 1$

2. Prigušenje

Prigušeno oscilovanje nastaje u slučaju $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$. Uvedimo oznaku $\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$.

Koren karakteristične jednačine je kompleksno-konjugovan par $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \imath\,\Omega$.

Opšte rešenje (3.26) je

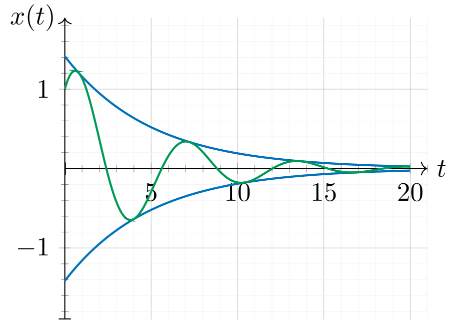
$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t\right),$$

gde su A i B proizvoljne konstante, koje opisuje prigušeno (amortizovano) oscilovanje.

Opšte rešenje možemo da zapišemo i na drugi način,

$$x(t) = a\, e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi_0).$$

Uočimo da amplituda prigušenih oscilacija $a\, e^{-\alpha t}$ eksponencijalno opada sa vremenom.



Slika 3.3: Prigušeno oscilovanje $\alpha = \frac{1}{5}$ i $\omega_0 = 1$, $A = B = 1$, $a = \sqrt{2}$

3. Kritično prigušenje

Poslednji slučaj je kritično prigušenje kada $\alpha = \omega_0$. Sada su koreni karakteristične jednačine realni i isti, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$.

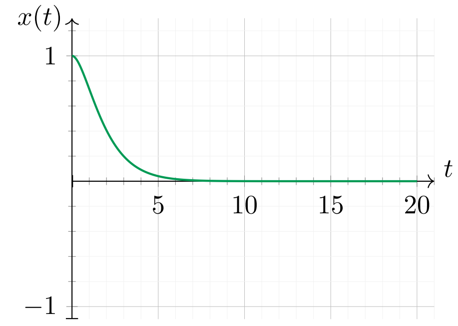
Opšte rešenje je

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\alpha t}. \tag{3.28}$$

U ovom slučaju nemamo oscilatorno ponašanje sistema, i važi

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

što je ilustrovano na slici 3.4.



Slika 3.4: Kritično prigušenje za vrednosti $\alpha = \omega_0 = 1$, $A = B = 1$

3.6.3 Oscilovanje u sredini bez otpora pod dejstvom prinudne sile sa frekvencijom različitom od frekvencije oscilatora

U ovom slučaju modifikujemo drugi Njutnov zakon (3.22) tako da uključimo prinudnu silu,

$$ma = -kx + F_{prin}.$$

Sada pretpostavljamo da je prinudna sila oblika $F_{prin} = F_0 \sin\omega t$, gde je $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, odakle dobijamo ODJ

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m} \sin\omega t. \tag{3.29}$$

Ovo je jedna linearna nehomogena ODJ. Rešavamo prvo odgovarajuću homogenu jednačinu,

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0.$$

Opšte rešenje ogovarajuće homogene ODJ se dakle poklapa sa (3.24)

$$x_h(t) = c_1 \sin\omega_0 t + c_2 \cos\omega_0 t.$$

Nađimo sada jedno partikularno rešenje nehomogene ODJ. Pošto nehomogeni član (prinudna sila) ima specijalan oblik homogenosti rešavamo pogađačkom metodom. Kako $\pm\imath\,\omega$ nije rešenje karakteristične jednačine za homogenu ODJ, prema uputstvu 2.1 iz odeljka 3.5.2 partikularno rešenje tražimo u obliku

$$x_p(t) = a \cos\omega t + b \sin\omega t.$$

Diferenciranjem i uvrštavanjem u ODJ (3.29) dobijamo

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(a \cos\omega t + b \sin\omega t) = \frac{F_0}{m} \sin\omega t.$$

Ova jednakost je moguća ukoliko

$$a = 0, \text{ i } \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) b = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}.$$

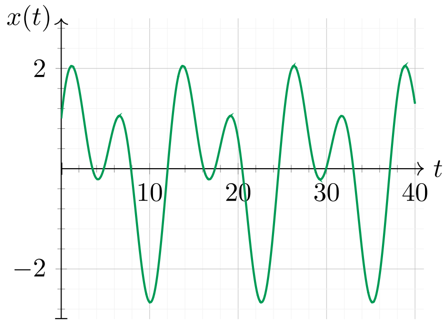
Dobili smo dakle jedno partikularno rešenje,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \sin \omega t. \tag{3.30}$$

Opšte rešenje (3.29) je

$$x(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \sin \omega t,$$

koje je prikazano na slici 3.5.



Slika 3.5: Prinudno oscilovanje u sredini bez otpora, $\omega_0 = 1$, $\frac{F_0}{m} = 1$ i $\omega = \frac{1}{2}$

3.6.4 Oscilovanje u sredini bez otpora pod dejstvom prinudne sile sa istom frekvencijom kao i oscilator

Neka na LHO bez otpora sredine deluje prinudna sila oblika $F_{prin} = F_0 \sin \omega_0 t$, gde je $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dakle sa istom frekvencijom kao i oscilator (slučaj rezonancije). Razmatrajući analogno kao u prethodnom slučaju kada smo dobili (3.29), sada drugi Njutnov zakon implicira sledeću ODJ

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t.$$

Odgovarajuća homogena jednačina je zapravo ODJ za LHO uvedena u (3.23) čije je rešenje (3.24),

$$x_h(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t.$$

Da bismo rešili nehomogenu ODJ koristimo metodu pogađanja. Za razliku od prethodnog slučaja, sada $\pm\imath\,\omega_0$ jeste rešenje karakteristične jednačine odgovarajuće homogene i to višestrukosti jedan. Prema uputstvu 2.2 iz Odeljka 3.5.2 partikularno rešenje tražimo u obliku

$$x_p(t) = t\left(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t\right).$$

Diferenciranjem i uvrštavanjem u ODJ dolazimo do jednakosti

$$-2a\omega_0 \sin \omega_0 t + 2b\omega_0 \cos \omega_0 t = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t,$$

odakle dobijamo konstante

$$b = 0, \quad a = -\frac{F_0}{2m\omega_0}.$$

Dakle, partikularno rešenje nehomogene jednačine je

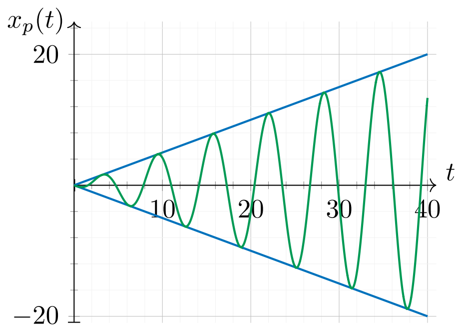
$$x_p(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t.$$

Možemo da zaključimo da amplituda prinudnih oscilacija linearno raste sa vremenom, kao što se vidi i na slici 3.6.

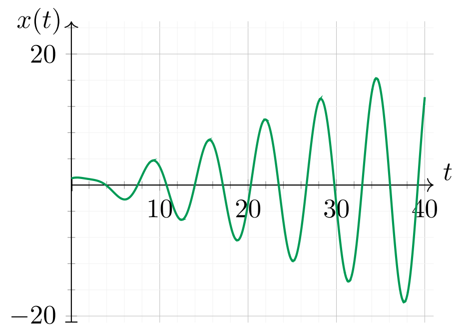
Sada je opšte rešenje

$$x(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t - \frac{F_0}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t,$$

i ono je prikazano na slici 3.7.



Slika 3.6: Jedno partikularno rešenje za prinudno oscilovanje u sredini bez otpora u slučaju rezonancije, $\omega_0 = 1$, $\frac{F_0}{m} = 1$



Slika 3.7: Prinudno oscilovanje u sredini bez otpora u slučaju rezonancije, $\omega_0 = 1$, $\frac{F_0}{m} = 1$, $c_1 = c_2 = 1$

3.6.5 Oscilovanje u viskoznoj sredini pod dejstvom prinudne sile

Posmatrajmo LHO u viskoznoj sredini na koga deluje prinudna sila. Modifikujemo drugi Njutnov zakon (3.25) tako da uključimo prinudnu silu,

$$ma = -kx - rv + F_{prin}.$$

Ukoliko pretpostavimo da je prinudna sila oblika $F_{prin} = F_0 \sin \omega t$, dobijamo ODJ

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 \, x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \; 2\alpha = \frac{r}{m}.$$

Prvo rešavamo odgovarajuću homogenu ODJ, koja se poklapa sa ODJ (3.26) iz primera oscilovanja u sredini sa otporom, bez prinudne sile. Za rešenje $x_h(t)$ homogene ODJ uzimamo slučaj prigušenih oscilacija $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$,

$$x_h(t) = A \, e^{-\alpha t} \sin \left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \right) t + \varphi_0 \right).$$

Pošto je nehomogeni član (prinudna sila) specijalnog oblika nehomogenosti, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$x_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

Difenciranjem i uvrštavanjem u ODJ dolazimo do sledećeg sistema jednačina za nepoznate konstante a i b

$$\begin{aligned}\left(\omega_0^2-\omega^2\right) b-2\,\alpha\, a\,\omega&=\frac{F_0}{m},\\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right) a+2\,\alpha\, b\,\omega&=0,\end{aligned}$$

čije je rešenje

$$a=-\frac{\frac{F_0}{m}2\alpha\omega}{4\alpha^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2},\qquad b=\frac{\frac{F_0}{m}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{4\alpha^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}.$$

Dakle, partikularno rešenje nehomogene ODJ je

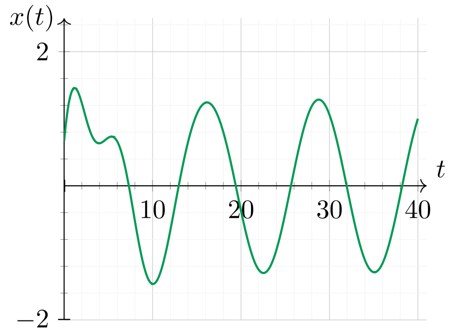
$$x_p(t)=-\frac{\frac{F_0}{m}2\alpha\omega}{4\alpha^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\cos\omega t+\frac{\frac{F_0}{m}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{4\alpha^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\sin\omega t.$$

Primetimo, kada $\omega\to\omega_0$, tada $x_p(t)\to-\frac{F_0}{2\,m\,\alpha\,\omega_0}\cos\omega_0 t$. Zapazimo takođe da ovo nije moguće kod partikularnog rešenja (3.30) kada nije bilo sile otpora sredine.

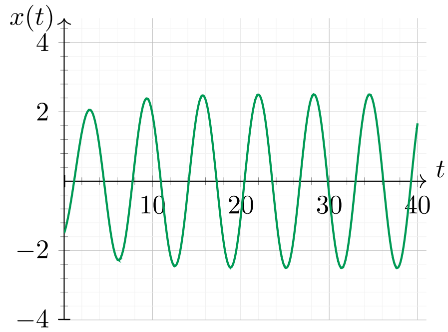
Sada je opšte rešenje

$$\begin{aligned}x(t)=A\,e^{-\alpha t}\sin&\left(\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\right)t+\varphi_0\right)\\ &-\frac{\frac{F_0}{m}2\alpha\omega}{4\alpha^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\cos\omega t+\frac{\frac{F_0}{m}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{4\alpha^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\sin\omega t.\end{aligned}$$

Uočimo da za veliko t prvi član teži ka 0 i ostaju samo oscilacije sa frekvencijom prinudne sile. Ovo je ilustrovano na slikama 3.8 i 3.9. Takođe, za $\alpha=0$ dobijamo rešenje koje smo već razmatrali.



Slika 3.8: Prinudno oscilovanje u viskoznoj sredini kada $\omega\neq\omega_0$, $\omega_0=1$, $\omega=\frac{1}{2}$, $\frac{F_0}{m}=1$, $\alpha=\frac{1}{5}$, $c_1=c_2=1$



Slika 3.9: Prinudno oscilovanje u viskoznoj sredini kada $\omega=\omega_0$, $\omega_0=\omega=1$, $\frac{F_0}{m}=1$, $\alpha=\frac{1}{5}$, $c_1=c_2=1$

3.7 Transformacija homogene linearne ODJ drugog reda. Uvođenje nove funkcije. Uvođenje novog argumenta

Posmatrajmo homogenu linearnu ODJ drugog reda

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Cilj nam je da svedemo ovu jednačinu na kanonski oblik – oblik u kom se ne pojavljuje prvi izvod. To možemo uraditi na dva načina.

3.7.1 Uvođenje nove funkcije

Uvodimo smenu

$$y = z\,u$$

i biramo u tako da dobijemo kanonski oblik. Kada diferenciramo dva puta, uvrstimo u jednačinu i podelimo sa u, dobijemo

$$z'' + z'\left(2\frac{u'}{u} + p\right) + z\left(\frac{u''}{u} + p\frac{u'}{u} + q\right) = 0.$$

Biramo u tako da zadovoljava

$$2\frac{u'}{u} + p = 0. \tag{3.31}$$

Rešenje ove jednačine je

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x},$$

pri čemu smo izostavili konstantu integracije, jer bi ona tada samo množila celu jednačinu, te se ne menja ništa. Sada je

$$u' = -\frac{1}{2}p(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x} = -\frac{p}{2}u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u} = -\frac{p}{2}$$

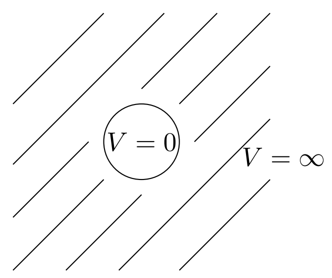
pa je dakle

$$u'' = -\frac{p'}{2}u - \frac{p}{2}u' \quad \Rightarrow \quad \frac{u''}{u} = -\frac{p'}{2} - \frac{p}{2}\frac{u'}{u} = \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}.$$

Kada vratimo u jednačinu dobijamo jednačinu koja ne sadrži prvi izvod (kanonski oblik)

$$z'' + z\left(-\frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} + q\right) = 0, \qquad y = ze^{-\frac{1}{2}\int p\mathrm{d}x}. \tag{3.32}$$

Primer 3.16: Šredingerova jednačina u slučaju sferne jame



Slika 3.10: Sferna jama

U nerelativističkom, stacionarnom slučaju, Šredingerova jednačina je

$$\left[-\frac{\hbar}{2\mu}\Delta + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x),$$

gde je $\hbar$ Plankova konstanta, μ masa čestice, $V(x)$ potencijal u kom se čestica kreće, a E energija čestice u stanju ψ (svojstvena vrednost operatora $-\frac{\hbar}{2\mu}\Delta + V(x)$). U slučaju sferne jame, čestica se nalazi u oblasti koja je sfernog oblika i u kojoj je potencijal jednak nuli ($V(x) = 0$), a van koje je beskonačni potencijal, što dakle znači da čestica ostaje u sfernoj jami. Takođe zbog sfernog oblika oblasti, uzimamo da je ψ radijalna funkcija, odnosno funkcija samo od $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. U tom slučaju laplasijan je

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}. \tag{3.33}$$

Dakle, talasna funkcija za česticu u sfernoj jami zadovoljava jednačinu

$$-\frac{\hbar}{2\mu}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\psi(r) = E\psi(r).$$

Ukoliko pozitivnu konstantu $\frac{2\mu}{\hbar}E$ označimo sa k^2, dobijamo homogenu ODJ drugog reda za nepoznatu funkciju $\psi = \psi(r)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(r)}{\mathrm{d}r^2} + 2\frac{\mathrm{d}\psi(r)}{\mathrm{d}r} + k^2\psi(r) = 0.$$

Svedimo ovu ODJ na kanonski oblik uvođenjem nove funkcije. Zapišimo

$$\psi(r) = z(r)u(r). \tag{3.34}$$

Iz jednačine zaljučujemo

$$p(r) = \frac{2}{r},\ q(r) = k^2,$$

pa je dakle iz (3.31) ODJ za u

$$\frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} = 0,$$

odakle rešavanjem dobijamo

$$u(r) = \frac{1}{r}.$$

Sada je ODJ za $z(r)$

$$z''(r) + k^2 z(r) = 0,$$

koju lako možemo da rešimo

$$z(r) = A\sin kr + B\cos kr.$$

Iz (3.34) dobijamo talasnu funkciju

$$\psi(r) = \frac{1}{r}\left(A\sin kr + B\cos kr\right).$$

3.7.2 Uvođenje novog argumenta

U jednačinu

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

uvodimo novi argument t, tj. shvatamo $x = x(t)$. Cilj je napisati ODJ tako da t igra ulogu nezavisne promenljive. To možemo postići na dva načina:

1. Pravilom izvoda složene funkcije $y = y(x(t))$:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{3.35}$$
pa je
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$
odakle dobijamo
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{3.36}$$
Iz (3.35) sledi
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}. \tag{3.37}$$
Kada vratimo ovo u jednačinu, dobijamo
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(p(x)x'(t) - \frac{x''(t)}{x'(t)}\right) + q(x)x'(t)^2y = 0. \tag{3.38}$$

2. Pravilom izvoda funkcije zadate u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$
Sada je
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{x'(t)}\left(\frac{1}{x'(t)}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{x''(t)}{x'(t)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).$$
Vraćanjem u jednačinu dobijamo (3.38).

Svodimo na kanonski oblik tako što tražimo da koeficijent uz $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ bude jednak nuli, tj. rešavamo diferencijalnu jednačinu za $x = x(t)$:
$$p(x)x'(t) = \frac{x''(t)}{x'(t)}.$$
Kako ova jednačina ne sadrži eksplicitno nezavisno promenljivu t, uvodimo parametar:
$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s,$$
pa je
$$x''(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}.$$
Sada jednačina postaje
$$p(x)s = s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{1}{s},$$
odnosno jednačina koja razdvaja promenljive:
$$\frac{\mathrm{d}s}{s} = p(x)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad s = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Sada je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = t.$$

Iz poslednjeg izraza dobijamo $x = x(t)$.

Sada jednačina (3.38) postaje

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + q(x)x'(t)^2 y = 0,$$

čijim rešavanjem dobijamo $y = y(t)$.

Primer 3.17: Ojlerova ODJ – linearna ODJ sa promenljivim koeficijentima

Posmatrajmo ODJ

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{A}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{B}{x^2}y = 0,$$

gde su A i B konstante. Uvođenjem novog argumenta t, tj. shvatajući $x = x(t)$ dobijamo ODJ sa konstantim koeficijentima. Naime, iz (3.38) dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\frac{A}{x}x'(t) - \frac{x''(t)}{x'(t)}\right) + \frac{B}{x^2}x'(t)^2 y = 0.$$

Biramo $\frac{x'}{x} = 1$, odakle sa jedne strane dobijamo iz $x' = x$ diferenciranjem $x'' = x'$, dakle $\frac{x''}{x'} = 1$. Sa druge strane, razdvajanjem promenljivih $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t$ dobijamo rešenje $x(t) = e^t$. Dakle, poslednja jednačina postaje ODJ sa konstantnim koeficijentima

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(A-1) + By = 0,$$

čije je opšte rešenje

$$y(t) = e^{-\frac{A-1}{2}t}\left(c_1 e^{\sqrt{\frac{(A-1)^2}{4} - B}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{(A-1)^2}{4} - B}\,t}\right).$$

Zapisujući drugačije

$$y(t) = \left(e^t\right)^{\frac{1-A}{2}}\left(c_1\left(e^t\right)^{\sqrt{\frac{(A-1)^2}{4} - B}} + c_2\left(e^t\right)^{-\sqrt{\frac{(A-1)^2}{4} - B}}\right),$$

možemo lako da vratimo smenu $x(t) = e^t$ čime dobijamo y u funkciji od x,

$$y(x) = x^{\frac{1-A}{2}}\left(c_1 x^{\sqrt{\frac{(A-1)^2}{4} - B}} + c_2 x^{-\sqrt{\frac{(A-1)^2}{4} - B}}\right).$$

3.8 Rešavanje linearnih ODJ drugog reda pomoću stepenih redova

Posmatramo linearnu ODJ drugog reda

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{3.39}$$

Videli smo da ukoliko su koeficijenti ove jednačine konstantni rešavanje diferencijalne jednačine se svelo na algebarski problem: nalaženjem korena karakteristične jednačine smo dobili opšte rešenje i ono je bilo linearna kombinacija elementarnih funkcija:

$$e^{ax}, x^k e^{ax}, x^k e^{ax}\cos bx, x^k e^{ax}\sin bx.$$

Međutim, čak i vrlo jednostavna jednačina kao npr. $y''+xy=0$ nema rešenje koje je elementarna funkcija.

Pod dosta opštim pretpostavkama o koeficijentima jednačine, moguće je naći rešenje jednačine u obliku stepenog reda koji konvergira na nekom intervalu ili u obliku jednostavnih kombinacija takvih redova i elementarnih funkcija.

Podsetimo se, stepeni red sa centrom u tački x_0 je funkcionalni red oblika

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k. \tag{3.40}$$

Karatak pregled teorije koja je neophodna za razumevanje ovog poglavlja je dat u prilogu C.

Klasifikujmo najpre tačke u okolini kojih tražimo rešenje ODJ.

Definicija 3.18

Tačka x_0 je regularna (obična) tačka jednačine (3.39) ako

- $a_2(x_0) \neq 0$,
- *koeficijenti a_2, a_1, a_0 jednačine (3.39) su analitičke funkcije u tački x_0.*

U suprotnom je x_0 singularna tačka jednačine (3.39).

Primer 3.19

Tačka $x = 0$ je singularna tačka za jednačine $y'' + xy' + \ln x\, y = 0$ i $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$. Singularne tačke za jednačinu $(x^2-1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ su $x = \pm 1$.

Postoji tip singularnih tačaka u okolini kojih je moguće tražiti rešenje u obliku stepenog reda. To su regularno-singularne tačke i one su definisane u sledećoj definiciji.

Definicija 3.20

Tačka x_0 je regularno-singularna tačka jednačine (3.39) ako je

1. *x_0 je singularna tačka jednačine (3.39),*
2. *funkcije $(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ i $(x-x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ su analitičke u tački x_0.*

Singularitet koji nije regularan naziva se esencijalni singularitet.

Napomena 3.8. *Kada su koeficijenti a_2, a_1, a_0 jednačine polinomi, x_0 je regularno-singularna tačka ukoliko $a_2(x_0) = 0$ i*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \qquad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

su konačne vrednosti.

Pređimo sada na rešavanje ODJ najpre u okolini regularne tačke, a potom i u okolini regularno-singularne tačke.

3.8.1 Rešavanje ODJ u okolini regularne tačke

Tražimo rešenje (3.39) u obliku stepenog reda sa centrom u regularnoj tački. Pošto je tačka regularna (3.39) se može zapisati u obliku

$$y''(x) + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y'(x) + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y(x) = 0. \tag{3.41}$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 3.21

Neka je x_0 regularna tačka ODJ (3.39). Neka je $R > 0$ poluprečnik konvergencije Tejlorovog reda sa centrom u x_0 funkcija $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$. Tada za proizvoljne realne brojeve α_0 i α_1 početni problem koji se sastoji iz jednačine (3.39) i početnih uslova

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha_0, \\ y'(x_0) = \alpha_1, \end{cases}$$

ima jedinstveno analitičko rešenje u tački x_0 predstavljeno redom

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{3.42}$$

sa poluprečnikom konvergencije R. Koeficijenti c_k za $k \geq 2$ mogu se odrediti direktnom zamenom reda (3.42) u jednačinu (3.39), dok su $c_0 = \alpha_0, c_1 = \alpha_1$.

Napomena 3.9. *Kada su koeficijenti polinomi, tada se R može izračunti kao udaljenost od x_0 do najbliže singularne tačke.*

Strategija za rešavanje ODJ u okolini regularne tačke

Tražimo rešenje u obliku reda (3.42). Koraci su sledeći

1. Uvrstimo stepeni red u jednačinu;
2. Dovodimo sve redove na isti stepen;
3. Svi redovi treba da počinju od istog indeksa;
4. Upoređujemo koeficijente;

5. Dobijamo rekurentne relacije za koeficijente stepenog reda rešenja ODJ;
6. Proveravamo konvergenciju.

Primer 3.22

Rešiti ODJ $y' - 2xy = 0$ u obliku stepenog reda u okolini tačke $x = 0$.

Napomena 3.10. *Datu ODJ možemo i analitički da rešimo, pošto ona razdvaja promenljive,*

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x,$$

te dobijamo rešenje

$$y(x) = c\, e^{x^2}. \tag{3.43}$$

Tačka $x = 0$ je regularna tačka date ODJ. Dakle, tražimo rešenje u obliku

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k. \tag{3.44}$$

Kako bismo uvrstili stepeni red u ODJ, treba najpre da ga diferenciramo

$$y'(x) = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\right)'$$
$$= \left(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k\, x^{k-1}.$$

Sada možemo da uvrstimo red u datu ODJ

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k\, x^{k-1} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k = 0.$$

Drugi red množimo sa x, tj. ulazimo sa množiocem x u red,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k\, x^{k-1} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k+1} = 0.$$

Da bismo doveli oba reda na isti stepen, menjamo brojače: u prvom stavljamo $m = k - 1$, a drugom $n = k + 1$. Time dobijamo

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, c_{m+1}\, x^m - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\, x^n = 0.$$

Kako je brojač "nema promenljiva", stavljamo jedinstveni brojač k,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, c_{k+1}\, x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}\, x^k = 0.$$

Da bi oba reda počela istim indeksom, iz prvog reda izdvajamo član za $k = 0$,

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, c_{k+1}\, x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}\, x^k = 0.$$

Sada možemo da saberemo dva reda

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1)\, c_{k+1} - 2c_{k-1}\right) x^k = 0.$$

Iz ove jednakosti sledi

$$c_1 = 0, \quad (k+1)\, c_{k+1} - 2c_{k-1} = 0.$$

Druga jednačina nam daje rekurentnu vezu na osnovu koje izračunavamo koeficijente c_k,

$$c_1 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, k > 1.$$

Tako na primer,

$$c_1 = 0,\ c_1 = c_0,\ c_3 = \frac{2c_1}{c_3} = 0,\ c_4 = \frac{1}{2}c_0,$$

$$c_5 = \frac{2c_3}{5} = 0,\ c_6 = \frac{2c_4}{6} = \frac{1}{3 \cdot 2}c_0....$$

Rekurentna relacija povezuje svaki drugi član, a pošto je prvi od njih $c_1 = 0$, svi neparni su jednaki nuli. Za parne može da se pokaže

$$c_{2k} = \frac{1}{k!}c_0.$$

Ovaj rezultat vraćamo u (3.44) i dobijamo

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} = c_0 e^{x^2}.$$

Primetimo, ovo rešenje se poklapa sa analitički dobijenim (3.43)

3.8.2 Rešavanje ODJ u okolini regularno-singularne tačke

U okolini regularno-singularne tačke ponašanje rešenja je takvo da se može primeniti (nešto modifikovan) prethodni metod.

Najpre uočimo da kada je x_0 regularno-singularna tačka jednačine (3.39), deljenjem jednačine sa $a_2(x)$ i množenjem sa $(x - x_0)^2$ dobijamo

$$(x-x_0)^2 y''(x) + (x-x_0)(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y'(x) + (x-x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y(x) = 0.$$

Ako definišemo

$$b_0 = (x-x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)},$$
$$b_1 = (x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)},$$

Primetimo, kada su b_1 i b_0 konstante, jednačina je Ojlerova i $x = x_0$ je njena regularno-singularna tačka.

onda prethodna jednakost postaje

$$(x-x_0)^2\, y''(x) + (x-x_0)\, b_1(x)\, y'(x) + b_0(x)\, y(x) = 0,$$

pri čemu su koeficijenti ove jednačine $b_1(x)$ i $b_0(x)$ analitičke funkcije u x_0.

Rešimo sada jednačinu u okolini regularno-singularne tačke x_0. Da bismo opisali metod, bez umanjena opštosti, posmatrajmo slučaj $x_0 = 0$:

$$x^2\, y''(x) + x\, b_1(x)\, y'(x) + b_0(x)\, y(x) = 0. \tag{3.45}$$

Tačka $x = 0$ je regularno-singularna. Za koeficijente b_1 i b_0 smo pretpostavili da su analitičke funkcije u $x = 0$ i neka su njihovi stepeni redovi:

$$b_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad b_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k, \tag{3.46}$$

i neka oni konvergiraju na intervalu $(-R, R)$, tj. za $|x| < R$ $R > 0$.

Tražimo rešenje u obliku (metod Frobenijusa)

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0,\ x > 0, \tag{3.47}$$

gde je r (za sada) nepoznata konstanta. Za $x < 0$ je analogno razmatranje. Diferenciranjem i uvrštavanjem u jednačinu dolazimo do indeksne jednačine koja određuje vrednost r:

$$f(r) := r^2 + r(\alpha_0 - 1) + \beta_0 = 0. \tag{3.48}$$

Rešenja r_1 i r_2 indeksne jednačine su eksponenti od (3.47).

U ovoj knjizi se ograničavamo na slučaj kada su r_1 i r_2 realni koreni indeksne jednačine (3.48) i štaviše $r_1 > r_2$ i $r_1 - r_2$ nije prirodan broj. Važi sledeća teorema.

Teorema 3.23

Neka je $x = 0$ regularno-singularna tačka ODJ (3.39). Neka je $R > 0$ poluprečnik konvergencije Maklorenovog reda funkcija $x\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} =: b_1(x)$ i $x^2\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)} =: b_0(x)$ datih u (3.46). Neka su r_1 i r_2 rešenja indeksne jednačine (3.48) takva da $r_1 > r_2$ i $r_1 - r_2$ nije prirodan broj. Tada je za $0 < |x| < R$ opšte rešenje jednačine (3.39) linearna kombinacija dva linearno nezavisna rešenja

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k}\, x^k, \qquad y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\, x^k,$$

gde se koeficijenti c_{1k} i c_{1k} rekurentno određuju.

Strategija za rešavanje ODJ u okolini regularno-singularne tačke

Tražimo rešenje u obliku reda (3.47). Koraci su sledeći

1. Uvrstimo stepeni red u jednačinu;
2. Dovodimo sve redove na isti stepen;
3. Svi redovi treba da počinju od istog indeksa;
4. Upoređujemo koeficijente;

5. Rešavamo indeksnu jednačinu;
6. Za svako rešenje indeksne jednačine dobijamo koeficijente stepenog reda rešenja ODJ;
7. Proveravamo konvergenciju.

Primer 3.24

Rešiti ODJ $2x^2y''(x) - xy'(x) + (1+x)y(x) = 0$ u obliku stepenog reda u okolini tačke $x = 0$.

Tačka $x = 0$ je singularna tačka ove ODJ, jer je u njoj koeficijent uz drugi izvod jednak nuli. Pošto su $b_1(x) = \frac{1}{2}$ i $b_2(x) = \frac{1}{2}(1+x)$ analitičke u $x = 0$, sledi da je $x = 0$ regularno-singularna tačka. Rešenje tražimo u obliku

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Diferenciranjem dobijamo

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)\, x^{k+r-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1)\, x^{k+r-2}.$$

Uvrštavamo u ODJ i dobijamo sledeću jednačinu

$$2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1)\, x^{k+r-2} - x \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)\, x^{k+r-1} + (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}$$
$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1)\, x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)\, x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r+1} = 0.$$

Da bismo sve redove doveli na isti stepen u poslednjem redu menjamo brojač $m = k+1$,

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1)\, x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)\, x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} x^{m+r} = 0.$$

Da bi svi redovi počinjali od istog indeksa $k = 1$, treba da članove za indeks $k = 0$ izbacimo iz prva tri reda. Tada dobijamo ODJ u kojoj je moguće sabrati redove i uporediti koeficijente:

$$2c_0 r(r-1)x^r - c_0 r x^r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2c_k (k+r)(k+r-1) - c_k (k+r) + c_k + c_{k-1}\right) x^{k+r} = 0.$$

Da bi ova jednakost bila tačna, potrebno je da svi koeficijenti uz svaki stepen od x budu jednaki nuli. Odavde dobijamo indeksnu jednačinu za r i rekurentnu vezu za c_k:

$$(2r(r-1) - r)\, c_0 = 0 \;\Rightarrow \text{indeksna jednačina } (r-1)(2r-1) = 0,$$
$$c_k \left(2(k+r)^2 - 3(k+r)\right) + c_{k-1} = 0, \quad k \geq 1.$$

Rešenja indeksne jednačine su $r_1 = 1$ i $r_2 = \frac{1}{2}$. Za svaki ovaj koren imamo odgovarajuće koeficijente c_k:

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{(2k+1)k}, \quad \bar{c}_k = -\frac{\bar{c}_{k-1}}{k(2k-1)}.$$

Dobijamo dva linearno nezavisna rešenja

$$y_1(x) = |x| \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \qquad y_2(x) = |x|^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k x^k, \quad |x| < \infty,$$

te je opšte rešenje linearna kombinacija ova dva rešenja.

Beskonačno kao singularna tačka

Svi rezultati koje smo naveli važe kada je okolina tačke x_0 u kojoj tražimo rešenje ODJ konačna vrednost. Fizički problemi zahtevaju da uključimo i "tačku" beskonačno. To se čini pomoću smene

$$t = \frac{1}{x}.$$

Kada smenimo argument u jednačini posmatramo tačku $t = 0$.

Prilikom uvođenja novog argumenta, treba voditi računa da se diferencijalni deo korektno smeni. Postupak je već izložen u odeljku 3.7.2. Iz izraza za smenu računamo izvode

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2\frac{1}{t^3}.$$

Na osnovu (3.37) i (3.36) se izvodi transformišu na sledeći način:

$$y'(x) = -t^2\dot{y}(t), \qquad y''(x) = t^4\,\ddot{y}(t) + 2t^3\dot{y}(t).$$

Dakle, sada naša ODJ (3.39) postaje

$$t^4\,a_2(1/t)\,\ddot{y}(t) + \big(2t^3\,a_2(1/t) - t^2\,a_1(1/t)\big)\,\dot{y}(t) + a_0(1/t)\,y(t) = 0.$$

Ispitujemo da li je tačka $t = 0$ regularno-singularna tačka za ovu jednačinu i ukoliko jeste tražimo njeno rešenje u obliku stepenog reda sa centrom u $t = 0$.

Primer 3.25

Posmatrajmo Ležandrovu ODJ

$$(1 - x^2)y''(x) - 2\,x\,y'(x) + \alpha(\alpha + 1)y(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

Uvođenjem smene $x = 1/t$ ona postaje

$$(t^2 - 1)t^2\ddot{y}(t) + 2t^3\dot{y}(t) + \alpha(\alpha + 1)\,y(t) = 0.$$

Sada je jasno da je $t = 0$ singularna tačka za ovu jednačinu, a kako su koeficijenti

$$\frac{2t^2}{(t^2 - 1)} \quad \text{i} \quad \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(t^2 - 1)}$$

analitičke funkcije u $t = 0$, ova tačka je i regularno-singularna za prethodnu ODJ, odnosno $x = \infty$ je regularno-singularna tačka za polaznu ODJ.

4 Linearne ODJ n-tog reda

Podsetimo se najpre definicije linearne ODJ n-tog reda.

Definicija 4.1

Linearna ODJ n-tog reda je ODJ oblika

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_2(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=g(x), \tag{4.1}$$

gde su $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\ldots$, $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ i $g(x)$ date funkcije definisane na nekom intervalu $\mathbb{I}$.

ODJ (4.1) nazivamo homogenom ako $g(x)=0$ za sve $x \in \mathbb{I}$. U suprotnom je nehomogena.

Početni (Košijev) problem se sastoji iz ODJ (4.1) i početnih uslova

$$\begin{aligned} &y(x_0)=y_0,\\ &y'(x_0)=y_1,\\ &\ldots\\ &y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$x_0 \in \mathbb{I}$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.2 (O egzistenciji i jedinstvenosti rešenja početnog problema)

Neka su $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\ldots$, $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $\mathbb{I}$, $a_n(x) \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{I}$ i $x_0 \in \mathbb{I}$. Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema (4.1) i (4.2) na intervalu $\mathbb{I}$.

Primer 4.3

Neka je dat početni problem

$$\begin{cases} 3y'''(x)+5y''(x)-y'(x)+7y(x)=0,\\ y(1)=0,\\ y'(1)=0,\\ y''(1)=0. \end{cases}$$

Jedno rešenje početnog problema je $y(x)=0$ na $\mathbb{R}$. Na osnovu teoreme 4.2 to je i jedino rešenje na intervalu koji sadrži tačku $x=1$.

Primer 4.4

$y(x) = cx^2 + x + 3$ je rešenje početnog problema

$$\begin{cases} x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 6, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$ za bilo koji izbor konstante $c \in \mathbb{R}$. Dakle, ne postoji jedinstveno rešenje početnog problema. Vidimo da za $a_2(x) = x^2$ nije ispunjen uslov iz teoreme 4.2 u tački iz početnog uslova $x = 0$.

Sa $C(D)$ označimo skup funkcija definisanih i neprekidnih u oblasti D, a sa $C^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, skup funkcija definisanih, neprekidnih i sa neprekidnim izvodima do reda k u oblasti D.

Sada možemo da definišemo diferencijalni operator koji odgovara linearnoj ODJ n-tog reda.

Definicija 4.5

Operator $\mathcal{L} : C^n(\mathbb{I}) \to C(\mathbb{I})$ definisan sa

$$\mathcal{L} = a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x)I,$$

gde je I identički operator, se naziva diferencijalni operator reda n.

Primetimo, $\mathcal{L}$ je linearan operator, jer za bilo koje dve funkcije $y_1(x), y_2(x) \in C^n(\mathbb{I})$ i bilo koje dve konstante $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, važi

$$\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2)(x) = c_1\,\mathcal{L}(y_1)(x) + c_2\,\mathcal{L}(y_2)(x).$$

Pomoću diferencijalnog operatora $\mathcal{L}$ reda n, linearna ODJ n-tog reda (4.1) se može kraće zapisati kao

$$\mathcal{L}y(x) = g(x),\ \ x \in \mathbb{I} \quad \text{ili kraće} \quad \mathcal{L}y = g \text{ na } \mathbb{I}.$$

U narednim poglavljima ćemo često koristiti ovaj zapis.

4.1 Neke osobine rešenja linearne ODJ

U ovom poglavlju ćemo navesti značajne rezultate za homogenu linearnu ODJ n-tog reda na intervalu $\mathbb{I}$

$$\mathcal{L}y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{I}, \tag{4.3}$$

kao i za kompletnu nehomogenu linearnu ODJ n-tog reda na intervalu $\mathbb{I}$

$$\mathcal{L}y(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{I}, \tag{4.4}$$

obe kraće zapisane pomoću diferencijalnog operatora $\mathcal{L}$.

Lema 4.6 (Princip superpozicije za homogenu linearnu ODJ)

Neka su $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ rešenja homogene linearne ODJ n-tog reda (4.3) na intervalu $\mathbb{I}$. Tada je linearna kombinacija

$$c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_k\, y_k(x),$$

gde su $c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstante, takođe rešenje te ODJ na intervalu $\mathbb{I}$.

Dokaz. Iz pretpostavke da su $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ rešenja (4.3) sledi $\mathcal{L}y_1(x) = 0$, $\mathcal{L}y_2(x) = 0$, $\ldots \mathcal{L}y_k(x) = 0$. Iz linearnosti operatora $\mathcal{L}$ sledi

$$\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k\, y_k)(x) = c_1\, \mathcal{L}(y_1)(x) + c_2\, \mathcal{L}(y_2)(x) + \cdots + c_k\, \mathcal{L}(y_k)(x) = 0,$$

za sve $x \in \mathbb{I}$ i bilo koje konstante $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Dakle, $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_k\, y_k(x)$ je rešenje ODJ (4.3). □

Lema 4.7

Ako homogena linearna ODJ n-tog reda (4.3) ima kompleksno rešenje $y(x) = u(x) + \imath v(x)$, $x \in \mathbb{I}$, tada su $u(x)$ i $v(x)$ rešenja ove ODJ na intervalu $\mathbb{I}$.

Dokaz. Sa jedne strane, pretpostavimo

$$\mathcal{L}(u + \imath v)(x) = 0.$$

Sa druge strane, iz linearnosti operatora $\mathcal{L}$ dobijamo

$$\mathcal{L}(u + \imath v)(x) = \mathcal{L}(u)(x) + \imath \mathcal{L}(v)(x).$$

Dakle,

$$\mathcal{L}(u)(x) + \imath \mathcal{L}(v)(x) = 0,$$

što implicira $\mathcal{L}(u)(x) = 0$ i $\mathcal{L}(v)(x) = 0$, za $x \in I$, čime smo dokazali da su $u(x)$ i $v(x)$ takođe rešenja date ODJ na intervalu $\mathbb{I}$. □

Lema 4.8

Ako je $y_1(x)$ rešenje nehomogene ODJ n-tog reda (4.4) na intervalu $\mathbb{I}$, a $y_2(x)$ rešenje odgovarajuće homogene ODJ (4.3) na intervalu $\mathbb{I}$, tada je $y_1(x) + y_2(x)$ rešenje nehomogene ODJ (4.4) na intervalu $\mathbb{I}$.

