[1] Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Maja Pech

Diskretne strukture 1

Novi Sad, 2020

Naziv udžbenika:	Diskretne strukture 1
Autor:	dr Maja Pech, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Recenzenti:	dr Dragan Mašulović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu dr Jovanka Pantović, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu
Izdavač:	Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu
Za izdavača:	prof. dr Milica Pavkov Hrvojević, dekan Fakulteta

Publikovanje i upotrebu ovog udžbenika je odobrilo Nastavno-naučno veće Prirodno-matematičkog fakulteta na svojoj sednici 12.03.2020.godine

ISBN: 978-86-7031-478-8

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

51-74:004(075.8)

ПЕХ, Maja, 1977-
Diskretne strukture 1 [Elektronski izvor] / Maja Pech. - Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet, 2020

Način pristupa (URL): www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/pech_diskretne_strukture_1.pdf. - Opis zasnovan na stanju na dan 30.7.2020. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-478-8

a) Дискретна математика

COBISS.SR-ID 18310153

Predgovor

> Mathematics is not about numbers,
> equations, computations, or algorithms:
> it is about understanding.
>
> *(William Paul Thurston)*

Na stranicama koje slede nalazi se tekst koji bi trebalo da posluži kao uvod u visokoškolsku nastavu diskretne matematike. Nastao je na osnovu iskustva stečenog tokom višegodišnjeg rada autorke sa studentima početnih semestara informatike kako na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, tako i na Univerzitetu za tehnologije u Drezdenu, a namenjen je, pre svega, studentima računarskih nauka.

Kažu da se ne sme propustiti nijedna prilika da se predmet matematike učini zanimljivim, pa je to bila i jedna od ideja vodilja pri pisanju ovog teksta, koji je podeljen u devet glava. Prvih pet je posvećeno matematičkom opismenjavanju, te one sadrže najosnovnija znanja vezana za skupove, logiku, funkcije i relacije. Preostale četiri predstavljaju kratak uvod u teoriju grafova, matematičku disciplinu od fundamentalnog značaja za sve one koji nameravaju da se ozbiljnije bave računarskim naukama. Svaka glava se završava kratkim izborom zadataka za samostalno vežbanje, sa ciljem da se čitaocu omogući da proveri znanja koja je stekao čitajući tekst.

Zahvaljujem se recenzentima dr Draganu Mašuloviću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu i dr Jovanki Pantović, redovnom profesoru Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu na korisnim primedbama i sugestijama koje su doprinele kvalitetu ovog teksta.

Novi Sad, mart 2020. Maja Pech

Sadržaj

1 O skupovima, naivno

Unter einer "'Menge"' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "'Elemente"' von M gennant werden) zu einem Ganzen.

(Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1895)

Najteže je početi. Matematika u obrazovni sistem ulazi na mala vrata — svi pravimo svoje prve korake na njenoj nepreglednoj teritoriji pokušavajući da ovladamo umetnošću pisanja neobičnih znakova koji će nas pratiti kroz život pod imenom „brojevi“. Ti znakovi zatim počinju da dobijaju smisao i da se povezuju sa različitim fenomenima naše svakodnevnice, praveći vezu između *pojma* broja i *simbola* kojim je predstavljen. Ipak, pojam broja nije na početku našeg doživljaja matematike. To počasno mesto pripada njegovoj preteči – *pojmu skupa*. Stoga ćemo i mi naše kratko putovanje kroz osnovna matematička znanja neophodna za ozbiljniji pristup računarskim naukama početi uvođenjem ovog pojma.

1.1 Dug put do pojma skupa

Kako se u matematici uvode novi pojmovi? Najčešće se za tu svrhu koristi *definicija*. Definicijom obično utvrđujemo na koji način se neki pojam formira ili dobija od nekog drugog, već poznatog pojma.

Primer 1. Skup $F \subseteq O_A$, koji sadrži sve projekcije i zatvoren je u odnosu na kompoziciju, je *klon* na skupu A. $\triangle$

Kako je iz samog objašnjenja definicije jasno da ona koristi već postojeće pojmove za formiranje novih, prirodno se postavlja pitanje da li je baš sve pojmove potrebno definisati. Odgovor na ovo pitanje je negativan. Definicije nedostaju kod tzv. *osnovnih pojmova* (kao što su „tačka“

ili „skup“), kao i kod pojmova za koje pretpostavljamo da su već poznati (na primer, „prirodan broj“). Ovakav način uvođenja pojmova naziva se *aksiomatski* i koristi tzv. implicitni pristup. To znači da pojam ne objašnjavamo kao u Primeru 1, gde smo za uvođenje pojma klona koristili konstrukciju oblika

$$\boxed{\underline{\text{pojam}} \text{ je } \underline{\text{konkretan opis}}},$$

već ga uvodimo preko niza osobina, izbegavajući (iz razloga različite prirode) da preciziramo šta podrazumevamo pod njim.

Primer 2. Prirodni brojevi se u matematiku uvode aksiomatski. Opšteprihvaćen je Peanov sistem aksioma:

(P1) 0 je prirodan broj.

(P2) Svaki prirodan broj n ima tačno jednog *sledbenika* n^+.

(P3) Svaki prirodan broj je sledbenik najviše jednog prirodnog broja.

(P4) 0 nije sledbenik prirodnog broja.

(P5) Svaki skup S, koji sadrži broj 0 i za svaki broj n koji sadrži, sadrži i njegov sledbenik n^+, sadrži sve prirodne brojeve.