Dokaz. Dokaz sledi na osnovu linearnosti opeatora $\mathcal{L}$ i pretpostavki,

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2)(x) = \mathcal{L}(y_1)(x) + \mathcal{L}(y_2)(x) = g(x) + 0 = g(x),$$

za sve $x \in \mathbb{I}$. □

Lema 4.9

Ako je $y_i(x)$ rešenje ODJ $\mathcal{L}y(x) = g_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, na intervalu $\mathbb{I}$, tada je $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_k(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(x)$ rešenje ODJ $\mathcal{L}y(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)$ na intervalu $\mathbb{I}$

Dokaz. Pretpostavljamo $\mathcal{L}(y_1)(x) = g_1(x)$, $\mathcal{L}(y_2)(x) = g_2(x)$, $\ldots$, $\mathcal{L}(y_k)(x) = g_k(x)$. Iz linearnosti operatora $\mathcal{L}$ sledi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)(x) &= \mathcal{L}(y_1)(x) + \mathcal{L}(y_2)(x) + \cdots + \mathcal{L}(y_k)(x) \\ &= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x),\end{aligned}$$

za sve $x \in \mathbb{I}$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 4.10

Ako ODJ $\mathcal{L}y(x) = g_1(x) + \imath g_2(x)$ ima kompleksno rešenje $y(x) = u(x) + \imath v(x)$ na intervalu $\mathbb{I}$, tada su $u(x)$ i $v(x)$ rešenja redom ODJ $\mathcal{L}y(x) = g_1(x)$ i $\mathcal{L}y(x) = g_2(x)$.

Dokaz. Iz pretpostavki i linearnosti operatora $\mathcal{L}$ sledi

$$g_1(x) + \imath g_2(x) = \mathcal{L}(u + \imath v)(x) = \mathcal{L}(u)(x) + \imath\mathcal{L}(v)(x),$$

za sve $x \in \mathbb{I}$. Odavde sledi $\mathcal{L}(u)(x) = g_1(x)$ i $\mathcal{L}(v)(x) = g_2(x)$, za sve $x \in \mathbb{I}$, čime je dokaz završen. □

4.2 Homogene linearne ODJ n-tog reda

Definišimo Vronskijan za skup od n funkcija i podsetimo se pojma linearne nezavisnosti skupa funkcija iz priloga B.7.

Definicija 4.11

Neka $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in C^{n-1}(\mathbb{I})$. Determinanta

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \ldots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se naziva Vronskijeva determinanta (Vronskijan, determinanta Vronskog) funkcija $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$.

Teorema 4.12

Sledeća tvrđenja su ekvivalentna

1. $\forall x \in \mathbb{I}, \quad W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0,$
2. $\exists x_0 \in \mathbb{I}, \quad W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0,$
3. *rešenja* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *homogene linearne ODJ* n*-tog reda* (4.3) *na intervalu* $\mathbb{I}$ *su linearno nezavisna na tom intervalu.*

Skup n linearno nezavisnih rešenja homogene linearne ODJ n-tog reda ima posebno ime.

Definicija 4.13

Skup $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ n *linearno nezavisnih rešenja homogene linearne ODJ* n*-tog reda* (4.3) *na intervalu* $\mathbb{I}$ *naziva se fundamentalan skup rešenja na intervalu* $\mathbb{I}$.

Teorema 4.14

Neka su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *neprekidne funkcije na* $\mathbb{I}$. *ODJ* (4.3) *ima n linearno nezavisnih rešenja na intervalu* $\mathbb{I}$, *tj. za svaku ODJ* (4.3) *postoji njen fundamentalan skup rešenja na* $\mathbb{I}$.

Podsetimo se, bilo koji vektor iz $\mathbb{R}^3$ se mogao predstaviti kao linearna kombinacija linearno nezavisnih vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, na primer,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Tako i bilo koje rešenje homogene ODJ (4.3) na $\mathbb{I}$ može da se predstavi kao linearna kombinacija fundamentalnog skupa rešenja.

Teorema 4.15

Ako $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in \mathbb{I}$, *čine fundamentalan skup rešenja homogene linearne ODJ* n*-tog reda* (4.3) *na* $\mathbb{I}$, *tada je njeno opšte rešenje*

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_n\, y_n(x), \quad x \in \mathbb{I},$$

gde su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *konstante.*

Teorema 4.16

Neka $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in \mathbb{I}$, *čine fundamentalan skup rešenja homogene linearne ODJ* n*-tog reda* (4.3) *na* $\mathbb{I}$, *i neka je* $y(x) \in C^n(\mathbb{I})$ *proizvoljno netrivijalno rešenje ove ODJ. Tada postoje konstante* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *takve da*

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_n\, y_n(x), \quad x \in \mathbb{I}.$$

4.3 Nehomogene linearne ODJ n-tog reda

Teorema 4.17

Neka je $y_p(x)$ partikularno rešenje nehomogene linearne ODJ (4.4) na intervalu $\mathbb{I}$ i neka je $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ fundamentalan skup rešenja odgovarajuće homogene ODJ (4.3) na $\mathbb{I}$. Tada je opšte rešenje ODJ (4.4)na intervalu $\mathbb{I}$ dato sa

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_n\, y_n(x) + y_p(x),$$

gde su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstante.

Partikularno rešenje nehomogene ODJ (4.4) tražimo metodom varijacije konstanti. Tražimo ga u obliku

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n(x).$$

Diferenciranjem i ubacivanjem u ODJ (4.4) dobijamo sistem jednačina za izvode nepoznatih konstanti $c_1, \ldots, c_n$:

$$\begin{aligned}
y_1 c_1' + \quad & y_2 c_2' + \ldots + \quad & y_n c_n' &= 0,\\
y_1' c_1' + \quad & y_2' c_2' + \ldots + \quad & y_n' c_n' &= 0,\\
\ldots & & & \\
y_1^{(n-1)} c_1' + & y_2^{(n-1)} c_2' + \ldots + & y_n^{(n-1)} c_n' &= g.
\end{aligned}$$

Ovaj sistem rešavamo Kramerovim pravilom je Vronskijan rešenja odgovarajuće homogene ODJ, za koga dakle znamo da je različit od nule na celom intervalu $\mathbb{I}$. Dakle, dobijamo

$$c_k' = \frac{W_k}{W}, \ k = 1, \ldots, n,$$

gde se W_k dobija od W zamenom k-te kolone sa $(0, 0, \ldots, 0, g)$. Ovaj skup diferencijalnih jednačina za nepoznate konstante c_k dobijamo integracijon gornje jednakosti.

5 Sistemi linearnih ODJ

U ovom kursu ćemo se baviti sistemima linearnih ODJ prvog reda koje su zapisane u normalnom obliku:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + g_1(x), \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + g_n(x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ukoliko uvedemo oznake:

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix},$$

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix},$$

sistem diferencijalnih jednačina (5.1) možemo da zapišemo u matričnom obliku:

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + G(x).$$

Ukoliko je $G(x) = 0$, za sistem

$$Y'(x) = A(x)Y(x). \tag{5.2}$$

kažemo da je homogen. U suprotnom je nehomogen.

Definicija 5.1

Rešenje sistema (5.1) *na intervalu* $\mathbb{I}$ *je skup* n *funkcija:*

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x),$$

koje su diferencijabilne u svakoj tački intervala $\mathbb{I}$ *i zadovoljavaju sistem* (5.1) *za svako* $x \in \mathbb{I}$.

Uz sistem (5.1) posmatrajmo i početne uslove za funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ zadate u nekoj tački x_0

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \; \dots, y_n(x_0) = y_n^0, \tag{5.3}$$

gde su $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0 \in \mathbb{R}$ konstante, ili zapisano u matričnom obliku:

$$Y(x_0) = Y^0, \quad \text{gde je } Y^0 = \left[y_i^0\right]_{1 \le i \le n}.$$

Za početni problem koji se sastoji iz linearanog sistema (5.1) i početnih uslova (5.3) imamo globalnu teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja:

Teorema 5.2

Neka su funkcije $a_{ij}(x)$ *i* $g_i(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, *neprekidne na intervalu* $\mathbb{I}$. *Tada za svaku tačku* $x_0 \in \mathbb{I}$ *i proizvoljan vektor* $\left[y_i^0\right]_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ *postoji jedinstveno rešenje linearnog sistema ODJ* (5.1) *definisano na intervalu* $\mathbb{I}$ *koje zadovoljava početne uslove* $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = 1,\ldots,n$

Lema 5.3

Za linearne sisteme važi sledeće:

1. ***Princip superpozicije.*** *Ako su* $Y_1,\ldots Y_n$ *rešenja homogenog linearnog sistema* (5.2), *onda je i njihova linearna kombinacija*
$$c_1Y_1 + c_2Y_2 + \cdots + c_nY_n,$$
takođe rešenje tog sistema, za bilo koji izbor konstanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
2. *Ako homogen linearan sistem* (5.2) *ima kompleksno rešenje* $Y(x) = U(x) + \imath V(x)$, *tada su* $U(x)$ *i* $V(x)$ *dva realna rešenja ovog sistema.*
3. *Ako sistem* $Y' + A(x)Y = G_1(x) + \imath G_2(x)$ *ima kompleksno rešenje* $Y(x) = U(x) + \imath V(x)$, *tada su* $U(x)$ *i* $V(x)$ *rešenja redom sistema* $Y' + A(x)Y = G_1(x)$ *i* $Y' + A(x)Y = G_2(x)$.
4. *Ako je* U_i *rešenje sistema* $Y' = A(x)Y + G_i$, $i = 1,\ldots,k$, *tada je* $Y = \sum_{i=1}^{k} U_i$ *rešenje sistema* $Y' = A(x)Y + \sum_{i=1}^{k} G_i$.
5. *Ako je* Y_1 *rešenje homogenog sistema* (5.2), *a* Y_2 *rešenje nehomogenog sistema* (5.1), *tada je* $Y = Y_1 + Y_2$ *rešenje nehomogenog sistema* (5.1).

5.1 Homogen linearan sistem ODJ

Navedimo najpre kriterijum za linearnu nezavisnost rešenja.

Teorema 5.4

Neka su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ n *rešenja homogenog sistema* (5.2) *na intervalu* $\mathbb{I}$. *Tada su rešenja* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *linearno nezavisna na intervalu* $\mathbb{I}$ *ako i samo ako*
$$W(x) = W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)(x) = \begin{vmatrix} Y_1|Y_2|\ldots|Y_n \end{vmatrix} \neq 0,$$
za svako $x \in \mathbb{I}$.

Funkcija $W(x)$ naziva se Vronskijan sistema (5.2).

Teorema 5.5

Ako je $W(x_0) = 0$ za neko $x_0 \in \mathbb{I}$, tada je $W(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{I}$; ako je $W(x_0) \neq 0$ za neko $x_0 \in \mathbb{I}$, tada je $W(x) \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{I}$.

Definicija 5.6

Skup n linearno nezavisnih rešenja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ homogenog sistema (5.2) na intervalu $\mathbb{I}$ naziva se fundamentalni skup rešenja na intervalu $\mathbb{I}$. Matrica

$$\Psi(x) = [Y_1|Y_2|\ldots|Y_n]$$

naziva se fundamentalna matrica sistema (5.2).

Primetimo, $\det \Psi(x) = W(x)$.

Teorema 5.7

Neka je $Y_1, \ldots, Y_n$ fundamentalan skup rešenja homogenog sistema (5.2) na intervalu $\mathbb{I}$. Tada je opšte rešenje homogenog sistema na intervalu $\mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} Y(x) &= c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + \cdots + c_nY_n(x) \\ &= \Psi(x)C, \end{aligned}$$

gde je

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

$c_1, \ldots, c_n$ su proizvoljne konstante.

Primetimo da fundamentalna matrica zadovoljava $\Psi' = A\Psi$.

Ukoliko je dat i početni uslov $Y(x_0) = Y^0$ možemo odrediti konstantu C. Iz formule za opšte rešenje dobijamo

$$Y(x_0) = \Psi(x_0)C \qquad \Rightarrow \qquad C = \Psi^{-1}(x_0)Y(x_0).$$

Sada je rešenje početnog problema:

$$Y(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)Y(x_0).$$

Kada smo rešili homogeni sistem, prelazimo na rešavanje odgovarajućeg nehomogenog sistema.

5.2 Nehomogen linearan sistem ODJ

Slično kao i ranije, opšte rešenje nehomogenog sistema je jednako zbiru opšteg rešenja homogenog dela i jednog partikularnog rešenja nehomogenog sistema, kao što precizira sledeća teorema.

Teorema 5.8

Neka je Y_p partikularno rešenje nehomogenog sistema (5.1) na intervalu $\mathbb{I}$ i neka je Y_h opšte rešenje odgovarajućeg homogenog sistema (5.2) na $\mathbb{I}$. Tada je opšte rešenje nehomogenog sistema na intervalu $\mathbb{I}$ dato sa

$$Y = Y_h + Y_p.$$

Do partikularnog rešenja sistema možemo doći metodom varijacije konstanti ili lakšom, metodom pogađanja koja se primenjuje u specijalnim slučajevima.

5.2.1 Metod varijacije konstanti

Opšte rešenje homogenog sistema možemo zapisati u obliku

$$Y(x) = \Psi(x)C.$$

Partikularno rešenje tražimo u obliku $Y_p(x) = \Psi(x)C(x)$. Diferenciranjem i uvrštavanjem u sistem (5.1) dobijamo:

$$\Psi' C + \Psi C' = A\Psi C + G,$$

pa zbog osobine fundamentalne matrice dobijamo

$$\Psi C' = G \qquad \Rightarrow \qquad C = \int \Psi^{-1} G \mathrm{d}x.$$

Sada je opšte rešenje nehomogenog sistema (5.1)

$$Y(x) = \Psi(x)C + \Psi(x) \int \Psi^{-1}(x) G(x) \mathrm{d}x.$$

5.2.2 Metoda pogađanja

Ovu metodu možemo da koristimo ako je matrica A sa konstantnim koeficijentima i ako nehomogeni član ima specijalan oblik.

1. Nehomogeni član je oblika
$$G(x) = P_r(x)e^{\mu x}, \tag{5.4}$$
gde je $P_r(x)$ polinom stepena r čiji su koeficijenti $n-$dimenzionalni vektori, a μ je realan broj. Partikularno rešenje je oblika
$$Y_p(x) = Q_{r+k}e^{\mu x}, \tag{5.5}$$
gde je k višestrukost svojstvene vrednosti μ matrice A, a Q_{r+k} je polinom stepena ne većeg od $r+k$, sa koeficijentima koji su n dimenzionalni vektori. Ukoliko μ nije svojstvena vrednost matrice A, stavljamo $k = 0$.

2. Nehomogeni član je oblika
$$G(x) = e^{ax}\left(P_m(x)\sin bx + Q_n(x)\cos bx\right), \tag{5.6}$$
gde su $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n, redom, čiji su koeficijenti $n-$dimenzionalni vektori. Partikularno rešenje je oblika
$$Y_p(x) = T_k(x)\, e^{ax}\left(R_N(x)\sin bx + S_N(x)\cos bx\right), \quad N = \max\{m, n\}, \tag{5.7}$$

gde je k višestrukost svojstvene vrednosti $a \pm \imath b$ matrice A i $T_k(x)$, $R_N(x)$ i $S_N(x)$ nepoznati polinomi.

5.3 Homogen linearan sistem ODJ sa konstantnim koeficijentima

Posmatramo sistem

$$Y'(x) = AY(x),$$

gde su elementi matrice A realne konstante. Rešenje tražimo u obliku:

$$Y(x) = Ke^{\lambda x}, \quad \text{gde je} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Diferenciranjem dobijamo

$$Y'(x) = K\lambda e^{\lambda x}.$$

Uvrštavanjem u sistem dobijamo

$$(A - \lambda I)\, Ke^{\lambda x} = 0.$$

Netrivijalna rešenja ćemo imati ako

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

što je karakteristična jednačina matrice A, tj. λ je svojstvena vrednost, a K je svojstveni vektor matrice A.

Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. n različitih realnih svojstvenih vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: tada imamo n linearno nezavisnih svojstvenih vektora $K_1, \dots, K_n$. Opšte rešenje na $\mathbb{R}$ je

$$Y(x) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n x}.$$

2. realne, višestruke svojstvene vrednosti: neka je λ_1 svojstvena vrednost višestrukosti $m \le n$.

> λ_1 je koren višestrukosti m, $m \in \mathbb{N}$, ukoliko je $(\lambda - \lambda_1)^m$ faktor karakteristične jednačine, dok $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ to nije.

2.1. λ_1 generiše m linearno nezavisnih svojstvenih vektora $K_1, \dots, K_m$ (ovo se uvek desi ukoliko je A Ermitska matrica!), tada opšte rešenje sadrži linearnu kombinaciju

$$(c_1 K_1 + c_2 K_2 + \dots + c_m K_m)\, e^{\lambda_1 x}.$$

2.2 λ_1 generiše jedan svojstveni vektor, tada se m linearno nezavisnih rešenja traži u obliku:

$$Y_1 = K_{1,1} e^{\lambda_1 x}, Y_2 = (K_{2,1} x + K_{2,2}) e^{\lambda_1 x}, \dots,$$
$$Y_m = (K_{m,1} x^{m-1} + K_{m,2} x^{m-2} + \dots + K_{m,m}) e^{\lambda_1 x}.$$

3. među svojstvenim vrednostima ima (konjugovano-)kompleksnih: neka je $\lambda_1 = \alpha + \imath\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i neka je K_1 svojstveni vektor koji odgovara ovoj vrednosti. Tada rešenje sadrži linearnu kombinaciju sledećih linearno nezavisnih realnih rešenja:

$$Y_1 = \operatorname{Re}\left(K_1 e^{\lambda_1 x}\right) = (\operatorname{Re}(K_1)\cos\beta x - \operatorname{Im}(K_1)\sin\beta x)e^{\alpha x},$$
$$Y_2 = \operatorname{Im}\left(K_1 e^{\lambda_1 x}\right) = (\operatorname{Im}(K_1)\cos\beta x + \operatorname{Re}(K_1)\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

Primer 5.9: Radioaktivni raspad

Neka $N_A(t)$, $N_B(t)$ i $N_C(t)$ predstavljaju broj jezgara tri radioaktivne supstance čiji se raspad odigrava prema šemi

$$A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C,$$

gde su λ_A i λ_B konstante raspada. Supstancu C smatrajmo stabilnom. Tada su $N_A(t)$, $N_B(t)$ i $N_C(t)$ rešenja sistema diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}t} = -\lambda_A N_A,$$
$$\frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A,$$
$$\frac{\mathrm{d}N_C}{\mathrm{d}t} = \lambda_B N_B.$$

Pretpostavljajući da je $N_A(0) = N_0$, $N_B(0) = 0$, $N_C(0) = 0$, naći $N_A(t)$, $N_B(t)$ i $N_C(t)$.

Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_A & 0 & 0 \\ \lambda_A & -\lambda_B & 0 \\ 0 & \lambda_B & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednačina

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda + \lambda_A)(\lambda + \lambda_B) = 0$$

ima tri različita, realna rešenja, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_A$ i $\lambda_3 = -\lambda_B$. Za ove svojstvene vrednosti računamo odgovarajuće svojstvene vektore, u oznaci

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ k_{1,3} \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \\ k_{2,3} \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} k_{3,1} \\ k_{3,2} \\ k_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Računamo najpre svojstveni vektor pridružen $\lambda_1 = 0$. Iz $AK_1 = 0$ slede dve jednačine $-\lambda_A k_{1,1} = 0$ i $\lambda_A k_{1,1} - \lambda_B k_{1,2} = 0$, odakle sledi $k_{1,1} = k_{1,2} = 0$. Dakle, prvi svojstveni vektor je

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Svojstveni vektor pridružen vrednosti $\lambda_2 = -\lambda_A$ računamo iz jednačine $(A + \lambda_A I)K_2 = 0$, koja implicira dve jednačine e $\lambda_A k_{2,1} + (\lambda_A - \lambda_B)k_{2,2} = 0$ i $\lambda_B k_{2,2} + \lambda_A k_{2,3} = 0$. Biramo

$k_{2,3} = \lambda_B$ i dobijamo

$$K_2 = \begin{bmatrix} -(\lambda_B - \lambda_A) \\ -\lambda_A \\ \lambda_B \end{bmatrix}.$$

Za svojstveni vektor koji odgovara $\lambda_3 = -\lambda_B$ iz jednačine $(A + \lambda_B I)K_3 = 0$ dobijamo $k_{3,1} = 0$ i $k_{3,2} + k_{3,3} = 0$, odnosno

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sada je opšte rešenje sistema

$$\begin{bmatrix} N_A(t) \\ N_B(t) \\ N_C(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-\lambda_A t} \begin{bmatrix} -(\lambda_B - \lambda_A) \\ -\lambda_A \\ \lambda_B \end{bmatrix} + c_3\, e^{-\lambda_B t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} N_A(t) &= -c_2(\lambda_B - \lambda_A)e^{-\lambda_A t}, \\ N_B(t) &= -c_2\lambda_A e^{-\lambda_A t} + c_3 e^{-\lambda_B t}, \\ N_C(t) &= c_1 + c_2\lambda_B e^{-\lambda_A t} - c_3 e^{-\lambda_B t}. \end{aligned}$$

Računamo konstante c_1, c_2 i c_3 iz početnih uslova. Prvo imamo

$$N_A(0) = N_0 = -c_2(\lambda_B - \lambda_A) \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{N_0}{\lambda_A - \lambda_B},$$

a potom

$$N_B(0) = 0 = -c_2\lambda_A + c_3 \quad \Rightarrow \quad c_3 = \lambda_A \frac{N_0}{\lambda_A - \lambda_B},$$

i

$$N_C(0) = 0 = c_1 + c_2\lambda_B - c_3 \quad \Rightarrow \quad c_1 = N_0.$$

Dobijamo rešenje početnog problema

$$\begin{aligned} N_A(t) &= N_0\, e^{-\lambda_A t}, \\ N_B(t) &= N_0 \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} e^{-\lambda_B t} \right), \\ N_C(t) &= N_0 \left(1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} - \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} e^{-\lambda_B t} \right). \end{aligned}$$

6 Obične diferencijalne jednačine – zadaci za vežbu

6.1 Uvod u ODJ

Zadatak 6.1.1. *Za date ODJ odrediti im red, proveriti da li su linearne i ako jesu zapisati ih u operatorskom obliku.*

1. $(1-x)y''(x) - 4xy'(x) + 5y(x) = \cos x$,
2. $x\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4 + y = 0$,
3. $t^5y^{(4)}(t) - t^3y''(t) + 6y(t) = 0$,
4. $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + u = \cos(r+u)$,
5. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$,
6. $\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{k}{R^2}$,
7. $\sin\theta\, y'''(\theta) - \cos\theta\, y'(\theta) = 2$,
8. $\ddot{x} - \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$.

Zadatak 6.1.2. *Proveriti da li su date funkcije rešenja odgovarajućih ODJ:*

1. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0,\ y_1(t) = e^{-3t},\ y_2(t) = e^t$,
2. $ty'(t) - y(t) = t^2,\ y(t) = 3t + t^2$,
3. $y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 3y(t) = t,\ y_1(t) = t/3,\ y_2(t) = e^{-t} + t/3$,
4. $t^2y''(t) + 5ty'(t) + 4y(t) = 0,\ t > 0,\ y_1(t) = t^{-2},\ y_2(t) = t^{-2}\ln t$.

Zadatak 6.1.3. *Odrediti vrednost r za koje data ODJ ima rešenje oblika $y(t) = e^{rt}$:*

1. $y'' + 2y = 0$,
2. $y'' + y' - 6y = 0$,
3. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Zadatak 6.1.4. *Proveriti da li su date familije krivih rešenja ODJ:*

1. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P(1-P),\ P(t) = \dfrac{ce^t}{1+ce^t}$,
2. $x^3\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + 2x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 12x^2,\ y(x) = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x\ln x + 4x^2$.

Zadatak 6.1.5. $y(x) = \dfrac{1}{1+ce^{-x}}$ *je jednoparametarsko rešenje ODJ prvog reda $y' = y - y^2$. Naći rešenja početnih problema koji se sastoje iz ove ODJ i početnih uslova:*

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$,
2. $y(-1) = 2$.

Zadatak 6.1.6. $y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ *je dvoparametarska familija rešenja ODJ drugog reda $y'' + 4y = 0$. Naći rešenja graničnih problema koji se sastoje od date ODJ i graničnih uslova:*

1. $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$,
2. $y(0) = 1,\ y'(\pi) = 5$,
3. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$.

6.2 ODJ prvog reda

6.2.1 ODJ koja razdvaja promenljive

Zadatak 6.2.1. *Rešiti:*

1. $y'(x) = x(y(x) - 1)$,
2. $y' = y^2 - 4$,
3. $y'(x) = 2x(1 - y(x))^2$.

Zadatak 6.2.2. *Data je diferencijalna jednačina:*

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - xy.$$

(a) *Razdvajanjem promenljivih odrediti jednoparametarsku familiju rešenja diferencijalne jednačine.*

(b) *Da li jednačina ima singularno rešenje? Ako ga ima, odrediti ga.*

(c) *Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov $y(-1) = -1$.*

(d) *Odrediti interval definisanosti $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ rešenja određenog pod (c)?*

6.2.2 Homogena ODJ prvog reda

Podsetimo se najpre da je funkcija $M(x)$ homogena funkcija stepena homogenosti n ako

$$M(kx) = k^n M(x),$$

$k > 0$ konstanta. Analogno, funkcija dve promenljive $M(x, y)$ je homogena funkcija stepena homogenosti n ako

$$M(kx, ky) = k^n M(x, y),$$

$k > 0$.

Definicija 6.1

ODJ oblika

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right), \tag{6.1}$$

gde je f neka poznata funkcija, nazivamo homogenom ODJ prvog reda.

Povežimo pojmove homogena funkcija i homogena ODJ. Ako zapišemo ODJ u simetričnom obliku

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0,$$

onda je ona homogena ukoliko su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ homogene funkcije istog stepena homogenosti. Tada se deljenjem može svesti na oblik (6.1). Primetimo, homogena jednačina nema "slobodnog člana".

Recept za rešavanje

Homogenu ODJ prvog reda rešavamo koristeći smenu:

$$\frac{y(x)}{x} = z(x),$$

odakle sledi $y(x) = xz(x)$, te je prvi izvod

$$y'(x) = z(x) + xz'(x).$$

Sada se ODJ (6.1) za nepoznatu funkciju $y(x)$ transformiše u ODJ za nepoznatu funkciju $z(x)$:

$$xz'(x) = f(z(x)) - z(x), \tag{6.2}$$

i to ODJ koja razdvaja promenljive. Ukoliko je $f(z) - z \neq 0$ sledi

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

odakle integracijom dobijamo

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \ln|x| + c \;\Rightarrow\; x = ce^{\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}}.$$

Dakle, rešenje je

$$y(x) = c\, z(x)\, e^{\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}}.$$

Ako za neko z_0 važi $f(z_0) - z_0 = 0$, onda je rešenje i $z(x) = z_0$ jer su obe strane ODJ (6.2) jednake nuli, tj. rešenje je i

$$y(x) = z_0 x.$$

Zadatak 6.2.3. *Rešiti:*

1. $(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - xy)\mathrm{d}y = 0,\ x \neq 0,$
2. $y' = e^{-y/x} + \dfrac{y}{x},\ x \neq 0,$
3. $y - x + (y + x)y' = 0,\ x \neq 0,$
4. $xyy' + x^2 - y^2 = 0,\ xy \neq 0,$
5. $xy' - y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$

6.2.3 Jednačina totalnog diferencijala

Definicija 6.2

Jednačina

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

naziva se jednačina totalnog diferencijala na $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ako je na D ispunjen uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6.3}$$

Ako je ispunjen uslov (6.3), onda to znači da postoji funkcija $U(x,y)$ takva da

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \tag{6.4}$$

jer

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Uvrštavanjem u jednačinu dobijamo:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y = 0.$$

Leva strana je totalni diferencijal funkcije $U = U(x,y)$, pa dobijamo odj

$$\mathrm{d}U(x,y) = 0,$$

i njeno rešenje je

$$U(x,y) = c,$$

gde je c proizvoljna konstanta, a funkcija U se dobija integracijom jednog od dva izraza (6.4). Ukoliko pointegralimo prvu jednačinu iz (6.4), dobijamo

$$U(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + f(y),$$

pri čemu diferenciranjem ovog izraza po y na osnovu drugog izraza iz (6.4)

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y},$$

dobijamo

$$f(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y.$$

Konačno, rešenje je

$$U(x,y) = c = \int P(x,y)\mathrm{d}x + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y.$$

Zadatak 6.2.4. *Rešiti:*

1. $(y-x)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$,
2. $e^y\mathrm{d}x + (xe^y - 2y)\mathrm{d}y = 0$ *(rešiti i recipročnu jednačinu datu u opštem slučaju sa $x' = \frac{1}{f(x,y)}$)*,
3. $(x^3 + 4x^2y^3)\mathrm{d}x + (4x^3y^2 + 3y^2)\mathrm{d}y = 0$,
4. $(\cos y + y\cos x)\mathrm{d}x + (\sin x - x\sin y)\mathrm{d}y = 0$,
5. $y\mathrm{d}y = (x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)\sqrt{1+y^2}$.

Zadatak 6.2.5. *Za datu diferencijalnu jednačinu:*

$$\left(6xy^3 + \cos y\right)\mathrm{d}x + \left(2kx^2y^2x\sin y\right)\mathrm{d}y = 0,$$

odrediti vrednost parametra k tako da bude jednačina totalnog diferencijala, a potom odrediti jednoparametarsku familiju rešenja.

6.2.4 Jednačina koja dopušta integracioni množitelj

Pretpostavimo da jednačina

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

nije jednačina totalnog diferencijala, tj. da ne važi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ideja je da nađemo funkciju $\lambda = \lambda(x,y)$ tako da se gornja jednačina transformiše u jednačinu totalnog diferencijala. Ova funkcija se naziva integracioni množitelj.

Množenjem jednačine sa $\lambda = \lambda(x,y)$ dobijamo

$$\lambda(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x + \lambda(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Želimo da važi uslov

$$\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$$

ili

$$P\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x},$$

odnosno

$$P\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (6.5)$$

U opštem slučaju, funkcija λ se dobija kao rešenje gornje jednačine. Nekad je moguće funkciju λ naći na jednostavniji način: probamo da li je $\lambda = \lambda(x)$ ili $\lambda = \lambda(y)$ (da bismo dobili ODJ za λ). Ili je moguće da je unapred dat oblik $\lambda = \lambda(x, y)$, na primer $\lambda = \lambda(x - y)$, $\lambda = \lambda(x^2 + y^2)$ i slično.

Uzmimo da je $\lambda = \lambda(x)$. Tada (6.5) postaje

$$-Q\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

tj.

$$\frac{1}{\lambda(x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Ukoliko je desna strana funkcija samo od x, uspeli smo da pronađemo korektnu zavisnost λ. Gornja jednačina za λ je jednačina koja razdvaja promenljive.

Zadatak 6.2.6. *Rešiti:*

1. $(y + xy^2)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$ *(uraditi i kao Bernulijevu),*
2. $(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0,$
3. $(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0,$
4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x\sin y + y\cos y}{y\sin y - x\cos y},$
5. $y' = \dfrac{2e^{-xy} + y}{2ye^{-xy} - x}$ *znajući da dopušta integracioni množitelj* $\lambda(x, y) = f(xy)$.

Zadatak 6.2.7. *Data je diferencijalna jednačina:*

$$(xy\sin x + 2y\cos x)\mathrm{d}x + 2x\cos x\mathrm{d}y = 0.$$

(a) *Pokazati da ova jednačina nije jednačina totalnog diferencijala.*

(b) *Koristeći integracioni množitelj u obliku*

$$\mu(x, y) = xy$$

svesti je na jednačinu totalnog diferencijala.

(c) *Odrediti jednoparametarsku familiju rešenja jednačine dobijene pod (b).*

6.2.5 Primena integracionog množitelja u termodinamici: entropija kao totalni diferencijal

Posmatramo jedan mol gasa u cilindru sa pokretnim klipom. Prvi zakon termodinamike kaže da toplota (Q) koju dovodimo sistemu se delom troši na povećanje unutrašnje energije sistema (U), a delom na vršenje mehaničkog rada (A):

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A.$$

Kako je $\delta A = p\mathrm{d}V$, $pV = RT$ (R univerzalna gasna konstanta), $\mathrm{d}U = n\, c_V\, T$ (c_V je specifični toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini $[J/\mathrm{mol}K]$), dobijamo

$$\delta Q = c_V\mathrm{d}T + \frac{RT}{V}\mathrm{d}V, \qquad Q = Q(T, V). \quad (6.6)$$

Veličina Q nije totalni diferencijal, jer kako je c_V konstanta

$$\frac{\partial c_V}{\partial V} \neq \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{V}\right),$$

te ovo nije pogodno za termodinamičke proračune. Tragamo za veličinom koja će biti totalni diferencijal i množimo jednačinu (6.6) sa $\lambda = \lambda(T, V)$

$$\lambda c_V\mathrm{d}T + \lambda\frac{RT}{V}\mathrm{d}V = \lambda\delta Q$$

i dobijamo uslov

$$\frac{\partial(\lambda c_V)}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\lambda\frac{RT}{V}\right),$$

odnosno

$$\lambda = c_V\frac{V}{R}\frac{\partial \lambda}{\partial V} - T\frac{\partial \lambda}{\partial T}.$$

Probamo da li je $\lambda = \lambda(T)$ integracioni množitelj, dobijamo ODJ

$$\lambda = -T\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{T}.$$

Dakle,

$$\frac{\delta Q}{T} = c_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{R}{V}\mathrm{d}V$$

i desna strana jeste totalni diferencijal. Definišemo

$$\frac{\delta Q}{T} =: \mathrm{d}S,$$

gde je S entropija.

6.2.6 Linearna ODJ

Zadatak 6.2.8. *Rešiti sledeće ODJ*

1. $y' + \frac{y}{x} = x,\ x \neq 0,$
2. $xy' - 4y = x^6 e^x,$
3. $x^2 y' + xy = 1.$

Zadatak 6.2.9. *Rešiti Košijeve probleme za date linearne jednačine i odrediti maksimalni interval definisanosti rešenja:*

1. $xy'(x) + y(x) = e^x,\ y(1) = 2,$
2. $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E,\ i(0) = i_0,$
   gde su L, R, E i i_0 konstante,
3. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_m),\ T(0) = T_0,$
   gde su k, T_m i T_0 konstante.

6.2.7 Bernulijeva ODJ

Definicija 6.3

Bernulijeva ODJ je oblika

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

(za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ linearna ODJ).

Smenom

$$z = y^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

ODJ postaje linearna:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Zadatak 6.2.10. *Rešiti:*

1. $(y + xy^2)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0,$
2. $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2,\ x \neq 0,$
3. $xy' + y = y^3 \ln x,\ x > 0.$

Zadatak 6.2.11. *Data je Bernulijeva diferencijalna jednačina:*

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 3y^4.$$

(a) *Koristeći smenu $z = y^3$ svesti datu jednačinu na linearnu.*

(b) *Odrediti jednoparametarsku familiju rešenja Bernulijeve jednačine.*

(c) *Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(1) = 1/2$.*

Zadatak 6.2.12. *Diferencijalna jednačina koja opisuje kretanje lanca koji klizi preko ivice stola ima oblik:*

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v^2 = 32x,$$

gde je v brzina translatornog kretanja lanca, a x koordinata koja određuje položaj njegove krajnje tačke.

(a) *Pokazati da se ova jednačina svodi na Bernulijevu.*

(b) *Koristeći smenu $w = v^2$ svesti datu jednačinu na linearnu.*

(c) *Rešiti početni problem koji čine data jednačina i početni uslov $v(0.5) = 0$.*

6.2.8 Rikatijeva ODJ

Definicija 6.4

Rikatijeva ODJ je ODJ oblika

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x).$$

Da bismo je rešili treba da znamo partikularno rešenje y_p. Tada je smena:

$$y = z + y_p,$$

i jednačina se svodi na Bernulijevu za $\alpha = 2$:

$$z' + (p(x) + 2q(x)y_p)z + q(x)z^2 = 0.$$

Zadatak 6.2.13. *Rešiti* $y' + 2y(y - x) = 1$.

6.2.9 Kleroova ODJ

Definicija 6.5

Kleroova ODJ je ODJ oblika

$$y(x) = xy'(x) + f(y'(x)).$$

Rešavamo je tako što uvodimo parametar p:

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x).$$

Sada ODJ postaje

$$y(x) = xp(x) + f(p(x)).$$

Diferenciranjem dobijamo

$$y'(x) = p(x) + xp'(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}p'(x) = p(x),$$

pri čemu je poslednja jednakost zbog smene. Dakle,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\right) = 0.$$

1. $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, odakle sledi $p = c$ tj. $y' = c$. Kada ovo uvrstimo u ODJ dobijamo

   $$y = cx + f(c).$$

   Ovo jednoparametarsko rešenje je familija pravih (zavisi samo od jedne konstante c).

2. $x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} = 0$, odakle izrazimo $x(p) = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}$. Kada ovo uvrstimo u ODJ dobijamo

   $$y(p) = -p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} + f(p).$$

   Dakle,

   $$x(p) = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}, \quad y(p) = -p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} + f(p)$$

   je singularno rešenje zadato u parametarskom obliku.

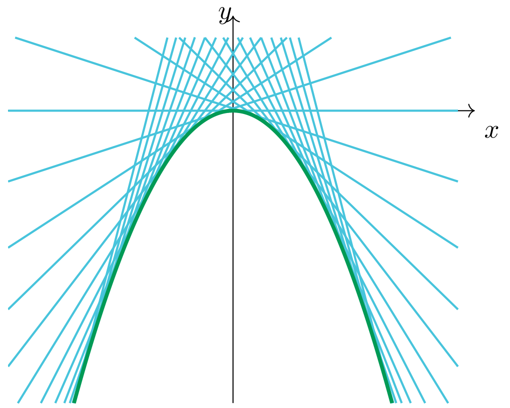
Može se pokazati da singularno rešenje Kleroove ODJ predstavlja obvojnicu pravih linija koje su predstavljene jednoparametarskim rešenjem. Pri tome se pod obvojnicom familije pravih

$$y(x) = cx + f(c)$$

podrazumeva kriva koja ima osobinu da u svakoj tački na ovoj krivoj postoji tangenta koja pripada familiji $y(x) = cx + f(c)$.

Zadatak 6.2.14. *Rešiti* $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$.

Rešenje. $y(x) = cx + \frac{1}{2}c^2$, singularno u parametarskom obliku $x = -p$, $y = -\frac{1}{2}p^2$, odakle možemo eksplicitno da izrazimo y kao funkciju od x: $y(x) = -\frac{1}{2}x^2$.



Slika 6.1: Prave $y = cx + \frac{1}{2}c^2$ su tangente na $y = -\frac{1}{2}x^2$

Zadatak 6.2.15. *Rešiti*

1. $y = xy' + y' - (y')^2$,
2. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

6.2.10 Lagranžova ODJ

Definicija 6.6

Lagranžova ODJ je ODJ oblika

$$y(x) = xg(y'(x)) + f(y'(x)). \qquad (6.7)$$

Ovu ODJ rešavamo parametarski. Uvodimo parametar p: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$. Kada uvrstimo u ODJ

$$y(x) = xg(p(x)) + f(p(x)).$$

Diferenciranjem dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = g(p) + x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

odnosno

$$p - g(p) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\right).$$

Kada "obrnemo"

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}(p - g(p)) = x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}.$$

Ako je $g(p) \neq p$ (primetimo, za $g(p) = p$ se svodi na Kleroovu ODJ) dobijamo linearnu ODJ za $x(p)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{(p - g(p))}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}x = \frac{1}{(p - g(p))}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}.$$

Sada je $x(p)$ rešenje ove ODJ, a $y(p)$ dobijamo kada vratimo $x(p)$ u jednačinu (6.7), $y(p) = x(p)g(p)+f(p)$ i dobijamo dakle rešenje u parametarskom obliku.