Kao što se može videti, nigde nema opisa oblika „prirodan broj je...“, ali se iz ovih pet rečenica (*aksioma*, odnosno, iskaza čiju istinitost prihvatamo) može steći prilično jasna predstava o tome na šta mislimo kada kažemo „prirodan broj“. Štaviše, pomoću ovog sistema možemo konstruisati skup prirodnih brojeva, polazeći od nule. Jedan će biti sledbenik nule, dva sledbenik jedinice itd. △

Kao što je već rečeno, pojam skupa ima istu sudbinu kao i pojam prirodnog broja. Iako je bilo pokušaja da se skup objasni na jednostavan način, opisom pomoću jedne rečenice, ispostavilo se da taj put ne može dovesti do matematički korektno formiranog pojma skupa, o čemu će nešto kasnije biti reči. Tu pomalo neprijatnu činjenicu ćemo zanemariti za trenutak i nastavićemo da sledimo Cantorovu zamisao koja je poslužila i kao moto ovog poglavlja, u nadi da će ona biti dovoljna da se stvori odgovarajuća intuicija o ovom fundamentalnom matematičkom pojmu. Drugim rečima, za nas će skup predstavljati „zajednicu“ nekoliko objekata koje posmatramo ili o kojima razmišljamo. Takve objekte ćemo nazivati *elementima* skupa.

Uvođenjem pojma elementa skupa javlja se prirodna potreba da se razvije i prigodan način zapisivanja naših (matematičkih) misli o skupovima, poznatiji kao *notacija* za skupove. Sveopšti je dogovor da se za imena skupova koriste velika slova abecede — A, B, C,..., dok se kao oznake elemenata često koriste mala slova abecede — a, b, c,..., a pored njih su to često i brojevi, neki drugi specijalni simboli, pa čak i velika slova abecede. U poslednjem slučaju je potrebno voditi računa da se ne koristi ista oznaka i za skup i za neki njegov element.

Primer 3. Postoji nekoliko skupova koji se standardno koriste i za njih postoje posebne, internacionalno usvojene, oznake. To su:

$\mathbb{N}$ skup $\{0, 1, 2, \dots\}$ svih *prirodnih brojeva*;

$\mathbb{Z}$ skup $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ svih *celih brojeva*;

$\mathbb{Q}$ skup svih *racionalnih brojeva*;

$\mathbb{R}$ skup svih *realnih brojeva*;

$\mathbb{C}$ skup svih *kompleksnih brojeva*;

$\emptyset$ *prazan skup*, tj. skup bez elemenata.

Primetimo da je, u skladu sa Peanovim aksiomama navedenim u Primeru 2, nula prepoznata kao prirodan broj i napomenimo da to nije uvek slučaj — nemali broj matematičara smatra da nula nije prirodan broj. Da bismo izbegli konfuziju, u daljem tekstu ćemo skup $\{1, 2, \dots\}$ označavati sa $\mathbb{N}_+$. Napomenimo i da se u nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama obično sa $\mathbb{N}$ označava skup $\{1, 2, \dots\}$. Stoga je pri čitanju nekog matematičkog teksta u kojem se pojavljuje skup $\mathbb{N}$ važno utvrditi na koji od dva moguća skupa misli autor tog teksta. $\triangle$

Pored oznaka za skupove i njihove elemente, potrebni su nam još neki specijalni simboli kao što su zagrade ($\{,\}$), znak jednakosti, znak kojim se označava pripadnost nekog elementa, odnosno, skupa elemenata datom skupu ($\in$, $\subseteq$). Obično koristimo dva različita znaka jednakosti: u jednakostima i tvrdnjama oznaku $=$, dok se u definicijama koristi oznaka $:=$.

Primer 4. Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ važi sledeće tvrđenje:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2},$$

dok je sa

$$\binom{n}{2} := \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

definisano (ili *uvedeno*) da oznaka $\binom{n}{2}$ predstavlja skraćeni zapis za izraz $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. △

Činjenicu da je a element skupa A zapisujemo kao $a \in A$, dok $b \notin A$ predstavlja zapis tvrdnje da b nije element skupa A. Problem iskazivanja istovremene pripadnosti nekoliko elemenata istom skupu moguće je rešiti uvođenjem pojma *podskupa*. Kažemo da je B *podskup* skupa A (u oznaci $B \subseteq A$) ukoliko su svi njegovi elementi istovremeno i elementi skupa A.

Primer 5. Neka je $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$. Tada važi

$$0 \in A, \quad 1 \notin A, \quad \text{i} \quad B \subseteq A.$$

△

U Primeru 5 su skupovi A i B zadati nabrajanjem svih elemenata koje sadrže. Ovakav način zadavanja skupova je izuzetno pristupačan, ali nije uvek i moguć — skupove koji sadrže izuzetno veliki broj elemenata je teško, a često i nemoguće prikazati na ovaj način. Stoga se pribegava još jednom načinu zadavanja skupova, gde se koristi zapis preko neke osobine.

Primer 6. Neka su A i B skupovi iz Primera 5. Tada je

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 8 \text{ i } x \text{ je paran broj}\};$$
$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 8 \text{ i } x \text{ je stepen dvojke}\}.$$

△

Ovaj zapis koristi sledeći opšti oblik: Neka je dat skup U. Tada skup

$$A = \{x \mid x \in U, \text{osobina}(x)\}$$

ima za elemente tačno one elemente skupa U koji zadovoljavaju navedenu osobinu.

Sada kada znamo da zapišemo skupove preko njihovih elemenata, prirodno se nameće pitanje kakvi objekti mogu biti kandidati za elemente nekog skupa. Primetimo i da pojam skupa ne sadrži nikakva ograničenja po pitanju prirode njegovih elemenata, a sledeći primer pokazuje da elementi skupa mogu biti čak i drugi skupovi.

Primer 7. Četiri studenta (A, B, C i D) učestvuju na šahovskom turniru. Predviđeno je da igra svaki protiv svakog. Svaka partija se može opisati jednim dvoelementnim podskupom skupa $\{A, B, C, D\}$, pa je skup svih partija dat sa

$$\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

△

Među svim skupovima čiji su elementi drugi skupovi posebno mesto zauzima *partitivni skup*.

Definicija 8. *Partitivni skup* $\mathfrak{P}(A)$ skupa A je skup svih podskupova skupa A.

Primer 9. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$. Tada je partitivni skup skupa A dat sa

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(A) \;=\; \Big\{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\},\\ &\{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\},\\ &\{a, b, c, d\}\Big\}.\end{aligned}$$

△

1.2 Računanje sa skupovima

Za računanje sa skupovima koristimo *skupovne operacije*. Postoje tri osnovne binarne skupovne operacije — *unija*, *presek* i *razlika*.

Definicija 10. Neka su dati skupovi A i B. Tada je

- *unija skupova A i B* data sa $A \cup B := \{a \mid a \in A \text{ ili } a \in B\}$,
- *presek skupova A i B* data sa $A \cap B := \{a \mid a \in A \text{ i } a \in B\}$ i
- *razlika skupova A i B* data sa $A \setminus B := \{a \mid a \in A \text{ i } a \notin B\}$.

Primer 11. Neka je $A = \{1, 2, 4, 8\}$ i $B = \{1, 2, 3, 5\}$. Tada važi

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}, \quad A \cap B = \{1, 2\}, \quad A \setminus B = \{4, 8\} \quad B \setminus A = \{3, 5\}.$$

Primetimo da kod primene operacije razlike redosled zapisivanja skupova jeste bitan i da $A \setminus B$ ne daje isti rezultat kao i $B \setminus A$. Kod operacija unije i preseka ne moramo voditi računa o redosledu navođenja skupova. △

Prethodni primer otvara još jedno važno pitanje: stečeno iskustvo nam govori da u računanju jedno od centralnih mesta zauzima znak jednakosti, pa je neophodno utvrditi šta to znači u slučaju skupova, odnosno, kako možemo prepoznati da su dva skupa jednaka. Odgovor na ovo pitanje je prilično jednostavan — dva skupa su *jednaka* ukoliko imaju iste elemente. U praksi se jednakost skupova A i B proverava pomoću dva testa: ukoliko je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda je i $A = B$.

Napomena 12. Pomoću skupovnih operacija dobijamo nove skupove:

- uniju skupova A i B, čiji elementi su tačno oni koji se pojavljuju kao element bar jednog od datih skupova,
- presek skupova A i B, čiji elementi su tačno oni koji se pojavljuju kao element i jednog i drugog skupa i
- razliku skupova A i B, čiji elementi su tačno oni elementi skupa A koji nisu elementi skupa B.

Ovde, u suštini, ne pravimo razliku između imena novodobijenog skupa i operacije pomoću koje je taj skup dobijen.

U Primeru 11 smo već utvrdili neke osobine skupovnih operacija koje podsećaju na neke od osobina koje imaju osnovne operacije na brojevima kao što su sabiranje i množenje. Ispostavlja se da su unija i presek skupova *komutativne*, odnosno, *asocijativne* operacije, kao i da važe *distributivnost* preseka prema uniji i distributivnost unije prema preseku. Simbolički zapisano, za proizvoljne skupove A, B i C imamo:

$$\begin{aligned} A \cap B = B \cap A \quad \text{i} \\ A \cup B = B \cup A; \end{aligned} \qquad \text{(komutativnost)}$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{i} \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \end{aligned} \qquad \text{(asocijativnost)}$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{i} \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned} \qquad \text{(distributivnost)}$$

Analogija sa brojevima je prilično jasna, uz jednu malu razliku — množenje jeste distributivno prema sabiranju, ali sabiranje nije distributivno prema množenju. Ovo nije jedina razlika, jer za skupovne operacije važi i jedna osobina koja se retko sreće kod brojeva, a to je osobina *idempotentnosti.* Naime, za proizvoljan skup A važi

$$\begin{aligned} A \cap A = A \quad \text{i} \\ A \cup A = A. \end{aligned} \qquad \text{(idempotentnost)}$$

Skupovne operacije unije i preseka se mogu primeniti i na više od dva skupa, zahvaljujući osobini asocijativnosti. Kako redosled primene operacije preseka nije bitan, to je moguće pojednostaviti zapis za

$$(\dots((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cdots \cap A_n),$$

izostavljanjem zagrada, čime se dobija

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

U praksi se često koriste i alternativni zapisi

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ili} \quad \bigcap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}.$$

Za uniju n skupova se analogno koristi

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

odnosno,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ili} \quad \bigcup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}.$$

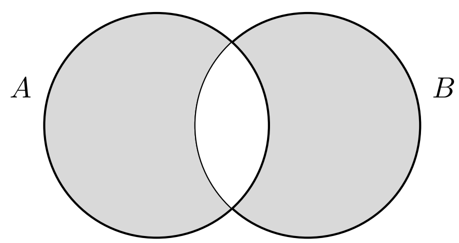
U oba slučaja govorimo o *uopštenim skupovnim operacijama.*

Pored preseka, unije i razlike, postoje i druge operacije koje primenjujemo na skupovima. Od svih takvih izdvojićemo još jednu binarnu, poznatiju kao *simetrična razlika*, i jednu unarnu, tzv. *komplement skupa.*

Definicija 13. Neka su dati skupovi A i B. *Simetrična razlika* skupova A i B je data sa

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Primetimo da je ova operacija takođe komutativna i asocijativna. Da bismo shvatili o kom skupu je ovde zapravo reč, predstavićemo ovu operaciju i grafički. To činimo pomoću *Vennovih dijagrama*, kao što je prikazano na Slici 1.1. Simetrična razlika je skup koji odgovara osenčenom delu slike.



Slika 1.1: Simetrična razlika skupova A i B

Primer 14. Neka je $A = \{a, b, c, x, y, z\}$, a $B = \{y, z, w\}$. Tada je

$$A \Delta B := \{a, b, c, x\} \cup \{w\} = \{a, b, c, x, w\}.$$

$\triangle$

Definicija 15. Za dati skup U i $A \subseteq U$, označavamo sa

$$\overline{A} := U \setminus A$$

komplement od A u U.