Zadatak 6.2.16. *Rešiti* $y = (1 + y')x + (y')^2$.

Zadatak 6.2.17. *Data je Lagranžova diferencijalna jednačina:*

$$y = 3xy'(x) - 7y'(x)^3.$$

(a) *Pomoću parametra* $p(x) = y'(x)$ *svesti jednačinu na linearnu diferencijalnu jednačinu po nepoznatoj funkciji* $x(p)$.

(b) *Odrediti opšte rešenje dobijene linearne jednačine.*

(c) *Pomoću rešenja dobijenog pod (b) odrediti opšte rešenje Lagranžove jednačine u parametarskom obliku,* $(x(p), y(p))$.

6.3 ODJ drugog reda

Zadatak 6.3.1. *Metodom varijacije konstanti rešiti sledeće nehomogene linearne jednačine:*

1. $y'' - 9y = e^{2x}$,
2. $y'' - 4y = e^{2x}$,
3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Zadatak 6.3.2. *Metodom pogađanja rešiti sledeće nehomogene linearne jednačine:*

1. $y'' - y' - 6y = 36x$,
2. $y'' + 3y' - 4y = 3$,
3. $y'' + 2y' + y = x^2 + 4x + 3$,
4. $y'' + y' + y = x^3 + 4x + 2$,
5. $y'' - 6y' + 8y = e^x$,
6. $6y'' - 5y' + y = 5e^{2x}$,
7. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$,
8. $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{2x}$,
9. $y'' - 2y' - 3y = 4xe^{3x}$,
10. $y'' + y = \sin 2x$,
11. $y'' + y = \sin x$,
12. $y'' - 2y' + 3y = x^3 + 2\sin x$,
13. $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + xe^{2x} + 4x + e^x + 4$,
14. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin x$.

Zadatak 6.3.3. *Metodom varijacije konstanti rešiti sledeće nehomogene linearne jednačine:*

1. $y'' - 2y' = e^x \sin x$,
2. $y'' - 6y' + 9y = 1/x^2e^{3x}$.

Zadatak 6.3.4. *Odrediti rešenje početnog problema:*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0, \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Zatim odrediti vrednost parametra α *tako da rešenje* $y(t) \to 0$ *kada* $t \to \infty$.

Zadatak 6.3.5. *Metodom pogađanja odrediti opšta rešenja, kao i rešenja početnih problema sledećih nehomogenih diferencijalnih jednačina drugog reda:*

1.

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y'' + 4y' = 3\sin 2x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

6.3.1 (Koši-)Ojlerova ODJ drugog reda

Definicija 6.7

Koši-Ojlerova ODJ je ODJ oblika

$$x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad (6.8)$$

gde su a_1 i a_0 konstante.

Pokazali smo u primeru 3.17 da se smenom argumenta $x = e^t$ ova ODJ može svesti na linearnu ODJ sa konstantnim koeficijentima.

Napomena 6.11. *U opštem slučaju, ODJ*

$$\begin{aligned} a_n(\alpha x + \beta)^n y^{(n)}(x) & \\ + a_{n-1}(\alpha x + \beta)^{n-1} y^{(n-1)}(x) & \\ + \dots & \\ + a_1(\alpha x + \beta) y'(x) + a_0 y(x) &= g(x), \end{aligned}$$

gde su $a_n, \dots, a_0$ i α, β konstante, se smenom

$$\alpha x + \beta = e^t$$

svodi na linearnu ODJ sa konstantnim koeficijentima.

Drugi način da rešimo ODJ (6.8) je da tražimo rešenje u obliku

$$y(x) = x^m, \qquad x > 0.$$

Diferenciranjem i zamenom u jednačinu dobijamo

$$(m(m-1) + a_1 m + a_0)x^m = 0.$$

Rešavamo pomoćnu jednačinu:

$$m^2 + (a_1 - 1)m + a_0 = 0.$$

1. $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 \neq m_2$: Opšte rešenje jednačine (6.8) je

$$y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}.$$

2. $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 = m_2 = (1 - a_1)/2$: Jedno rešenje je $y_1(x) = x^{m_1}$. Primenom Teoreme za nalaženje drugog njemu linearno nezavisnog rešenja nalazimo $y_2(x) = x^{m_1} \ln x$. Opšte rešenje jednačine (6.8) je

$$y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x.$$

3. $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$, $m_1 = a + \imath b$, $m_2 = a - \imath b$. Opšte rešenje jednačine (6.8) je

$$y(x) = x^a \left(c_1 \cos b \ln x + c_2 \sin b \ln x\right).$$

Za $x < 0$ smenom argumenta $-x = t$ je svodimo na slučaj koji smo posmatrali.

Zadatak 6.3.6. *Rešiti ODJ:*

1. $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$,

2. $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$,

3. $4x^2 y'' + 17y = 0$,

4. $x^2 y'' - xy' + y = \ln x$,

5. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

6.3.2 Rešavanje linearnih ODJ drugog reda pomoću redova

Zadatak 6.3.7. *Za date ODJ dokazati osobine odgovarajućih tačaka, kao što je navedeno u sledećoj tabeli (npr. pokazati da je tačka $x = 0$ regularno-singularna za hipergeometrijsku ODJ).*

ODJ	R-S	ES
hipergeometrijska $x(1-x)y'' + ((1+a+b)x-c)\,y' + a\,b\,y = 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$	$0,1,\infty$	-
Ležandrova $(1-x)^2y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$	$-1,1,\infty$	-
Čebiševljeva $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, $n \in \mathbb{N}$	$-1,1,\infty$	-
degenerisana hipergeometrijska $xy'' + (c-x)\,y' - ay = 0$, $a,c \in \mathbb{R}$	0	∞
Beselova $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$, $n \in \mathbb{N}$	0	∞
Lagerova $xy'' + (1-x)y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$	0	∞
Ermitova $y'' - 2xy' + 2ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$	-	∞

R-S označava regularno-singularnu tačku, ES označava esencijalni singularitet.

Zadatak 6.3.8. *Naći rešenje u obliku stepenog reda sledećih ODJ*

1. $(x^2+1)y''(x)+xy'(x)-y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 0$,
2. $(1-x^2)y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 0$,
3. $y''(x)-2xy'(x)+2y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 1$,
4. $(x-2)y''(x) + y'(x) - (x-2)^2y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 1$,
5. $x^2y''(x) + xy'(x) + (x-1)y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 1$,
6. $y''(x) + (x-1)y'(x) + y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 2$.

Zadatak 6.3.9. *Naći u obliku stepenog reda rešenje početnog problema:*

$$y''(x) + xy'(x) + 3y(x) = 0,$$

$$\begin{cases} y(0) = \alpha_0, \\ y'(0) = \alpha_1. \end{cases}$$

Zadatak 6.3.10. *Naći rešenje u obliku stepenog reda sledećih ODJ*

1. $2xy''(x)+y'(x)-y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 0$,
2. $2x^2y''(x) - xy'(x) + (1-x^2)y(x) = 0$ *u okolini tačke* $x = 0$.

6.4 Linearne ODJ $n-$tog reda

6.4.1 Homogena linearna ODJ $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima

Homogena linearna ODJ $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima je jednačina oblika

$$\mathcal{L}(y)(x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0, \tag{6.9}$$

gde su koeficijenti a_i, $i = 0,\ldots,n-1$ realne konstante.

Rešenje tražimo u obliku $y(x) = e^{\lambda x}$. Uvrštavanjem u jednačinu (6.9) dobijamo

$$\mathcal{L}(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right) = 0.$$

Pošto $e^{\lambda x} \neq 0$, prethodna jednakost je tačna ukoliko

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{6.10}$$

Jednačina (6.10) se naziva karakteristična jednačina za jednačinu (6.9). Iz relacije $\mathcal{L}(e^{\lambda x}) = 0$ sledi da je funkcija $e^{\lambda x}$ rešenje jednačine (6.10) ako i samo ako je λ koren karakteristične jednačine. U zavisnosti od prirode korena karakteristične jednačine, razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Koreni karakteristične jednačine su *prosti* i...

1.1. *realni*: Opšte rešenje (6.9) je

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

1.2. ima *komleksan* koren $\lambda_k = \alpha_k + \imath\beta_k$, za neko $k = \{1, \dots, n\}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$:
od jednog kompleksnog rešenja $e^{\lambda_k x}$ dobijamo dva realna:

$$y_1(x) = e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x \quad \text{i} \quad y_2(x) = e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x.$$

2. Koreni karakteristične jednačine su *višestruki* i...

2.1. *realni*: Ako je λ_k koren karakteristične jednačine višestrukosti $m_k \le n$, tada su funkcije

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, x^2 e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k - 1} e^{\lambda_k x}$$

linearno nezavisna rešenja ODJ (6.9).

2.2. ima *komleksan* koren $\lambda_k = \alpha_k + \imath\beta_k$ višestrukosti $m_k \le n/2$: dobijamo $2m_k$ realnih linearno nezavisnih rešenja ODJ (6.9):

$$e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\ xe^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\\ x^2 e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \dots, x^{m_k-1}e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,$$

$$e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,\ xe^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,\\ x^2 e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, \dots, x^{m_k-1}e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x.$$

Na kraju, podsetimo se Hornerove šeme: kandidati za racionalne nule polinoma $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ su $\left\{\pm\dfrac{\text{delioci } a_0}{\text{delioci } a_n}\right\}$.

Zadatak 6.4.1. *Rešiti sledeće ODJ:*

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$,
2. $y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0$,
3. $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$,
4. $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + y' - y = 0$,
5. $y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$.

Zadatak 6.4.2. *Rešiti početni problem:*

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0,\\ y(\pi) = 0,\\ y'(\pi) = 0,\\ y''(\pi) = 1. \end{cases}$$

6.4.2 Nehomogena linearna ODJ $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima – metoda pogađanja

Posmatramo linearnu ODJ sa konstantnim koeficijentima:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + \dots \\ + a_2\,y''(x) + a_1\,y'(x) + a_0\,y(x) = g(x). \tag{6.11}$$

Kada je funkcija $g(x)$ specijalnog oblika, jedno partikularno rešenje (6.11) možemo naći i jednostavnijim postupkom.

1. Ako je

$$g(x) = e^{rx}P_m(x),$$

gde je $P_m(x)$ polinom stepena m i r realan broj, tada je jedno partikularno rešenje jednačine (6.11) oblika

$$y_p(x) = x^k e^{rx} Q_m(x), \quad k \ge 0,$$

gde je $Q_m(x)$ polinom stepena m. Ako je r nula karakteristične jednačine za pridruzenu homogenu jednačinu od (6.11), k je jednako višestrukosti nule r, ako r nije nula karakteristične jednačine uzimamo $k = 0$.

2. Ako je

$$g(x) = e^{ax}\left(P_m(x)\sin bx + Q_p(x)\cos bx\right),$$

tada je jedno partikularno rešenje jednačine (6.11) oblika

$$y_p(x) = x^k e^{ax}\left(R_N(x)\sin bx + S_N(x)\cos bx\right),$$

$N = \max\{m, p\}$, $k \ge 0$, gde je k višestrukost korena $a \pm \imath b$ karakteristične jednačine (6.11).

Zadatak 6.4.3. *Rešiti ODJ:*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}.$$

Zadatak 6.4.4. *Metodom varijacije konstanti rešiti ODJ:*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4x}/(1 + e^{2x}).$$

6.5 Sistemi linearnih ODJ sa konstantnim koeficijentima

Zadatak 6.5.1. *Rešiti:*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + 3y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + y.$$

Rešenje. Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednačina je

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

čija su rešenja karakteristične vrednosti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, dakle realna i različita.

Za prvu svojstvenu vrednost $\lambda_1 = -1$ svojstveni vektor

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \end{bmatrix},$$

se određuje rešavajući sistem jednačina za $k_{1,1}$ i $k_{1,2}$, $(A + I)K_1 = 0$ koji se svodi na jednu jednačinu $k_{1,1} = -k_{1,2}$. Biramo $k_{1,2} = 1$ i dobijamo prvi svojstvenu vektor

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Analogno za drugu svojstvenu vrednost $\lambda_2 = 4$ rešavamo sistem jednačina $(A - 4I)K_2 = 0$ za elemente svojstvenog vektora

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \end{bmatrix},$$

koji se svodi na jednu jednačinu $2k_{2,1} - 3k_{2,2} = 0$. Biramo $k_{2,2} = 2$ i dobijamo

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je opšte rešenje sistema:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \, e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.5.2. *Rešiti:*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - y + z,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y - z,$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x - y + 2z.$$

Rešenje. Ovaj zadatak se radi slično kao prethodni, svojstvene vrednosti su realne i različite, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Zadatak 6.5.3. *Rešiti:*

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Rešenje. Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešavamo karakterističnu jednačinu

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0.$$

Svojstvena vrednost $\lambda_{1,2} = -1$ je višestrukosti dva, $\lambda_3 = 5$ je višestrukosti jedan. Određujemo svojstveni vektor

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ k_{1,3} \end{bmatrix},$$

koji odgovara $\lambda_{1,2} = -1$ iz jednačine $(A+I)K = 0$, koja se svodi na jednu jednačinu $k_{1,1} - k_{1,2} + k_{1,3} = 0$. Treba da fiksiramo dve komponente vektora, što možemo da uradimo na dva načina, odakle slede dva linearno nezavisna vektora

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, ova svojstvena vrednost generiše dva linearno nezavisna vektora, što Ovo smo mogli da naslutimo iz simetričnosti matrice sistema A, jer znamo da za simetričnu matricu sa realnim koeficijentima formata $n \times n$ postoji n linearno nezavisnih svojstvenih vektora bez obzira na višestrukost svojstvenih vrednosti. Da bismo odredili svojstveni vektor

$$K_3 = \begin{bmatrix} k_{3,1} \\ k_{3,2} \\ k_{3,3} \end{bmatrix},$$

koji odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda_3 = 5$ rešavamo sistem $(A-5I)K_3 = 0$ odakle dobijamo dve jednačine $k_{3,2} + k_{3,3} = 0$ i $k_{3,1} + k_{3,2} = 0$. Biramo $k_{3,2} = -1$, što određuje sve elemente ovog vektora:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje sistema je:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\, e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.5.4. *Rešiti:*

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Rešenje. Svojstvena vrednost matrice sistema je višestrukosti dva, $\lambda = -3$. Dva linearno nezavisna rešenja tražimo u obliku:

$$X_1 = Ke^{-3t}, \quad X_2 = (Lt + M)\, e^{-3t}.$$

Svojstveni vektor K nalazimo na uobicajen način: karakteristična jednačina $(A + 3I)K = 0$ implicira jednačinu za elemente vektora K, $k_1 - 3k_2 = 0$. Birajući $k_2 = 1$ nalazimo prvo rešenje:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}.$$

Drugo rešenje ubacujemo u sistem, da bismo odredili matrične jednačine za nepoznate vektore L i M. Sistem $X' = AX$ postaje

$$t\,(AL - \lambda L) + AM - \lambda M - L = 0.$$

Ova jednačina je moguća jedino ako su svi koeficijenti u polinomu po t jednaki nuli, tj.

$$(A - \lambda I)\, L = 0, \quad (A - \lambda I)\, M = L. \tag{6.12}$$

Sada vidimo da se vektor L poklapa sa vektorom K i preostaje jos da izračunamo vektor M iz poslednje jednačine. Ova jednačina se svodi na jednu jednačinu za elemente vektora M: $2m_1 - 6m_2 = 1$. Biramo $m_2 = 0$ i dobijamo

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je drugo linearno nezavisno rešenje:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-3t}.$$

Opšte rešenje dobijamo linearnom kombinacijom prethodna dva,

$$\begin{aligned} X &= c_1 X_1 + c_2 X_2 \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-3t} \right). \end{aligned}$$

Zadatak 6.5.5. *Rešiti:*

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z, \\ y' &= 2x - y - 2z, \\ z' &= -x + y + 2z. \end{aligned}$$

Rešenje. Matrica sistema ima jednu svojstvenu vrednost $\lambda = 1$ višestrukosti tri. Najpre tražimo svojstveni vektor K rešavajući $(A - I)K = 0$, odakle sledi jedna jednačina $k_1 = k_2 + k_3$. Dakle, ova svojstvena vrednost generiše dva linearno nezavisna svojstvena vektora:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

čime dobijamo dva linearno nezavisna rešenja $X_1 = K_1 e^t$ i $X_2 = K_2 e^t$. Treće rešenje tražimo u obliku $X_3 = (Lt + M)\, e^t$. Uvrštavanjem u sistem dobijamo iste matrične jednačine kao u prethodnom zadatku (6.12). Dakle, L nalazimo iz jednačine $(A - I)L = 0$, odnosno L je sada linearna kombinacija izračunatih vektora K_1 i K_2, $L = \alpha K_1 + \beta K_2$, dok M nalazimo iz jednačine $(A - I)M = L$, odakle dobijamo sistem za komponente vektora M:

$$m_1 = \frac{1}{2}\beta + m_2 + m_3, \quad m_1 = -\alpha + m_2 + m_3.$$

Biramo $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $m_2 = 0$, odakle sledi $m_3 = 1$ i $m_1 = 1$. Dakle,

$$L = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Konačno, opšte rešenje sistema je:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} te^t \right).$$

Zadatak 6.5.6. *Rešiti:*

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Rešenje. Matrica sistema ima svojstvenu vrednost $\lambda = 2$ višestrukosti tri. Prvo rešenje tražimo u obliku $X_1 = Ke^{2t}$. Jednačina $(A - 2I)K = 0$ povlači dve jednačine $k_2 + 6k_3 = 0$, $k_3 = 0$, odakle dobijamo

$$K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, svojstvenoj vrednosti je pridružen jedan svojstveni vektor. Kao u prethodnom zadatku, drugo rešenje tražimo u obliku $X_2 = (Lt + M)\, e^{2t}$. Uvrštavanjem u jednačinu dobijamo $L = K$ i

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Konačno, treće rešenje tražimo u obliku $X_3 = \left(Pt^2 + Qt + R\right) e^{2t}$. Ubacivanjem u sistem dobijamo $(A - 2I)P = 0$, $(A - 2I)Q = 2P$ i $(A - 2I)R = Q$, odnosno $P = K$, $Q = 2M$ i

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}.$$

Sada je opšte rešenje sistema

$$\begin{aligned} X &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} \right) \\ &+ c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t^2e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} e^{2t} \right) \\ &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2t + c_3t^2 \\ c_2 - 6/5\ c_3 + c_3t \\ 1/5\ c_3 \end{bmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.5.7. *Rešiti:*

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4 = 0,$$

gde je A matrica sistema, ima kompleksno - konjugovan par rešenja $\lambda_{1,2} = \pm 2\imath$. Tražimo svojstveni vektor iz jednačine $(A - 2\imath I)K = 0$ koja implicira jednačinu za elemente vektora K, $k_1 + (2 + 2\imath)k_2 = 0$. Imajući u vidu Ojlerovu formulu

$$e^{\imath\beta x} = \cos\beta x + \imath\sin\beta x,$$

možemo raspisati

$$Ke^{2\imath t} = \begin{bmatrix} 2\cos 2t - 2\sin 2t + \imath\,(2\sin 2t + 2\cos 2t) \\ -\cos 2t - \imath\sin 2t \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da su dva linearno nezavisna rešenja sistema

$$X_1 = \mathrm{Re}\left(Ke^{2\imath t}\right) = \begin{bmatrix} 2\cos 2t - 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \mathrm{Im}\left(Ke^{2\imath t}\right) = \begin{bmatrix} 2\sin 2t + 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix},$$

a opšte rešenje sistema je njihova linearna kombinacija $X = c_1X_1 + c_2X_2$.

Zadatak 6.5.8. *Rešiti:*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6x - y,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 5x + 4y.$$

Zadatak 6.5.9. *Rešiti:*

$$\begin{aligned} x' &= x - y - z, \\ y' &= x + y, \\ z' &= 3x + z. \end{aligned}$$

Zadatak 6.5.10. *Rešiti:*

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^{2t}, \\ y' &= 3x - 2y - 3z + \cos t, \\ z' &= -x + y + 2z + e^{t}. \end{aligned}$$

Rešenje. Prvo rešavamo odgovarajući homogeni sistem. Svojstvene vrednosti su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_{2,3} = 1$ višestrukosti dva. Prvoj svojstvenoj vrednosti odgovara vektor K_1, dok druga generiše dva linearno nezavisna svojstvena vektora K_2 i K_3:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je opšte rešenje odgovarajućeg homogenog sistema:

$$X_h = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da bismo rešili nehomogeni sistem koristimo metodu pogađanja. Najpre nehomogeni član zapisujemo kao zbir tri vektora:

$$G(t) := \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \cos t \\ e^t \end{bmatrix} = G_1 + G_2 + G_3,$$

$$G_1(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, G_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Upoređivajući sa (5.4), za G_1 imamo $r = 0$ i $\mu = 2$. Pošto $\mu = 2$ nije svojstvena vrednost matrice sistema stavljamo $k = 0$, te je konačno partikularno rešenje oblika $X_{p_1} = Q_0 e^{2t}$, gde je Q_0 polinom stepena nula odnosno konstantni vektor. Elemente vektora $Q_0 = [q_1\ q_2\ q_3]^T$ dobijamo ubacivajući u jednačinu $X' = AX + G_1$, gde je A matrica sistema. Dobijamo

$$(2I - A)Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} q_2 + q_3 &= 1, \\ -3q_1 + 4q_2 + 3q_3 &= 0, \\ q_1 - q_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Nehomogeni član G_2 upoređujemo sa (5.6) i nalazimo $m = n = 0$, $a = 0$ i $b = 1$. Sada je $N = 0$ i kako $\pm\imath$ nije svojstvena vrednost imamo $k = 0$. Dakle, partikularno rešenje tražimo u obliku $X_{p_2} = A_0 \cos t + B_0 \sin t$. Uvrštavanjem u jednačinu $X' = AX + G_2$ dobijamo

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Konačno, rešavamo $X' = AX + G_3$. Sada je $r = 0$ i $\mu = 1$ je svojstvena vrednost od A višestrukosti 2, te je $k = 2$. Sada je $X_{p_3} = Q_2 e^t = \left(A_2 t^2 + A_1 t + A_0\right) e^t$. Konstantne vektore A_2, A_1 i A_0 dobijamo uvrštavanjem X_{p_3} u jednačinu $X' = AX + G_3$,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo, opšte rešenje nehomogenog sistema je

$$\begin{aligned} X &= X_h + X_{p_1} + X_{p_2} + X_{p_3} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + e^{2t} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \sin t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -t \\ -3t \\ 2t + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deo II

Parcijalne diferencijalne jednačine

7 Osnovni pojmovi

Definicija 7.1

Jednačina u kojoj se javljaju parcijalni izvodi nepoznate funkcije u nezavisno promenljivih $x_1, \dots, x_k$ naziva se parcijalna diferencijalna jednačina. Opšti oblik parcijalne diferencijalne jednačine n-tog reda za funkciju $u = u(x_1, \dots, x_k)$ je

$$F\left(x_1, \dots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial_{x_k}}, \frac{\partial^n u}{\partial_{x_1}^{n_1} \cdots \partial_{x_k}^{n_k}}\right) = 0, \tag{7.1}$$

pri čemu su $n_1, \dots n_k \in \mathbb{N}_0$ takvi da $n_1 + \cdots + n_k = n$, a F je poznata funkcija.

U nastavku ćemo ravnopravno koristiti razne oznake za parcijalne izvode, na primer,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \partial_x u.$$

Shodno napomeni 1 parcijalnu diferencijalnu jednačinu ćemo kraće zapisivati PDJ.

Definicija 7.2

Rešenje PDJ (7.1) je funkcija $u = u(x_1, \dots, x_k)$ iz nekog dopustivog skupa funkcija koja ovu jednačinu prevodi u identitet.

Definicija 7.3

Grafik rešenja PDJ (7.1) se naziva integralna površ te jednačine.

Primetimo, integralna površ PDJ (7.1) je jedna hiperpovrš u $\mathbb{R}^{k+1}$.

Slično kao u teoriji ODJ, obično se u primenama traži da rešenje PDJ zadovolji neke dopunske uslove. U zavisnosti od njih, u teoriji PDJ možemo izučavati:

1. Košijeve (početne) probleme, kada su dati početni uslovi,
2. granične probleme, kada su nam dati uslovi na rubu oblasti definisanosti rešenja,
3. mešovite probleme, kada su nam dati i početni i granični (tzv. mešoviti) uslovi.

7.1 (Kvazi)linearne PDJ

U ovoj knjizi ćemo posebnu pažnju posvetiti klasi kvazilinearnih PDJ tj. PDJ koje su linearne po parcijalnim izvodima najvišeg reda. Dodatno, ako je PDJ linearna i po svim parcijalnim izvodima i po nepoznatoj funkciji, onda je ona linearna PDJ.

Uvedimo ove pojmove za PDJ drugog reda. Kvazilinearna PDJ drugog reda je PDJ oblika

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} = F,$$

gde koeficijenti a_{ij} i funkcija F zavise od nezavisno promenljivih $x_1, \dots, x_k$, funkcije u i prvih izvoda $\frac{\partial u}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial_{x_k}}$ tj.

$$a_{ij} = a_{ij}\left(x_1, \dots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial_{x_k}}\right), \quad F = F\left(x_1, \dots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial_{x_k}}\right)$$

i dodatno koeficijenti uz drugi izvod su simetrični, $a_{ij} = a_{ji}$.

Linearna PDJ drugog reda je PDJ oblika

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\left(x_1, \dots, x_k\right)\frac{\partial^2 u}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} + \sum_{i=1}^{k} b_i\left(x_1, \dots, x_k\right)\frac{\partial u}{\partial_{x_i}} + c\left(x_1, \dots, x_k\right)u = F\left(x_1, \dots, x_k\right). \quad (7.2)$$

Dakle, sada svi koeficijenti zavise isključivo od nezavisno promenljivih $x_1, \dots, x_k$.

Primer 7.4

Transportna jednačina sa konstantnom brzinom prostiranja $\bar{c} \in \mathbb{R}$

$$u_t + \bar{c}\,u_x = 0,$$

gde je $u = u(t, x)$ je jedna linearna PDJ prvog reda. Zaista, u ovom slučaju $k = 2$ i nezavisno promenljive interpretiramo kao $x_1 = t$ i $x_2 = x$. Koeficijenti su $b_1 = 1$, $b_2 = \bar{c}$ i $c = 0$, $F = 0$.

Primer 7.5

n-dimenzionalna (homogena) talasna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \bar{c}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0, \quad (7.3)$$

gde je nepoznata funkcija $u = u(t, x_1, \dots, x_n)$, dok je $\bar{c} > 0$ konstanta je jedna linearna PDJ $n+1$-og reda. Zaista, sada je $k = n+1$, x_1 se interpretira kao vreme $x_1 = t$, dok su $x_2, \dots, x_{k+1}$ prostorne promenljive. Koeficijenti uz drugi izvod su dijagonalni,

$$a_{11} = 1, \; a_{ii} = -\bar{c}^2 \text{ za } i = 2, \dots, k+1, \; \text{dok su svi ostali } a_{ij} = 0, \text{za } i \neq j.$$

Ostali koeficijenti su identički jednaki nuli, $b_i = 0$, za sve $i = 1, \dots, k+1$ i $c = 0$, $F = 0$.

Primer 7.6

PDJ

$$u_x\,u_{xx} + u_y\,u_{yy} + u^2 = 0$$

je primer kvazilinearne PDJ. U ovom slučaju, $k = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Koeficijenti su

$a_{11} = u_x$, $a_{22} = u_y$, $a_{12} = a_{21} = 0$, dok je $F = u^2$.

Primer 7.7

PDJ

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 0$$

je primer PDJ koja nije ni linearna ni kvazilinearna.

Neke od osobina linearnih PDJ su navedene u sledećoj lemi.

Lema 7.8 (Neke osobine rešenja linearnih PDJ)

1. *Ako su u_1, u_2, ..., u_n rešenja PDJ (7.5) i C_1, C_2, ..., C_n proizvoljne konstante, tada je i* $\sum_{k=1}^{n} C_k u_k$ *rešenje PDJ (7.5)*
2. *Ako su $u_1, u_2, \ldots$ rešenja PDJ (7.5) i C_1, C_2, ... proizvoljne konstante, tada funkcija u određena konvergentnim redom* $\sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k$, *diferencijabilnim član po član dva puta po svakoj od nezavisnih promenljivih, jeste rešenje PDJ (7.5).*

Primetimo razliku u odnosu na ODJ: u teoriji ODJ je linearna kombinacija konačno mnogo rešenja bila rešenje, dok se u teoriji PDJ ovaj koncept proširuje na beskonačno mnogo rešenja.

7.2 Klasifikacija kvazilinearnih PDJ drugog reda

U opštem slučaju, za kvazilinearne PDJ drugog reda u kojoj su koeficijenti uz parcijalne izvode drugog reda funkcije samo nezavisnih promenljivih moguće je izvršiti klasifikaciju na hiperbolične, parabolične ili eliptične PDJ. Svaki tip PDJ ima svog kanoničkog predstavnika koga ćemo u narednim poglavljima analizirati.

Izvršimo klasifikaciju kvazilinearnih PDJ drugog reda u specijalnom slučaju kada nepoznata funkcija u zavisi od dve promenljive, odnosno za nepoznatu funkciju $u = u(x, y)$. Tada je PDJ oblika

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{7.4}$$

gde su funkcije $A, B, C \in C^2(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, $F \in C(H)$, $H \subseteq \mathbb{R}^5$ i pretpostavimo bez gubitka opštosti da je $A \neq 0$.

Funkciju

$$D = D(x, y) = B^2 - AC$$

zovemo diskriminanta PDJ (7.4) i pomoću nje je moguće izvršiti klasifikaciju ove jednačine. PDJ (7.4) je

(1) hiperboličnog tipa u oblasti G ako je $D > 0$ za sve $(x, y) \in G$,

(2) paraboličnog tipa u oblasti G ako je $D = 0$ za sve $(x, y) \in G$,

(3) eliptičnog tipa u oblasti G ako je $D < 0$ za sve $(x, y) \in G$.

Jednačina (7.4) može biti i mešovitog tipa ako je različitog tipa na nekim podoblastima u oblasti G.

Kanonički predstavnik PDJ drugog reda hiperboličnog tipa je talasna jednačina, paraboličnog tipa je jednačina provođenja toplote ili jednačina difuzije, dok je za eliptičnu jednačinu to Laplasova jednačina. U narednim poglavljima ćemo svaku od ovih PDJ analizirati i rešavati u nekim specijalnim slučajevima.

7.3 Zapis linearne PDJ drugog reda pomoću parcijalnog diferencijalnog operatora

Ako su koeficijenti (7.2) neprekidne funkcije na nekoj oblasti D, možemo da definišemo parcijalni diferencijalni operator $\mathcal{L} : C^2(D) \to C(D)$ sa

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \frac{\partial^2}{\partial_{x_i} \partial_{x_j}} + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) \frac{\partial}{\partial_{x_i}} + c\left(x_1, \ldots, x_n\right),$$

te se linearna PDJ (7.2) može zapisati u kraćem obliku,

$$\mathcal{L}u(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n). \tag{7.5}$$

Primetimo, parcijalni diferencijalni operator je jedan linearan operator.

7.4 Laplasov operator

Posebno značajan parcijalni diferencijalni operator je Laplasov operator ili Laplasijan.

Definicija 7.9 (Laplasov operator)

Laplasov operator, u oznaci Δ, za funkciju koja zavisi bar od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ se definiše sa

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{7.6}$$

gde su $x_1, \ldots, x_n$ neke od koordinata funkcije na koju operator deluje.

Primer 7.10

$n-$dimenzionalna talasna jednačina (7.3) pomoću Laplasovog operatora može da se zapise u obliku

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

gde je $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$ i $c > 0$ konstanta. Primetimo, Laplasov operator se odnosi samo na prostorne koordinate $x_1, \ldots, x_n$, ne i na vremensku koordinatu t.

U zavisnosti od oblasti definisanosti funkcije u često je pogodnije izraziti Laplasov operator u nekom drugom sistemu koordinata.

7.4.1 Laplasijan za funkciju koja zavisi od rastojanja

Ako funkcija u zavisi samo od rastojanja tačke $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ od kooridinatnog početka tj. $u = u(r) = u(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2})$, tada je

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}. \tag{7.7}$$

Dokaz. Znajući

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

možemo da izračunamo prvi izvod

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = u_r \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

kao i drugi izvod na osnovu pravila za izvod proizvoda i izvod složene funkcije

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{rr}\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{1}{r}u_r - \frac{x_i^2}{r^3}u_r, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sada je konačno Laplasijan

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{rr} + \frac{n}{r}u_r - \frac{1}{r}u_r,$$

čime je dokazano tvrđenje. □

7.4.2 Laplasijan u polarnim koordinatama

Ako je dimenzija $n = 2$, i ako su date polarne koordinate (ρ, φ), pri čemu je

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{7.8}$$

$\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, odnosno $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, onda je Laplasov operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

7.4.3 Laplasijan u polarno-cilindričnim koordinatama

Neka je dimenzija $n = 3$ i neka su date polarno-cilindrične koordinate (ρ, φ, z), pri čemu je

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z, \rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}. \tag{7.9}$$

Laplasov operator u ovim koordinatama je

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo shvatajući u kao složenu funkciju

$$u = u(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi), z),$$

gde su x i y kao funkcije od ρ i φ date u (7.9). Sada je parcijalni izvod od u po promenljivoj ρ prema pravilu izvoda složene funkcije

$$u_\rho = u_x x_\rho + u_y y_\rho = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi,$$

dok je na isti način izvod po φ

$$u_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi = -u_x\, \rho \sin\varphi + u_y\, \rho\cos\varphi.$$

Da bismo izračunali drugi izvod kombinujemo pravila za izvod proizvoda i izvod složene funkcije, te je

$$\begin{aligned} u_{\rho\rho} &= \cos\varphi\,(u_{xx}\cos\varphi + u_{xy}\sin\varphi) + \sin\varphi\,(u_{yx}\cos\varphi + u_{yy}\sin\varphi) \\ &= u_{xx}\cos^2\varphi + 2u_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + u_{yy}\sin^2\varphi, \end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned} u_{\varphi\varphi} &= -\rho\sin\varphi\,(-u_{xx}\,\rho\sin\varphi + u_{xy}\,\rho\cos\varphi) - u_x\,\rho\cos\varphi \\ &\quad - u_y\,\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,(-u_{yx}\,\rho\sin\varphi + u_{yy}\,\rho\cos\varphi) \\ &= \rho^2\left(u_{xx}\sin^2\varphi - 2u_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + u_{yy}\cos^2\varphi\right) - \rho u_\rho. \end{aligned}$$

Sada vidimo da je

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{\rho}u_\rho,$$

odakle sledi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz},$$

odnosno tvrđenje. □

7.4.4 Laplasijan u sfernim koordinatama

Neka su za $n = 3$ date sferne koordinate (r,θ,φ), $r \geq 0$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, pri čemu je

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{7.10}$$

ili obratno:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arccos\frac{z}{r}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

Laplasijan u sfernim koordinatama je:

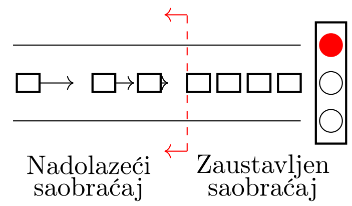
$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

8 PDJ prvog reda – transportna jednačina

8.1 Jednodimenzionalni talasi

Talase srećemo svakodnevno, talasima ćemo nazivati okeanske talase, zvučne talase, "talase" na fudbalskim utakmicama, "talase" u saobraćaju, itd.

Intuitivno, talas je rezultat poremećaja koji se prostire kroz medijum. Medijum može biti voda, vazduh ili grupa ljudi. Na primer, talas su prstenovi koji se koncentrično šire od određene tačke na površini vode – na primer tačke gde smo bacili kamen. Kamen kreira inicijalni poremećaj, koji se širi tako što se formiraju koncentrični prstenovi koji se kreću od početnog poremećaja. Takođe, crveno svetlo na semaforu prouzrokuje poremećaj koji se kreće od semafora: kraj zaustavljenog saobraćaja se prostire od semafora ka nadolazećem saobraćaju (iako se svaki individualni automobil kreće ka semaforu).



Slika 8.1: Kraj zaustavljenog saobraćaja se kreće unazad ka nadolazećem saobraćaju

Jednodimenzionalni talasi su talasi koji se prostiru kroz sredinu u jednom pravcu. Oni se matematički predstavljaju funkcijom dve promenljive $u(x,t)$, gde x predstavlja položaj u sredini duž pravca prostiranja talasa, a t vreme.

Vrednost funkcije u u tački (x,t) predstavlja vrednost nekog kvantitativnog merenja u tački prostora x i trenutku t. Kada fiskiramo vreme, recimo posmatramo trenutak t_0, tada $u(x,t_0)$ je funkcija samo od položaja x i predstavlja prostorni raspored poremećaja u trenutku t_0. Za fiksirani položaj x_0, $u(x_0,t)$ predstavlja vremensku promenu poremećaja u tački x_0.

Ukoliko razmišljamo o u kao o funkciji čija je vrednost u tački (x,t) predstavlja rezultat nekog merenja u jednodimenzionalnoj sredini u tački x i trenutku vremena t, onda parcijalni izvodi po x i t predstavljaju brzinu promene veličine u u prostoru i vremenu. Opservacije o tome kako se u menja izražavamo preko jednačine koja povezuje u i njene izvode – PDJ za u.

Fizičko tumačenje parcijalnih izvoda. Neka je data funkcija $u = u(x,t)$. Tada

- ako fiksiramo $x = x_0$, $u_t(t,x_0)$ predstavlja brzinu promene veličine u u položaju x_0,
- ako fiksiramo $t = t_0$, $u_x(t_0,x)$ predstavlja gradijent veličine u u trenutku t_0.

Primer 8.1: Čestice zagađenja prosute u vodu koja se kreće

Zamislimo da je čestica zagađenja prosuta u vodenu bujicu tj. vodu koja se kreće. Nizvodno od tog mesta, na nekom položaju x, neka $u(x,t)$ označava koncentraciju zagađenja u vodi koja prolazi kroz tačku x u trenutku t. Dok naše bačeno zagađenje ne stigne do tačke x, $u(x,t)$ u položaju x je nula. Kako voda nosi zagađenje, doneće ga do tačke x, a potom odneti dalje. Vrednost $u(x,t)$ se povećava, a potom vraća na nulu. Promena vrednosti funkcije u nastale zbog kretanja vodene bujice se modelira pomoću transportne jednačine,

$$u_t + cu_x = 0,$$

gde je c brzina vode.

Primer 8.2: Čestice zagađenja prosute u stajaću vodu

Zamislimo da je čestica zagađenja prosuta u stajaću vodu. Sada se zagađenje ne prenosi na druge delove kretanjem vode, već je glavni uzročnik širenja zagađenja difuzija. Širenje zagađenja se modelira jednačinom difuzije ili jednačinom provođenja toplote,

$$u_t = Du_{xx},$$

gde je $D > 0$ konstanta.

Primer 8.3

Možemo da imamo kombinaciju transporta i difuzionog procesa, što se modelira tzv. linearizovanom Burgersovom jednačinom

$$u_t + cu_x = Du_{xx}.$$

Primer 8.4

Burgersova jednačina

$$u_t + uu_x = Du_{xx}$$

se često pojavljuje u mehanici fluida, i modelira kombinaciju različitih transpotnih i difuzionih procesa.

8.2 Putujući talasi

Definicija 8.5

Talasi koji se predstavljaju pomoću funkcije oblika

$$u(x,t) = f(x - ct),$$

pri čemu je f funkcija jedne promenljive, a c konstanta, nazivaju se putujući talasi.

U trenutku $t = 0$ imamo početni profil $u(x,0) = f(x)$. Ako je c pozitivno, ovaj početni profil se translira u kasnijem vremenu duž $x-$ose u pozitivnom smeru brzinom c.

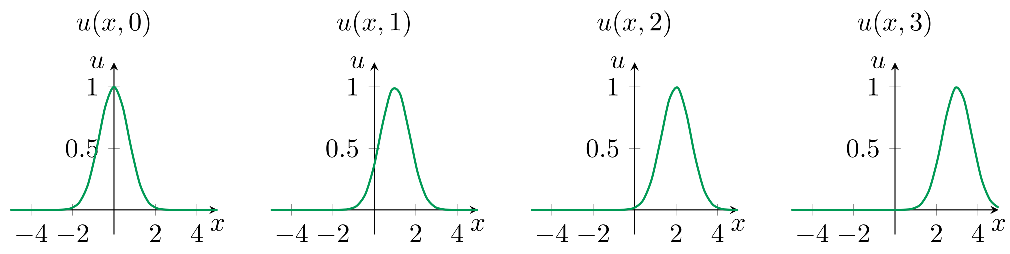
Slika 8.2: Putujući talas

Primer 8.6

Pretpostavimo da je kretanje poremećaja u jednodimenzionalnoj sredini predstavljeno funkcijom

$$u(x,t) = e^{-(x-t)^2}.$$

Na slici 8.3 su prikazani profili za $t = 0, 1, 2, 3$ koji ilustruju talas koji se kreće udesno konstantnom brzinom.