Primer 16. Neka je $U = \mathbb{N}$, i neka je A skup svih parnih prirodnih brojeva. Tada je $\overline{A}$ skup svih neparnih prirodnih brojeva. $\triangle$

Uvođenje operacije komplementa nam omogućava da u računanju sa skupovima koristimo *De Morganova pravila* za skupove.

Tvrđenje 17 (De Morganova pravila)**.** *Neka je dat skup U i $A, B \subseteq U$. Tada važi:*

$$\begin{aligned} \overline{(A \cap B)} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{(A \cup B)} &= \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

Sve operacije na skupovima koje smo dosad razmatrali imale su jednu zajedničku osobinu — rezultat njihove primene je uvek bio skup čiji elementi su bili iste „prirode“ kao i elementi skupova na koje smo primenjivali operacije. Međutim, takve operacije nisu dovoljne da bi se sa skupovima radilo u punom obimu. Skupovi su, pre svega, matematički objekti koji ne nose sa sobom određenu vrstu uređenja. Da li ćemo skup parnih prirodnih brojeva manjih od 10 zapisati kao $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ili $\{6, 2, 0, 8, 4\}$, potpuno je svejedno. Kako određeni problemi zahtevaju i prisustvo uređenja, neophodno je premostiti ovaj problem. To se postiže uvođenjem pojma *uređenog para*.

Definicija 18. Skup $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ zovemo *uređeni par* sa komponentama a i b, i zapisujemo kao (a, b).

Uređeni parovi se najčešće sreću kao elementi skupova koje dobijamo primenom jedne nešto kompleksnije operacije na skupovima – *Descartesovog proizvoda skupova.*

Definicija 19. *Descartesov proizvod* dva skupa A i B je dat sa

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Primer 20. Neka je $A = \{\text{plavi, žuti, crveni}\}$, $B = \{\text{krug, trougao}\}$. Tada je

$$\begin{aligned} A \times B \;=\; & \{(\text{plavi, krug}), (\text{plavi, trougao}), (\text{žuti, krug}), (\text{žuti, trougao}), \\ & (\text{crveni, krug}), (\text{crveni, trougao})\}, \end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned} B \times A \;=\; & \{(\text{krug, plavi}), (\text{krug, žuti}), (\text{krug, crveni}), (\text{trougao, plavi}), \\ & (\text{trougao, žuti}), (\text{trougao, crveni})\}, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da Descartesov proizvod nije komutativna operacija. △

U prethodnom smo videli da skupovi mogu biti elementi drugih skupova. Da li se i uređeni parovi mogu koristiti za konstrukciju novih uređenih parova? Na primer, da li je $((a, b), c)$, gde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ takođe uređen par? Upoređivanjem ove konstrukcije sa definicijom uređenog para dolazimo do potvrdnog odgovora, ali i do motivacije za uvođenje koncepta *uređene* n*-torke.* Za $n = 1$ to će biti element koji posmatramo, za $n = 2$ — uređeni par, dok se za $n \geq 2$, uređena n-torka definiše kao

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) := ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Primer 21. Uređena trojka (a, b, c) je, dakle, ništa drugo do malo pre spomenuto $((a, b), c)$. △

Analogno uređenim parovima, uređene n-torke srećemo kao elemente Descartesovog proizvoda n skupova, tj.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Ukoliko je $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, za $\underbrace{A \times A \times \cdot \times A}_{n-\text{puta}}$ koristimo i skraćeni zapis A^n.

1.3 Kako izmeriti skup

Dosad smo usvojili pojam skupa i naučili da računamo sa skupovima, čime smo uspostavili izvesnu analogiju sa onim matematičkim objektima sa kojima se najbolje snalazimo, a to su brojevi. Da bi ova analogija bila potpuna, moramo naučiti i da upoređujemo skupove. U prethodnoj sekciji smo kratko razmatrali kako utvrditi jednakost skupova, ali se nismo dotakli pitanja prirode nejednakosti skupova, pa još uvek nije jasno šta znači da je jedan skup manji ili veći od drugog. Ovaj problem se rešava uvođenjem važnog parametra za skupove, a to je njihova *veličina*.

Definicija 22. *Kardinalnost* ili *veličina* skupa A je broj elemenata skupa A. Označavamo je sa $|A|$.

Primer 23. Za skup $A = \{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, lako utvrđujemo da je $|A| = 4$, prostim prebrojavanjem njegovih elemenata. S druge strane, skup prirodnih brojeva je beskonačan i njegova kardinalnost je data sa $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, što je ujedno i najmanja veličina nekog beskonačnog skupa. Beskonačni skupovi koji imaju istu veličinu kao i skup prirodnih brojeva nazivaju se beskonačni *prebrojivi* skupovi. Svi ostali beskonačni skupovi su *neprebrojivi*. Problemi vezani za kardinalnost skupova izučavaju se u okviru teorije skupova. $\triangle$

Očigledno je da je prosto prebrojavanje elemenata najpragmatičniji način da se utvrdi kardinalnost tzv. „malih“ skupova, odnosno skupova koji imaju relativno mali broj elemenata. Rešenja za „inteligentniji“ pristup prebrojavanju nudi kombinatorika, pa je tako kardinalnost Descartesovog proizvoda dva skupa moguće odrediti na sledeći način:

Tvrđenje 24.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Ovo tvrđenje se može uopštiti i na proizvoljan broj skupova u Descartesovom proizvodu, pa specijalno važi i

$$|A^n| = |\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n-\text{puta}}| = \underbrace{|A| \cdots |A|}_{n-\text{puta}} = |A|^n.$$

U prethodnom razmatranju smo upoznali i partitivni skup, pa ćemo iskoristiti priliku da razmotrimo i njegovu kardinalnost, kao i odnos kardinalnosti skupa i njegovog partitivnog skupa. Sledeća teorema daje (delimičan) odgovor na oba pitanja.

Teorema 25 (Cantor)**.** *Za konačne skupove S važi* $|\mathfrak{P}(S)| = 2^{|S|}$.
Za beskonačne skupove S važi $|S| < |\mathfrak{P}(S)|$.