Slika 8.3: Talas koji se kreće udesno

8.3 Metod karakteristika za transportnu jednačinu

8.3.1 Transportna jednačina sa konstantnom brzinom prostiranja

U ovom poglavlju ćemo rešiti transportnu jednačinu sa konstantnom brzinom prostiranja pomoću metode karakteristika. Konstruisaćemo rešenje za početni problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Primetimo da je u pitanju jedna linearna PDJ sa konstantnim koeficijentima. Početni uslov daje profil rešenja $u(x,t)$ u trenutku $t = 0$. Metod karakteristika nalazi rešenje u kasnijem vremenu $t > 0$. Karakteristike su krive u $xt-$ravni duž kojih se prenosi (translira) početni profil $u_0(x)$ tokom vremena.

Duž karakteristika PDJ postaje ODJ, odnosno parcijalni diferencijalni operator postaje običan izvod po vremenu u slučaju kanoničkog oblika PDJ tj. kada je prvi član u_t (u opštem slučaju stoji $\partial_t f(u)$ i tada se smenom svodi na kanonički oblik).

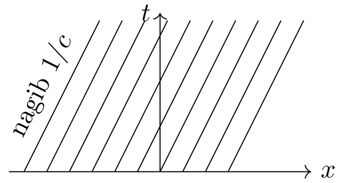
Definicija 8.7

Karakteristične krive ili karakteristike $(x(t), t)$ *za transportnu jednačinu* $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ *su krive u* $xt-$*ravni parametrizovane sa* t *takve da*

$$\dot{x}(t) = c. \tag{8.2}$$

Ukoliko je početna tačka krive $(x_0, 0)$, odnosno ukoliko je $x(0) = x_0$, rešenje ODJ (8.2) koje određuje jednačinu karakteristike koja prolazi kroz tačku $(x_0, 0)$ je prava u $xt-$ravni:

$$x = x_0 + ct.$$



Slika 8.4: Karakteristike za transportnu jednačinu sa konstantnom brzinom

Na osnovu (8.2) na karakteristikama važi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),t) = \partial_t u(x(t),t) + \partial_x u(x(t),t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \partial_t u(x(t),t) + \partial_x u(x(t),t)c = 0. \tag{8.3}$$

Primetimo da se rešavanje polazne PDJ (8.1) svelo na rešavanje ODJ (8.2) koja definiše karakteristike, na kojima ova PDJ postaje ODJ (8.3). Sad preostaje da rešimo (8.3). Iz (8.3) zaključujemo da je $u(x,t) = \text{const}$ na karakteristici, odnosno da je vrednost funkcije u u tački (x,t) na karakteristici ista kao vrednost funkcije u u nekoj drugoj tački na karakteristici, recimo početnoj tački $(x_0, 0)$. Dakle, na karakteristici važi:

$$u(x,t) = u(x-ct, 0) = u_0(x-ct).$$

Zaključujemo da smo konstruisali rešenje početnog problema (8.1) – putujući talas sa početnim profilom $u_0(x)$ koji se prenosi kroz medijum konstantnom brzinom c.

Teorema 8.8

Problem (8.1), gde je $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ ima jedinstveno rešenje $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ dato sa

$$u(x,t) = u_0(x-ct).$$

8.3.2 Transportna jednačina sa promenljivom brzinom prostiranja

Posmatrajmo sada slučaj kada je brzina prostiranja funkcija od t i x,

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + c(x,t)\,\partial_x u(x,t) = 0, \qquad t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Primetimo da je PDJ ovog problema linearna. Karakteristike se dobijaju rešavanjem početnog problema za ODJ,

$$\dot{x}(t) = c(x,t), \quad x(0) = x_0.$$

Primetimo da sada karakteristike nisu prave linije. Duž karakteristika PDJ (8.4) postaje ODJ, kao i u prethodnom slučaju,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),t) = \partial_t u(x(t),t) + \partial_x u(x(t),t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \partial_t u(x(t),t) + \partial_x u(x(t),t)c(x,t) = 0, \tag{8.5}$$

te je rešenje konstantno duž karakteristika,

$$u(x,t) = u_0(x_0).$$

Primer 8.9

Rešiti početni problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + t\, x\, \partial_x u(x,t) &= 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Primetimo da se zadati početni problem odnosi na transportnu jednačinu sa brzinom prostiranja $c(x,t) = t\,x$. Karakteristike dobijamo rešavanjem početnog problema ODJ,

$$\dot{x}(t) = t\,x, \quad x(0) = x_0.$$

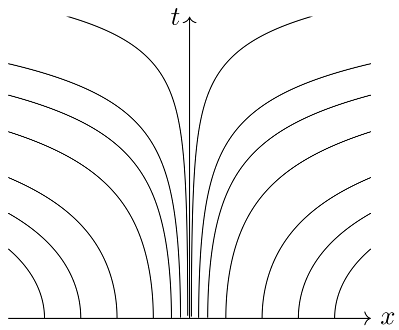
ODJ razdvaja promenljive, te dobijamo

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x(t) = c\,e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Iz početnog uslova sledi $c = x_0$, te konačno dobijamo jednačinu za karakteristike

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t^2}{2}},$$

koje su predstavljene na slici 8.5.

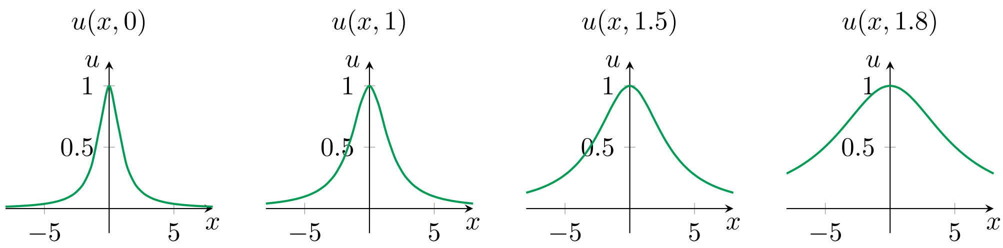


Slika 8.5: Karakteristike za početni problem (8.6)

Iz jednačine za karakteristike sledi da je $x_0 = xe^{-\frac{t^2}{2}}$, te je rešenje zadatog početnog problema

$$u(x,t) = \frac{1}{1+x^2e^{-t^2}}.$$

Na sledećoj slici 8.6 je prikazano ovo rešenje u različitim vremenima.



Slika 8.6: Rešenje početnog problema u različitim vremenima

8.3.3 Nehomogena transportna jednačina

U ovom poglavlju ćemo dodati i nehomogeni član, koji u opštem slučaju može biti funkcija od t, x i u, čime PDJ postaje kvazilinearna,

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + c(x,t)\,\partial_x u(x,t) &= f(x,t,u), \qquad t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Isto kao u prethodnom slučaju, karakteristike se dobijaju rešavanjem sledećeg početnog problema,

$$\dot{x}(t) = c(x,t), \quad x(0) = x_0.$$

U ovom slučaju duž karakteristika PDJ (8.7) postaje ODJ,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),t) = \partial_t u(x(t),t) + \partial_x u(x(t),t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \partial_t u(x(t),t) + \partial_x u(x(t),t)c(x,t) = f(x,t,u). \tag{8.8}$$

Međutim, sada rešenje nije konstantno duž karakteristika zbog nehomogenog člana f. Označimo $U(t) = u(x(t),t)$ Dakle, rešenje se dobija rešavanjem ODJ uz početni uslov iz problema (8.7),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) = f(x(t),t,U(t)), \qquad U(0) = u_0(x_0).$$

Primer 8.10

Rešiti početni problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + 2\,\partial_x u(x,t) &= -u, \qquad t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Rešavanjem početnog problema za ODJ,

$$\dot{x}(t) = 2, \quad x(0) = 0,$$

dobijamo jednačinu za karakteristike

$$x(t) = 2t + x_0.$$

Brzina promene funkcije u duž karakteristike je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),t) = -u(x(t),t).$$

Ukoliko označimo $U(t) = u(x(t),t)$, dobijamo ODJ

$$U'(t) = -U(t), \quad \text{uz početni uslov} \quad U(0) = \frac{1}{1+x_0^2}.$$

Rešavanjem dobijamo

$$U(t) = \frac{1}{1+x_0^2}e^{-t}.$$

Dakle, konstruisali smo rešenje početnog problema (8.9)

$$u(x,t) = \frac{1}{1+(x-2t)^2}e^{-t}.$$

9 Hiperbolične PDJ – jednodimenzionalna talasna jednačina

Kanonički predstavnik PDJ drugog reda hiperboličnog tipa je talasna jednačina nepoznate funkcije $u = u(t, x_1, \dots, x_n)$

$$\partial_{tt} u - c^2 \Delta u = \Psi,$$

gde je Δ Laplasov operator (7.6), a nehomogeni član $\Psi = \Psi(t, x_1, \dots, x_n)$ je neka zadata funkcija. Odgovarajuća homogena PDJ

$$\partial_{tt} u - c^2 \Delta u = 0,$$

se dobija za $\Psi = 0$ za sve $t > 0$ i $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sa stanovišta primena, hiperbolične PDJ su matematički modeli različitih oscilatornih procesa. Za $n = 3$ talasnom jednačinom može da se opiše proces prostiranja zvuka u homogenom prostoru ili proces prostiranja elektromagnetnih talasa u homogenoj neprovodnoj sredini; za $n = 2$ mogu se opisati cilindrični talasi i oscilovanje membrana; za $n = 1$ talasna jednačina može da se interpretira kao jednačina oscilovanja žice.

9.1 Jednodimenzionalna talasna jednačina

U ovom poglavlju ćemo posmatrati jednodimenzionalnu talasnu jednačinu

$$\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = \Psi, \tag{9.1}$$

sa nehomogenim delom $\Psi = \Psi(t, x)$, kao i odgovarajuću homogenog tipa

$$\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = 0. \tag{9.2}$$

Lako se može proveriti da je putujući talas $f(x - at)$ rešenje ove jednačine za $a = \pm c$, tj. $u(x,t) = f(x - ct)$ i $u(x,t) = f(x + ct)$ su rešenja gornje talasne jednačine. Ispostaviće se da je opšte rešenje talasne jednačine zbir dva putujuća talasa. Da bismo to pokazali, radimo smenu promeljivih

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \tag{9.3}$$

odnosno prelazimo na koordinatni sistem koji "prati" putujući talas levo i desno. Definišimo $U(\xi, \eta)$ sa

$$u(x,t) = U(\xi(x,t), \eta(x,t)),$$

gde su ξ i η zadate u gornjoj jednačini (9.3). Sada su parcijalni izvodi

$$\begin{aligned} u_t &= U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = -cU_\xi + cU_\eta, \\ u_{tt} &= c^2 U_{\xi\xi} - 2c^2 U_{\xi\eta} + c^2 U_{\eta\eta}, \\ u_{xx} &= U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

te talasna jednačina postaje:

$$U_{\xi\eta} = 0,$$

(ovo je tzv. kanonički oblik), odakle dobijamo

$$U_{\xi\eta} = 0 \;\Rightarrow\; U_\xi = f(\xi) \;\Rightarrow\; U = \int f(\xi)\mathrm{d}\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Kada vratimo smenu, dobijamo opšte rešenje talasne jednačine

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct), \tag{9.4}$$

$F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

9.2 Košijev problem za homogenu talasnu jednačinu

Pridružimo homogenoj talasnoj jednačini (9.2) početne uslove, odnosno posmatrajmo Košijev problem za homogenu talasnu jednačinu

$$\begin{aligned} &\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\\ &u|_{t=0} = f(x),\\ &\partial_t u|_{t=0} = g(x). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Rešenje ovog problema je opisano Dalamberovom formulom.

Teorema 9.1

Neka su $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Tada Košijev problem (9.5) ima jedinstveno rešenje $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ dato Dalamberovom formulom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\mathrm{d}y. \tag{9.6}$$

Dokaz. Polazimo od opšteg rešenja talasne jednačine (9.5),

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct).$$

Za $t = 0$ iz početnog uslova dobijamo

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) \quad &\Rightarrow \quad F(x) + G(x) = f(x),\\ u_t(x,0) = g(x) \quad &\Rightarrow \quad g(x) = -cF'(x-ct) + cG'(x+ct)\,|_{t=0}\\ &\qquad\quad = -cF'(x) + cG'(x). \end{aligned} \tag{9.7}$$

U poslednjoj jednakosti preimenujemo nezavisnu promenljivu

$$\frac{1}{c}g(s) = -F'(s) + G'(s),$$

i ovu jednakost integralimo po s od 0 do x. Dobijamo

$$\frac{1}{c}\int_o^x g(s)\mathrm{d}s = -F(x) + F(0) + G(x) - G(0),$$

odakle sledi

$$-F(x)+G(x)=-F(0)+G(0)+\frac{1}{c}\int_o^x g(s)\mathrm{d}s. \tag{9.8}$$

Jednačine (9.7) i (9.8) shvatamo kao dve algebarske jednačine za funkcije F i G,

$$\begin{aligned} F(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}\left(-F(0)+G(0)\right)+\frac{1}{2c}\int_o^x g(s)\mathrm{d}s,\\ G(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}\left(-F(0)+G(0)\right)-\frac{1}{2c}\int_o^x g(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Sada kada poznajemo F i G konstruišemo rešenje pomoću (9.4) čime dolazimo do Dalamberove formule (9.6).

Pokažimo jedinstvenost rešenja. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje dva rešenja $u_1(x,t)$ i $u_2(x,t)$ Košijevog problema (9.5). Uvedimo funkciju

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t).$$

Pošto su funkcije $u_1(x,t)$ i $u_2(x,t)$ rešenja Košijevog problema (9.5), onda je $v(x,t)$ rešenje sledećeg Košijevog problema

$$\begin{aligned} &\partial_{tt}v-c^2\partial_{xx}v=0, \quad -\infty<x<\infty,\ t>0,\\ &u|_{t=0}=0,\\ &\partial_t u|_{t=0}=0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Koristeći već dokazanu Dalamberovu formulu (9.6) dobijamo da je rešenje ovog problema na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$

$$v(x,t)=0.$$

Drugim rečima, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ na posmatranoj oblasti, odakle sledi jedinstvenost rešenja Košijevog problema (9.5). □

9.3 Domen zavisnosti i domen uticaja

Talas možemo shvatiti kao poremećaj inicijalno lociran u maloj oblasti medijuma koji se potom prostire ili prenosi na druge delove medijuma. Razmatrimo prostiranje talasa kroz medijum opisano pomoću talasne jednačine i diskutujmo kako inicijalni poremećaj (opisan početnim uslovima na $u(x,0)$ i $u_t(x,0)$, datim u Košijevom problemu (9.5)) određuje rešenje talasne jednačine u drugim delovima medijuma u kasnijim vremenima.

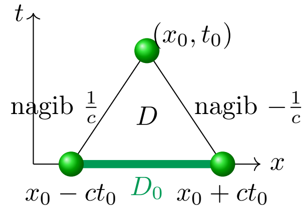
Iz (9.5) vidimo da su početni uslovi $u(x,0)=f(x)$ i $u_t(x,0)=g(x)$, te možemo da zapišemo Dalamberovu formulu (9.6) na sledeći način:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(u(x+ct,0)+u(x-ct,0)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}u_t(y,0)\mathrm{d}y. \tag{9.10}$$

Sada je jasno da vrednost funkcije u u nekoj tački (x_0,t_0) zavisi od vrednosti funkcija u i u_t u početnom trenutku $t=0$ u delu medijuma između tačaka x_0-ct_0 i x_0+ct_0.

Definicija 9.2

Interval $D_0 = (x_0 - ct_0, x_0 + ct_0)$ *zovemo domen zavisnosti rešenja talasne jednačine* (9.5) *za* (x_0, t_0).



Slika 9.1: Domen zavisnosti

Primetimo da ako je neka tačka (x_1, t_1) u trouglu D koji se dobija u preseku pravih $t = 0$, $t - t_0 = \frac{1}{c}(x - x_0)$, $t - t_0 = -\frac{1}{c}(x - x_0)$, onda je njen domen zavisnosti smešten u D_0.

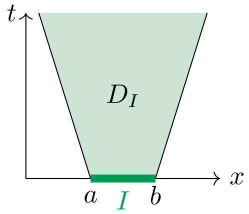
Specijalno, ukoliko je $u_t(x, 0) = g(x) = 0$, za sve x, onda iz (9.10) vidimo da vrednost funkcije u u tački (x, t) zavisi isključivo od početnih vrednosti funkcije u u samo dve tačke: $x_1 = x - ct$ i $x_2 = x + ct$. Na osnovu početnih vrednosti $u(x_1, 0) = f(x_1)$ i $u(x_2, 0) = f(x_2)$ rešenje u u tački (x, t) se konstruiše uzimanjem srednje vrednosti ovih početnih vrednosti:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u(x + ct, 0) + u(x - ct, 0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right). \tag{9.11}$$

Obrnuto, pitamo se se na koje sve tačke u $(x, t)-$oblasti utiče početni poremećaj koji se nalazi u nekom intervalu na pravoj $t = 0$. Oblast koja oseti početni poremećaj se naziva domen uticaja, kao što precizira sledeća definicija.

Definicija 9.3

Domen uticaja intervala I *je skup svih tačaka* (x, t) *u* $xt-$*ravni čiji domen zavisnosti uključuje neke (ili sve) tačke iz* I.



Slika 9.2: Domen uticaja

Da bismo ilustrovali ovu definiciju, pretpostavimo da je poremećaj u početnom trenutku sadržan u nekom intervalu $I = [a, b]$ u medijumu. Iz krajnjih tačaka ovog intervala povučemo prave $x + ct = a$ i $x - ct = b$. Označimo sa D_I oblast ograničenu ovim pravama. Rešenje u u svakoj tački (x, t) oblasti D_I je „pod uticajem" vrednosti od u i u_t u nekim (ili svim) tačkama intervala I duž $x-$ose. Ukoliko se (x, t) nalazi van oblasti D_I vrednost funkcije u u položaju x i trenutku t nije pod uticajem početnog poremećaja lokalizovanog na intervalu I. Dakle, vrednosti rešenja zavise od vrednosti funkcija iz početnih uslova u tačkama intervala I samo u oblasti D_I koju zovemo domen uticaja od I, po prethodnoj definiciji.

Kažemo da se poremećaji kreću (propagiraju) brzinom c (konačna brzina prostiranja!), što znači da treba da prođe neko vreme dok promena ne dođe do posmatrača. Preciznije, ako je neki posmatrač u x_1 van oblasti poremećaja on oseti poremećaj tek za vreme $t_1 = \frac{x_1 - b}{c}$ ako $x_1 > b$, odnosno za vreme $t_1 = \frac{a - x_1}{c}$ ako $x_1 < a$. Napomenimo da ga oseća i u svom preostalom vremenu $t > t_1$ (ovo nije slučaj sa talasnom jednačinom sa tri prostorne promenljive – oseća se samo u tom trenutku t_1).

9.4 Košijev problem za nehomogenu talasnu jednačinu

Posmatrajmo sada Košijev problem za nehomogenu talasnu jednačinu (9.1),

$$\begin{aligned} &\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = \Psi(x,t), \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\\ &u|_{t=0} = f(x),\\ &\partial_t u|_{t=0} = g(x). \end{aligned} \tag{9.12}$$

Neka je D oblast ograničena pravama $t = 0$, $t - t_0 = \frac{1}{c}(x - x_0)$, $t - t_0 = -\frac{1}{c}(x - x_0)$, kao na slici 9.1.

Teorema 9.4

Neka su $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, $\Psi \in C^1(D)$. Tada Košijev problem (9.12) ima jedinstveno rešenje $u \in C^2(D)$ izraženo Dalamberovom formulom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-z)}^{x+c(t-z)} \Psi(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{9.13}$$

Ova teorema se pokazuje integracijom date PDJ u oblasti D i korišćenjem Grinove teoreme.

9.5 Mešoviti problem za talasnu jednačinu – Furijeova metoda razdvajanja promenljivih

Mešoviti problem podrazumeva dodavanje graničnih uslova na Košijev problem. Dakle, posmatramo vrednost funkcije na ograničenom intervalu za prostornu koordinatu, odnosno za $x \in [a, b]$. Na rubovima oblasti, za $x = a$ i $x = b$, zadajemo nove uslove – granične (rubne) uslove, za samu funkciju u ili njen gradijent u_x. Na taj način se formuliše mešoviti problem za talasnu jednačinu:

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) = c^2u_{xx}(x,t) + \Psi(x,t), \qquad a < x < b, t > 0,\\ &u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), \quad a < x < b,\\ &u(a,t) = h(t) \quad \text{ili} \quad u_x(a,t) = h(t),\\ &u(b,t) = k(t) \quad \text{ili} \quad u_x(b,t) = k(t). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Teorema 9.5

Postoji najviše jedno rešenje mešovitog problema (9.14).

Pre nego što dokažemo ovu teoremu uvedimo sledeći mešoviti problem

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) = c^2u_{xx}(x,t), \qquad a < x < b, t > 0,\\ &u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \quad a < x < b,\\ &u(a,t) = 0 \quad \text{ili} \quad u_x(a,t) = 0,\\ &u(b,t) = 0 \quad \text{ili} \quad u_x(b,t) = 0, \end{aligned} \tag{9.15}$$

i koncept integrala energije.

Definicija 9.6

Integral energije za jednodimenzionalnu talasnu jednačinu (9.15) *je*

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_a^b \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) \mathrm{d}x.$$

Pokažimo da je $\mathcal{E}(t) = 0$ za sve $t \geq 0$. Koristeći problem (9.15) dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} &= \int_a^b \left(u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}\right) \mathrm{d}x = c^2 \int_a^b \left(u_t u_{xx} + u_x u_{xt}\right) \mathrm{d}x \\ &= c^2 \int_a^b \partial_x \left(u_t u_x\right) \mathrm{d}x = c^2 \left(u_t u_x\right)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0.\end{aligned}$$

Zaključujemo, $\mathcal{E}(t) = const$. Štaviše, iz početnih uslova dobijamo $\mathcal{E}(0) = 0$, odakle sledi $\mathcal{E}(t) = 0$, za sve $t > 0$.

Sa druge strane, činjenica da $\mathcal{E}(t) = 0$, za sve $t > 0$, za funkciju u implicira $u_t(x,t) = u_x(x,t) = 0$, odnosno $u(x,t) = const$. Opet iz početnih uslova dobijamo $u(x,t) = 0$, za sve $a < x < b$ i $t > 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da su $v(x,t)$ i $w(x,t)$ dva rešenja mešovitog problema (9.14). Tada njihova razlika

$$u(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$$

zadovoljava mešoviti problem (9.15). Gore smo dokazali da je rešenje ovog problema identički jednako nuli, $u(x,t) = 0$, za sve $a < x < b$ i $t > 0$, odakle dobijamo jedinstvenost rešenja ako ono postoji. □

9.5.1 Mešoviti problem homogene talasne jednačine

U ovom poglavlju ćemo posmatrati interval $x \in [0,\ell]$ i na rubu oblasti vrednost nepoznate funkciju u će biti 0, tj. posmatramo sledeći mešoviti problem za talasnu jednačinu:

$$\begin{aligned}&u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0,\\ &u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < \ell,\\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0.\end{aligned} \tag{9.16}$$

Jedna od fizičkih interpretacija zadatog mešovitog problema je problem oscilovanja žice dužine ℓ čija su oba kraja fiksirana i pri čemu je početni položaj žice opisan funkcijom $f(x)$, a početna brzina oscilovanja žice funkcijom $g(x)$.

Mešoviti problem (9.16) rešavamo pomoću Furijeove metode razdvajanja promenljivih koje podrazumeva da *razdvojimo* nepoznatu funkciju u koja zavisi od promenljivih x i t na proizvod dve funkcije, jedne koja zavisi samo od x i druge koja zavisi samo od t. Drugim rečima, tražimo rešenje u obliku:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{9.17}$$

$x \in [0,\ell]$, $t \geq 0$. Metoda se primenjuje u tri koraka: ideja je da se najpre potraže sva moguća rešenja PDJ u ovom obliku, a zatim da se eliminišu sva netrivijalna rešenja pomoću graničnih uslova, a potom dobije konačno rešenje koristeći početne uslove.

Korak 1.

Za rešenje u obliku (9.17) parcijalni izvodi postaju

$$u_{tt} = X(x)T''(t), \qquad u_{xx} = X''(x)T(t),$$

te zamenom u jednačinu dobijamo

$$X(x)T''(t) - c^2T(t)X''(x) = 0,$$

tj.

$$c^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Kako leva strana jednakosti zavisi isključivo od t, a desna od x, jedina mogućnost da jednakost bude zadovoljena jeste da su i leva i desna strana jednakosti jednake nekoj konstanti λ:

$$c^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \qquad \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Dobili smo dve ODJ,

$$X''(x) = \frac{\lambda}{c^2}X(x), \qquad T''(t) = \lambda T(t). \tag{9.18}$$

Razmatramo zasebno slučajeve $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$.

Slučaj $\lambda = 0$. U ovom slučaju su obe funkcije X i T linearne funkcije svojih promenljivih,

$$T(t) = A + B\,t, \quad X(x) = C + D\,x,$$

te je

$$u(x,t) = (A + B\,t)\,(C + D\,x)\,.$$

Slučaj $\lambda > 0$. Stavimo da je $\lambda = r^2$, $r > 0$. Dakle, iz (9.18) dobijamo ODJ

$$T''(t) = r^2T(t), \qquad X''(x) = \left(\frac{r}{c}\right)^2 X(x),$$

čije je rešenje

$$T(t) = A\,e^{rt} + B\,e^{-rt}, \quad X(x) = C\,e^{\frac{r}{c}x} + D\,e^{-\frac{r}{c}x},$$

te je

$$u(x,t) = \left(A\,e^{rt} + B\,e^{-rt}\right)\left(C\,e^{\frac{r}{c}x} + D\,e^{-\frac{r}{c}x}\right).$$

Slučaj $\lambda < 0$. Neka je sada $\lambda = -r^2$, $r > 0$. ODJ (9.18) impliciraju

$$T''(t) = -r^2T(t), \qquad X''(x) = -\left(\frac{r}{c}\right)^2 X(x),$$

čijim rešavanjem dobijamo

$$T(t) = A\,\cos(rt) + B\,\sin(rt), \quad X(x) = C\,\cos\left(\tfrac{r}{c}x\right) + D\,\sin\left(\tfrac{r}{c}x\right),$$

te je rešenje polazne PDJ

$$u(x,t) = (A\,\cos(rt) + B\,\sin(rt))\left(C\,\cos\left(\tfrac{r}{c}x\right) + D\,\sin\left(\tfrac{r}{c}x\right)\right).$$

Korak 2.

Sada uključujemo granične uslove. Za $x = 0$ zahtevamo

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \text{ za svako } t > 0.$$

Ovo nadalje implicira da ili $X(0) = 0$ ili $T(t) = 0$ za sve $t > 0$. Za izbor $T(t) = 0$ za sve $t > 0$ dobijamo i da je $u(x,t) = 0$ za sve $t > 0$. Dakle, netrivijalno rešenje se dobija jedino uz uslov $X(0) = 0$. Slično, za $x = \ell$ dobijamo uslov $X(\ell) = 0$. Zaključujemo, granični uslovi impliciraju da $X(x)$ mora biti funkcija koja zadovoljava granične uslove

$$X(0) = X(\ell) = 0. \tag{9.19}$$

Ovi granični uslovi će eliminisati trivijalna rešenja jednačine razmatrana u prethodnom koraku.

Slučaj $\lambda = 0$. U ovom slučaju smo dobili da je

$$X(x) = C + D\,x.$$

Granični uslov implicira

$$X(0) = C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0.$$

Takođe,

$$X(\ell) = D\ell = 0 \;\Rightarrow\; D = 0.$$

Dakle, obe konstante su jednake nuli, odakle sledi $X(x) = 0$, za sve $x \in (0,\ell)$, što implicira da je $u(x,t) = 0$ za $x \in (0,\ell)$ i $t > 0$, odnosno da je $u(x,t)$ trivijalno rešenje.

Slučaj $\lambda > 0$. Sada je funkcija X data sa

$$X(x) = C\,e^{\frac{r}{c}x} + D\,e^{-\frac{r}{c}x}.$$

Za $x = 0$ dobijamo

$$X(0) = C + D = 0 \;\Rightarrow\; D = -C.$$

Koristeći ovaj rezultat, za $x = \ell$ sledi

$$X(\ell) = C\left(e^{\frac{r}{c}\ell} - e^{-\frac{r}{c}\ell}\right) = 0 \;\Rightarrow\; C = 0,$$

pošto je izraz unutar zagrade uvek različit od nule. Vraćajući se na prvi uslov dobijamo i da je $D = 0$. Dakle, i u ovom slučaju dobijamo trivijalno rešenje jer je $X(x) = 0$ za sve $x \in (0,\ell)$.

Slučaj $\lambda < 0$. U ovom slučaju smo dobili

$$X(x) = C\,\cos\!\left(\tfrac{r}{c}x\right) + D\,\sin\!\left(\tfrac{r}{c}x\right).$$

Granični uslov za $x = 0$ implicira

$$X(0) = C = 0,$$

dok iz graničnog uslova za $x = \ell$ sledi

$$X(\ell) = D\,\sin\!\left(\tfrac{r}{c}\ell\right) = 0.$$

Poslednja jednakost implicira ili da je $D = 0$ što dovodi do trivijalnog rešenja ili da je $\frac{r}{c}\ell = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Pošto su c i ℓ unapred zadati, rešavamo ovu jednačinu po r,

$$r = \frac{c}{\ell} n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

odakle konačno dobijamo konstantu λ. Kako se svako n dobija drugo r odnosno λ uobičajeno je da se zavisnost od n istakne, te ćemo umesto λ stavljati λ_n. Dakle,

$$\lambda_n = -\left(\frac{c}{\ell} n\pi\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

i ova konstanta se naziva svojstvena (karakteristična) vrednost. Sada dolazimo i do oblika funkcije X

$$X_n(x) = \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

koju nazivamo svojstvena (karakteristična) funkcija. Štaviše, dolazimo i do izraza za netrivijalno rešenje polazne PDJ koja zadovoljava granične uslove (9.19)

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\right) + B_n \sin\left(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\right)\right) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right), \ n \in \mathbb{N}. \tag{9.20}$$

Podsetimo se da su $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{\ell}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ svojstvene vrednosti, a $X_n = \sin\dfrac{n\pi}{\ell}x$, $\quad n \in \mathbb{N}$ svojstvene funkcije za Šturm-Liuvilov granični problem

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Svojstvene funkcije imaju svojstvo ortogonalnosti,

$$\int_0^\ell X_m(x) X_n(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\ell}{2}, & m = n. \end{cases}$$

Na osnovu Leme 7.8, rešenje ovog graničnog problema je i

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\right) + B_n \sin\left(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\right)\right) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{9.21}$$

Korak 3.

Preostalo je još da odredimo koeficijente A_n i B_n iz (9.21) na osnovu početnih uslova. Prvi početni uslov za funkciju u implicira

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x = f(x). \tag{9.22}$$

Da bismo primenili početni uslov za u_t, najpre diferenciramo (9.21) po t,

$$\partial_t u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{cn\pi}{\ell} \sin\frac{cn\pi}{\ell}t + B_n \frac{cn\pi}{\ell} \cos\frac{cn\pi}{\ell}t\right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

na osnovu čega sledi

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{cn\pi}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x = g(x). \tag{9.23}$$

Jednakostima (9.22) i (9.23) je predstavljeno razlaganje funkcija $f(x)$ i $g(x)$ u (sinusni) Furijeov red na intervalu $(0,\ell)$ (Kratak pregled Furijeovih redova koji sadrži osnovne elemente neohodne za razumevanje ovog dela gradiva je dat u prilogu D.). Dakle, koeficijente A_n i B_n dobijamo iz (9.22) i (9.23),

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x, \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Sada je rešenje (9.21) mešovitog problema (9.16) u potpunosti poznato.

Sada možemo da formulišemo sledeću teoremu.

Teorema 9.7

Ako je funkcija $f \in C^2([0,\ell])$, ima deo po deo neprekidan treći izvod i zadovoljava uslove:

$$f(0) = f(\ell) = 0, \qquad f''(0) = f''(\ell) = 0,$$

a funkcija $g \in C^1([0,\ell])$, ima deo po deo neprekidan drugi izvod i zadovoljava uslove:

$$g(0) = g(\ell) = 0.$$

tada je funkcija $u = u(x,t)$ data sa (9.21) i (9.24)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\tfrac{cn\pi}{\ell} t\right) + B_n \sin\left(\tfrac{cn\pi}{\ell} t\right) \right) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right), \quad \begin{cases} A_n = \dfrac{2}{\ell} \displaystyle\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x, \\ B_n = \dfrac{2}{n\pi c} \displaystyle\int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x. \end{cases}$$

neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode do drugog reda, i zadovoljava mešoviti problem za talasnu jednačinu (9.16). Pored toga, red (9.21) se može dva puta diferencirati član po član po x i t pri čemu dobijeni redovi i red (9.21) apsolutno i uniformno konvergiraju za $x \in [0,\ell]$ i $t \geq 0$.

9.5.2 Mešoviti problem nehomogene talasne jednačine

Posmatrajmo mešoviti problem za nehomogenu talasnu jednačinu (9.12), sa istim početnim i graničnim uslovima kao i (9.16)

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + \Psi(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0, \\ &u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < \ell, \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{9.25}$$

U primenama ovaj tip problema može da se javi kod oscilovanja žice pod dejstvom prinudne sile, opisane nehomogenim članom $\Psi(x,t)$.

Rešenje problema (9.25) tražimo u obliku zbira dve funkcije

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

Uvrštavanjem u mešoviti problem (9.25) dobijamo

$$\begin{aligned} &v_{tt}(x,t) + w_{tt}(x,t) = c^2 v_{xx}(x,t) + c^2 w_{xx}(x,t) + \Psi(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0 \\ &v(x,0) + w(x,0) = f(x), v_t(x,0) + w_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < \ell, \\ &v(0,t) + w(0,t) = v(\ell,t) + w(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Drugim rečima, rešavanje mešovitog problema (9.25) za nepoznatu funkciju u se svodi na rešavanje dva mešovita problema, i to za funkciju v

$$\begin{aligned} &v_{tt}(x,t) = c^2 v_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0 \\ &v(x,0) = f(x), v_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < \ell, \\ &v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{9.27}$$

i za funkciju w,

$$\begin{aligned} &w_{tt}(x,t) = c^2 w_{xx}(x,t) + \Psi(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0 \\ &w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ &w(0,t) = w(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Problem (9.27) smo već rešili u prethodnom odeljku, i rešenje je formulisano u teoremi 9.5.1. Rešenje w nehomogenog problema (9.28) sa trivijalnim i početnim i graničnim uslovima tražimo u obliku

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right). \tag{9.29}$$

Jasno je da w zadovoljava granične uslove. Diferenciranjem i ubacivanjem u PDJ (9.28) dolazimo do

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 T_n(t) \right) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right) = \Psi(x,t). \tag{9.30}$$

Ako pretpostavimo da funkciju $\Psi(x,t)$ možemo da razvijemo u Furijeov sinusni red (vidi prilog D) na $[0,\ell]$, pri čemu t shvatamo kao parametar, odnosno

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right), \quad A_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Psi(x,t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right) \mathrm{d}x, \ n = 1, 2, \ldots,$$

onda jednačina (9.30) postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 T_n(t) - A_n(t) \right) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right) = 0.$$

Ona će biti zadovoljena ako $T_n(t)$ zadovoljava sledeću linearnu ODJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima,

$$T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 T_n(t) = A_n(t), \quad \text{za sve} \ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{9.31}$$

koju rešavamo metodom varijacije konstanti. Najpre, opšte rešenje odgovarajuće homogene ODJ je

$$T_n(t) = a_n \sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big) + b_n \cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big)\,.$$

Variramo konstante $a_n(t)$ i $b_n(t)$, i ubacivanjem u ODJ dolazimo do sistema

$$\begin{aligned} a_n'(t)\sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big) + b_n'(t)\cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big) &= 0,\\ \tfrac{cn\pi}{\ell}a_n'(t)\cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big) - \tfrac{cn\pi}{\ell}b_n'(t)\sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big) &= A_n(t). \end{aligned}$$

Kako je determinanta sistema

$$W\big(\sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big)\,,\cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big)\big) = -\tfrac{cn\pi}{\ell},$$

rešenje sistema je

$$a_n'(t) = \tfrac{\ell}{cn\pi}\cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big)\,A_n(t)\mathrm{d}t, \qquad b_n'(t) = -\tfrac{\ell}{cn\pi}\sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big)\,A_n(t)\mathrm{d}t.$$

Sada je jedno partikularno rešenje ODJ (9.31)

$$\begin{aligned} T_n^p(t) &= \sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big)\,\tfrac{\ell}{cn\pi}\int_0^t \cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}s\big)\,A_n(s)\mathrm{d}s - \cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big)\,\tfrac{\ell}{cn\pi}\int_0^t \sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}s\big)\,A_n(s)\mathrm{d}s\\ &= \tfrac{\ell}{cn\pi}\int_0^t A_n(s)\sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}(t-s)\big)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Sada je opšte rešenje ODJ (9.31)

$$T_n(t) = a_n \sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big) + b_n\cos\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}t\big) + \tfrac{\ell}{cn\pi}\int_0^t A_n(s)\sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}(t-s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Početni uslovi u mešovitom problemu (9.28) nameću početne uslove za $T_n(t)$,

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0,$$

što implicira $a_n = b_n = 0$. Konačan izraz za $T_n(t)$ dobijamo koristeći izraz za $A_n(t)$,

$$T_n(t) = \tfrac{2}{cn\pi}\int_0^t\int_0^\ell \Psi(x,s)\sin\big(\tfrac{n\pi}{\ell}x\big)\sin\big(\tfrac{cn\pi}{\ell}(t-s)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

Uvrštavanjem ovog rezultata u (9.29) dobijamo rešenje w, odakle sledi konačno rešenje u mešovitog problema za nehomogenu talasnu jednačinu.

Napomenimo da se u slučaju nehomogenih graničnih uslova, smenom dolazi do problema sa homogenim graničnim uslovima.

10 Parabolične PDJ – jednačina provođenja toplote

Kanonički predstavnik PDJ drugog reda paraboličnog tipa je jednačina provođenja toplote

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \tag{10.1}$$

ili nehomogena $u_t - a^2 \Delta u = \Psi$. Ova jednačina se naziva i jednačinom difuzije, u zavisnosti od fizičke interpretacije modela. Nepoznata funkcija u zavisi od t i $x \in \mathbb{R}^n$, pri čemu $t > 0$ i $x \in \Omega$, gde je Ω ograničena oblast (otvoren i povezan skup) u $\mathbb{R}^n$.

U opštem slučaju, u primenama parabolične jednačine se koriste za opisivanje procesa ireverzibilnih u vremenu, pošto jednačine nisu invarijantne pri smeni $t \to -t$. Ovo znači da se znanje o prošlosti gubi kako vreme protiče. Tako su parabolične PDJ matematički modeli kojima se opisuju procesi termodinamike, difuzioni procesi kretanja gasova i viskoznih tečnosti.

Za oblast Ω, uvedimo oblast D

$$D = \Omega \times (0, T) = \{(x,t) | x \in \Omega, 0 < t < T\}, \quad T < \infty, \ \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

i ∂D granicu oblasti D. Neka je

$$D' = \{(x,t) | (x \in \partial\Omega, 0 \le t \le T) \vee (x \in \Omega, t = 0)\}.$$

Drugim rečima, $\partial D = D' \cup \{(x,t) | x \in \Omega, t = T\}$. Primetimo još $\overline{D} = \overline{\Omega} \times [0, T]$.

10.1 Princip maksimuma/minimuma za jednačinu provođenja toplote

Princip maksimuma/minimuma za jednačinu provođenja toplote po kome rešenje dostiže ekstremnu vrednost na rubu oblasti definisanosti je preciziran u sledećoj teoremi.