Primetimo da za konačne skupove ova teorema daje odgovor na jedno pitanje koje nismo direktno postavili, a to je: Koliko podskupova ima dati konačan skup? Naime, partitivni skup nije ništa drugo do skup svih podskupova datog skupa, pa je njegova kardinalnost ujedno i odgovor na ovo pitanje. Nekada je, međutim, potrebno znati i malo detaljniji odgovor na ovo pitanje, jer od važnosti može biti i broj podskupova određene veličine, o čemu govori sledeći

Problem:
Neka je dat skup A, takav da je $|A| = n$.
Koliko k-elementnih podskupova ima skup A?

Da bismo dali odgovor na ovo pitanje, prisetićemo se koncepta kojeg smo u jednoj specijalnoj formi već videli u Primeru 4.

Definicija 26. Broj svih k-elementnih podskupova n-elementnog skupa je

$$\binom{n}{k} \qquad \text{(čitamo: } n \text{ nad } k\text{)}$$

Simbol $\binom{n}{k}$ zovemo *binomni koeficijent*.

U istom primeru smo naveli i čemu je jednako $\binom{n}{2}$, ali još uvek nismo objasnili **zašto** je to tako. Prećutno smo počeli i da iskazujemo neke zaključke u vidu tvrđenja i teorema, pa je sada možda pravi trenutak da „legalizujemo“ njihovu upotrebu.

Jasno je da definicije, aksiome i primeri nisu dovoljni da bismo se izrazili na matematičkom jeziku, jer nam nedostaju forme kojima izražavamo zaključke. Takve forme su *tvrđenja*, *teoreme* i *posledice*, pomoću kojih iznosimo, redom, zaključke, izuzetno važne zaključke i činjenice koje slede iz tih zaključaka. Pomoćna tehnička tvrđenja često nazivamo *leme*, a sve ove forme zahtevaju obrazloženje tačnosti zaključaka koje sadrže. Ta obrazloženja su u matematici poznata kao *dokazi*. Dokazati, dakle, ne znači ništa drugo do objasniti zašto važi ono što tvrdimo da važi. Mi to nismo učinili u slučaju Tvrđenja 17 i 24, kao i Teoreme 25, iz prostog razloga što naše trenutno znanje nije dovoljno da bismo uspešno i korektno izveli njihove dokaze. Pre svega, potrebno je ovladati nekim od metoda dokazivanja u matematici. Prvi metod koji ćemo upoznati jeste *metod matematičke indukcije.*

1.4 Metod matematičke indukcije

Metod matematičke indukcije se najčešće koristi za dokazivanje tvrdnji koje važe za sve prirodne brojeve. Primenu ovog metoda ćemo demonstrirati u dokazu sledećeg tvrđenja:

Tvrđenje 27. *Broj dvoelementnih podskupova datog n-elementnog skupa jednak je*

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Dokaz. Dokaz ovog tvrđenja izvodimo metodom matematičke indukcije po broju elemenata n datog skupa:

Baza indukcije. Za $n = 0$ navedeno tvrđenje važi, budući da skup sa 0 elemenata (prazan skup) ima 0 dvoelementnih podskupova.

Induktivna pretpostavka (hipoteza). Neka je tvrđenje tačno za n, tj. neka je broj dvoelementnih podskupova n-elementnog skupa jednak

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Induktivni korak. Pokazujemo da je tvrđenje tačno za $n + 1$. Neka je A skup sa $(n+1)$ elemenata. Uočimo proizvoljno $a \in A$. Tada postoje dve vrste dvoelementnih podskupova skupa A:

- $\{a, x\}$, $x \in A \setminus \{a\}$ - takvih ima n, i

- $\{x, y\}$, $x, y \in A \setminus \{a\}$ - kojih, prema induktivnoj pretpostavci, ima
$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Ukupno imamo
$$n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)-1)}{2}$$
podskupova, što je i trebalo dokazati.

□

Kao što vidimo, dokaz baziran na ovom metodu ima jasnu konstrukciju i odvija se u tri obavezne etape:

(1) *Baza indukcije* (BI) — u okviru ove faze dokaza proveravamo da li tvrđenje važi za najmanji mogući prirodni broj. Neka tvrđenja važe tek počevši od nekog prirodnog broja, na primer za svako $n \geq 3$, pa se u takvim slučajevima ta vrednost uzima za bazu indukcije.

(2) *Induktivna pretpostavka* (IP) ili *induktivna hipoteza* (IH) je etapa u kojoj pretpostavimo da je tvrđenje tačno za n (ili, alternativno, za sve prirodne brojeve ne veće od n).

(3) *Induktivni korak* (IK) je završni deo dokaza matematičkom indukcijom u kojem pokazujemo da ono važi i za $n+1$ uz korišćenje induktivne pretpostavke.

Primer 28. Pokažimo sada da jednakost koju smo naveli u Primeru 4 zaista i važi, odnosno, da je za svako $n \geq 2$
$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1).$$

BI. Za $n = 2$ imamo da se suma sa desne strane jednakosti sastoji samo od 1, dok je na levoj strani nejednakosti binomni koeficijent $\binom{2}{2}$ koji predstavlja broj dvoelementnih podskupova skupa koji ima dva elementa, što je takođe 1, pa jednakost očigledno važi.

IH. Pretpostavimo da tvrđenje važi za n.

IK. Pokažimo da važi i za $n+1$.

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+(n-1)+n &= (1+2+\cdots+(n-1))+n \\
&\overset{\text{IH}}{=} \binom{n}{2}+n \\
&\overset{\text{T.27}}{=} \frac{n(n-1)}{2}+n = \frac{(n+1)n}{2} \\
&\overset{\text{T.27}}{=} \binom{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

△

Da bismo prebrojali k-elementne podskupove n-elementnog skupa za proizvoljno k neophodan nam je još jedan kombinatorni pojam.