Teorema 10.1

Neka je $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ rešenje od (10.1) na D. Ako su m i M, respektivno, minimalna i maksimalna vrednost od u na granici D', tada

$$m \le u(x,t) \le M, \qquad (x,t) \in \overline{D}.$$

Drugim rečima, $\max u$ i $\min u$ dostižu u tačkama na D'.

Princip maksimuma takođe važi za neograničene oblasti:

$$D = \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad 0 < T \le \infty.$$

Ukoliko je $n = 1$, tada jednačina provođenja toplote opisuje, na primer, raspored temperature u tankoj homogenoj šipki dužine $|\Omega|$ u vremenskom intervalu $[0, T]$. U tom slučaju princip maksimuma ima sledeću fizičku interpretaciju: ako temperatura u šipki u početnom trenutku nije bila veća od M i ako u krajnjim tačkama šipke sa protokom vremena ona ne pravazilazi M, bez prisustva dodatnih izvora toplote unutar šipke se ne može stvoriti temperatura koja prevazilazi M. Analogno za m.

Teorema 10.2

Ako je $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ rešenje od (10.1) na D, a na granici D' zadovoljava granični uslov $u\big|_{D'} = 0$, tada je $u(x,t) = 0$ na $\overline{D}$.

Po prethodnoj teoremi 10.1 rešenje dostiže svoju maksimalnu i minimalnu vrednost na granici D', a kako su obe ove vrednosti jednake nuli, sledi da je rešenje takođe jednako nuli na $\overline{D}$.

Teorema 10.3

Ako su $v, w \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ rešenja PDJ (10.1) na D, a na granici D' važi $|v|\big|_{D'} \leq w\big|_{D'}$, tada je $|v| \leq w$ na $\overline{D}$.

Prethodna teorema kaže da ako na granici D' važi uslov $-w \leq v \leq w$, onda on važi i u oblasti $\overline{D}$.

Prethodne dve teoreme koje su zapravo posledica principa maksimuma se primenjuju u dokazu jedinstvenosti i stabilnosti rešenja sledećeg graničnog problema

$$\begin{aligned} &u_t - a^2 \Delta u = \Psi, \quad (x,t) \in D, \\ &u\big|_{D'} = \varphi, \end{aligned} \tag{10.2}$$

gde su Ψ i φ unapred zadate funkcije.

Naime, važi sledeća teorema o jedinstvenosti rešenja.

Teorema 10.4

Granični problem (10.2) ima najviše jedno rešenje.

Dokaz. Dokaz se lako dobija primenom teoreme 10.1. Ukoliko pretpostavimo suprotno, da postoje dva rešenja $v(x,t)$ i $w(x,t)$ graničnog problema (10.2), onda njihova razlika $u(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$ zadovoljava uslove ove teoreme, koja implicira $u(x,t) = 0$ na $\overline{D}$, odakle sledi jedinstvenost rešenja ukoliko ono postoji. □

Sa druge strane, važi teorema o stabilnosti rešenja, koja ima veliki značaj prilikom eksperimentalnih merenja, jer pokazuje da mala greška u vrednosti funkcije na rubu oblasti, ostaje mala i unutar oblasti.

Teorema 10.5

Neka su funkcije u_1 i u_2 klase $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ rešenja jednačine (10.2) koja zadovoljavaju granične uslove $u_1\big|_{D'} = \varphi_1$ i $u_2\big|_{D'} = \varphi_2$. Neka je jos $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$. Tada važi $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$ na $\overline{D}$.

Dokaz. Funkcija $v = u_1 - u_2$ je rešenje odgovarajuće homogene jednačine provođenja toplote, pri čemu na granici važi $v\big|_{D'} = \varphi_1 - \varphi_2$ i $|v|\big|_{D'} \leq \varepsilon$. Sada ovako definisana funkcija v i konstantna funkcija $w = \varepsilon$ zadovoljavaju uslove teoreme 10.1, koja implicira $|v| \leq \varepsilon$ na $\overline{D}$, odakle sledi tvrđenje. □

10.2 Košijev problem jednačine provođenja toplote

Navedimo najpre rešenje jednačine provođenja toplote.

Definicija 10.6 (Fundamentalno rešenje jednačine provođenja toplote)

Fundamentalno rešenje homogene $n-$dimenzionalne jednačine provođenja toplote (10.1) *je funkcija klase $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$:*

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Sada uz jednačinu posmatrajmo i početni uslov

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{10.3}$$

Pomoću fundamentalnog rešenja možemo izraziti rešenje Košijevog problema.

Teorema 10.7

Ako je funkcija $f \in C(\mathbb{R}^n)$ i ograničena na $\mathbb{R}^n$, tada je funkcija

$$u(x,t) = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-\frac{|s-x|^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}s, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

jedinstveno i ograničeno rešenje Košijevog problema (10.1)–(10.3) *klase $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.*

Ova teorema izražava bitno svojstvo rešenja Košijevog problema – povećanje glatkosti rešenja u odnosu na početni uslov.

Takođe, primetimo da ukoliko je $f \geq 0$, ali ne identički jednako nuli, tada je rešenje $u(x,t)$ pozitivno u svim tačkama $x \in \mathbb{R}^n$ i svim vremenima $t > 0$. Ovo interpretiramo kao beskonačnu brzinu prostiranja poremećaja: ukoliko je inicijalna temperatura bila negde pozitivna, u sledećem trenutku vremena (nebitno koliko je vremena prošlo od početnog trenutka) će biti svuda pozitivno.

10.3 Mešoviti problem za jednačinu provođenja toplote

10.3.1 Mešoviti problem homogene jednačine provođenja toplote

Posmatramo sledeći mešoviti problem za jednačinu provođenja toplote:

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0, \\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell, \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{10.4}$$

On može biti matematički model za raspored temperature u termoizolovanoj šipki dužine ℓ, bez unutrašnjih izvora toplote, čiji se krajevi održavaju na temperaturi 0, sa početnim rasporedom temperature opisanim funkcijom $f(x)$.

Mešoviti problem (10.4) rešavamo Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih. Rešenje tražimo u obliku

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Diferenciranjem i ubacivanjem u PDJ dobijamo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Granični uslovi impliciraju $X(0) = X(\ell) = 0$. Dakle, rešavamo granični problem za $X(x)$ i ODJ za $T(t)$,

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = 0, \\ X(\ell) = 0. \end{cases} \qquad \text{i} \quad T'(t) = \lambda a^2 T(t).$$

Neka je $a = 1$. Rešenje ODJ za $T(t)$, $T'(t) = \lambda T(t)$, je $T(t) = e^{\lambda t}$. Dakle, mi tražimo rešenje u obliku $u(x,t) = X(x)e^{\lambda t}$. Sada možemo da povučemo paralelu sa rešavanjem sistema ODJ: tamo je X bio vektor, svojstveni vektor, a λ je bila svojstvena vrednost, i tražili smo rešenje u obliku (5.8) $Y(t) = Xe^{\lambda t}$. Sada X nije vektor, već (skalarna) funkcija od x, koju nazivamo svojstvena funkcija.

Netrivijalno rešenje graničnog problema za $X(x)$ je

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2.$$

Sada ODJ za $T(t)$ postaje

$$T'(t) = -\left(a\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 T(t),$$

čije je rešenje

$$T_n(t) = c_n e^{-\left(a\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}.$$

Sada je rešenje PDJ koje zadovoljava granične uslove

$$u_n(x,t) = c_n e^{-\left(a\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

za $n = 1, 2, \ldots$.

Obratimo pažnju na zavisnost rešenja $u(x,t)$ od vremena t: ono je brzo (eksponencijalno) opadajuće po t i to sve više sa porastom n. Zamislimo da su krajevi šipke zamrznuti, odnosno na temperaturi 0. Unutar šipke temperatura će da se smanjuje, dok se ne dostigne ravnotežno rešenje $u(x,t) = 0$.

Opšte rešenje ovog problema dobijamo sumiranjem,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(a\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{10.5}$$

Na kraju, početni uslovi nam određuju nepoznate konstante c_n. Preciznije, iz početnog uslova dobijamo

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

i dakle koeficijenti c_n su dati sa

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10.6}$$

Zaključujemo, rešenje mešovitog problema za jednačinu provođenja toplote (10.4) je dato sa (10.5) i (10.6). Uslove pod kojima postoji ovo rešenje su precizirani u sledećoj teoremi.

Teorema 10.8

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i ima deo po deo neprekidan prvi izvod na intervalu $[0,\ell]$ pri čemu je

$$f(0) = f(\ell) = 0,$$

onda je rešenje mešovitog problema (10.4) za jednačinu provođenja toplote funkcija $u = u(x,t) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ izražena redom (10.5) sa (10.6)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(a\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \qquad c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x.$$

10.3.2 Mešoviti problem nehomogene jednačine provođenja toplote

Razmotrimo sada mešoviti problem koji se sastoji od nehomogene jednačine provođenja toplote i početnog i graničnih uslova kao i (10.4),

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \Psi(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0,\\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell,\\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Ukoliko dati problem modelira provođenje toplote kroz šipku dužine ℓ, onda nehomogeni član Ψ opisuje dodatni izvor toplote koji je prisutan u modelu.

Kao i u poglavlju 9.5.2, rešenje mešovitog problema (10.7) tražimo u obliku zbira,

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

pri čemu je $v(x,t)$ rešenje mešovitog problema za homogenu jednačinu provođenja toplote datog u (10.4),

$$\begin{aligned} &v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0,\\ &v(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell,\\ &v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

dok w zadovoljava odgovarajući mešoviti problem sa homogenim početnim uslovom,

$$\begin{aligned} &w_t(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t) + \Psi(x,t), \qquad 0 < x < \ell, t > 0,\\ &w(x,0) = 0, \quad 0 < x < \ell,\\ &w(0,t) = w(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Za nehomogeni član $\Psi(x,t)$ pretpostavimo da možemo da razvijemo u Furijeov sinusni red (vidi prilog D) na $[0,\ell]$, pri čemu t shvatamo kao parametar, odnosno

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right), \quad A_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\Psi(x,t)\sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x,\ n=1,2,\dots. \tag{10.9}$$

Rešenje w nehomogenog problema (10.8) sa trivijalnim i početnim i graničnim uslovima tražimo u obliku

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{10.10}$$

Ovako definisana funkcija w zadovoljava granične uslove. Diferenciranjem, uvrštavanjem u PDJ (10.8) i korišćenjem izraza (10.9) dolazimo do

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2T_n(t)-A_n(t)\right)\sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right)=0. \tag{10.11}$$

Sada linearna nezavisnost funkcija $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ implicira ODJ prvog reda za funkciju $T_n(t)$,

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2T_n(t)-A_n(t)=0 \quad\Rightarrow\quad T_n(t)=e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2t}\left(a_n+\int_0^tA_n(s)e^{\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2s}\mathrm{d}s\right),$$

dok početni uslov $w(x,0)=0$ implicira $T_n(0)=0$, odakle sledi $a_n=0$, za sve $n=1,2,\dots$. Dakle, funkcije T_n je data sa

$$T_n(t)=\int_0^tA_n(s)e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2(t-s)}\mathrm{d}s,$$

te je dakle, korišćenjem (10.10) rešenje w dato sa

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^tA_n(s)e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2(t-s)}\mathrm{d}s\right)\sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right).$$

Za v koristimo rezultat teoreme 10.3.1, čime dobijamo rešenje $u(x,t)$ mešovitog problema (10.7),

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x+\int_0^tA_n(s)e^{\left(a\frac{n\pi}{\ell}\right)^2s}\mathrm{d}s\right)e^{-\left(a\frac{n\pi}{\ell}\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

11 | Eliptične PDJ – Laplasova jednačina

Kanonički predstavnik PDJ drugog reda eliptičnog tipa je Laplasova jednačina

$$\Delta u = 0, \tag{11.1}$$

i sa njom povezana Poasonova jednačina:

$$-\Delta u = f, \tag{11.2}$$

gde $u = u(x)$, $x \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ oblast u $\mathbb{R}^n$.

Jednačinama eliptičnog tipa se opisuju brojne stacionarne pojave tj. pojave koje ne zavise od vremena. Tu spadaju, na primer, potencijalno elektrostatičko polje ili potencijalni tok nestišljivog fluida.

Rešenje Laplasove jednačine ima posebno ime.

Definicija 11.1

Funkcija $u \in C^2(D)$ koja zadovoljava Laplasovu jednačinu (11.1) naziva se harmonijska funkcija.

Primer 11.2

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$. Realni i imaginarni deo svake analitičke funkcije na D predstavljaju harmonijske funkcije na D (koristiti Koši-Rimanove uslove).

Primer 11.3

Sledeće funkcije su harmonijske: $u = x^2 - y^2$, $u = xy$, $u = x^3 - 3xy^2$, $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $u = e^x \cos y$. Ako su (ρ, φ) polarne koordinate, $u = \rho^n \cos n\varphi$, $u = \rho^n \sin n\varphi$ su harmonijske funkcije.

Potražimo sada fundamentalno rešenje Laplasove jednačine. Pošto je Laplasova jednačina invarijantna u odnosu na rotacije, možemo potražiti njeno radijalno rešenje tj. rešenje u obliku

$$u(x) = v(r), \quad r = |x|.$$

Jednačinu $\Delta u = 0$ na osnovu (7.7) prevodimo u

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Opšte rešenje ove jednačine je

$$v(r) = C \int \frac{1}{r^{n-1}} \mathrm{d}r + C_1.$$

Definicija 11.4 (Fundamentalno rešenje Laplasove jednačine)

Fundamentalno rešenje Laplasove jednačine je funkcija

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)V_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

definisana za $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, a V_n je zapremina jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$:

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})},$$

gde je Γ gama funkcija.

11.1 Teorema o srednjoj vrednosti za Laplasovu jednačinu

Sledeća teorema nam tvrdi da je $u(x)$ harmonijska funkcija ako i samo ako je vrednost $u(x)$ jednaka srednjoj vrednosti od u na sferi $\partial B(x,r)$ pod pretpostavkom da je sfera sadržana u D.

Teorema 11.5

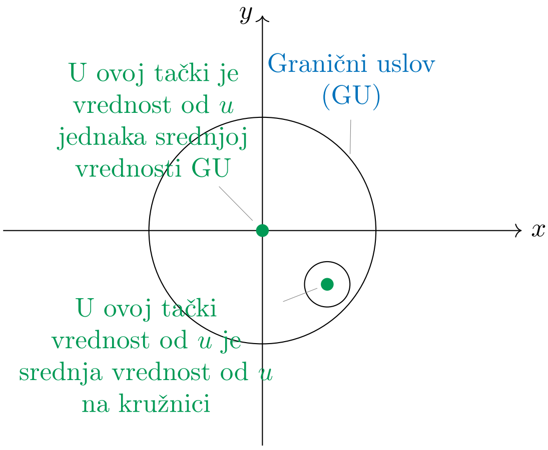
u je harmonijska funkcija na D ako i samo ako za svako $x_0 \in D$ važi

$$u(x_0) = \frac{1}{nV_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u \, \mathrm{d}S \tag{11.3}$$

za sve $r > 0$ tako da je $B(x_0, r)$ sadržano u D. V_n je je zapremina jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$ (nV_n je površina jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$).

Na osnovu ove Teoreme, funkcija stanja $u(x)$ koja opisuje fizički sistem modeliran Laplasovom jednačinom je "balansirana" na D u smislu da vrednost od u u bilo kojoj tački x_0 je jednaka srednjoj vrednosti od u na površini bilo koje lopte sadržane u D sa centrom u x_0. Drugim rečima, Laplasova jednačina (i uopšteno eliptične PDJ) modelira fizičke sisteme u stanju ravnoteže ili stacionarnom stanju. Kažemo još da Laplasova jednačina ima efekat "usrednjavanja".

Da bismo intuitivnije razumeli ovu teoremu, zamislimo da je D krug sa centrom u nuli. Rub kruga D, u oznaci ∂D, je zapravo kružnica sa istim centrom i istog poluprečnika kao D. Neka su dati granični uslovi na kružnici. Tada će vrednost rešenja u u centru kruga, tački $x_0 = 0$ biti srednja vrednost graničnih uslova, odnosno vrednosti od u na kružnici ∂D! Za svaki mali krug B unutar velikog kruga D važi da je vrednost funkcije u njegovom centru jednaka srednjoj vrednosti od u na kružnici ∂B, i to važi za sve krugove unutar velikog kruga D. Dakle, kakav god granični uslov bio, kad se pomerimo od velike kružnice ∂D (kad ulazimo unutar kruga D), on se uglačava!



Slika 11.1: Ilustracija teoreme 11.5.

Važi i druga verzija teoreme o srednjoj vrednosti.

Teorema 11.6

u je harmonijska funkcija na D ako i samo ako za svako $x_0 \in D$ važi

$$u(x_0) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x_0,r)} u \, \mathrm{d}y,$$

za sve $r > 0$ tako da je $B(x_0, r)$ sadržano u D. V_n je je zapremina jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$.

Posledica Teoreme srednje vrednosti je važna osobina o regularnosti rešenja Laplasove jednačine: ako je $u \in C^2$ harmonijska, onda je $u \in C^\infty$, dakle svi izvodi postoje i neprekidni su (čak iako se ne pojavljuju u PDJ), a čak važi i profinjenje:

Teorema 11.7

Neka je u harmonijska funkcija na D. Tada je u analitička na D.

11.2 Princip maksimuma za harmonijske funkcije

Teorema 11.8

Neka je D ograničena oblast sa rubom ∂D i neka je $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ harmonijska funkcija. Ako su m i M, respektivno, minimalne i maksimalne vrednosti od u na rubu ∂D, onda (slabi princip maksimuma):

$$m \leq u(x) \leq M, \quad x \in \overline{D},$$

ili preciznije (jak princip maksimuma):

$$\text{ili } m < u(x) < M, \qquad \text{za sve } x \in D,$$
$$\text{ili } m = u(x) = M, \qquad \text{za sve } x \in \overline{D},$$

Dakle, harmonijska funkcija u ograničenoj oblasti dostiže ekstremne vrednosti na njenoj granici.

Zamislimo opet da je D krug sa centrom u nuli. Ne samo da važi da je vrednost funkcije u u centru bilo kog malog kruga B unutar velikog D jednaka srednjoj vrednosti od u na kružnici ∂B, već štaviše ta vrednost od u nije veća od najveće vrednosti na kružnici ∂D, niti manja od najmanje vrednosti od u na kružnici ∂D.

11.3 Granični problemi za Laplasovu jednačinu

U opštem slučaju, granični problem za Poasonovu jednačinu (11.2) glasi

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } D, \\ u &= \varphi \quad \text{na } \partial D. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Teorema 11.9

Granični problem za Poasonovu jednačinu (11.4) ima najviše jedno klasično rešenje.

Dokaz. Ako su u_1 i u_2 rešenja istog graničnog problema za Poasonovu jednačinu (11.4), onda je njihova razlika $u = u_1 - u_2$ rešenje Laplasove jednačine sa graničnim uslovom $u\big|_{\partial D} = 0$. Na osnovu principa maksimuma sledi da je $u = 0$ i na D, odnosno jedinstvenost rešenja ako ono postoji. □

Granični problemi za Laplasovu ili Poasonovu jednačinu mogu da se rešavaju Furijeovom metodom u oblastima specijalnog oblika, na primer, u krugu, pravougaoniku, lopti, kružnom prstenu itd.

11.3.1 Granični problem za Laplasovu jednačinu za krug

Neka je u harmonijska funkcija u krugu poluprečnika a sa centrom u 0, u oznaci $K(0, a)$, koja zadovoljava granični uslov na kružnici $\partial K(0, a)$. Specifičnost domena ukazuje da je najpogodnije raditi u polarnim koordinatama opisanim u (7.8). Dakle, pretpostavljamo da nepoznata funkcija $u = u(\rho, \varphi)$ zadovoljava Laplasovu jednačinu u polarnim koordinatama i granični uslov na rubu oblasti, tj. posmatramo sledeći granični problem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \rho \in [0, a), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ &u(a, \varphi) = f(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Ovaj mešoviti problem rešavamo Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih. Dakle, tražimo rešenje u obliku proizvoda dve funkcije,

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)F(\varphi).$$

Uvrštavanjem u PDJ dolazimo do jednačine

$$\frac{\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}+\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}=0.$$

Slično kao i ranije, ovo implicira dve ODJ

$$\frac{\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=\lambda, \quad \frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}=-\lambda,$$

gde je λ konstanta. Posmatrajmo najpre drugu ODJ,

$$F''(\varphi)=-\lambda F(\varphi). \tag{11.6}$$

Granični uslov zadat na kružnici nameće uslov periodičnosti funkcije f, $f(\varphi+2\pi)=f(\varphi)$ što implicira periodičnost funkcije F, tj. F mora da zadovoljava takođe $F(\varphi+2\pi)=F(\varphi)$. Funkcija F je periodična samo u slučaju $\lambda\ge 0$, i tada je rešenje ODJ (11.6)

$$F(\varphi)=A\cos(\sqrt{\lambda}\,\varphi)+B\sin(\sqrt{\lambda}\,\varphi).$$

Štaviše, iz periodičnosti funkcije F sledi $\sqrt{\lambda}=n$, $n=0,1,2,\dots$, pa su svojstvene vrednosti i odgovarajuće svojstvene funkcije

$$\lambda_n=n^2, \quad F_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi), \quad n=0,1,2,\dots.$$

Vratimo se sada na ODJ za $R(\rho)$ koja za $\lambda=n^2$ postaje

$$\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-n^2R(\rho)=0.$$

Ovo je Koši-Ojlerova ODJ drugog reda razmatrana u 6.3.1. Rešenje se traži u obliku $R(\rho)=\rho^m$, i ubacivanjem u ODJ dolazimo do pomoćne jednačine za m:

Obeležimo

$$\psi_n=\cos(n\varphi), \quad \chi_n=\sin(n\varphi).$$

Ove funkcije imaju sledeće osobine:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\psi_n\chi_m\mathrm{d}\varphi=0,$
2. $$\int_0^{2\pi}\psi_n\psi_m\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\chi_n\chi_m\mathrm{d}\varphi=\delta_{nm}\begin{cases}2\pi, & n=0,\\ \pi, & n=1,2,\dots,\end{cases}$$
3. $$\int_0^{2\pi}\psi_n\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\chi_n\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}2\pi, & n=0,\\ \pi, & n=1,2,\dots,\end{cases}$$

gde je δ_{nm} Kronekerov delta simbol

$$\delta_{nm}=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

$$m(m-1)+m-n^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad m=\pm n,$$

odnosno do rešenja

$$R(\rho)=\begin{cases}c_1+c_2\ln\rho, & n=0,\\ c_1\rho^n+c_2\rho^{-n}, & n=1,2,\dots.\end{cases}$$

Pošto tražimo harmonijsku funkciju (dakle, bar neprekidnu), $c_2=0$ u oba slučaja, čime dobijamo $R(\rho)=c_1\rho^n$, $n=0,1,\dots$. Konačno,

$$u_n(\rho,\varphi)=a_n\,\rho^n\cos(n\varphi)+b_n\,\rho^n\sin(n\varphi), \quad n=0,1,2,\dots.$$

Sumiranjem dobijamo opšte rešenje PDJ,

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\rho^n\cos(n\varphi)+b_n\,\rho^n\sin(n\varphi). \tag{11.7}$$

Preostaje još da odredimo koeficijente a_n i b_n iz graničnog uslova koji implicira

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, a^n \cos(n\varphi) + b_n\, a^n \sin(n\varphi). \tag{11.8}$$

Množeći jednačinu (11.8) sa $\cos(m\varphi)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, a potom integraleći na intervalu $[0, 2\pi]$ na osnovu osobine ortogonalnosti funkcija dobijamo

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(m\varphi)\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} a_0 2\pi, & m = 0, \\ a_m a^m \pi, & m = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Slično, množenjem (11.8) sa $\sin(m\varphi)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ i integralenjem na intervalu $[0, 2\pi]$ dobijamo

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(m\varphi)\mathrm{d}\varphi = b_m a^m \pi, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Dakle, sada možemo da izrazimo konstante iz (11.7),

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi, \quad a_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)\mathrm{d}\varphi, \quad b_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{11.9}$$

za $n = 1, 2, \dots$. Primetimo da je $a_0 = u(0, \varphi)$ je vrednost od u u centru kruga ($\rho = 0$), i ona je jednaka srednjoj vrednosti od f tj. od u na krugu poluprečnika a.

Sledeća teorema precizira uslove pod kojima je zagarantovana egzistencija rešenja graničnog problema Laplasove jednačine za krug (11.5).

Teorema 11.10

Neka je f neprekidna funkcija, po delovima klase C^1 na intervalu $[0, 2\pi]$ i neka je $f(0) = f(2\pi)$. Tada red (11.7) predstavlja klasično rešenje graničnog problema (11.5) i (11.9).

11.3.2 Granični problem za Laplasovu jednačinu za loptu

Razmotrimo rešavanje Laplasove jednačine za nepoznatu funkciju $u = u(r, \theta, \varphi)$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, u sfernim koordinatama opisanim u (7.10), unutar lopte poluprečnika a, koja zadovoljava dopunske granične uslove

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \\ u(a, \theta, \varphi) = \alpha, \quad \text{ako} \quad 0 \le \theta < \pi/2, \\ u(a, \theta, \varphi) = 0, \quad \text{ako} \quad \pi/2 \le \theta < \pi. \end{cases}$$

Ako fizički interpretiramo problem kao stacionaran raspored temperature unutar lopte, onda granični uslovi govore da se površina gornje polovine lopte drži na konstantnoj temperaturi α, dok se površina donje polovine lopte održava na temperaturi 0. Ukoliko čekamo dovoljno dugo nakon stavljanja gornje i donje polovine sfere na izvor toplote, raspored temperature unutar lopte će dostići stacionarno stanje opisano Laplasovom jednačinom.

Rešimo ovaj granični problem. Rešenje tražimo u obliku proizvoda

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)T(\theta)F(\varphi),$$

čijim uvrštavanjem u prethodnu jednačinu dobijamo

$$\frac{TF}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\ R'(r)\right)+\frac{RF}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\ T'(\theta)\right)+\frac{RT}{r^2\sin^2\theta}F''(\varphi)=0.$$

Množenjem sa $r^2\sin^2\theta/RTF$ dobijamo član koji zavisi isključivo od promenljive φ što nam omogućava da izdvojimo prvu ODJ

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\ R'(r)\right)+\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\ T'(\theta)\right)=-\frac{1}{F}F''(\varphi).$$

Prethodna jednakost je moguća jedino ako

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\ R'(r)\right)+\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\ T'(\theta)\right)=\lambda,\quad F''(\varphi)=-\lambda F.$$

Deleći prvu jednakost sa $\sin^2\theta$ dobijamo još dve ODJ

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\ R'(r)\right)+\frac{1}{T\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\ T'(\theta)\right)=\frac{\lambda}{\sin^2\theta},$$

što nas motiviše da uvedemo novu konstantu γ i dobijemo još dve ODJ

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\ R'(r)\right)=\gamma,\quad -\frac{1}{T\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\ T'(\theta)\right)+\frac{\lambda}{\sin^2\theta}=\gamma. \tag{11.10}$$

Rešavamo prvo ODJ za funkciju F. Pošto je φ ugaona promenljiva namećemo uslov periodičnosti, te $\lambda\geq 0$. Stavljamo $\lambda=\beta^2$, $\beta\geq 0$ i dobijamo rešenje

$$F(\varphi)=c_1\sin\beta\varphi+c_2\cos\beta\varphi.$$

Međutim, kako granični uslovi ne zavise od φ sledi da je $\beta=0$. Dakle, $F(\varphi)=c_2$. Potom rešavamo ODJ za funkciju T. Iz (11.10) imajući u vidu $\lambda=0$ imamo

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\ T'(\theta)\right)+\gamma T(\theta)=0. \tag{11.11}$$

Ova jednačina može da se transformiše u Ležandrovu ODJ ukoliko uvedemo promenljivu $x=\cos\theta$. Sada je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

pošto je na intervalu $[0,\pi]$ za θ sinus pozitivan, te $\sin\theta=\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{1-x^2}$. Sada se ODJ (11.11) može transformisati

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-(1-x^2)T'(x)\right)\right)+\gamma T(x)=0,$$

odnosno

$$(1-x^2)T''(x)-2xT'(x)+\gamma T(x)=0.$$

Ovo je Ležandrova ODJ. Pošto zahtevamo konačnost rešenja u tačkama $x=1$ i $x=-1$ (koje odgovaraju $\theta=0$ i $\theta=\pi$, respektivno), konstanta $\gamma=\ell(\ell+1)$, gde je $\ell\in\mathbb{N}$.

Konačno, rešimo ODJ za $R(r)$. Uzimajući izvod u (11.10) i množeci sa R dobijamo Koši-Ojlerovu ODJ

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-\ell(\ell+1)R(r)=0.$$

i postupamo isto kao u prethodnom primeru. Tražeći rešenje u obliku $R(r) = r^m$ dolazimo do pomoćne jednačine za m

$$m(m-1) + 2m - \ell(\ell+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; m_1 = -(\ell+1),\, m_2 = \ell,$$

odnosno dva linearno nezavisna rešenja $R_1(r) = r^{-(\ell+1)}$ i $R_2(r) = r^\ell$. Prvo rešenje nije fizički prihvatljivo zato što postaje beskonačno za $r = 0$, te konačno dobijamo

$$R_\ell(r) = r^\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Sada je rešenje

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell r^\ell T_\ell(\theta),$$

gde se $T_\ell(\theta)$ dobija rešavanjem Ležandrove jednačine, a koeficijenti c_ℓ iz osobina Ležandrovih polinoma čije razmatranje prevazilazi okvire ove knjige.

11.3.3 Rešavanje Laplasove jednačine u u polarno-cilindričnim koordinatama

U ovom poglavlju ćemo potražiti rešenje Laplasove jednačine u polarno-cilindričnim koordinatama datim u (7.9),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

gde je $u = u(\rho,\varphi,z)$ nepoznata funkcija, $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Rešenje tražimo u obliku proizvoda

$$u(\rho,\varphi,z) = R(\rho)F(\varphi)Z(z),$$

čijim uvrštavanjem u gornju PDJ dobijamo

$$FZR''(\rho) + \frac{1}{\rho}FZR'(\rho) + \frac{RZ}{\rho^2}F''(\varphi) + RFZ''(z) = 0.$$

Deljenjem ove jednačine sa FZR možemo da izdvojimo prvu ODJ

$$\frac{1}{R(\rho)}R''(\rho) + \frac{1}{\rho R(\rho)}R'(\rho) + \frac{1}{F(\varphi)\rho^2}F''(\varphi) = -\frac{1}{Z(z)}Z''(z) = \lambda,$$

gde je λ konstanta koju ćemo odrediti. Množeći dalje prvi deo jednakosti sa ρ^2 dolazimo do druge dve ODJ

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)}R''(\rho) + \frac{\rho}{R(\rho)}R'(\rho) - \lambda\rho^2 = -\frac{1}{F(\varphi)}F''(\varphi) = \gamma,$$

gde je γ konstanta koju kasnije određujemo.

Rešimo prvo ODJ za $Z(z)$. Iz fizičkih razloga želimo da $Z \to 0$ kada $z \to \pm\infty$, što nameće da $\lambda < 0$. Stavimo $\lambda = -\ell^2$, i dobijamo rešenje

$$Z(z) = c_1 e^{\ell z} + c_2 e^{-\ell z}.$$

Razmatrajmo sada ODJ za $F(\varphi)$. Pošto je φ ugaona promenljiva želimo da funkcija $F(\varphi)$ bude periodična, što povlači $\gamma \geq 0$. Ukoliko označimo $\gamma = m^2$, $m \geq 0$ dolazimo do rešenja

$$F(\varphi) = k_1 \cos m\varphi + k_2 \sin m\varphi.$$

Uzimajući u obzir vrednosti za λ i γ, ODJ za $R(\rho)$ postaje

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \left(\ell^2\rho^2 - m^2\right) R(\rho) = 0,$$

što je Beselova ODJ.

12 Parcijalne diferencijalne jednačine – zadaci za vežbu

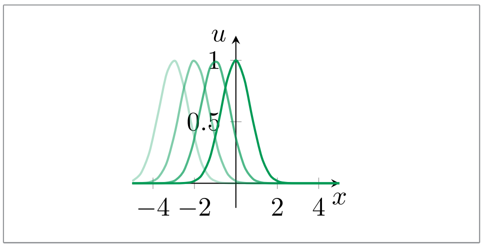
12.1 Putujući talasi

Zadatak 12.1.1 (Nastavak primera 8.6). *Modifikovati funkciju u datu sa*

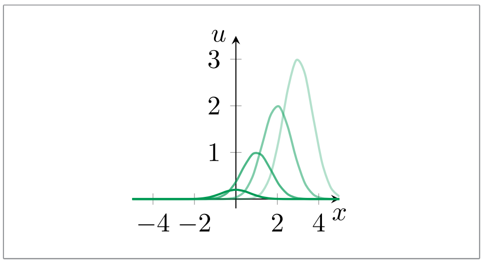
$$u(x,t) = e^{-(x-t)^2}.$$

tako da se

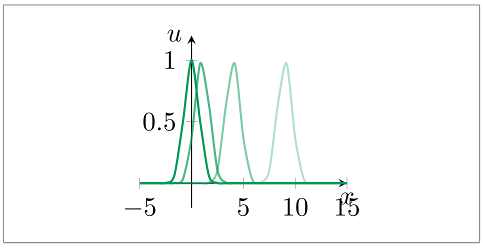
1. *talas kreće ulevo konstantnom brzinom,*



2. *talas kreće udesno brzinom koja se povećava,*



3. *talas kreće udesno konstantnom brzinom i amplituda mu se povećava.*

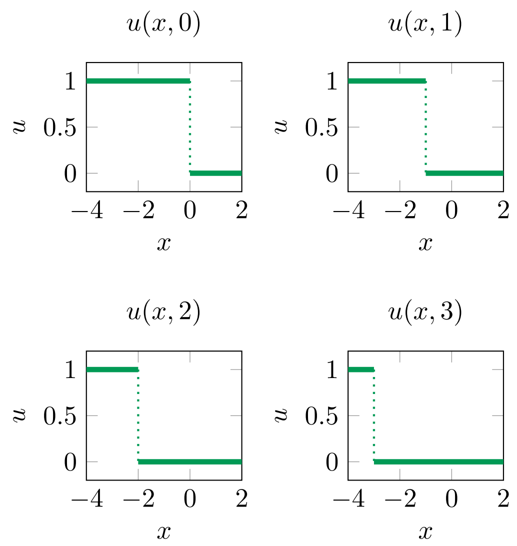


Zadatak 12.1.2. *Hevisajdova funkcija se definiše sa:*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

1. *Skicirati grafik od $u(x,t) = H(x-t)$ u $xu-$ravni za trenutke $t = 0, 1, 2, 3$.*

2. *Koristeći Hevisajdovu funkciju konstruisati funkciju $u(x,t)$ koja modelira talas prikazan na slici 12.1.*



Slika 12.1: Talas modeliran funkcijom $u(x,t)$

12.1.1 Metod karakteristika

Zadatak 12.1.3. *Rešiti Košijev problem:*

$$\partial_t u(x,t) + 4\,\partial_x u(x,t) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = arctg(x).$$

Zadatak 12.1.4. *Rešiti Košijev problem:*

$$\partial_t u(x,t) + 2\,\partial_x u(x,t) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}.$$

Zadatak 12.1.5. *Prostiranje poremećaja $u(x,t)$ je opisano transportnom jednačinom:*

$$\partial_t u + 2\,\partial_x u = 0; \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

(a) *Metodom karakteristika odrediti rešenje Košijevog problema za početni uslov:*

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

(b) *U (x,u)-ravni skicirati početni uslov i rešenje problema u trenutku $t = 2$.*

12.1.2 Košijev problem za talasnu jednačinu

Zadatak 12.1.6. *Rešiti Košijev problem:*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= 36u_{xx}(x,t), \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \sin x, \\ u_t(x,0) &= \cos x. \end{aligned}$$

Zadatak 12.1.7. *Data je talasna jednačina za nepoznatu funkciju $u(x,t)$:*

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

(a) *Primenom Dalamberove formule odrediti rešenje Košijevog problema sa početnim uslovima:*

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \begin{cases} \cos(\pi x), & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \\ \partial_t u(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

(b) *Kolika je vrednost funkcije $u(x,t)$ u tački $(x_0,t_0) = (3,1)$?*

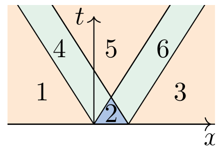
Zadatak 12.1.8. *Konstruisati rešenje početnog problema*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1, & \textit{ako} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0, & \textit{inače}, \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Rešenje. Početni poremećaj je sadržan u intervalu

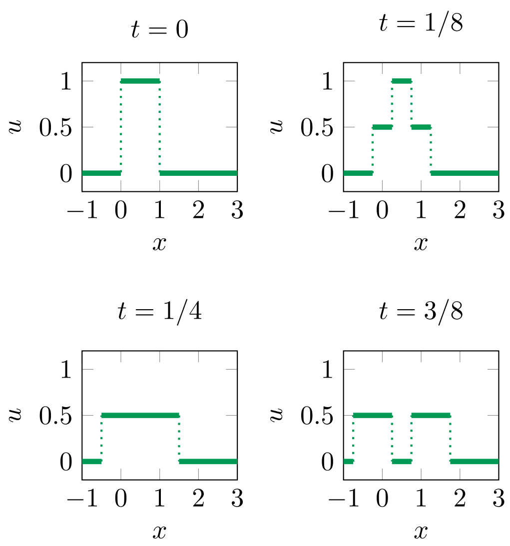
$$I = [0,1].$$

Jasno je da je brzina prostiranja $c = 2$. U xt-ravni crtamo prave $x + 2t = 0$, $x - 2t = 0$, $x + 2t = 1$, $x - 2t = 1$. Na ovaj način delimo xt-ravan na šest oblasti.



Domen uticaja intervala I su oblasti 2, 4, 5 i 6. Na osnovu formule (9.11) konstruišemo rešenje početnog problema. Ukoliko je tačka (x,t) iz oblasti 6, vraćanjem na x-osu (tj. u početni trenutak $t = 0$) po pravama sa nagibima $1/2$ i $-1/2$, dobijamo da će prava sa pozitivnim nagibom preseći x-osu u intervalu I gde je vrednost funkcije u jednaka 1, dok će prava sa negativnim nagibom preseći osu van intervala I gde je vrednost funkcije u nula. Sada je vrednost funkcije u srednja vrednost ove dve vrednosti tj. $u(x,t) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$. Na sličan način konstruišemo

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{za } (x,t) \text{ iz oblasti 1, 3 i 5}, \\ \frac{1}{2}, & \text{za } (x,t) \text{ iz oblasti 4 i 6}, \\ 1, & \text{za } (x,t) \text{ iz oblasti 2}. \end{cases}$$



Slika 12.2: Grafik rešenja $u(x,t)$ za različita vremena

Napomenimo da ovako konstruisano rešenje nije klasično rešenje talasne jednačine, jer ima prekide. Sa slike (12.2) se vidi da se inicijalni poremećaj deli u dva putujuća talasa koji se kreću ulevo i udesno.

12.1.3 Mešoviti problem za talasnu jednačinu

Zadatak 12.1.9. *Neka $u(x,t)$ predstavlja vertikalno premeštanje žice dužine π koja je postavljena na intervalu $\{x : 0 \le x \le \pi\}$. Talasna jednačina koja modelira premeštanje $u(x,t)$ je:*

$$u_{tt} = 36u_{xx}.$$

Koristeći metod razdvajanja promenljivih rešiti jednačinu po $u(x,t)$ ako su dati granični uslovi (žica je fiksirana na krajevima):

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0, \\ &u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

sa početnim premeštanjem

$$u(x,0) = 5\sin(3x) - 6\sin(8x), \qquad 0 < x < \pi,$$

i početnom brzinom

$$u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < \pi.$$

Zadatak 12.1.10. *Rešiti mešoviti problem:*

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \frac{1}{9}u_{xx} \\ &u(0,t) = u(10,t) = 0, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = 6\sin\frac{\pi x}{2} + 12\sin 2\pi x, \\ &u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2} + 2\sin 2\pi x, \quad 0 < x < \ell. \end{aligned}$$

Zadatak 12.1.11. *Oscilacije zategnute žice opisane su talasnom jednačinom zajedno sa graničnim uslovima:*

$$\begin{aligned} &\partial_{tt}u = 4\partial_{xx}u, \quad 0 < x < \pi, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(a) *Primenom Furijeovog metoda razdvajanja promenljivih odrediti rešenje mešovitog problema sa sledećim početnim uslovima:*

$$\begin{aligned} &u(x,0) = 2\sin 4x, \\ &\partial_t u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

(b) *Rešenje dobijeno pod (a) transformisati u zbir dva putujuća talasa.*

Zadatak 12.1.12. *Oscilacije zategnute žice opisane su talasnom jednačinom zajedno sa graničnim uslovima:*

$$\begin{aligned} &\partial_{tt}u = \partial_{xx}u, \quad 0 < x < \ell, \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Primenom Furijeovog metoda razdvajanja promenljivih odrediti rešenje mešovitog problema sa sledećim početnim uslovima:

$$\begin{aligned} &u(x,0) = h\,x(\ell x); \quad h > 0, \\ &\partial_t u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \ell. \end{aligned}$$

Zadatak 12.1.13. *Oscilacije zategnute žice opisane su talasnom jednačinom:*

$$\partial_{tt}u = 2\partial_{xx}u, \quad 0 < x < 2$$

sa graničnim uslovima:

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t > 0.$$

Primenom Furijeovog metoda razdvajanja promenljivih odrediti rešenje mešovitog problema sa sledećim početnim uslovima:

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases} \\ &\partial_t u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 2. \end{aligned}$$

12.1.4 Mešoviti problem za jednačinu provođenja toplote

Zadatak 12.1.14. *Neka $u(x,t)$ predstavlja temperaturu veoma tanke šipke dužine π koja se nalazi na intervalu $\{x : 0 \le x \le \pi\}$. Raspodela temperature je određena sa jednačinom provođenja toplote:*

$$u_t = 36u_{xx}.$$

Pretpostavimo da su oba kraja izolovana tj.

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0, \\ &u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Data je početna raspodela temperature

$$u(x,0) = 2\sin(4x) - 11\sin(7x), \qquad 0 < x < \pi.$$

Primenom metode razdvajanja promenljivih naći netrivijalno rešenje $u(x,t)$ datog problema.

Zadatak 12.1.15. *Rešiti mešoviti problem:*

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{9}u_{xx} \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \frac{3\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell. \end{aligned}$$

Zadatak 12.1.16. *Polje temperature $u(x,t)$ u zidu širine $\ell = 2$, čije se bočne strane održavaju na konstantnim i jednakim temperaturama, opisano je jednačinom provođenja toplote:*

$$\partial_t u = 4\partial_{xx}u, \quad 0 < x < 2, \ t > 0,$$

sa graničnim uslovima:

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t > 0.$$

(a) *Primenom Furijeovog metoda razdvajanja promenljivih odrediti rešenje mešovitog problema sa početnim uslovom:*

$$u(x,0) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - x/2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(b) *Na osnovu prvog člana reda $u_1(x,t)$ dobijenog pod (a), dati procenu trenutka vremena T u kom će maksimalna temperatura u zidu biti jednaka polovini maksimalne temperature u početnom trenutku $t = 0$.*

Zadatak 12.1.17. *Polje temperature $u(x,t)$ metalne šipke dužine ℓ, čiji su krajevi toplotno izolovani, opisano je mešovitim problemom za jednačinu provođenja toplote:*

$$\begin{aligned} \partial_t u &= a^2\partial_{xx}u, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ \partial_x u(0,t) &= \partial_x u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \frac{u_0}{\ell^2}x(\ell - x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \end{aligned}$$

(a) *Primenom Furijeovog metoda razdvajanja promenljivih odrediti rešenje mešovitog problema.*

(b) *Na osnovu prvog rešenja dobijenog pod (a) odrediti polje temperature*

$$u_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t).$$

Granični problem za Laplasovu jednačinu

Zadatak 12.1.18. *Naći rešenje $u = u(\rho,\varphi)$ Laplasove jednačine*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

unutar jediničnog kruga koje zadovoljava granični uslov:

$$u(1,\varphi) = 2\sin\varphi.$$

Zadatak 12.1.19. *Stacionarno polje temperature $u(\rho,\varphi)$ kružne ploče poluprečnika $R = 2$ određeno je Laplasovom jednačinom u polarnim koordinatama:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

sa graničnim uslovom

$$u(2,\varphi) = 2(1 - \sin\varphi).$$

(a) *Primenom Furijeovog metoda razdvajanja promenljivih odrediti rešenje datog graničnog problema.*

(b) *Na osnovu rešenja dobijenog pod (a) odrediti minimalnu i maksimalnu temperaturu u oblasti $\rho \in [0,2]$, $\varphi \in [0,2)$.*

Zadatak 12.1.20. *Stacionarno polje temperature $u(\rho,\varphi)$ kružne ploče poluprečnika R određeno je Laplasovom jednačinom u polarnim koordinatama:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

sa graničnim uslovom

$$u(R,\varphi) = u_0\cos 2\varphi.$$

(a) *Primenom Furijeovog metoda razdvajanja promenljivih odrediti rešenje datog graničnog problema.*

(b) *Na osnovu rešenja dobijenog pod (a) odrediti minimalnu i maksimalnu temperaturu u oblasti $\rho \in [0,R]$, $\varphi \in [0,2)$.*

Deo III

Elementi teorije verovatnoće i statistike

13 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

13.1 Verovatnoća

Osnovni model u teoriji verovatnoće jeste eksperiment. Pojmovi koji predstavljaju bazu za dalje matematičko izučavanje su sledeći:

- **Prostor događaja** Ω je skup svih mogućih ishoda jednog eksperimenta.
  Eksperiment je bacanje kockice za igru. Svi mogući ishodi su: "pala je jedna tačka na gornjoj strani kockice", "pale su dve tačke na gornjoj strani kockice", itd. "palo je šest tačaka na gornjoj strani kockice".
- Elemente skupa Ω nazivamo **elementarnim događajima**.
  x_i - "palo je i tačaka na gornjoj strani kockice" je elementaran događaj. $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$.
- **(Slučajan) događaj** je podskup skupa Ω. Sastoji se od onih elementarnih događaja koji imaju svojstvo kojim se događaj A definiše.
  A- "pao je paran broj na gornjoj strani kockice". $A = \{x_2, x_4, x_6\}$.
- **Zakon verovatnoće** dodeljuje brojčanu vrednost $P(A)$ jednom ishodu A posmatranog eksperimenta, tako da nam on kvantitativno govori koliko je moguće da se dogodi upravo taj ishod. $P(A)$ je nenegativan broj koji se zove verovatnoća događaja A.

Definicija 13.1 (Verovatnoća)

Funkcija P koja slika događaje koji se posmatraju kod nekog eksperimenta u interval $[0,1]$ se zove verovatnoća ako zadovoljava sledeće uslove

- $0 \leq P(A) \leq 1$, *za svaki događaj A.*
- $P(\Omega) = 1$.
- *Verovatnoće za međusobno isključive događaje se sabiraju tj. ukoliko su A i B disjunktni, tada je*
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
  Opštije, ukoliko prostor događaja sadrži beskonačno mnogo događaja i $A_1, A_2, \ldots$ su međusobno disjunktni, onda je verovatnoća njihove unije:
  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots.$$

Primetimo da se treća osobina odnosi na disjunktne događaje. Za proizvoljna dva skupa važi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Zaista, možemo zapisati $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ i $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ i koristeći aditivnost dobijamo $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$ i $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$, odakle sledi zaključak.

Ceo skup Ω je događaj koji se realizuje uvek. Zato skup Ω nazivamo sigurnim događajem. Prazan skup $\emptyset$ je nemoguć događaj i on se nikada ne može realizovati. Ako je događaj A takav da je $A \neq \Omega$ i $P(A) = 1$, onda za A kažemo da je skoro siguran događaj. Dakle, skoro siguran događaj je događaj koji ima verovatnoću realizacije 1, ali se ne mora desiti. Slično, ako je događaj A takav da $A \neq \emptyset$ i $P(A) = 0$, onda za A kažemo da je skoro nemoguć događaj. Skoro nemoguć događaj je, dakle, događaj koji ima verovatnoću realizacije 0, ali se ipak može desiti.

Primer 13.2

Strelac gađa u metu 4 puta pri čemu se registruju pogoci i promašaji. Opisati skup svih mogućih ishoda kao i događaje:
A - gađanje je započeto promašajem,
B - rezultat svih gađanja je isti,
C - cilj je pogođen 2 puta,
D - cilj je pogođen bar 2 puta.

Označimo sa 0 promašaj, a sa 1 pogodak. Skup svih mogućih ishoda gađanja mete četiri puta je

$$\Omega = \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001,\\ 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111\}.$$

Da bismo opisali događaj A, fiksiramo 0 (promašaj) na prvom mestu, a na preostala tri razmatramo sve moguće kombinacije. Dakle,

$$A = \{0000, 0100, 0010, 0001, 0110, 0101, 0011\}.$$

Događaj B će se realizovati ukoliko je strelac ili pogodio ili promašio metu sva četiri puta. Dakle,

$$B = \{0000, 1111\}.$$

Događaj C se sastoji on onih elementarnih ishoda koji uključuju dve 1 tj. dva pogotka,

$$C = \{1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011\}.$$

Događaj D će se realizovati ukoliko je strelac pogodio metu dva, tri ili sva četiri puta. Drugim rečima, isključujemo događaje meta je promašena sva četiri puta i meta je pogođena tačno jednom, odnosno

$$D = \Omega \setminus \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001\}.$$

Verovatnoća nekog događaja A može da se izračuna pomoću relativne frekvencije – ukoliko prostor događaja sadrži n događaja i svaki od njih je jednako verovatan, tada se verovatnoća događaja A može izračunati pomoću relativne frekvencije:

$$P(A) = \frac{\text{koliko puta se desio događaj } A}{n = \text{ukupan broj svih događaja}}.$$

Primer 13.3

Pretpostavimo da tri puta bacamo novčić i da registrujemo da li je pala glava ili pismo. Neka je događaj P – palo je pismo, a događaj G – pala je glava. Tada je

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GGP, GPG, GGG\}.$$

Pretpostavljamo da je svaki ishod jednako verovatan, tj. da je verovatnoća svakog ishoda 1/8. Posmatramo događaj A-glava je pala tačno dva puta. Tada je $A = \{PGG, GGP, GPG\}$. Verovatnoća događaja A je 3/8.

13.1.1 Uslovna verovatnoća

Definicija 13.4

Neka su A i B dva događaja takva da $P(B) > 0$. Ako realizacija događaja B može uticati na verovatnoću realizacije događaja A, govorimo o uslovnoj verovatnoći. Uslovna verovatnoća $P(A|B)$, odnosno, verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Iz prethodne formule dobijamo $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Primer 13.5

Ukoliko je avion prisutan u određenoj oblasti, radar ga detektuje i oglašava alarmom sa verovatnoćom 0.99. Ukoliko avion nije prisutan, (lažni) alarm se upali sa verovatnoćom 0.1. Pretpostavimo da je verovatnoća da je avion u datoj oblasti 0.05. Kolika je verovatnoća da avion nije prisutan i da se upali alarm? Kolika je verovatnoća da se avion nalazi u oblasti i da nije detektovan?

Označimo događaje:

$A-$ avion je prisutan u određenoj oblasti,
$B-$ radar oglašava alarm.

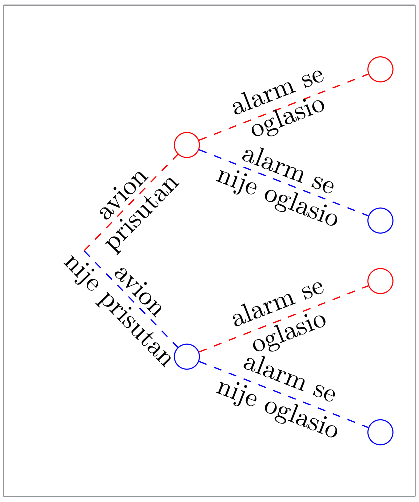
U zadatku su nam date sledeće verovatnoće:

$$P(B|A) = 0.99,$$

$$P(B|A^c) = 0.1,$$

$$P(A) = 0.05.$$

Traži se da nađemo verovatnoće događaja $A^c \cap B$ i $A \cap B^c$.
Verovatnoću prvog događaja lako nalazimo iz formule uslovne verovatnoće:



$$P(A^c \cap B) = P(B|A^c)P(A^c) = 0.1 \cdot 0.95 = 0.095.$$

Verovatnoća drugog događaja se određuje iz zapažanja

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c),$$

odakle iz disjunktnosti skupova sledi $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$, a iz formule za uslovnu verovatnoću imamo $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.99 \cdot 0.05 = 0.0495$, te je tražena verovatnoća $P(A \cap B^c) = 0.05 - 0.0495 = 0.0005$.

Definicija 13.6

Neka događaji $H_1, \ldots, H_n$ zadovoljavaju sledeće uslove:

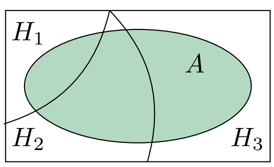
1. $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$,
2. $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$,
3. $P(H_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Tada kažemo da $\{H_1, \ldots, H_n\}$ čine potpun sistem događaja.

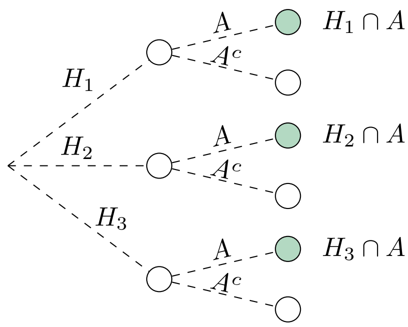
Teorema 13.7 (Formula totalne verovatnoće)

Ako je $\{H_1, \ldots, H_n\}$ potpun sistem događaja, onda za svaki događaj A važi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n) \\ &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n). \end{aligned} \tag{13.1}$$



Slika 13.1: Potpun sistem događaja



Slika 13.2: Ilustracija formule totalne verovatnoće

Primer 13.8

Olivera učestvuje na teniskom turniru. Protiv polovine konkurencije (označimo ih protivnici tipa 1) verovatnoća da pobedi je 0.3, protiv četvrtine (protivnici tipa 2) je

0.4, a protiv preostale četvrtine (protivnici tipa 3) je 0.5. Neka Olivera igra sa slučajno izabranim protivnikom. Kolika je verovatnoća da će pobediti?

Označimo događaje:
H_i- Olivera igra sa protivnikom iz grupe i, $i = 1, 2, 3$,
$A-$ Olivera je pobedila.

U zadatku su date verovatnoće: $P(A|H_1) = 0.3$, $P(A|H_2) = 0.4$ i $P(A|H_3) = 0.5$. Pomoću relativne frekvencije, možemo da odredimo sledeće verovatnoće: $P(H_1) = \frac{1}{2}$ i $P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{4}$. Traži se verovatnoća događaja A i ona se može izračunati pomoću formule totalne verovatnoće pošto $\{H_1, H_2, H_3\}$ čine potpun sistem događaja,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0.3 + \frac{1}{4} \cdot 0.4 + \frac{1}{4} \cdot 0.5 = 0.375.$$

Teorema 13.9 (Bajesova formula)

Ako je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sistem događaja, onda za događaj A takav da $P(A) > 0$ važi:

$$P(H_m|A) = \frac{P(A|H_m)P(H_m)}{P(A)},$$

$m = 1, \dots, n$, *gde* $P(A)$ *računamo po formuli* (13.1),

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n).$$

Primer 13.10: Nastavak primera 13.5

Kolika je verovatnoća da se oglasi alarm? Kolika je verovatnoća da ako se oglasi alarm, avion zaista jeste prisutan u datoj oblasti?

Koristeći formulu totalne verovatnoće možemo izračunati

$$\begin{aligned} P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ = 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.1 \approx 0.1445 \end{aligned}$$

Konačno, pomoću Bajesove formule dobijamo

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \approx \frac{0.05 \cdot 0.99}{0.1445} \approx 0.3426.$$

13.1.2 Nezavisnost događaja

Definicija 13.11

Događaji A i B su nezavisni ako važi:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ako su A i B nezavisni događaji, onda

$$P(A|B) = P(A),$$

odnosno realizacija događaja B ne utiče na verovatnoću realizacije događaja A.

Definicija 13.12

Događaji A, B i C su nezavisni ako važi:

(1) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ *(nezavisni u ukupnosti),*

(2) $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(BC)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ *(nezavisni po parovima).*

Primer 13.13

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$. $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2},$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, A i B su nezavisni događaji, iako nisu disjunktni.

14 Slučajne promenljive

Ishod eksperimenta je najčešće neka numerička vrednost. Od posebnog interesa je kad nekom događaju možemo da dodelimo neku numeričku vrednost sa određenom verovatnoćom. Za to nam služi koncept slučajne promenljive.

Definicija 14.1

Slučajna promenljiva je funkcija koja slika elementaran događaj u skup $\mathbb{R}$.

Primer 14.2

Posmatrajmo bacanje novčića dva puta.
Skup elementarnih događaja je dat sa $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, gde sa P označavamo da je prilikom bacanja novčića palo pismo, a sa G da je pao grb. Ako slučajna promenljiva X predstavlja broj palih pisama u dva bacanja novčića, onda je ona data sa:

$$X(PP) = 2, \; X(PG) = 1, \; X(GP) = 1, \; X(GG) = 0.$$

Postoje dva osnovna tipa slučajnih promenljivih: diskretne i apsolutno neprekidne.

14.1 Diskretne slučajne promenljive

Definicija 14.3

Slučajna promenljiva je diskretna ako je skup vrednosti koje može da prima ili konačan ili beskonačno prebrojiv.

Neka je $\{x_1, x_2, \dots\}$ skup vrednosti diskretne slučajne promenljive X. Sa $p(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, ćemo označiti verovatnoću događaja $\{X = x_i\}$

$$P\{X = x_i\} = p(x_i), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Ovaj događaj se sastoji od onih ishoda eksperimenta koji dovode do toga da X uzima vrednost x_i, odnosno od onih elementarnih događaja koji se sa X preslikavaju u x_i. Zapravo, gornja relacija je kraći zapis za

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

Verovatnoće $p(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ određuju tzv. raspodelu verovatnoće slučajne promenljive X.

Primetimo, ukoliko je $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$, za svako $i \neq j$ onda je $\Omega = \cup_i \{X = x_i\}$ i

$$\sum_i p(x_i) = \sum_i P\{X = x_i\} = P\left(\bigcup_i \{X = x_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Definicija 14.4

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\{x_1, x_2, \dots\}$ *sa odgovarajućom raspodelom verovatnoća* $p(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ *čini zakon raspodele (ili samo raspodelu) slučajne promenljive* X*, koji najčešće šematski zapisujemo:*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots \end{pmatrix},$$

pri čemu se vrednosti x_i *pišu u rastućem poretku.*

Primer 14.5

Zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj palih pisama u dva bacanja novčića je:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

jer je

$$P\{X = 0\} = P\{\text{nijednom nije palo pismo}\} = \frac{1}{4}$$
$$P\{X = 1\} = P\{\text{jednom je palo pismo}\} = \frac{1}{2}$$
$$P\{X = 2\} = P\{\text{oba puta je palo pismo}\} = \frac{1}{4}.$$

Primer 14.6

Ako slučajna promenljiva predstavlja broj koji padne prilikom bacanja kockice, onda je njen zakon raspodele:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Za ovu slučajnu promenljivu kažemo da ima uniformnu diskretnu raspodelu, jer sve vrednosti prima sa jednakim verovatnoćama.

14.1.1 Binomna raspodela

Najpre uvedimo pojam Bernulijeve šeme: u jednom eksperimentu posmatramo samo događaj A, odnosno $\Omega = \{A, A^c\}$. Označimo

$$p(A) = p \;\Rightarrow\; p(A^c) = 1 - p.$$

Eksperiment ponavljamo n puta pri čemu uslovi eksperimenta ne smeju da se menjaju i ishod prilikom jednog izvođenja ne zavisi od ishoda eksperimenta prilikom nekog drugog izvođenja. Moguć broj pojavljivanja događaja A je od 0 do n.

Definicija 14.7

Neka je u Bernulijevoj šemi fiksiran događaj A, a eksperiment se ponavlja n puta. Slučajna promenljiva S_n koja je za svako n jednaka broju realizacija događaja A, a skup vrednosti joj je $\{0, 1, \dots, n\}$ zove se Bernulijeva slučajna promenljiva.

Verovatnoća da se u n ponavljanja eksperimenta događaj A realizuje tačno k puta je jednaka:

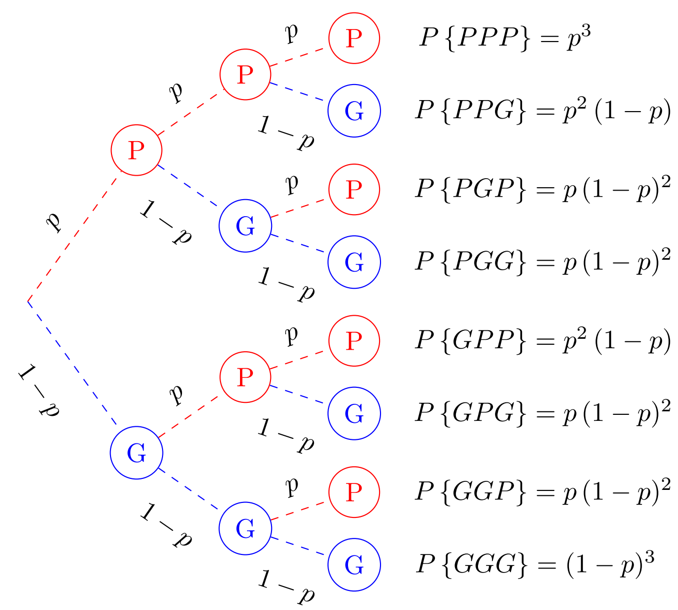
$$P\{S_n = k\} = p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{14.1}$$

Sada je zakon raspodele Bernulijeve slučajne promenljive:

$$S_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ (1-p)^n & n\,p(1-p)^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\,p^2(1-p)^{n-2} & \dots & \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}.$$

Raspodela verovatnoće određena sa (14.1) zove se binomna raspodela. Ona zavisi od dva parametra: broja $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0, 1)$. Ako slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu sa parametrima n i p, to zapisujemo kao:

$$X : \mathcal{B}(n, p).$$



Slika 14.1: Bernulijeva šema, $n = 3$, sa P je označen događaj A, $G := A^c$

Primer 14.8

Eksperiment se sastoji od bacanja novčića tri puta. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj palih pisama u tri bacanja. Nađimo zakon raspodele slučajne promenljive X.

Neka P predstavlja događaj "palo je pismo", a G "pala je glava" Neka je p verovatnoća tog događaja, tj. $P(P) = p$. Sve moguće ishode eksperimenta možemo grafički prikazati pomoću Bernulijeve šeme na slici 14.1.

14.1.2 Poasonova raspodela

Kada je n veliko, radi bržeg izračunavanja binomnih verovatnoća (14.1) posmatramo asimtotsko ponašanje kad $n \to \infty$. Ako su parametri binomne raspodele $\mathcal{B}(n, p)$ takvi da je n veliko i $np < 10$, onda umesto S_n pišemo S_∞, uvodimo $\lambda = np$ i tada važi

$$P\{S_\infty = k\} = p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lambda > 0. \tag{14.2}$$

Definicija 14.9

Slučajna promenljiva sa skupom vrednosti $\{0, 1, 2, \dots\}$ *i raspodelom verovatnoća* (14.2) *se zove Poasonova slučajna promenljiva.*

Ako slučajna promenljiva X ima Poasonova raspodelu sa parametrom λ, to zapisujemo kao:

$$X : \mathcal{P}(\lambda),$$

i dakle zakon raspodele za $X : \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, je

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

14.2 Apsolutno neprekidne slučajne promenljive

Apsolutno neprekidna slučajna promenljiva je slučajna promenljiva čiji je skup vrednosti neki interval.

Definicija 14.10

Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidna ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takva da je za svaki interval I

$$P\{X \in I\} = \int_I \varphi_X(x)\mathrm{d}x.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se gustina raspodele (verovatnoća) slučajne promenljive X.

Za $I = [a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$P\{a \leq X < b\} = \int_a^b \varphi_X(x)\mathrm{d}x. \tag{14.3}$$

Za apsolutno neprekidnu slučajnu promenljivu X važi

$$P\{X = a\} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Takođe,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\mathrm{d}x = P\{-\infty < X < \infty\} = 1.$$

14.2.1 Funkcija raspodele slučajne promenljive

Videli smo da je slučajna promenljiva određena svojom raspodelom verovatnoća, a raspodela verovatnoća je funkcija skupova, a ne tačke. Značajno bi bilo da definišemo odgovarajuću funkciju tačke koja bi određivala slučajnu promenljivu X:

Definicija 14.11

Funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definisana sa*

$$F_X(a) = P\{X < a\}, \quad a \in \mathbb{R},$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X*.*

Funkcija raspodele F_X u tački $a \in \mathbb{R}$ predstavlja verovatnoću događaja iz Ω sastavljenog od onih elementarnih događaja čija je slika manja od a. Grubo govoreći, funkcija raspodele $F_X(a)$ "akumulira" verovatnoće sve do a.

Funkcija raspodele postoji i jedinstvena je za svaku slučajnu promenljivu.

Teorema 14.12

Funkcija raspodele slučajne promenljive X *ima sledeće osobine:*

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$,

2. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1$,

3. Funkcija raspodele je neopadajuća funkcija, tj.

$$\textit{ako je } x_1 < x_2, \textit{ onda je } F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

4. Funkcija raspodele je neprekidna sa leve strane: $\lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a)$,

5. Ako je X *diskretna slučajna promenljiva, tada je* $F_X(x)$ *deo-po-deo konstantna funkcija od* x*.*

6. Ako je X *apsolutno neprekidna slučajna promenljiva, tada je* $F_X(x)$ *neprekidna funkcija od* x*.*

7. Ako je X *diskretna slučajna promenljiva, tada je*

$$F_X(x_k) = \sum_{i \le k} p(x_i),$$

$$p(x_k) = P\{X \le x_k\} - P\{X \le x_{k-1}\} = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}),$$

za svaki ceo broj k.

8. Ako je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva, tada

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi_X(x)\mathrm{d}x, \quad F'_X(a) = \varphi_X(a), \quad \text{za svako } a \in \mathbb{R}.$$

Primer 14.13

Funkcija raspodele F_X za slučajnu promenljivu

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix}$$

je stepenasta funkcija:

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a \le x_1, \\ p(x_1), & x_1 < a \le x_2, \\ p(x_1) + p(x_2), & x_2 < a \le x_3, \\ \dots & \\ p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_{n-1}), & x_{n-1} < a \le x_n, \\ 1, & a > x_n. \end{cases}$$

Primetimo da se verovatnoća da slučajna promenljiva X pripada nekom intervalu izraženog u (14.3) preko gustine raspodele, sada može izraziti preko funkcije raspodele ove slučajne promenljive

$$P\{a \le X < b\} = F_X(b) - F_X(a). \tag{14.4}$$

14.2.2 Uniformna raspodela

Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu na intervalu (a, b) što zapisujemo kao:

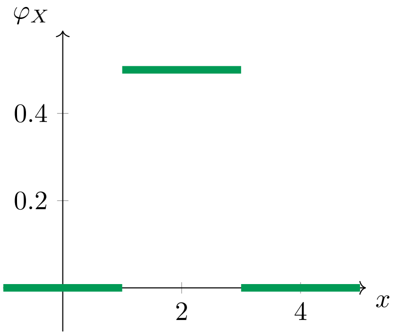
$$X : \mathcal{U}(a, b)$$

ako je njena gustina raspodele

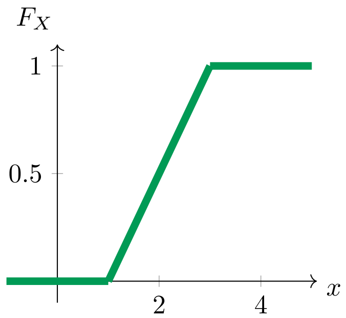
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases} \tag{14.5}$$

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(a, b)$ je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



Slika 14.2: Gustina raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(1,3)$



Slika 14.3: Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(1,3)$

14.2.3 Eksponencijalna raspodela

Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$ što zapisujemo kao:

$$X : \mathcal{E}(\lambda)$$

ako je njena gustina raspodele

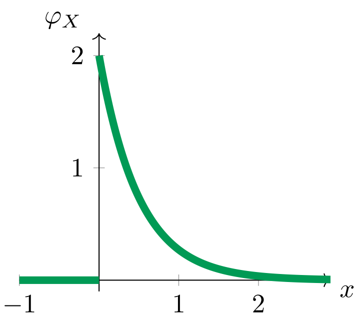
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{14.6}$$

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(\lambda)$ je

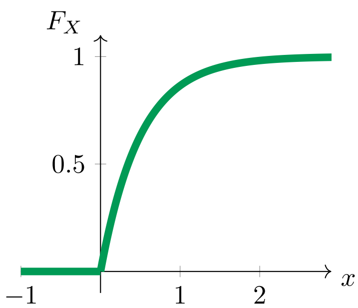
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Primer 14.14

Vreme čekanja (u redovima, telefoniranje), vek trajanja (sijalice, uređaja...) ima eksponencijalnu raspodelu.



Slika 14.4: Gustina raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(2)$



Slika 14.5: Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(2)$

14.2.4 Normalna raspodela

Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, ako je njena gustina raspodele

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14.7}$$

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ je

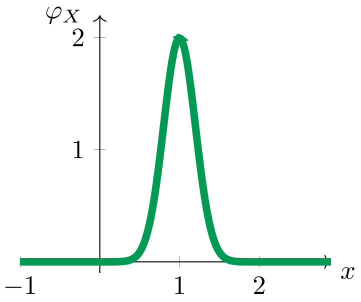
$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verovatnoća da slučajna promenljiva $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ uzme vrednost na intervalu (a, b) jednaka je

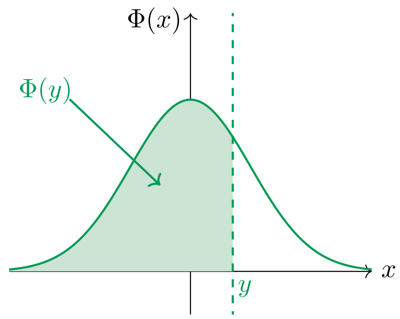
$$P\{a < X < b\} = F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

Primer 14.15

Visina čoveka, greške pri merenju nekim aparatom imaju normalnu raspodelu.



Slika 14.6: Gustina raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{N}(1, 0.04)$



Slika 14.7: Funkcija raspodele slučajne promenljive $X^* : \mathcal{N}(0, 1)$

U slučaju kada su parametri normalne raspodele $m = 0$, $\sigma^2 = 1$, dobijamo normalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu koja se naziva standardizovana normalna raspodela. Gustina za $X^* : \mathcal{N}(0, 1)$ je

$$\varphi_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

a njena funkcija raspodele je

$$F_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako je $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, možemo da je standardizujemo $X^* = \frac{X-m}{\sigma} : \mathcal{N}(0, 1)$. Važi:

$$P\{a < X < b\} = P\left\{\frac{a-m}{\sigma} < X^* < \frac{b-m}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Kako ne postoji primitivna funkcija za $e^{-x^2/2}$, vrednosti odgovarajućeg određenog integrala se računaju približno. Definišemo funkciju

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t, \tag{14.8}$$

ilustruvanu na slici 14.7, čije su vrednosti prikazane tabelarno u prilogu E. Primetimo da važi

$$\Phi(x) = F_{X^*}(x).$$

Osobine ove funkcije su:

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$,
- $\Phi(x) = 1$, za svako $x \geq 5$,
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$,
- za slučajnu promenljivu $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ važi

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

- verovatnoća da slučajna promenljiva $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ uzme vrednost na intervalu (a, b) je

$$P\{a < X < b\} = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

14.2.5 Moavr-Laplasova teorema

U slučaju kada je n veliko i $np \geq 10$, binomna raspodela može da se aproksimira normalnom, što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 14.16 (Moavr-Laplasova)

U Bernulijevoj šemi sa $p > 0$ važi:

1. $P\{S_n = j\} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{np(1-p)}} e^{-\frac{(j-np)^2}{2\sqrt{np(1-p)}}}, \qquad n \to \infty$

2. $P\left\{a \leq \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x, \qquad n \to \infty.$

14.3 Višedimenzionalne slučajne promenljive

Višedimenzionalna slučajna promenljiva može da se interpretira kao slučajni vektor u $n-$ dimenzionalnom prostoru.

Definicija 14.17

$n-$dimenzionalna slučajna promenljiva je funkcija koja slika elementaran događaj u skup $\mathbb{R}^n$.

Teorema 14.18

Preslikavanje $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ koje preslikava elementaran događaj u skup $\mathbb{R}^n$ je $n-$dimenzionalna slučajna promenljiva ako i samo ako je svaka koordinata X_i, $i = 1, \ldots, n$ jednodimenzionalna slučajna promenljiva.

Definicija 14.19

Funkcija raspodele n-dimenzionalne slučajne promenljive $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je

$$F_X(a_1, a_2, \ldots, a_n) = P\left(\{X_1 < a_1\} \cap \{X_2 < a_2\} \cap \cdots \cap \{X_n < a_n\}\right),$$

za $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 14.20

Slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

U nastavku ćemo radi jednostavnosti posmatrati slučaj $n = 2$, odnosno dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (X, Y).

14.3.1 Marginalne raspodele

Funkcija raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) sadrži u sebi sve relevantne informacije vezano za ove dve slučajne promenljive i omogućava nam da računamo verovatnoće događaja koji ih uključuju. Postavlja se pitanje kako računati verovatnoću događaja koji uključuje samo jednu od ove dve slučajne promenljive. Za to nam je potreban koncept marginalnih raspodela.

U nastavku definišimo marginalne raspodele za diskretnu i apsolutno-neprekidnu slučajnu promenljivu.

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa sa raspodelom

$$p(x_i, y_j) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}), \quad i, j = 1, \ldots$$

Skup vrednosti $R_{XY} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_2, y_1), \ldots\}$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama $p(x_i, y_j)$ predstavlja zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y). On se često zapisuje tablično, kao što će biti pokazano u narednom primeru 14.21. Marginalna raspodela za X je

$$\begin{aligned} p(x_i) = P\{X = x_i\} &= P\left(\{X = x_i\} \cap (\cup_j \{Y = y_j\})\right) = P\left(\cup_j \left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right)\right) \\ &= \sum_j P\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right) = \sum_j p(x_i, y_j), \end{aligned} \tag{14.9}$$

za $i = 1, 2, \ldots$. Analogno, marginalna raspodela za Y je

$$q(y_j) = P\{Y = y_j\} = \sum_i p(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{14.10}$$

Sada možemo i na drugačiji način da formulišemo nezavisnost slučajnih promenljivih. Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa sa raspodelom $p(x_i, y_j)$, $i, j = 1, \ldots,$ onda je potreban i dovoljan uslov za nezavisnost X i Y:

$$p(x_i, y_j) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\})P(\{Y = y_j\}) = p(x_i)q(y_j), \tag{14.11}$$

za sve $i, j = 1, 2, \ldots$.

Primer 14.21

Slučajno se bira X iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Y se bira među istim brojevima, ali tako da nije veći od X. Odrediti zakon raspodele za (X, Y) i X i Y.

Računamo zajedničke verovatnoće

$$p(1,1) = P\{X = 1 \cap Y = 1\} = P\{X = 1\} P\{Y = 1 | X = 1\} = \frac{1}{4} \cdot 1,$$

jer je za Y dozvoljen skup $\{1\}$. Potom,

$$p(2,1) = P\{X = 2 \cap Y = 1\} = P\{X = 2\} P\{Y = 1 | X = 2\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2},$$

jer je za Y dozvoljen skup $\{1, 2\}$. Analogno se dobija $p(2, 2)$. Dalje računamo,

$$p(3,1) = P\{X = 3 \cap Y = 1\} = P\{X = 3\} P\{Y = 1 | X = 3\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3},$$

i iste vrednosti dobijamo za $p(3, 2)$ i $p(3, 3)$. Konačno,

$$p(4,1) = P\{X = 4 \cap Y = 1\} = P\{X = 4\} P\{Y = 1 | X = 4\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4},$$

i analogno za $p(4, 2)$, $p(4, 3)$ i $p(4, 4)$. Dobijene rezultate možemo prikazati tabelarno

$X \backslash Y$	1	2	3	4	Σ
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
Σ	25/48	13/48	7/48	3/48	1

Marginalne raspodele za X i Y su

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 25/48 & 13/48 & 7/48 & 3/48 \end{pmatrix}.$$

Prokomentarišimo da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Vidimo da uslov (14.11) nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y nije ispunjen za npr. $i = 1$ i $j = 2$, jer $0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{48}$, te zaključujemo da X i Y nisu nezavisne.

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$. Marginalna funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = P(\{X < x\} \cap \{Y < \infty\}) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(u, v) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u,$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. Drugim rečima,

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y) \mathrm{d}y. \tag{14.12}$$

Dakle, X je jednodimenzionalna apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom datom sa (14.12) koja se zove marginalna gustina za X.
Slično, marginalna gustina za Y je

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y) \mathrm{d}x. \tag{14.13}$$

Formulišimo sada uslov za nezavisnost slučajnih promenljivih. Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$, onda je potreban i dovoljan uslov za nezavisnost X i Y:

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

14.3.2 Višedimenzionalna normalna raspodela

Definicija 14.22

Neka je V simetrična, pozitivno definitna $n \times n$ matrica, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ vektor kolone. Tada je

$$\varphi_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}\sqrt{\det V}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}, \tag{14.14}$$

gustina $n-$dimenzionalne normalne raspodele $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$.

Primer 14.23

Neka slučajna promenljiva (X_1, X_2) *ima normalnu raspodelu:*

$$(X_1, X_2) : \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right),$$

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ *i* $-1 < \rho < 1$. *Naći marginalne raspodele za* X_1 *i* X_2.

Odredimo najpre gustinu $\varphi_{(X_1,X_2)}$. Uočimo matricu

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

i računamo njenu determinantu

$$\det V = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2),$$

a potom i njoj inverznu matricu

$$V^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2\rho \\ -\sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

Sada se stepen eksponencijalne funkcije u (14.14) za $n = 2$ može zapisati kao

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})$$
$$= \frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-m_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-m_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right),$$

te je gustina raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X_1, X_2)

$$\varphi_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-m_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-m_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right)}, \tag{14.15}$$

Marginalnu gustinu za X_1 računamo po formuli (14.12),

$$\varphi_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(-2\rho\frac{(x_1-m_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-m_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right)} \mathrm{d}x_2.$$

Uvodimo smenu $t = \frac{x_2-m_2}{\sigma_2}$ i član u stepenu eksponencijalne funkcije dopunjavamo do punog kvadrata

$$-2\rho a t + t^2 \pm a^2\rho^2 = (t-\rho a)^2 - a^2\rho^2,$$

pri čemu smo označili $a = \frac{x_1-m_1}{\sigma_1}$. Dobijamo

$$\varphi_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(t-\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} \mathrm{d}t.$$

Poslednji integral se smenom $s = \frac{t-\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}}{\sqrt{1-\rho^2}}$ svodi na Poasonov integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \mathrm{d}s = \sqrt{2\pi},$$

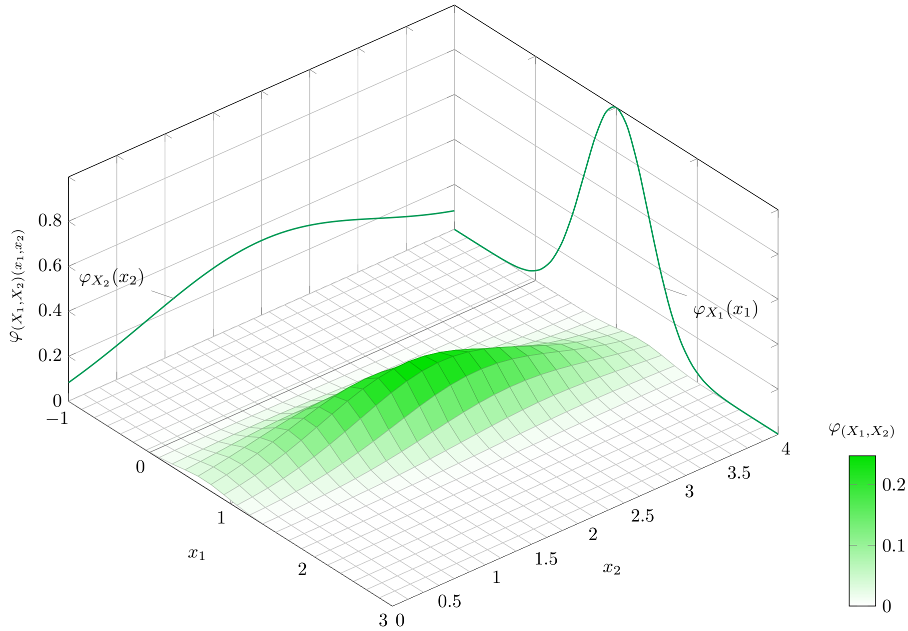
te konačno dobijamo

$$\varphi_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2}.$$

Upoređivanjem sa (14.7) zaključujemo $X_1 : \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$.