Definicija 29. *Faktorijel* broja n (u oznaci $n!$) je dat sa

$$\begin{aligned}
&n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n, \quad (\text{čitamo: } n \textit{ faktorijel}) \\
&0! := 1.
\end{aligned}$$

Tvrđenje 30. *Broj k-elementnih podskupova n-elementnog skupa jednak je*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz ovog tvrđenja ćemo odložiti do trenutka kada će se čitalac podrobnije upoznati sa osnovama kombinatorike. Samo tvrđenje ćemo, pak, iskoristiti da dokažemo ispravnost jedne važne matematičke formule pomoću metoda matematičke indukcije.

Pri računu sa različitim algebarskim izrazima često se od nas traži da razvijemo (odnosno, simbolički izračunamo) stepen nekog binoma. Prve takve primere srećemo već u osnovnoj školi, gde učimo gotove izraze za kvadrat zbira i kvadrat razlike.

Primer 31. Prva četiri stepena binoma $a+b$ mogu se razviti na sledeći način:

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b,\\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

Primetimo da navedeni razvoji prate određeni obrazac, pa se pitamo da li je moguće doći do neke opšte formule pomoću koje možemo zapisati razvoj proizvoljnog stepena ovog binoma. △

Odgovor na pitanje iz prethodnog primera je potvrdan i sadržan je u sledećoj teoremi.

Teorema 32 (Binomna formula)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Pre nego što pređemo na dokaz teoreme, pokazaćemo da važi jedan identitet koji će nam biti od koristi.

Lema 33 (Pascalov identitet)**.** *Neka su $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k \geq 1$. Tada važi*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Datu jednakost pokazujemo pomoću Tvrđenja 30:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)}\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

□

Dokaz Teoreme 32. Tvrđenje dokazujemo primenom matematičke indukcije po stepenu n datog binoma.

BI. Za $n = 0$ imamo $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^0$, pa jednakost očigledno važi.

IH. Pretpostavimo da tvrđenje važi za n, tj.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

IK. Pokažimo da važi i za $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)\cdot(a+b)^n \\
&\stackrel{\text{IH}}{=} (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&\stackrel{\text{T. 33}}{=} \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k.
\end{aligned}$$

□

1.5 U čemu je problem ili ko brije berbera?

U prethodnom izlaganju smo oformili pojam skupa prateći ideje Georga Cantora iz 1895. godine. Formiranjem ovog pojma položen je kamen temeljac sistematskoj izgradnji matematike — koristeći nekoliko osnovnih pojmova kao što su skupovi i elementi moguće je izgraditi sve matematičke pojmove kroz precizne definicije. Međutim, kao i u životu, i u matematici se s vremena na vreme pojavi fraza „suviše dobro zvuči da bi bilo istina“. Već 1903. godine se ispostavilo da tzv. „naivna“ teorija skupova sadrži izvestan paradoks, koji je otkrio filozof Bertrand Russel, te je on stoga šire poznat i kao *Russelov paradoks*.

Russelov paradoks:
Posmatramo skup svih skupova koji ne sadrže samog sebe kao element:

$$\{x \mid x \notin x\}$$

Da li ovaj skup sadrži sebe kao element?

Za bolje razumevanje kakav problem prouzrokuje ovo pitanje, navešćemo jednu popularnu formulaciju ovog problema koja takođe potiče od Russela:

Berberov paradoks:
U nekom selu živi berberin koji brije sve one i samo one koji sami sebe ne briju.
Da li se berber sam brije?

Razmotrimo ovaj problem:

- Ukoliko se berber sam brije, onda on nije u grupi meštana koji sami sebe ne briju, pa se samim tim ne ubraja u one koje on brije.
- Ukoliko se, pak, berber ne brije sam, onda se ubraja u one koje on brije, tj. brije se sam.

U oba slučaja smo došli do protivrečnosti, što ne bi smelo da se desi, jer je jasno da se berber ili brije sam ili ga brije neko drugi.

Tragajući za uzrocima ovog paradoksa, matematičari su otkrili da je problem prouzrokovan konstrukcijom objekta opisanog kao „skup svih skupova“, gde je jedan pojam bio definisan preko sebe samog. Jednom kad je uzrok problema otkriven, pitanje je samo vremena kada će biti i otklonjen. Tako je dvadesetih godina dvadesetog veka predložen model teorije skupova zasnovan na aksiomatskom sistemu koji su predložili Ernst Zermelo i Abraham Fraenkel, koji danas predstavlja standardan pristup teoriji skupova, zajedno sa još jednom aksiomom poznatom kao *aksioma izbora*. On ne dozvoljava problematičnu konstrukciju, pa se gore navedeni paradoks ne javlja. Mi se u ovom tekstu nećemo baviti aksiomama teorije skupova, već ćemo njihovo razmatranje ostaviti za neki kurs na naprednijem nivou. Ono što je jasno je da nam skupovi i elementi kao takvi nisu dovoljni da bismo u matematici izrazili sve što želimo, te je naš rečnik potrebno proširiti. Prvi korak u nepoznato ćemo napraviti u pravcu matematičke logike.

1.6 Zadaci za vežbu

(1) Posmatramo podskupove skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 > 0\} \text{ i}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 2\}.$$

Odrediti skupove:

(a) $A \cup B$,

(b) $A \cap \overline{B}$,

(c) $A \setminus B$,

(d) $A \times B$,

i skicirati ih u Descartesovom koordinatnom sistemu.

(2) Ispitati da li su sledeće jednakosti tačne za proizvoljne skupove A, B i C:

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

(c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$,

(d) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(3) Ispitati da li za proizvoljne skupove A, B i C važe sledeće tvrdnje:

(a) Ako je $A \cup B = A \cup C$, onda je $B = C$.

(b) Ako je $A \cap B = A \cap C$, onda je $B = C$.