Analogno se dobija $X_2 : \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.

Uočimo da je potreban i dovoljan uslov da slučajne promenljive X_1 i X_2 budu nezavisne je da $\rho = 0$.



Slika 14.8: Gustina raspodele (14.15) za $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 1.2$ i $\rho = 0.5$ i marginalne raspodele za X_1 i X_2.

15 Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

Pomoću funkcije raspodele možemo da računamo verovatnoće događaja sa kojima je posmatrana slučajna promenljiva povezana. Ipak, ponekad je dovoljno da imamo određene kvantitativne, numeričke pokazatelje o slučajnoj promenljivoj koji bi je okarakterisali. U ovom poglavlju definišemo matematičko očekivanje slučajne promenljive koje nam govori o njenoj tendenciji ili ponderisanoj srednjoj vrednosti. Takođe definišemo disperziju kao meru odstupanja slučajne promenljive od njenog matematičkog očekivanja.

15.1 Matematičko očekivanje slučajne promenljive

Definicija 15.1

Matematičko očekivanje $E(X)$ diskretne slučajne promenljive X sa skupom vrednosti $\{x_1, x_2, \dots\}$ i raspodelom verovatnoća $p(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ tj. sa zakonom raspodele

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_k) & \dots \end{pmatrix}$$

definiše se sa:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p(x_k),$$

i postoji ako i samo ako

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, p(x_k) < \infty.$$

Primetimo da ako je skup vrednosti X konačan skup, npr. $\{x_1 \dots, x_n\}$ i ako svaku vrednost X prima sa jednakom verovatnoćom, tj.

$$P\{X = x_k\} = p(x_k) = \frac{1}{n},$$

onda je njeno očekivanje $E(X)$ zapravo aritmetička sredina.

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Primer 15.2

Lansiranje kosmičke rakete se ponavlja do prvog uspeha ili četvrtog pokušaja. Pokušaji su nezavisni, a verovatnoća uspeha je 0.7. Prvi pokušaj košta 3 miliona dolara, a svaki sledeći 1 milion. Uspeh donosi zaradu od 10 miliona dolara. Naći očekivani profit.

Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja iznos profita. Odredimo njenu raspodelu. Kada bi prvi pokušaj bio uspešan, što se dešava sa verovatnoćom 0.7, iznos profita bi iznosio 10-3=7 miliona. Kada bi prvi pokušaj bio neuspešan i drugi uspešan, čija je verovatnoća $0.3 \cdot 0.7$, onda bi iznos profita bio 10-3-1=6 miliona. Slično nalazimo verovatnoće i iznos profita ukoliko je pokušaj uspešan iz trećeg i četvrtog puta. Konačno, ukoliko su sva četiri pokušaja bila neuspešna, tada smo potrošili $3 + 3 \cdot 1 = 6$ miliona. Dakle, X ima sledeću raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & -6 \\ 0.7 & 0.3 \cdot 0.7 & 0.3^2 \cdot 0.7 & 0.3^3 \cdot 0.7 & 0.3^4 \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje računamo po definiciji,

$$E(X) = 7 \cdot 0.7 + 6 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 5 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7 + 4 \cdot 0.3^3 \cdot 0.7 - 6 \cdot 0.3^4 = 6.5 \text{ miliona.}$$

Neka je X diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom $p(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neka je $Y = f(X)$. Tada je Y slučajna promenljiva diskretnog tipa i važi:

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\, p(x_k).$$

Slično, ukoliko je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa sa raspodelom $p(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, važi:

$$E(f(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j)\, p(x_i, y_j). \tag{15.1}$$

Definicija 15.3

Matematičko očekivanje $E(X)$ apsolutno neprekidne slučajne promenljive X sa gustinom $\varphi_X(x)$ definiše se sa:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \varphi_X(x) \mathrm{d}x,$$

i postoji ako i samo ako gornji integral apsolutno konvergira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, \varphi_X(x) \mathrm{d}x < \infty.$$

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $\varphi_X(x)$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada je

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi_X(x) \mathrm{d}x.$$

15.1.1 Osobine matematičkog očekivanja slučajne promenljive

1. $E(c) = c$, c konstanta.

Dokaz. Konstantu c možemo da shvatimo kao slučajnu promenljivu $c : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, te je po definiciji $E(c) = c \cdot 1 = c$. □

2. $E(cX) = cE(X)$.

Dokaz. Dokaz predstavljamo za diskretne slučajne promenljive. Neka je

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_k) & \dots \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

Sada je

$$E(cX) = \sum_{k=1}^{\infty} cx_k\, p(x_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p(x_k) = cE(X).$$

□

3. Ako postoje $E(X_k)$, $k = 1, \dots, n$, onda

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

Dokaz. Dokaz dajemo u slučaju $n = 2$ i za diskretne slučajne promenljive. Neka X ima raspodelu kao u (15.2) i neka je Y data sa

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots \\ q(y_1) & q(y_2) & \dots & q(x_j) & \dots \end{pmatrix}.$$

Posmatrajući funkciju $(x, y) \mapsto x + y$, iz (15.1) sledi

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_k + y_j)p(x_k, y_j) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{j=1}^{\infty} p(x_k, y_j) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k, y_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j q(y_j) = E(X) + E(Y), \end{aligned}$$

na osnovu definicije marginalnih raspodela (14.9) i (14.10). □

4. Ako su $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive i ako postoje $E(X_k)$, $k = 1, \dots, n$, onda

$$E(X_1\, X_2 \dots X_n) = E(X_1)\, E(X_2) \dots E(X_n).$$

Dokaz. Slično kao u prethodnom dokazu, dobijamo

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_k y_j p(x_k, y_j) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_k y_j p(x_k) q(y_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k) \sum_{j=1}^{\infty} y_j q(y_j) = E(X)E(Y), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili i nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y tj. relaciju (14.11). □

5. $E(X - E(X)) = 0$.

Dokaz. Koristeći da je $E(X)$ konstanta, na osnovu osobine 3 i 1 dobijamo

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = 0.$$

□

15.2 Disperzija slučajne promenljive

Disperzija slučajne promenljive predstavlja meru odstupanja od njenog matematičkog očekivanja.

Definicija 15.4

Momenat reda k, $k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je $E(X^k)$. Centralni momenat reda k, $k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je $E((X - E(X))^k)$.

Definicija 15.5

Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive X zove se disperzija (varijansa) slučajne promenljive X i označava se sa $D(X)$ ili $\sigma^2(X)$:

$$D(X) = E\big((X - E(X))^2\big).$$

Može se pokazati i ekvivalentna formula za disperziju od X,

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2. \tag{15.3}$$

15.2.1 Osobine disperzije slučajne promenljive

1. $D(c) = 0$, c konstanta.

Dokaz. Na osnovu osobina matematičkog očekivanja dobijamo

$$D(c) = E((c - E(c))^2) = E(0) = 0.$$

□

2. $D(cX) = c^2 D(X)$.

Dokaz. Koristeći osobine matematičkog očekivanja imamo

$$D(cX) = E((cX - E(cX))^2) = E(c^2(X - E(X))^2) = c^2 D(X).$$

□

3. $D(X + c) = D(X)$.

Dokaz. Osobine matematičkog očekivanja impliciraju

$$D(X + c) = E((X + c - E(X + c))^2) = E((X + c - E(X) - E(c))^2) = D(X).$$

□

4. Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive i imaju disperzije, onda

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n).$$

Dokaz. Dokaz ćemo dati u slučaju $n = 2$. Kvadrirajući određene članove dobijamo

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= E((X+Y-E(X+Y))^2) = E(((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2) \\ &= D(X)+D(Y)+2E\left(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)\right) \\ &= D(X)+D(Y)+2\left(E(XY)-E(X)E(Y)\right) = D(X)+D(Y), \end{aligned}$$

pri čemu je poslednja jednakost zbog nezavisnosti X i Y. □

Primer 15.6: Nastavak primera 14.6

Vratimo se na eksperiment koji se sastoji od bacanja kockice. Raspodela verovatnoća slučajne promenljive X koja predstavlja broj palih tačkica na kocki može kraće da se zapiše

$$p(x_k) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & k = 1, \dots, 6 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

gde su vrednosti koje slučajna promenljiva prima $x_k = k$, $k = 1, \dots 6$.

Matematičko očekivanje ove slučajne promenljive je $E(X) = \frac{1+2+\cdots+6}{6} = 3.5$. Ovo smo mogli i da naslutimo, s obzirom na to da je reč o slučajnoj promenljivoj sa diskretnom uniformnom raspodelom.
Disperzija se računa po definiciji

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right) - 3.5^2 = 2.92.$$

15.3 Matematičko očekivanje i disperzija nekih slučajnih promenljivih

15.3.1 Slučajna promenljiva sa binomnom raspodelom

Neka $X : \mathcal{B}(n,p)$, tada su matematičko očekivanje i disperzija ove slučajne promenljive

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p).$$

Za nezavisne slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_k$ takve da $X_i : \mathcal{B}(n_i, p)$, $i = 1, \dots, k$, važi

$$X_1 + X_2 + \dots X_k : \mathcal{B}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p).$$

Uzmimo slučaj $k = 2$. Tada za nezavisne slučajne promenljive $X : \mathcal{B}(n_1, p)$ i $Y : \mathcal{B}(n_2, p)$ važi

$$\begin{aligned}
P\{X+Y=m\} &= \sum_{k=0}^{m} P(\{X=k\}\cap\{Y=m-k\}) = \sum_{k=0}^{m} P\{X=k\}P\{Y=m-k\} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{m-k} p^{m-k}(1-p)^{n_2-(m-k)} \\
&= p^m(1-p)^{n_1+n_2-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k} = \binom{n_1+n_2}{m} p^m (1-p)^{n_1+n_2-m}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo $X + Y : \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Dokaz. Slučajnu promenljivu $X : \mathcal{B}(n, p)$ možemo zapisati kao zbir nezavisnih slučajnih promenljivih $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, svaka sa raspodelom $X_i : \mathcal{B}(1, p)$, tj.

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Za ove slučajne promenljive matematičko očekivanje i disperzija su

$$\begin{aligned}
E(X_i) &= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p, \\
D(X_i) &= E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2(1-p) - p^2 = p(1-p).
\end{aligned}$$

Sada se matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive X dobijaju preko formule zbira tj.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np, \qquad D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p),$$

pri čemu poslednja jednakost koristi nezavisnost slučajnih promenljivih X_i, $i = 1, \ldots, n$. □

15.3.2 Slučajna promenljiva sa Poasonovom raspodelom

Ako X ima raspodelu $X : \mathcal{P}(\lambda)$, onda je

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Podsetimo se, $e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Po definiciji računamo

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X=k\} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda.
\end{aligned}$$

Slično dobijamo i disperziju ove slučajne promenljive koristeći definiciju (15.3),

$$\begin{aligned}
D(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X=k\} - \lambda^2 = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k \pm 1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

15.3.3 Slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom

Neka slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu $X : \mathcal{U}(a,b)$. Tada je njena gustina raspodele data sa (14.5). Matematčko očekivanje računamo po definiciji,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2},$$

kao i disperziju

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

15.3.4 Slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom

Posmatrajmo slučajnu promenljivu sa eksponencijalnom raspodelom $X : \mathcal{E}(\lambda)$, čija je gustina raspodele data sa (14.6).

Matematičko očekivanje računamo po definiciji, koristeći smenu $t = \lambda x$ čime dobijamo gama funkciju,

$$E(X) = \lambda\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} te^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}.$$

Na isti način računamo i disperziju,

$$\begin{aligned} D(X) &= \lambda\int_0^{\infty} x^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\left(\Gamma(3)-1\right) = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Gama funkcija se definiše kao integral

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Podsetimo se nekih osobina:
1. Ako je $p \in \mathbb{N}$, onda $\Gamma(p) = (p-1)!$,
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$,
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

15.3.5 Slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom

Neka X ima normalnu raspodelu $X : \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ sa gustinom (14.7). Računamo matematičko očekivanje po definiciji,

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

Uvodimo smenu $t = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$,

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma t + m)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Poasonov integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Prvi integral je jednak nuli zbog parnosti, te konačno dobijamo

$$E(X) = m.$$

Koristeći istu smenu računamo i disperziju,

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x - m^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma t + m)^2e^{-t^2}\mathrm{d}t - m^2 \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t + \frac{m^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t - m^2 = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Uvodimo smenu $t^2 = s$ i integral svodimo na Gama funkciju,

$$D(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{1/2} e^{-s} \mathrm{d}s = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma^2.$$

15.4 Numeričke karakteristike dvodimenzionalne slučajne promenljive

Definicija 15.7

Mešoviti momenti m_{kn} *slučajne promenljive* (X, Y) *su*

$$m_{kn} = E(X^k Y^n), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Ako je (X, Y) apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$, onda je

$$m_{kn} = E(X^k Y^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^n \varphi_{(X,Y)}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Numeričke karakteristike koje opisuju zavisnost između X i Y su kovarijansa i koeficijent korelacije.

Definicija 15.8

Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y) *je*

$$cov(X, Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 15.9

Koeficijent korelacije slučajne promenljive (X, Y) *je*

$$\rho_{XY} = cov(X^*, Y^*) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Osobine koeficijenta korelacije:

- Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, onda je $\rho_{XY} = 0$.
  (Obrnuto ne važi u opštem slučaju! Ali važi u slučaju normalne raspodele.)
- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.
- Ako je $\rho_{XY} = 0$, kažemo da su X i Y nekolinearne slučajne promenljive. Kako koeficijent korelacije po apsolutnoj vrednosti postaje bliži jedinici, tako raste povezanost (kolinearnost) između X i Y.
- $|\rho_{XY}| = 1$ ako i samo ako je $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Primer 15.10

Neka

$$(X,Y):\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} m_1\\ m_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{bmatrix}\right).$$

Izračunati $cov(X,Y)$.

Po definiciji je

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\Big((X-m_1)(Y-m_2)\Big)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_1)(y-m_2)\varphi_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

gde je $\varphi_{(X,Y)}(x,y)$ izračunata u (14.15). Služeći se istim tehnikama smene kao u primeru 14.23, može se izračunati

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2,$$

te je koeficijent korelacije

$$\rho_{XY}=\rho.$$

15.5 Primena u statističkoj fizici

Stanje razređenog gasa statistički opisujemo pomoću tzv. funkcije raspodele brzina $f(t,x,v)$, gde je t vreme, x položaj u prostoru $\mathbb{R}^3$, a $v\in\mathbb{R}^3$ brzina molekula. Ukoliko pretpostavimo da se funkcija raspodele menja usled (binarnih) sudara između molekula gasa, onda je promena (u vremenu) funkcije raspodele opisana Bolcmanovom jednačinom.

Opišimo funkciju raspodele jezikom teorije verovatnoće. Osnovna pretpostavka jeste da su faktori koji utiču na promenu brzine molekula slučajnog karaktera. Dakle, za fiksirani vremenski trenutak t neka je $V:=(V_1,V_2,V_3)$ slučajna promenljiva koja predstavlja brzinu atoma u elementu (prostora) zapremine $\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_3)$. Broj atoma u jedinici zapremine $\mathrm{d}x$ sa brzinom u intervalu $(v,v+\mathrm{d}v)$ je

$$\int_v^{v+\mathrm{d}v} f\mathrm{d}p\approx f\int_v^{v+\mathrm{d}v}\mathrm{d}p=f\mathrm{d}v.$$

Sada je broj atoma u jedinici zapremine $\mathrm{d}x$ sa bilo kojom brzinom, odnosno brojna gustina atoma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\mathrm{d}v=:n.$$

Dakle, verovatnoća da atom ima brzinu u intervalu $(v,v+\mathrm{d}v)$je

$$P\{V\in(v,v+\mathrm{d}v)\}=\frac{\int_v^{v+\mathrm{d}v} f\mathrm{d}p}{\int_{-\infty}^{\infty} f\mathrm{d}v}=\int_v^{v+\mathrm{d}v}\frac{f}{n}\mathrm{d}v.$$

Dakle, za nas je $\frac{f}{n}=\varphi_V$, gustina raspodele slučajne promenljive V.

Ravnotežno stanje se dobija ukoliko pretpostavimo da je $\tilde{V} = (V_1, V_2, V_3)$ trodimenzionalna normalna raspodela, pri čemu su komponente V_i nezavisne slučajne promenljive sa raspodelama

$$V_1 : \mathcal{N}\left(u_1, \frac{k_B}{m}T\right), \quad V_2 : \mathcal{N}\left(u_2, \frac{k_B}{m}T\right), \quad V_3 : \mathcal{N}\left(u_3, \frac{k_B}{m}T\right).$$

Tada je gustina raspodele ove slučajne promenljive

$$\varphi_{\tilde{V}}(v_1, v_2, v_3) = \varphi_{V_1}(v_1)\varphi_{V_2}(v_2)\varphi_{V_3}(v_3) = \frac{1}{\left(2\,\pi\,\frac{k_B}{m}\,T\right)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\,k_B\,T}\left((v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2\right)},$$

koju zovemo Maksvelova raspodela. Dakle, u odnosu na definiciju gustine višedimenzionalne normalne raspodele (14.14) identifikujemo matematičko očekivanje i disperziju:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad V = \frac{k_B}{m}T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da se $E(\tilde{V}) = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ interpretira kao vektor srednje brzine gasa, T je temperatura, m masa, a $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, J/K$ je Bolcmanova konstanta.

Kada računamo momente tipa $E(f(|\tilde{V}|))$

$$E(f(|\tilde{V}|)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(|v|)\,\varphi_{\tilde{V}}(v)\mathrm{d}v.$$

gde $v = (v_1, v_2, v_3)$, i $\mathrm{d}v = \mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3$, olakšavamo računicu prelaskom na sferne koordinate. Radi jednostavnosti, uzmimo $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Definišimo Maksvelovu raspodelu u ovom slučaju:

$$f_0(\rho) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{3/2} \rho^2 e^{-\frac{m}{2k_BT}\rho^2},$$

gde je ρ zapravo intenzitet brzine $\rho = |v|$. Uvedimo oznaku

$$\langle g(\rho)\rangle = \int_0^{\infty} g(\rho) f_0(\rho)\mathrm{d}\rho. \tag{15.4}$$

Primer 15.11

Uz oznake uvedene u (15.4), proveriti da li važe jednakosti:

$$\frac{1}{\langle\rho\rangle} = \left\langle\frac{1}{\rho}\right\rangle, \qquad \frac{1}{\langle\rho^2\rangle} = \left\langle\frac{1}{\rho^2}\right\rangle.$$

Integrali se računaju uvodeći smenu za stepen eksponencijalne funkcije $t = \dfrac{m}{2k_BT}\rho^2$ i potom koristeći osobine gama funkcije. U ovom slučaju se izračunavanjem desne i leve strane jednakosti zasebno pokazuje da one nisu jednake, te date jednakosti ne važe.

16 Centralna granična teorema

Važno pitanje u teoriji verovatnoće jeste pitanje asimptotskog ponašanja niza slučajnih promenljivih. U ovom delu ćemo navesti jedan od najznačajnih rezultata – centralnu graničnu teoremu.

Posmatramo niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ koje su nezavisne i sa istom raspodelom. Neka je

$$Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

suma n prvih takvih slučajnih promenljivih. Pitamo se šta možemo da zaključimo o Z_n kada je n veliko.

Teorema 16.1

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom. Označimo

$$Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Tada važi:

$$P\left\{\frac{Z_n - E\left(Z_n\right)}{\sqrt{D\left(Z_n\right)}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t, \qquad n \to \infty.$$

Dakle, centralna granična teorema kaže da skalirana suma nezavisnih slučajnih promenljivih (sa istom raspodelom i konačnom disperzijom) ima približno normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu.

Primetimo da je Moavr-Laplasova teorema specijalan slučaj ove teoreme za nezavisne slučajne promenljive $X_i : \mathcal{B}(1,p)$, $i = 1, \ldots, k$.

Sa praktične strane, centralna granična teorema je teorijska podloga za lako izračunavanje (samo koristeći tablicu) približnih vrednosti verovatnoća koje uključuje veliki broj slučajnih promenljivih, kao što je ilustrovano u sledećem primeru 16.2.

Primer 16.2

U avion se ukrcava 100 torbi čije su težine nezavisne slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom $\mathcal{U}(10, 25)$. Koliko je verovatnoća da će ukupna težina torbi biti veća od 1850kg?

Neka X_i označava slučajnu promenljivu koja predstavlja težinu $i-$te torbe. Označimo

$$Z_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

Zanima nas $P\left\{Z_{100} > 1850\right\}$. Kako svaka X_i ima $\mathcal{U}(10, 25)$ raspodelu, računamo

$$E(X_i) = \frac{10 + 25}{2} = 17.5, \quad D(X_i) = \frac{(25 - 10)^2}{12} = 18.75.$$

Kako su X_i nezavisne slučajne promenljive, možemo da izračunamo i numeričke karakteristike slučajne promenljive Z_{100},

$$\begin{aligned} E(Z_{100}) &= \frac{10+25}{2} = 100 \cdot 17.5 = 1750, \\ D(Z_{100}) &= 100 \cdot 18.75 = 1875. \end{aligned}$$

Sada računamo

$$\begin{aligned} P\{Z_{100} > 1850\} &= P\{1850 < Z_{100} < \infty\} \\ &= P\left\{ \frac{1850 - 1750}{\sqrt{1875}} < \frac{Z_{100} - 1750}{\sqrt{1875}} < \infty \right\} \\ &\approx \frac{1}{2} - \Phi(2.31) = 0.5 - 0.4896 = 0.0104. \end{aligned}$$

Zaključujemo, verovatnoća da će ukupna težina torbi biti veća od 1850kg je 0.0104.

17 Osnovni pojmovi teorije statistike

Skup svih elemenata na kojima se proučava neka pojava naživa se *populacija.* Broj elemenata u populaciji naziva se *obim populacije.*

U statistici se proučavaju osobine određene populacije. Osobine po kojima se elementi populacije razlikuju nazivaju se *(statistička) obeležja.* Obeležje odgovara pojmu slučajne promenljive u teoriji verovatnoće.

Jedan od osnovnih zadataka statistike jeste određivanje raspodele posmatranog obeležja. Poznato je, na primer, da visina i težina kod ljudi imaju normalnu raspodelu. Da bi se ona u potpunosti odredila, potrebno je naći vrednost odgovarajućih parametara (u ovom slučaju m i σ). U nekim slučajevima čak nije ni poznat tip raspodele, kao npr. u slučaju broja položenih ispita studenata na fakultetu. Tada se određivanje raspodele svodi na registrovanje vrednosti obeležja na elementima populacije.

Populacija je skup svih studenata nekog fakulteta, a obeležja mogu biti: broj položenih ispita, prosečna ocena, ali i visina ili težina, boja kose studenata.

Registrovanje vrednosti obeležja na celoj populaciji je ponekad nepraktično ili može biti povezano sa velikim troškovima. Stoga se pribegava metodi uzorka, odnosno iz populacije se na određen način uzima njen podskup koji se naziva *uzorak* i na njegovim elementima se ispituju realizovane vrednosti obeležja X. Osnovna ideja metode uzorka je da se zaključci o obeležju X koju su dobijeni za uzorak prenesu, odnosno generalizuju na celu populaciju. Da bi to bilo valjano urađeno, neophodno je da uzorak bude reprezentativan. Jedan od načina da se postigne reprezentativnost je da se elementi populacije u uzorak biraju slučajno (čime dobijamo slučajni uzorak) i po određenim pravilima teorije verovatnoće, kako bi se u procesu statistčkog zaključivanja mogla primeniti pravila teorije verovatnoće, koja je i matemački osnov statistike.

Prikupljanje statističkih podataka tj. registrovanje realizovanih vrednosti obeležja se može vršiti merenjem ili pomoću ankete. Tako prikupljeni podaci se prikazuju na odgovarajući način da bi se lako uočile bitne karakteristike obeležja. Način prikazivanja može biti tabelaran ili grafički. Mi ćemo pretpostavljati da su prikupljeni podaci već sređeni i prikazani na odgovarajući način.

17.1 Statističko proučavanje

Statističko proučavanje podrazumeva sledeće korake:

1. Prvo se određuje populacija koja se proučava. U skladu sa pojmovima iz teorije verovatnoće, populaciju možemo posmatrati kao skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta.

2. Potom posmatramo neko obeležje date populacije. Model za obeležje je slučajna promenljiva X.

3. Zatim formiramo slučajni uzorak obima n.

4. Obavljamo proučavanje: na svakom elementu populacije izabranom u uzorak posmatramo obeležje X. Obavlja se statistički eksperiment ili se prikupljaju podaci čime dolazimo do reg-

istrovanih vrednosti obeležja X na slučajnom uzorku obima n, odnosno dolazimo do konkretnih podataka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koje zovemo realizovani uzorak. Za neki drugi uzorak iz populacije bismo dobili drugi niz realizovanih vrednosti obeležja X, odnosno neki drugi realizovani uzorak. Zato je prirodno posmatrati slučajne promenljive:
X_i- vrednost obeležja na $i-$tom elementu populacije izabranom u uzorak, $i = 1, \dots, n$.
Svaka od ovih slučajnih promenljivih ima istu raspodelu kao i obeležje X, a ako je uzorak pravilno izabran, slučajne promenljive X_i, $i = 1, \dots, n$ su nezavisne.

Definicija 17.1

Neka se na populaciji posmatra obeležje X. Prost slučajan uzorak obima n za obeležje X je $n-$torka nezavisnih slučajnih promenljivih $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ od kojih svaka ima istu raspodelu kao i obeležje X.

Prikupljeni podaci se sređuju i statistički obrađuju i na kraju se izvode zaključci za celu populaciju. Za statističko zaključivanje se koristi funkcija slučajnog uzorka $F = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ čiji analitički izraz ne zavisi od nepoznatih parametara raspodele slučajne promenljive X i koju zovemo statistika.

Definicija 17.2

Neka je $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ slučajni uzorak obima n za obeležje X i neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ funkcija. Slučajna promenljiva $F = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je statistika ako u njoj ne figuriše nepoznati parametar.

Primer 17.3

Malo kasnije ćemo definisati uzoračku aritmetičku sredinu

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right),$$

koja je statistika.

18 Numeričke karakteristike obeležja

Pored prikazivanja realizovanih vrednosti obeležja, za opisivanje obeležja često koristimo i neke njegove numeričke karakteristike.

Analizirajmo najpre numeričke karakteristike realizovanih vrednosti obeležja, pre svega mere centralne tendencije podataka i mere odstupanja od tih tendencija. Potom ćemo definisati odgovarajuće pojmove za obeležja.

18.1 Numeričke karakteristike realizovanih vrednosti obeležja

Definicija 18.1

Realizovana uzoračka aritmetička sredina se računa preko realizovane vrednosti uzorka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Kod velikog broja podataka, podaci se grupišu u grupe i određuje se broj podataka u svakoj grupi. Ovaj broj podataka naziva se (apsolutna) frekvencija. Ako obeležje X ima realizovanu vrednost uzorka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ grupisanu u k grupa $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, onda ćemo odgovarajuće frekvencije označavati sa $(f_1, f_2, \dots, f_k)$. Za tako grupisane podatake realizovana uzoračka aritmetička sredina se računa na sledeći način

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k).$$

Definišimo sada realizovanu uzoračku medijanu. Najpre je potrebno realizovane vrednosti obeležja $(x_1, \dots, x_n)$ poređati u rastući niz označen sa $(y_1, \dots, y_n)$.

Definicija 18.2

Realizovana uzoračka medijana m_e *je ona vrednost obeležja koja rastući niz* $(y_1, \dots, y_n)$ *deli na dva jednaka dela. To znači da je jednak broj realizovanih vrednosti obeležja koja su manja od medijane i onih koja su veća od medijane. Preciznije,*

$$m_e = \begin{cases} y_{\frac{n+1}{2}}, & \text{za } n \text{ neparno}, \\ \frac{1}{2}\left(y_{\frac{n}{2}} + y_{\frac{n}{2}+1}\right), & \text{za } n \text{ parno}. \end{cases}$$

Još jedna numerička karakteristika obeležja koja opisuje centralnu tendenciju njenih realizovanih vrednosti je i mod.

Definicija 18.3

Realizovani uzorački mod m_o je ona vrednost obeležja koja se najčešće pojavljuje u realizovanim vrednostima obeležja.

Aritmetička sredina se najčešće koristi u praksi, i njena prednost je što u obzir uzima sve vrednosti obeležja. Međutim, ona je vrlo osetljiva na ekstremne realizovane vrednosti obeležja, te je dobar pokazatelj u slučaju simetričnih raspodela obeležja X, npr. ukoliko analiziramo visinu čoveka, ali ne i kod asimetričnih raspodela, kao što su primanja zaposlenih u nekoj firmi.

Sa druge strane, prednosti medijane i moda su što na njih ne utiču ekstremne realizovane vrednosti, ali oni ne koriste sve dostupne podatke.

Primer 18.4

Populaciju čini 30 studenata PMF-a i registruju se njihove ocene iz Matematike 3. Dobijeni su sledeći podaci

$$10, 8, 9, 7, 8, 10, 10, 9, 9, 9, 9, 10, 5, 6, 6, 8, 9, 9, 6, 6, 6, 10, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 10. \tag{18.1}$$

Ocene su prikazane u tabeli zajedno sa frekvencijama.

Ocene	Frekvencije
5	1
6	6
7	4
8	3
9	9
10	7

Obim uzorka je $n = 30$, a ocene smo podelili u 6 grupa. Možemo da izračunamo realizovanu uzoračku aritmetičku sredinu,

$$\overline{x}_{30} = \frac{1}{30}(5 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 7) \approx 8.13.$$

Nađimo sada medijanu. Najpre poređajmo niz (18.1) u rastućem poretku

$$5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10.$$

Pošto je obim uzorka $n = 30$ paran broj, uzimamo aritmetičku sredinu petnaestog i šesnaestog člana niza, tj.

$$m_e = \frac{1}{2}(9 + 9) = 9.$$

Odredimo mod. Lako se vidi da je najčešća ocena 9, te je

$$m_0 = 9.$$

Primer 18.5

Da li je Njujork bogata država?

Prosečan prihod u državi Njujork je osmi po redu među američkim državama, blizu susednog Konektikata i Nju Džersija, koje su prva i druga po redu. Međutim, dok su medijane prihoda u državama Konektikat i Nju Džersi treća i peta po redu, Njujork je na 27. mestu.
Njujork ima mnogo ljudi sa veoma visokim primanjima, koji pomeraju srednju vrednost prihoda naviše, ali ima i velik procenat ljudi sa niskim primanjima, što pomera medijanu naniže. Njujork nije bogata država, to je država ekstrema – bogatstva i siromaštva.

Definicija 18.6

Realizovana uzoračka disperzija

$$\overline{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i^2 - (\overline{x}_n)^2 \,, \quad n \geq 30, \tag{18.2}$$

dok je realizovana uzoračka standardna devijacija

$$\overline{s}_n = \sqrt{\overline{s}_n^2}.$$

Ukoliko je obim uzorka $n < 30$, računamo realizovanu popravljenu disperziju,

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i^2 - \frac{n}{n-1} (\overline{x}_n)^2 \,,$$

dok je realizovana popravljena uzoračka standardna devijacija

$$s_n = \sqrt{s_n^2}.$$

18.2 Numeričke karakteristike obeležja

Definicija 18.7

Uzoračka aritmetička sredina uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je slučajna promenljiva

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \,.$$

Napomena 18.12. *Primetimo da je uzoračka aritmetička sredina $\overline{X}_n$ slučajna promenljiva, dok je realizovana uzoračka aritmetička sredina $\overline{x}_n$ konkretan broj.*

Definicija 18.8

Medijana apsolutno neprekidne slučajne promenljive X je vrednost m_e slučajne promenljive sa osobinom

$$P\{X < m_e\} = P\{X \geq m_e\} = \frac{1}{2}.$$

Za diskretnu slučajnu promenljivu X takva vrednost ne mora da postoji, pa se za medijanu uzima ona vrednost m_e za koju važi

$$P\{X < m_e\} \leq \frac{1}{2}, \quad i \quad P\{X > m_e\} \leq \frac{1}{2}.$$

Disperzija i standardna devijacija mere rasturanje podataka oko centra grupisanja.

Definicija 18.9

Uzoračka disperzija za uzorak $(X_1, \dots, X_n)$ obima $n \geq 30$ je slučajna promenljiva koja predstavlja srednje kvadratno odstupanje slučajnog uzorka od uzoračke aritmetičke sredine,

$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \left(\overline{X}_n\right)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2.$$

dok je uzoračka standardna devijacija

$$\overline{S}_n = \sqrt{\overline{S}_n^2}.$$

Ukoliko je obim uzorka $n < 30$, tada imamo popravljenu disperziju definisanu sa

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\left(\overline{X}_n\right)^2,$$

dok je popravljena uzoračka standardna devijacija

$$S_n = \sqrt{S_n^2}.$$

18.3 Ocenjivanje parametara raspodele obeležja

Prilikom ispitivanja obeležja često su poznate neke informacije o raspodeli obeležja. Na primer, poznato je da obeležje ima normalnu raspodelu, ali nisu poznate vrednosti matematičkog očekivanja ili disperzije, koji su tada nepoznati parametri. Nepoznati parametri raspodele obeležja se mogu proceniti na osnovu realizovanog uzorka.

Procenjivanje nepoznatih parametara može se vršiti konkretnim brojem ili intervalima. Ako je procena nepoznatog parametra konkretan broj, tada za takvu procenu kažemo da je tačkasta ocena nepoznatog parametra. Ukoliko je procena interval, tada takvu procenu nazivamo intervalnom ocenom nepoznatog parametra.

Posmatrajmo obeležje X date populacije. Neka je poznato da je raspodela obeležja X data sa $F_X(x, \theta)$, gde $x \in \mathbb{R}$, a θ je nepoznati parametar. Ideja je da se pomoću realizovanih vrednosti uzorka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oceni parametar θ ili neka njegova funckija. Ocenjivanjem parametra θ raspodela obeležja X postaje potpuno određena.

18.3.1 Tačkaste ocene numeričkih karakteristika obeležja

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak. Ako obeležje X ima raspodelu $F_X(x, \theta)$ sa nepoznatim parametrom θ, ideja tačkaste ocene parametra θ jeste da se izabere neka statistika $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tako da se za ocenu nepoznatog parametra θ koristi realizovana vrednost ove statistike. Statistika U se naziva tačkasta ocena parametra θ. Za određivanje tačkaste ocene parametra koritićemo metodu momenata.

Definicija 18.10

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak za obeležje X. Definišemo $r-$ti uzorački momenat

$$M_{r,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

Primetimo da je uzoračka aritmetička sredina zapravo prvi uzorački momenat.

Ukoliko je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ realizovani uzorak, onda je realizovani $r-$ti uzorački momenat dat sa

$$m_{r,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Ako raspodela za X zavisi od nepoznatog parametra θ, onda i uzorački momenat zavisi od istog parametra. Metod momenata za statistiku koristi upravo uzorački momenat. Ideja metode momenata jeste izjednačavanje realizovanog $r-$tog uzoračkog momenta $m_{r,n}$ (koji je konkretan poznat broj) sa momentom reda r slučajne promenljive X, $E(X^r)$ (u kojem figuriše θ). Kada imamo samo jedan nepoznati parametar, zaustavljamo se na $r = 1$, to jest izjednačavamo $E(X) = \overline{x}_n = m_{1,n}$. Dobijamo jednačinu u kojoj figuriše nepoznati parametar θ. Rešavanjem ove jednačine dobijamo ocenu za parametar θ.

U opštem slučaju, funkcija raspodele obeležja X može da sadrži više nepoznatih parametara. U tom slučaju, izjednačavamo onoliko momenata koliko je nepoznatih parametara. Time dolazimo do sistema jednačina po nepoznatim parametrima čijim se rešavanjem oni određuju.

Primer 18.11

Neka obeležje X date populacije ima raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1-\theta & \frac{\theta}{3} \end{pmatrix}.$$

Metodom momenata naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka $(1, 1, 0, 1, -1, 2, 1, 1, 1)$.

Sa jedne strane, računamo matematičko očekivanje za obeležje X,

$$E(X) = -1 \cdot \frac{\theta}{3} + 0 \cdot \frac{\theta}{3} + 1 \cdot (1-\theta) + 2 \cdot \frac{\theta}{3} = 1 - \frac{2}{3}\theta.$$

Sa druge strane, realizovana uzoračka aritmetička sredina je

$$\overline{x}_9 = \frac{7}{9}.$$

Sada izjednačavamo $E(X) = \overline{x}_9$ čime dolazimo do jednačine u kojoj figuriše nepoznati parametar θ,

$$1 - \frac{2}{3}\theta = \frac{7}{9}.$$

Rešavanjem ove jednčine po θ dolazimo do ocene ovog nepoznatog parametra,

$$\theta = \frac{1}{3}.$$

Dakle, procenom parametra θ smo potpuno odredili raspodelu obeležja X,

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

18.3.2 Intervalne ocene numeričkih karakteristika obeležja

Za razliku od tačkastog ocenjivanja nepoznatog parametra, intervalna ocena parametra podrazumeva da uz ocenu parametra postoji i mera moguće greške ocene. Umesto da izvodimo zaključak o stvarnoj vrednosti parametra, sada zaključujemo u kom intervalu se nalazi stvarna vrednost parametra i sa kojom verovatnoćom.

Definicija 18.12

Neka je dat prost slučajni uzorak $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ za obeležje X i neka su $U_1 = u_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i $U_2 = u_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dve statistike takve da je

$$P\{U_1 \leq \theta \leq U_2\} = \gamma,$$

gde γ ne zavisi od θ. Tada se interval (U_1, U_2) naziva interval poverenja za parametar θ na nivou poverenja γ, ili $100\gamma\%$ interval poverenja za θ.

Uobičajene vrednosti za γ su 0.9, 0.95, 0.99.

Realizovana vrednost (u_1, u_2) slučajnog intervala (U_1, U_2) koja se dobija nakon realizacije uzorka se naziva realizovani interval .

Važno je istaći da se i slučajni interval (U_1, U_2) i realizovani interval (u_1, u_2) koji se dobija nakon realizacije uzorka nazivaju interval poverenja na nivou γ. Međutim, samo za slučajni interval (U_1, U_2) se može reći da pokriva nepoznati parametar θ sa verovatnoćom γ. Realizovani interval (u_1, u_2) ili sadrži, ili ne sadrži nepoznati parametar θ (ne može se za njega reći da sadrži θ sa nekom verovatnoćom). Ipak, i realizovani interval (u_1, u_2) se naziva $100\gamma\%$ interval poverenja za θ. Razlog da se i interval (u_1, u_2) naziva interval poverenja na nivou γ je to što je verovatnoća da slučajni interval (U_1, U_2) pokriva nepoznati parametar θ **pre** izvlačenja uzorka bila γ. Drugim rečima, ako bismo izvukli 100 uzoraka, otprilike $100\gamma\%$ njih bi sadržalo parametar θ.

Primer 18.13

Poznato je da obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(\theta, 4)$ raspodelu. Nepoznati parametar θ u ovom slučaju je srednja vrednost obeležja. Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak, i $\overline{X}_n$ uzoračka aritmetička sredina. Biramo statistike

$$U_1 = \overline{X}_n - \frac{3.92}{\sqrt{n}}, \quad U_2 = \overline{X}_n + \frac{3.92}{\sqrt{n}}.$$

Tada je (U_1, U_2) interval poverenja za parametar θ na nivou poverenja γ, što znači da

$$P\left\{\overline{X}_n - \frac{3.92}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X}_n + \frac{3.92}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

Nivo poverenja γ se može izračunati ukoliko analiziramo raspodelu slučajne promenljive $\overline{X}_n$. Ako $X : \mathcal{N}(\theta, 4)$, tada po definiciji $X_i : \mathcal{N}(\theta, 4)$, za sve $i = 1, \ldots, n$, i u tom slučaju znamo raspodelu za $\overline{X}_n$,

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} : \mathcal{N}\left(\theta, \frac{4}{n}\right).$$

Sada računamo γ,

$$\gamma = P\left\{\overline{X}_n - \frac{3.92}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X}_n + \frac{3.92}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{-1.96 < \frac{\left(\overline{X}_n - \theta\right)\sqrt{n}}{2} < 1.96\right\}$$
$$\approx \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) \approx 0.95.$$

Dakle,

$$\left(\overline{X}_n - \frac{3.92}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{3.92}{\sqrt{n}}\right)$$

je interval poverenja za parametar θ na nivou poverenja 0.95.
Pretpostavimo sada da realizovani uzorak obima $n = 25$ ima aritmetičku sredinu $\overline{x}_{25} = 10.25$. Tada je

$$\left(10.25 - \frac{3.92}{\sqrt{25}}, 10.25 + \frac{3.92}{\sqrt{25}}\right) \approx (9.466, 11.34)$$

95% interval poverenja za parametar θ.

U nastavku ćemo se zadržati na intervalnim ocenama numeričkih karakteristika obeležja sa normalnom raspodelom.

Pretpostavimo da obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ raspodelu. Posmatramo slučajni uzorak obima n $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Po definiciji, svaka slučajna promenljiva X_i ima istu raspodelu kao i obeležje, $X_i : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

18.3.3 Ocena matematičkog očekivanja ako je disperzija poznata

Posmatrajmo uzoračku aritmetičku sredinu $\overline{X}_n$. Na osnovu (F.1) koje određuje raspodelu za slučajnu promenljivu koja je linearna kombinacija slučajnih promenljvih sa normalnom raspodelom, za izbor $c_i = \frac{1}{n}$, $\overline{X}_n$ ima raspodelu

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

i možemo je normalizovati

$$\overline{X}_n^* = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} : \mathcal{N}\left(0, 1\right).$$

Pošto je disperzija σ^2 poznata, za uzorak obima n i nivo poverenja γ, može se odrediti broj c tako da važi

$$P\left\{|\overline{X}_n^*| \le c\right\} = \gamma.$$

Naime, pošto $\overline{X}_n^* : \mathcal{N}(0,1)$, broj c treba da zadovoljava

$$\Phi(c) = \frac{\gamma + 1}{2}, \tag{18.3}$$

gde vrednosti funkcije Φ čitamo iz tabele u prilogu E. Iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\gamma = P\left\{-c \le \overline{X}_n^* \le c\right\} = P\left\{\overline{X}_n - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}_n + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Dužina intervala poverenja je $2c\frac{\sigma}{n}$. Uočimo da što je standardna devijacija σ veća, interval poverenja je širi, a što je obim uzorka n veći, interval poverenja je uži.

Zaključujemo, interval poverenja na nivou poverenja γ za nepoznato matematičko očekivanje μ ukoliko je disperzija σ^2 obeležja X poznata je

$$\left(\overline{X}_n - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{18.4}$$

gde je c izračunato u (18.3).

18.3.4 Ocena disperzije

Posmatramo statistiku

$$\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2}.$$

Na osnovu transformacija slučajnih promenljivih opisanih u prilogu F i relacije (F.3) znamo da ova statistika ima hi-kvadrat χ^2_{n-1} raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode.

Određujemo c_1 i c_2 tako da

$$P\left\{c_1 \le \frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \le c_2\right\} = \gamma,$$

odnosno iz tabele date u prilogu G nalazimo c_1 i c_2 tako da važi

$$F_{\chi^2_{n-1}}(c_1) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad F_{\chi^2_{n-1}}(c_2) = \frac{1+\gamma}{2}. \tag{18.5}$$

Sada dobijamo

$$P\left\{\frac{n\overline{S}_n^2}{c_1} \leq \sigma^2 \leq \frac{n\overline{S}_n^2}{c_2}\right\} = \gamma.$$

Dakle, zaključujemo da je interval poverenja na nivou poverenja γ za nepoznatu disperziju obeležja X dat sa

$$\left(\frac{n\overline{S}_n^2}{c_1}, \frac{n\overline{S}_n^2}{c_2}\right),$$

gde su c_1 i c_2 određeni sa (18.5).

Na sličan način se može odrediti jednostrani interval poverenja

$$\left(0, \frac{n\overline{S}_n^2}{c}\right),$$

gde je c takvo da $F_{\chi^2_{n-1}}(c) = \gamma$.

Ukoliko je obim uzorka $n < 30$, koristimo popravljenu uzoračku disperziju S_n^2 i posmatramo statistiku

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

koja ima hi-kvadrat χ^2_{n-1} raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode, na osnovu (F.4), i dobijamo interval poverenja

$$\left(\frac{(n-1)S_n^2}{c_1}, \frac{(n-1)\overline{S}_n^2}{c_2}\right),$$

sa c_1 i c_2 iz (18.5).

18.3.5 Ocena matematičkog očekivanja ako je disperzija nepoznata

Posmatramo statistiku

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}.$$

Na osnovu (F.6) znamo da ona ima Studentovu t_{n-1} raspodelu sa $n-1$ stepenom slobode. Određujemo broj c tako da važi

$$P\{|T| \leq c\} = \gamma.$$

Na osnovu tabele iz priloga H, za dato n i γ, c se nalazi tako da važi

$$\gamma = F_{t_{n-1}}(c) - F_{t_{n-1}}(-c) \quad \Rightarrow \quad F_{t_{n-1}}(c) = \frac{\gamma+1}{2}. \tag{18.6}$$

Sada dobijamo

$$\gamma = P\{-c \leq T \leq c\} = P\left\{\overline{X}_n - c\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + c\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right\}.$$

Dakle, interval poverenja na nivou poverenja γ za nepoznato matematičko očekivanje μ ukoliko je disperzija obeležja X nepoznata je

$$\left(\overline{X}_n - c\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}, \overline{X}_n + c\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right), \tag{18.7}$$

gde je c određeno iz (18.6).

Kada je obim uzorka $n < 30$, koristimo popravljenu uzoračku disperziju, i statistiku

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n},$$

za koju znamo da ima Studentovu t_{n-1} raspodelu sa $n-1$ stepenom slobode na osnovu (F.7). Slično kao u prethodnom slučaju, dobijamo interval poverenja na nivou poverenja γ za nepoznato matematičko očekivanje μ

$$\left(\overline{X}_n - c\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + c\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).$$

gde je c iz (18.6).

Primer 18.14

Neka slučajna promenljiva X predstavlja ocenu na ispitu i neka ona ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu. Na slučajan način izabran je uzorak od 65 studenata. Dobijeni podacu su prikazani u tabeli.

Ocena	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Frekvencija	*3*	*9*	*14*	*22*	*12*	*5*

(a) *Metodom momenata naći ocenu nepoznatih parametara m i σ.*

(b) *Proceniti 95%-im intervalom poverenja srednju ocenu ako*

(b.1) *disperzija nije poznata,*

(b.2) *disperzija je poznata i za nju uzmemo procenjenu vrednost iz (a).*

Da bismo procenili parametar m, računamo najpe uzoračku aritmetičku sredinu:

$$\bar{x}_{65} = \frac{1}{65}(5\cdot 3 + 6\cdot 9 + 7\cdot 14 + 8\cdot 22 + 9\cdot 12 + 10\cdot 5) \approx 7.7.$$

Znajući $E(X) = m$, metodom momenata dobijamo da je $m = 7.7$. Realizovanu uzoračku disperziju računamo po formuli (18.2),

$$\bar{s}_{65}^2 = \frac{1}{65}\sum_{i=1}^{65}\left(5^2\cdot 3 + 6^2\cdot 9 + 7^2\cdot 14 + 8^2\cdot 22 + 9^2\cdot 12 + 10^2\cdot 5\right) - \bar{x}_{65}^2 \approx 1.6.$$

Sa druge strane, znamo $\sigma^2 = D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Dakle, metodom momenata sada procenjujemo $\sigma^2 = 1.6$

Za (b.1) nalazimo c za koje važi $F_{t_{64}}(c) = 0.975$. Iz tabele H dobijamo $c = 2$. Dakle, iz (18.7) na osnovu datog uzorka intervalna procena za matematičko očekivanje na nivou poverenja 0.95 je $(7.3, 8.1)$.

Za (b.2) koristeći tabelu iz priloga E nalazimo c takvo da $\Phi(c) = 0.975$, tj. sada je $c = 1.96$. Uzimamo $\sigma = \sqrt{1.6}$. Na osnovu (18.4), 95%-i interval poverenja je $(7.4, 8.01)$.

Primetimo da je interval u (b.2) nešto uži od onog iz (b.1). Ovo je opravdano, jer poznavanje disperzije u (b.2) donosi određenu sigurnost.

19 Elementi teorije verovatnoće i statistike – zadaci za vežbu

19.1 Verovatnoća

Zadatak 19.1.1. *Neka su A, B i C tri događaja. Pomoću njih opisati sledeće događaje:*

1. *realizuje se samo A,*
2. *realizuje se i A i B,*
3. *sva tri događaja se realizuju,*
4. *realizuje se bar 1 od ova 3 događaja,*
5. *realizuju se bar 2 od ova 3 događaja,*
6. *realizuje se tačno 1 od ova 3 događaja,*
7. *realizuju se tačno 2 od ova 3 događaja,*
8. *realizuju se najviše 2 od ova 3 događaja,*
9. *ne realizuje se nijedan od ova 3 događaja.*

Zadatak 19.1.2. *Eksperiment se sastoji od gađanja mete i registruje se da li je pogodak ili promašaj. Opisati skup svih mogućih ishoda ako je bilo:*

1. *jedno gađanje,*
2. *3 gađanja.*

Neka je A_i pogodak u $i-$tom gađanju.

1. *Odrediti elementarne događaje A_1, A_2 i A_3.*
2. *Pomoću događaja A_1, A_2 i A_3 opisati sledeće događaje:*

   B - realizovao se bar jedan pogodak.
   C - nije se realizovao nijedan pogodak.
   D - realizovao se tačno jedan pogodak.
   E - realizovao se pogodak u prva dva gađanja.

Zadatak 19.1.3. *U kutiji se nalaze 3 žute, 4 crvene i 5 plavih kuglica. Izvlačimo tri kuglice odjednom. Odrediti verovatnoću da su izvučene:*

1. *sve tri crvene kuglice,*
2. *2 plave i 1 žuta,*
3. *sve tri kuglice različite boje.*

Zadatak 19.1.4. *U svakoj od 3 sale nalazi se 8 devojaka i 12 mladića. Iz prve sale na slučajan način biramo jednu osobu i prebacujemo je u drugu salu, a zatim iz druge sale prebacujemo jednu osobu u treću salu i iz treće sale biramo 1 osobu. Kolika je verovatnoća da je poslednja izabrana osoba mladić?*

Zadatak 19.1.5. *Iz kutije od 10 kuglica od kojih je 6 belih slučajno se biraju 2 kuglice (jedna za drugom) bez vraćanja. Naći verovatnoću da su obe izabrane kuglice bele.*

Zadatak 19.1.6. *U prvoj kutiji nalaze se 3 kuglice, od kojih 1 bela i 2 crne. U drugoj kutiji nalaze se 4 kuglice, 2 bele i 2 crne. Slučajno se bira kutija i iz nje kuglica. Pretpostavimo da je izbor kutije jednakoverovatan.*

1. *Kolika je verovatnoća da je izvučena kuglica bela?*
2. *Ako je izvučena kuglica bela, kolika je verovatnoća da je ona iz prve kutije?*

Zadatak 19.1.7. *Pretpostavimo da su saobraćajni inženjeri usaglasili vreme čekanja na semaforu tako da podstiču prolazak kroz zeleno svetlo – sa verovatnoćom 0.8 vozač će naići na ono svetlo na semaforu koje je bilo na prethodnom semaforu. Pretpostavimo da je zeleno i crveno svetlo na prvom semaforu jednako verovatno. Kolika je verovatnoća da će na drugom semaforu biti zeleno svetlo? Kolika je verovatnoća da će vozač stati bar na jednom semaforu? Kolika je verovatnoća da ako je na drugom semaforu crveno svetlo, na prvom semaforu bilo zeleno svetlo?*

Kolika je verovatnoća da će na drugom semaforu biti zeleno svetlo, ako pretpostavimo da zeleno i crveno svetlo na prvom semaforu nisu *jednako verovatni, već je verovatnoća da je zeleno svetlo na prvom semaforu 0.6?*

Zadatak 19.1.8. *Dva studenta polažu ispit. Od 20 pitanja znaju 15 istih pitanja. Studenti polažu ispit tako što biraju po 1 cedulju sa jednim pitanjem, jedan za drugim bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da drugi student položi ispit? Kolika je verovatnoća da je prvi student izvukao pitanje koje je zna ako je drugi položio ispit?*

Zadatak 19.1.9. *Neka je test za određenu retku bolest 95% korektan u sledećem smislu: ako je osoba obolela, rezultati testa su pozitivni sa verovatnoćom 0.95; ako osoba nije obolela rezultati testa su negativni sa verovatnoćom 0.95. Neka je verovatnoća da slučajno izabrana osoba iz populacije boluje od ove retke bolesti 0.001. Ako je rezultat testa pozitivan, kolika je verovatnoća da je osoba zaista obolela od ove retke bolesti?*

19.2 Slučajne promenljive

Zadatak 19.2.1. *Na putu kretanja automobila nalaze se 4 semafora. Svaki od njih ima upaljeno zeleno svetlo sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$, a crveno sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$. Odrediti raspodele slučajnih promenljivih:*

X - broj semafora pored kojih je automobil prošao do prvog zaustavljanja.

Y - broj semafora na kojima se automobil zaustavio.

Zadatak 19.2.2. *U porodici je sedmoro dece. Naći verovatnoću da je među njima:*

1. *četiri dečaka,*
2. *više dečaka od devojčica.*

Zadatak 19.2.3. *Verovatnoća da pada kiša je* 0.4, *a da ne pada kiša je* 0.6 *u toku jednog nezavisnog dana.*

1. *Odrediti raspodelu broja kišnih dana posle dana bez kiše.*
2. *Naći verovatnoću da budu bar dva uzastopna kišna dana.*

Zadatak 19.2.4. *Iz mesta A u mesto B transportuje se 5000 televizora. Verovatnoća da se televizor ošteti pri transportu je 0.0004. Naći verovatnoću da je u transportu oštećeno:*

1. *tačno 3 televizora,*
2. *bar 3 televizora,*
3. *najviše 1 televizor.*

Zadatak 19.2.5. *Mašina ima 10 000 delova. Za 6 000 delova verovatnoća otkaza je 0.0005, a za ostale 0.00025. Mašina ne radi ako otkažu 6 ili više delova. Kolika je verovatnoća da mašina ne radi?*

Zadatak 19.2.6. *Slučajna promenljiva X ima raspodelu:*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2\ldots \end{pmatrix}.$$

Naći njenu funkciju raspodele i verovatnoće $P\{X < -2\}$, $P\{\ X < 1.5\}$, $P\{X < 2\}$, $P\{X < 2.8\}$, $P\{X < 5\}$.

Zadatak 19.2.7. *Slučajna promenljiva X ima funkciju raspodele:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Naći verovatnoće $P\{X < \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{1}{3} \leq X \leq 3\}$, $P\{1.5 \leq X < 2\}$ i gustinu raspodele $\varphi_X(x)$.

Zadatak 19.2.8. *Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na 2 sata. Neka slučajna promenljiva X označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina raspodele slučajne promenljive X je data sa:*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) *Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(1)$ i $F_X(3.5)$, a zatim odrediti funkciju raspodele $F_X(x)$ za svako $x \in R$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?*

(c) *Izračunati verovatnoće $P(X \leq 1)$, $P(X > 1.5)$ i $P(X = 1)$.*

(d) *Grafički predstaviti gustinu raspodele $\varphi_X(x)$ i funkciju raspodele $F_X(x)$.*

Zadatak 19.2.9. *Za dva nezavisna elementa jednog uređaja date su raspodele vremena ispravnog rada:*

$$F_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.02t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases},$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.05t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}.$$

Naći verovatnoću da u intervalu $(0, 6)$:

1. *oba elementa otkažu,*
2. *nijedan ne otkaže,*
3. *bar jedan otkaže.*

Zadatak 19.2.10. *Kroz jednu autobusku stanicu autobus prolazi tačno na svakih 15 minuta. Putnik dolazi slučajno na stanicu. Naći verovatnoću da će čekati autobus manje od 5 minuta.*

Zadatak 19.2.11. *Grupa od 400 strelaca izvodi gađanje tako da svako od njih pogađa sa verovatnoćom 0.8. Naći verovatnoću da bude:*

1. *više od 310, a manje od 325 pogodaka,*
2. *bar 120 pogodaka,*
3. *najviše 160 pogodaka.*

Zadatak 19.2.12. *Pomoću računara vrši se obračun električne energije za 100 korisnika. Vreme obračuna za svakog korisnika ima eksponencijalnu raspodelu sa matematičkim očekivanjem 3 sekunde i ne zavisi od drugog korisnika. Odrediti verovatnoću da će obračun trajati kraće od 6 minuta.*

19.3 Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

Zadatak 19.3.1. *Funkcija raspodele slučajne promenljive X je:*

$$\begin{cases} 3a - 1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu a i odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.*

Zadatak 19.3.2. *Strelac promašuje metu sa verovatnoćom 1/20.*

(a) *Ako strelac gađa u metu 100 puta, odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X koja predstavlja broj promašaja.*

(b) *Ako strelac gađa metu dok ne promaši, odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Z koja predstavlja broj gađanja.*

Zadatak 19.3.3. *Neka slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu.*
Izračunati $E(X^4)$.

Zadatak 19.3.4. *Slučajna promenljiva X ima gustinu raspodele:*

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Izračunati $E(\frac{1}{X^2})$.

19.4 Centralna granična teorema

Zadatak 19.4.1. *Vek trajanja sijalice u satima je slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom $\mathcal{E}(0.005)$. Koliko sijalica treba imati u rezervi da bi sa verovatnoćom 0.98 vreme trajanja (neprekidnog rada) sijalica bilo bar 10 000* *sati? Pretpostavimo da je zamena sijalica trenutna i da su vremena trajanja različitih sijalica međusobno nezavisna.*

Zadatak 19.4.2. *Kišne kapi su u obliku lopte čiji je poluprečnik slučajna promenljiva*

$$R : \mathcal{U}(1, 2).$$

Tri kapi padaju u sekundi u posudu čija je zapremina 900π. *Odrediti verovatnoću da se posuda napuni za 3.5 minuta.*

Zadatak 19.4.3. *U normalnim uslovima potrošnja vode po stanovniku je 50 litara dnevno, sa standardnim odstupanjem od 8 litara. Kolika je verovatnoća da u gradu sa 200 000 stanovnika neće doći do nestašice vode ako su dnevne rezerve vode tog grada 10 050 000 litara?*

Zadatak 19.4.4. *U avion se utovara 100 kofera, čije su težine nezavisne slučajne promenljive uniformno raspodeljene između 5 i 35 kg. Kolika je verovatnoća da je ukupna težina kofera manja od 2100 kg?*

19.5 Statistika

Zadatak 19.5.1. *Vreme (u minutama) između dolaska dva klijenta u banku ima eksponencijalnu raspodelu* $\mathcal{E}(\lambda)$. *Mereno je proteklo vreme između dolaska prvih 10 klijenata. Dobijeni su sledeći podaci* $(3, 1, 0, 0, 0, 1, 8, 5, 2, 0)$. *Metodom momenata naći ocenu nepoznatog parametra* λ.

Zadatak 19.5.2. *Menadžer jedne firme želi da proceni mesečna primanja nekoliko hiljada zaposlenih sa greškom od* $\pm 3000 RSD$ *sa* 99% *poverenja. Poznato je da mesečna primanja radnika imaju normalnu raspodelu sa standardnom devijacijom* $6000 RSD$. *Koji je najmanji obim uzorka potreban za ovu procenu?*

Zadatak 19.5.3. *Neka ocena na ispitu ima normalnu* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *raspodelu. Na slučajan način izabran je uzorak od 150 studenata. Dobijeni podacu su prikazani u tabeli.*

Ocene	*Frekvencije*
5	12
6	18
7	30
8	52
9	24
10	14

(a) *Metodom momenata naći ocenu nepoznatih parametara* m *i* σ.

(b) *Proceniti 95%-im intervalom poverenja srednju ocenu ako*

- **(b.1)** *disperzija nije poznata,*
- **(b.2)** *za disperziju uzmemo procenjenu vrednost iz (a).*

Zadatak 19.5.4. *U tabeli su prikazani rezultati nekog merenja*

2.54	2.7	3	2.9	2.92
2.3	2.71	2.45	2.1	3.05
1.7	2.72	3.1	2.5	2.5
1.84	2.56	2.6	2.8	2.92
2.04	2.61	2.59	2.63	2.52

Odrediti jednostrani interval poverenja na nivou $\gamma = 0.9$ *i dvostrani interval poverenja na nivou* $\gamma = 0.95$ *za nepoznatu disperziju obeležja.*

Zadatak 19.5.5. *U tabeli su prikazani rezultati nekog merenja*

1.7	1.68	1.65	1.71	1.73
1.69	1.63	1.7	1.72	1.7
1.75	1.7	1.83	1.69	1.71
1.84	1.66	1.62	1.81	1.72
1.64	1.71	1.76	1.7	1.77
1.74	1.81	1.79	1.71	1.8

Poznato je da obeležje koje se posmatralo ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *raspodelu.*

(a) *Metodom momenata naći ocenu nepoznatih parametara* m *i* σ.

(b) *Intervalom poverenja na nivou 0.99 proceniti matematičko očekivanje ako*

- **(b.1)** *disperzija nije poznata,*
- **(b.2)** *disperzija je* $\sigma^2 = 1$.

A Tablica izvoda i integrala

1. $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a,\ a \in \mathbb{R}_+ \setminus 1$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a \in \mathbb{R}_+ \setminus 1$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\mathrm{arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\mathrm{arccos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

1. $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1$
5. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{ctg} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arcsin}\frac{x}{a} + C,\ a > 0$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a > 0$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C,\ a > 0$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ a > 0$

B | Linearna algebra

B.1 Osnovni pojmovi

Neka je A matrica formata $n \times n$ sa elementima a_{ij}. Pišemo $[a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$.

Transponovana matrica za matricu A, u oznaci A^T, se od matrice A dobija kad se matrici A zamene vrste sa kolonama, tj. $A^T = [a_{ji}]_{i,j=1,\ldots,n}$.

Konjugovana matrica matrici A, u oznaci $\overline{A}$, se od matrice A dobija kada se za svaki element a_{ij} uzme njegov konjugovani $\overline{a}_{ij}$, tj. $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$.

Konjugovano transponovana matrica za matricu A se označava sa $A^\dagger$. Dakle, $A^\dagger = (\overline{A})^T$. Ukoliko se podestimo da se skalarni proizvod vektora x i y definiše sa

$$(x, y) = x^T \overline{y},$$

možemo da uočimo vezu između matrice A i njene konjugovano transponovane

$$(Ax, y) = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T (\overline{\overline{A}})^T \overline{y} = x^T \overline{((\overline{A})^T y)} = x^T \overline{A^\dagger y} = (x, A^\dagger y).$$

Matrica sa osobinom $A^\dagger = A$ se naziva Ermitska ili samoadjungovana matrica.

B.2 Sistem linearnih algebarskih jednačina

Posmatrajmo sistem od n jednačina za n nepoznatih skalara $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

Ukoliko uvedemo oznake:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

sistem možemo zapisati u matričnom obliku

$$AX = b.$$

Ukoliko je $b = 0$ sistem je homogen, a za $b \neq 0$ sistem je nehomogen. U zavisnosti od matrice A, diskutujemo rešenje sistema:

- ukoliko je $\det A \neq 0$, onda postoji jedinstveno rešenje sistema. Matrica A je regularna tj. postoji njena inverzna matrica, tako da se jedinstveno rešenje sistema može zapisati u matričnom obliku:
$$X = A^{-1}b.$$
Homogen sistem $AX = 0$ uvek ima trivijalno rešenje $X = 0$, a ukoliko je $\det A \neq 0$ ovo rešenje je i jedinstveno.

- ukoliko je $\det A = 0$, tada rešenje sistema ili ne postoji ili postoji ali nije jedinstveno. Homogen sistem pored trivijalnog ima beskonačno mnogo rešenja.

B.3 Linearna (ne)zavisnost vektora

Definicija B.1

Vektori $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su linearno zavisni ako postoje skalari $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tako da je bar jedno c_i, $i = 1, \ldots, n$ različito od nule i

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n = 0. \tag{B.1}$$

Ako je (B.1) zadovoljeno jedino za $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, tada su vektori $X_1, X_2, \ldots, X_n$ linearno nezavisni.

Zanimljivo je da sistem (B.1) možemo da shvatimo kao sistem linearnih jednačina za koeficijente $c_1, \ldots, c_n$. Zaista, ukoliko vektore $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zapišemo po komponentama:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,n} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{2,n} \end{bmatrix}, \ldots, X_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{bmatrix},$$

tada sistem (B.1) možemo zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \ldots & x_{n,1} \\ \vdots & & & \\ x_{1,n} & x_{2,n} & \ldots & x_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [X_1|X_2|\ldots|X_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0.$$

Sada je lako zapisati kriterijum za linearnu (nezavisnost):

- ukoliko je $\det([X_1|X_2|\ldots|X_n]) \neq 0$, jedino rešenje za (B.1) je $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, tj. vektori $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su linearno nezavisni,
- ukoliko je $\det([X_1|X_2|\ldots|X_n]) = 0$, postoje i druga rešenje za (B.1) te su vektori X_1, X_2, $\ldots$, X_n su linearno zavisni.

B.4 Problem svojstvenih (karakterističnih) vrednosti i vektora

U opštem slučaju, kada matrica A deluje na vektor dobijamo neki drugi vektor. Posebno je interesantno ispitati da li postoji vektor takav da kad data matrica deluje na njega on promeni samo svoju dužinu, ne i pravac. Odnosno, pitamo se da li postoji vektor X takav da:

$$AX = \lambda X, \tag{B.2}$$

gde je λ skalar. Ovo je problem svojstvenih vrednosti: vektor X koji zadovoljava (B.2) se naziva svojstveni (karakteristični) vektor za matricu A, a λ svojstvena (karakteristična) vrednost za matricu A.

Jednačina (B.2) može da se zapiše u obliku:

$$(A - \lambda I)X = 0,$$

gde je I jedinična matrica. Znamo, pored trivijalnog rešenja $X = 0$, imaćemo i netrivijalna rešenja ako izaberemo λ takvo da

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{B.3}$$

Jednačina (B.3) se naziva karakteristična jednačina za matricu A. To je zapravo polinom stepena n od λ, tako da imamo n rešenja, to su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ako se neka svojstvena vrednost pojavi m puta, kažemo da je ona višestrukosti m.

Svakoj svojstvenoj vrednosti odgovara (generiše) bar jedan svojstveni vektor. Svojstvena vrednost višestrukosti m generiše q *linearno nezavisnih* svojstvenih vektora, pri čemu je $1 \leq q \leq m$. Ako su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ različite svojstvene vrednosti, onda su odgovarajući svojstveni vektori $X_1, \ldots, X_n$ linearno nezavisni. Posebno, ako je A Ermitska matrica, važi sledeće:

1. sve svojstvene vrednosti su realne,
2. postoji n linearno nezavisnih svojstvenih vektora (bez obzira na višestrukost svojstvenih vrednosti).

B.5 Matrične funkcije

U ovom kursu posmatramo i matrične funkcije, odnosno posmatramo matrice čiji elementi su funkcije realne promenljive x:

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

Izvod i integral matrične funkcije se računa po komponentama:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x}\right]_{1\leq i,j\leq n}, \qquad \int_a^b A(x)\mathrm{d}x = \left[\int_a^b a_{ij}\mathrm{d}x\right]_{1\leq i,j\leq n}.$$

B.6 Linearna (ne)zavisnost dve funkcije

Neka su funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ definisane na istom intervalu $\mathbb{I}$. Funkciju $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, gde su c_1 i c_2 konstante nazivamo linearnom kombinacijom funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$.

Definicija B.2

Za funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ kažemo da su linearno zavisne na nekom intervalu $\mathbb{I}$ ako postoje konstante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, od kojih je bar jedna različita od nule, takve da za svako $x \in \mathbb{I}$ važi

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Ako iz gornje relacije sledi $c_1 = c_2 = 0$, kažemo da su funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ linearno nezavisne na intervalu $\mathbb{I}$.

Primetimo, ako su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ nenula funkcije na $\mathbb{I}$, onda su one linearno zavisne ako i samo ako su proporcionalne, tj. postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ takva da

$$f_2(x) = c f_1(x) \quad \text{ili} \quad f_1(x) = c f_2(x),$$

za sve $x \in \mathbb{I}$. Pokažimo ovu osobinu. U jednom smeru, pretpostavimo da su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ linearno zavisne na $\mathbb{I}$. Pokažimo da su one proporcionalne. Linearna zavisnost na intervalu $\mathbb{I}$ znači da postoje konstante c_1 i c_2, koje obe nisu jednake nuli, tako da

$$c_1\, f_1(x) + c_2\, f_2(x) = 0.$$

Ako $c_1 \neq 0$, onda prethodnu jednačinu možemo da podelimo sa c_1 odakle sledi $f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x)$. Ako je pak $c_2 \neq 0$, onda prethodnu jednačinu možemo da podelimo sa c_2 odakle dobijamo $f_2(x) = -\frac{c_1}{c_2} f_1(x)$. Pokažimo i obrnuti smer, da ako jednu funkciju od druge možemo dobiti množenjem skalarom, onda su one linearno zavisne funkcije. Neka je $f_1(x) = cf_2(x)$ za $x \in \mathbb{I}$. Odavde dobijamo

$$-f_1(x) + cf_2(x) = 0, \quad x \in \mathbb{I},$$

a pošto je $-1 \neq 0$ sledi linearna zavisnost funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ na intervalu $\mathbb{I}$.

Primer B.3

Funkcije $f_1(x) = \sin 2x$ i $f_2(x) = \sin x \cos x$ su linearno zavisne na $\mathbb{R}$, jer $f_1(x) = 2f_2(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primer B.4

Funkcije $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = |x|$ su linearno nezavisne na $\mathbb{R}$. Na poluintervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$ su linearno zavisne.

B.7 Linearna (nezavisnost) skupa funkcija

Definicija B.5

Skup funkcija $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ je linearno zavisan na intervalu $\mathbb{I}$ ako postoje konstante c_1, c_2, $\ldots$, c_n, ne sve jednake nuli, tako da

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{I}.$$

U suprotnom je linearno nezavisan.

Primer B.6

$\left\{\cos^2 x, \sin^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \frac{1}{\cos^2 x}\right\}$ je linearno zavisan skup funkcija na $\mathbb{R}$, jer važi

$$\cos^2 x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Primetimo, skup funkcija $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ je linearno zavisan na intervalu $\mathbb{I}$ ako bar jedna funkcija može da se predstavi kao linearna kombinacija preostalih funkcija.

Primer B.7

$\left\{\sqrt{x}+5, \sqrt{x}+5x, x-1, x^2\right\}$ je linearno zavisan na $(0,+\infty)$, jer

$$\sqrt{x}+5x = (\sqrt{x}+5) + 5(x-1) + 0x^2.$$

B.8 Linearna (nezavisnost) skupa vektorskih funkcija

Konačno, proširujemo pojam linearne (ne)zavisnosti na vektorske funkcije:

Definicija B.8

Za vektorske funkcije $\vec{f}_i(t)$, $i=1,\ldots,n$, se kaže da su linearno zavisne na nekom intervalu $\mathbb{I}$ ako postoje skalari $c_1, c_2, \ldots, c_n$ koji nisu svi jednaki nuli, takvi da za svako $t \in \mathbb{I}$

$$c_1\vec{f}_1(t) + c_2\vec{f}_2(t) + \cdots + c_n\vec{f}_n(t) = 0.$$

Ako iz gornje relacije sledi $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, kažemo da su vektorske funkcije $\vec{f}_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, linearno nezavisne na intervalu $\mathbb{I}$.

C | Stepeni redovi

Stepeni red sa centrom u tački x_0 je funkcionalni red oblika

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k. \tag{C.1}$$

Definicija C.1

Stepeni red konvergira u tački x ako

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k \ \to \ s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad kad \quad n \to \infty.$$

Teorema C.2

Za svaki stepeni red (C.1) postoji $0 \leq R \leq +\infty$ tako da važi

1. *ako je $0 < R < +\infty$ za sve x sa osobinom $|x - x_0| < R$ red konvergira, a za $|x - x_0| > R$ red divergira,*
2. *$R = 0$ red konvergira samo za $x = x_0$,*
3. *$R = +\infty$ red konvergira na $\mathbb{R}$.*

Za $R > 0$, interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ naziva se interval konvergencije, a R poluprečnik konvergencije stepenog reda.

Napomena C.13. *U rubnim tačkama intervala konvergencije, tj. u tačkama $x = x_0 - R$ i $x = x_0 + R$ potrebna su dodatna ispitivanja konvergencije (brojnog reda!).*

Za izračunavanje poluprečnika konvergencije koristimo Dirihleovu formulu

$$R = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|.$$

Teorema C.3

Na intervalu konvergencije $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$, suma reda $s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ ima sledeće osobine:

1. *funkcija s je neprekidna na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$,*
2. *red se može integraliti i diferencirati član po član. Novodobijeni redovi pri tome imaju isti poluprečnik konvergencije.*

Primer C.4

Neka je

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots .$$

Izvod ove funkcije je

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1}.$$

Napomena C.14. *Ako* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = 0$, $R > 0$, $\forall x \in \mathbb{I}$, *onda sledi* $c_k = 0$, $\forall k$.

Definicija C.5

Funkcija f *je (realna) analitička u tački* x_0 *ako postoje brojevi* $r > 0$, a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *takvi da za svako* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ *važi*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Shodno ovoj definiciji, primetimo da je svaki stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ za $R > 0$ jedna analitička funkcija u tački x_0.

Definicija C.6

Neka je funkcija f *definisana u nekoj okolini tačke* x_0 *i neka je neograničeno diferencijabilna u* x_0. *Red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

naziva se Tejlorov red funkcije f *u tački* x_0. *Specijalno, za* $x_0 = 0$ *imamo Maklorenov red.*

Teorema C.7

Ako se funkcija f *može predstaviti stepenim redom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

na intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$, *tada se to može uraditi samo na jedan način i to formulom*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Funkcija f *je pri tome realna analitička u svakoj tački intervala* $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Dakle, ako funkcija može da se predstavi pomoću stepenog reda, tada je f jednaka svom Tejlorovom redu. Postoje beskonačno diferencijabilne funkcije koje nisu jednake svom Tejlorovom razvoju tj. nisu realne analitičke.

Primer C.8

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

nije realna analitička.

Postavlja se pitanje kada je beskonačno diferencijabilna funkcija jednaka svom Tejlorovom redu, tj. kada je i analitička. Da bismo odgovorili na to pitanje, podsetimo se da je n-ta parcijalna suma za Tejlorov red zapravo Tejlorov polinom n-tog stepena. Takođe se podsetimo Tejlorove formule,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x),$$

gde je $r_n(x) = o(|x-x_0|^n)$, $x \to x_0$.

Teorema C.9

Neka je funkcija f beskonačno diferencijabilna na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$. Funkcija f je realna analitička na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ ako i samo ako ostatak u Tejlorovoj formuli teži 0 kad $n \to \infty$ za svako $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

Dakle, f je realna analitička na $(x_0 - R, x_0 + R), R > 0$, ako i samo ako Tejlorov polinom konvergira baš ka funkciji f.

U sledećoj tabeli su dati Maklorenovi redovi nekih funkcija.

Maklorenov red	Interval konvergencije
$e^x = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$(-\infty, +\infty)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$(-\infty, +\infty)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$(-1, 1]$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$

D | Furijeovi redovi

Ideja je da neku funkciju $f(x)$ definisanu na $[-\pi, \pi]$ (ili periodičnu sa periodom 2π) predstavimo pomoću trigonometrijskog reda:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = s(x).$$

Ako je $f(x)$ integrabilna, tada je

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x, \quad n \geq 1, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Primetimo da je koeficijent a_0 zapravo srednja vrednost of $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Teorema D.1

Neka je realna funkcija f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$ sem eventualno u konačno mnogo tačaka. Tada

- *ako je f neprekidna u x, $f(x) = s(x)$;*
- *ako f ima prekid u x, tada je $s(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;*
- *na krajevima intervala je $s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.*

Ako je $f \in C^2$ Furijeov red uniformno konvergira i red se može diferencirati član po član.

U opštem slučaju, za interval $[-l, l]$ imamo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = s(x),$$

pri čemu su koeficijenti

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \mathrm{d}x, \\
a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{d}x, \quad n \geq 1, \\
b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{d}x, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

E Vrednosti funkcije $\Phi(x)$

	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Numeričke vrednosti za $\Phi(x)$ definisano u (14.8), za x iz intervala $[0, 3.9]$. Da bismo našli $\Phi(1.42)$, gledamo u vrstu koja odgovara 1.4 i u kolonu koja odgovara +0.02, tako da je $\Phi(1.42) = 0.9222$.

F Transformacije slučajnih promenljivih

1. Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $X_i : \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, k$, onda je njihova linearna kombinacija
$$Y = \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \tag{F.1}$$
slučajna promenljiva sa raspodelom $Y : \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i m_i, \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \sigma_i^2\right)$;
2. Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $X_i : \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, \ldots, k$, onda slučajna promenljiva
$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i X_i^2 \tag{F.2}$$
ima hi-kvadrat raspodelu sa n stepeni slobode. Gustina ove raspodele je
$$\varphi_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0; \end{cases}$$
3. Statistika
$$\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \tag{F.3}$$
ima hi-kvadrat raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode;
4. Statistika
$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \tag{F.4}$$
ima hi-kvadrat raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode;
5. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, takve da X ima normalnu $X : \mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu, a Y ima hi-kvadrat raspodelu sa n stepeni slobode, tada slučajna promenljiva
$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \tag{F.5}$$
ima Studentovu raspodelu sa n stepeni slobode. Gustina ove raspodele je
$$\varphi_{t_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\, n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$
6. Statistika
$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} \tag{F.6}$$
ima Studentovu raspodelu sa $n-1$ stepenom slobode;
7. Statistika
$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \tag{F.7}$$
ima Studentovu raspodelu sa $n-1$ stepenom slobode.

G | χ^2_n raspodela

Za dato n i procenat $100\gamma\%$, vrednosti c za koje $\gamma = F_{\chi^2_n}(c) = \int_0^c \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\mathrm{d}x$

n	0.1%	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	12.5%	20.0%	25.0%	33.3%	50.0%
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	38.785	41.449	42.942	45.184	49.335
55	28.173	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	43.220	46.036	47.610	49.972	54.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	47.680	50.641	52.294	54.770	59.335

n	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.892	53.733	56.334	58.164	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661
55	57.016	58.945	61.665	63.577	67.211	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749	93.168
60	62.135	64.147	66.981	68.972	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607

H Studentova t_n raspodela

Za dato n i procenat $100\gamma\%$, vrednosti c za koje

$$\gamma = F_{t_n}(c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{d}x$$

n	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Literatura

1. D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Second Edition, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2008.

2. P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall, *Differential Equations*, Fourth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.

3. M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2006.

4. W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Ninth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2009.

5. R. D. De Veaux, P. F. Velleman, D. E. Bock, *Intro Stats*, Third Edition, Addison-Wesley, 2009.

6. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, 2010.

7. Z. Lozanov-Crvenkovi¸ *Statistika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet Novi Sad, 2012.

8. S. Gilezan, Z. Lužanin, T. Grbić, B. Mihailović, Lj. Nedović, Z. Ovcin, J. Ivetić, K. Doroslovački, *Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike*, Novi Sad, 2009.

9. J. Knežević Miljanović, S. Janković, J. Manojlović, V. Jovanović, *Parcijalne diferencijalne jednačine, teorija i zadaci*, Univerzitetska štampa Beograd, 2000.

10. R. Knobel, *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, American Mathematical Society, Volume 3, 2000.

11. V. Marić, M. Budinčević, *Diferencijalne i diferencne jednačine*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2005.

12. M. Nedeljkov, *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2004.

13. V. W. Noonburg, *Differential Equations: From Calculus to Dynamical Systems*, Second Edition, MAA Press, American Mathematical Society, Volume 43, 2019.

14. D. Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2008.

15. D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Tenth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

517.9(075.8)
519.2(075.8)

ЧОЛИЋ, Милана
Matematika za studente fizike [Elektronski izvor] : diferencijalne jednačine i elementi teorije verovatnoće i statistike / Milana Čolić. - Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet, 2020

Način pristupa (URL):
https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/colic_matematika_za_studente_fizike.pdf.
- Opis zasnovan na stanju na dan 19.11.2020. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-479-5

а) Диференцијалне једначине б) Теорија вероватноће в) Математичка статистика

COBISS.SR-ID 26103817