(4) Pokazati da je simetrična razlika asocijativna, tj. da važi

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$

(5) Odrediti:

(a) partitivni skup skupa $\{a, b, c\}$,

(b) $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S))$ za $S = \{\Delta, \nabla\}$,

(c) $\mathfrak{P}(\emptyset)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ i $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$.

(6) Metodom matematičke indukcije pokazati da važe sledeće tvrdnje:

(a) Za svako $n \geq 1$ je $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

(b) Za svako $n \geq 1$ je $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

(c) Za svako $n \geq 2$ je $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{1}{2}$.

(d) Za broj dijagonala $d(n)$ konveksnog n-ugla važi: $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

(7) Svaku od sledećih jednakosti pokazati na dva načina, upotrebom metoda matematičke indukcije, odnosno, binomne formule:

(a) Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

(b) Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

(8) Metodom matematičke indukcije pokazati da važi Bernoullijeva nejednakost

$$(1+h)^n > 1 + nh,$$

gde je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, a $h \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$.

2 Kratak vodič kroz iskaznu logiku

It is not enough to have a good mind.
The main thing is to use it well.

(René Descartes)

Matematička logika je jedan od osnovnih teoretskih stubova informatike i predmet je koji se može i mora izučavati za sebe. Mi ćemo se u nastavku teksta samo dotaći nekih ključnih pojmova iz iskazne logike, najjednostavnijeg, ali istovremeno i fundamentalnog dela logike. Naučićemo da pravimo razliku između sintakse i semantike, upoznaćemo se sa nekim načinima zaključivanja i proširićemo našu lepezu metoda dokazivanja.

2.1 O iskazima i iskaznim formulama

Osnovne vrste objekata sa kojima radimo u logici jesu *iskazi*.

Definicija 1. *Iskaz* je rečenica za koju možemo utvrditi da li je tačna ili netačna.

Primer 2. Rečenice

- Dužina toka Dunava je 1000km.
- $1 + 1 = 2$.
- Jagoda je biljka iz porodice ruža.

su iskazi — prva rečenica je netačna, dok su druga i treća tačne.
S druge strane, rečenice

- Izvolite!
- $x + y = 15$.
- Sledeće nedelje će biti sunčano i toplo.

nisu iskazi. Prva rečenica je izraz učtivosti, druga jednačina sa dve nepoznate, pa njena tačnost zavisi od izbora vrednosti za x i y, dok je trećom rečenicom data vremenska prognoza za koju u sadašnjem trenutku ne možemo znati hoće li se ispuniti ili neće, pa samim tim ne možemo odrediti njenu tačnost. $\triangle$

Tačnost, odnosno, netačnost nekog iskaza predstavlja njegovu *istinitosnu vrednost*. U matematici se istinitosna vrednost „tačno“ najčešće označava sa $\top$, T (od engleske reči *true*) ili 1, dok se istinitosna vrednost „netačno“ označava sa $\perp$, F (od engleske reči *false*) ili 0, redom. Mi ćemo u ovom kratkom vodiču kroz logiku koristi oznake T i F.

U Primeru 2 smo videli da iskazi mogu biti i rečenice napisane našim prirodnim jezikom i rečenice napisane matematičkim jezikom. Kako je naša namera da iskoristimo matematičku logiku kako bismo se izražavali i radili na jeziku matematike, neophodno je da preciziramo kakve konstrukcije ćemo smatrati rečenicama. U tu svrhu uvodimo pojam *iskazne formule*. Intuitivno, iskazna formula je složena rečenica formirana od polaznih iskaza pomoću datih veznika. Za zapisivanje iskaznih formula koristimo iskazna slova (najčešće p, q, r, p_0, p_1,...), specijalne simbole (T, F), logičke veznike ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\implies$, $\iff$) i zagrade. Svi logički veznici, sem $\neg$ koji je unaran, su binarni. U ovom trenutku nije još uvek jasno na koji način se ovakve rečenice formiraju, pa ćemo sada i formalno definisati pojam iskazne formule pomoću *induktivne definicije*. U pitanju je način definisanja koji se često sreće i u matematici i u računarskim naukama, a podrazumeva uvođenje pojma kroz objašnjavanje procesa njegove izgradnje. To znači da se prvo uvedu najjednostavniji objekti koji odgovaraju datom pojmu, a zatim se objasni kako se od prethodno konstruisanih objekata mogu dobiti novi. Na primeru iskaznih formula to izgleda ovako:

Definicija 3. (1) Iskazna slova i simboli T i F su iskazne formule.

(2) Ako su φ i ψ iskazne formule, onda su to i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\neg\varphi)$, $(\varphi \implies \psi)$ i $(\varphi \iff \psi)$.

(3) Iskazne formule se dobijaju samo konačnom primenom pravila pod (1) i (2).

Ovim smo precizirali šta su iskazne formule, uz napomenu da su zagrade obavezni deo složenih formula i da se mora voditi računa o njihovom korektnom navođenju, jer one obezbeđuju jedinstveni način čitanja formule.

Primer 4. Izrazi $((p \vee q) \implies r)$ i $(p_1 \iff (\neg(p_2 \wedge (p_1 \implies p_3))))$ su iskazne formule jer su dobijeni višestrukom primenom pravila iz definicije. S druge strane, izraz $(r \iff (\neg q \vee p))$ nije iskazna formula, jer nedostaju zagrade kod primene veznika $\neg$ na iskazno slovo q. $\triangle$

Teškoće u prepoznavanju iskaznih formula rastu sa povećavanjem složenosti formule. Razlog tome su, između ostalog i već pomenute zagrade. Veliki broj gusto postavljenih zagrada može da nam oteža rad sa formulom, ali njihovo izostavljanje, s druge strane, može dovesti do pogrešnog tumačenja iste. Ovakva situacija nam nije nova — iskustvo sa sličnom problematikom smo već stekli pri računanju sa brojevima, gde smo uvođenjem određenih pravila pojednostavili zapis smanjenjem broja zagrada. Na primer, množenje ima prednost nad sabiranjem, pa je $3\cdot4+2$ kraći zapis od $(3 \cdot 4) + 2$. Ovakav pristup pojednostavljivanju zapisa iskaznih formula je moguć, i možemo ga ostvariti izostavljanjem zagrada prateći prednost u primeni logičkih veznika. Standardno se u odsustvu zagrada veznici primenjuju sledećim redosledom: najveći prioritet ima $\neg$, zatim dolazi $\wedge$, pa $\vee$, potom $\implies$, i na samom kraju $\iff$. U slučaju da imamo dva uzastopna veznika $\wedge$ ili $\vee$, primenjujemo ih sleva nadesno, dok kod uzastopnih veznika $\implies$, odnosno, $\iff$ primenu sprovodimo sdesna nalevo. U situaciji kada nismo sigurni da li će formula biti dobro protumačena bez zagrada, najbolje je zadržati one zagrade čiji izostanak može dovesti čitaoca u dilemu.

Primer 5. Iskazna formula $\neg p \wedge q \vee \neg r \iff q \implies r$ je skraćeni zapis (bez zagrada) iskazne formule

$$((((\neg p) \wedge q) \vee (\neg r)) \iff (q \implies r)),$$

date sa svim zagradama. S druge strane, formula

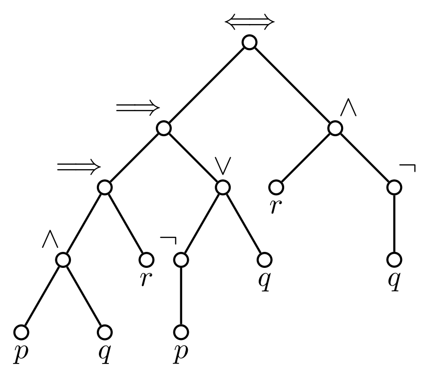
$$p \implies q \implies r \vee p \wedge q \wedge r$$

je skraćeni zapis za $(p \implies (q \implies (r \vee ((p \wedge q) \wedge r))))$, pri čemu je „čitljivija“ mogućnost zapisa recimo $p \implies (q \implies (r \vee (p \wedge q \wedge r)))$. $\triangle$

U međuvremenu, pozabavićemo se i mogućnošću grafičkog prikaza iskaznih formula. Izuzetno je intuitivno predstavljanje iskaznih formula pomoću *korenskih stabala*. To su objekti koji se sastoje od tačaka (*čvorova*) raspoređenih po nivoima. Na prvom nivou nalazi se samo jedan čvor (*koren*). Svaki čvor na $(n+1)$-om nivou je povezan sa tačno jednim čvorom n-tog nivoa (njegovim *roditeljem*). Čvor koji nije roditelj je *list*. Ove objekte ćemo detaljnije izučavati u delu posvećenom teoriji grafova. U ovom trenutku, njihova jedina uloga će biti određena vizualizacija formule, koju ćemo objasniti pomoću sledećeg primera.

Primer 6. Predstavimo korensko stablo pridruženo iskaznoj formuli

$$((((p \wedge q) \implies r) \implies ((\neg p) \vee q)) \iff (r \wedge (\neg q))).$$



Slika 2.1: Korensko stablo pridruženo iskaznoj formuli

Listovi stabla će biti iskazna slova, pri čemu se isto iskazno slovo može pojaviti kao list onoliko puta koliko učestvuje u fomuli, dok će roditelji (uključujući i koren) biti veznici koji se pojavljuju u formuli. Kako dolazimo do prikazanog crteža (Slika 2.1)? Primetimo da sve zagrade koje učestvuju u formuli obrazuju parove — svakoj otvorenoj odgovara tačno jedna zatvorena zagrada, i obrnuto. Uočimo sada par određen prvom otvorenom zagradom i pronađemo veznik koji je „odgovoran“ za pojavljivanje tog para zagrada. Time smo odredili koren našeg stabla. Na sledećem nivou razmatramo formule koje su bile povezane veznikom koji odgovara korenu. Svaka od njih je određena parom zagrada. Opet pronađemo odgovarajuće veznike, upišemo ih kao čvorove na ovom nivou i povežemo sa korenom, tj. roditeljem. Ovaj postupak ponavljamo sve dok ne stignemo do najjednostavnijih gradivnih jedinica iskazne formule, a to su iskazna slova i simboli T i F. $\triangle$

2.2 O sintaksi i semantici

Iskazna formula je za nas trenutno samo vrsta simboličkog zapisa. To je niz slova i specijalnih znakova formiran po određenim pravilima. Skup tih pravila poznatiji je kao *sintaksa*. Rad na sintaktičkom nivou podrazumeva ono što smo delom radili u Primeru 4, a to je formiranje formula i provera ispravnosti formula na jednom formalnom nivou, čisto simbolički i bez ulaženja u njihovo *značenje*. Iako imamo ideju o tome šta znači primena logičkog veznika $\neg$ ili $\Longrightarrow$ mi to značenje još uvek nismo pridružili na matematički korektan način odgovarajućem simbolu. To ćemo učiniti u nastavku, čime ćemo formulama „udahnuti život“, tako što ćemo im dati smisao koristeći *semantiku*. Drugim rečima:

Sintaksa opisuje **kako** se iskazne formule (rečenice) formiraju. *Semantika* opisuje **šta** iskazne formule (rečenice) znače.

Za nas će to konkretno značiti da svaka formula može biti tačna ili netačna, pri čemu se njena tačnost utvrđuje za konkretnu interpretaciju iskaznih slova.

Kao što smo već naglasili, jedini unarni logički veznik u skupu veznika koji smo predvideli da koristimo jeste znak za negaciju.

Definicija 7. *Negacija* iskazne formule φ je tačna ako i samo ako je iskazna formula φ netačna.
Negaciju formule φ označavamo sa $\neg\varphi$, i čitamo „nije φ“.

φ	$\neg\varphi$
F	T
T	F

Tabela 2.1: Tablica istinitosnih vrednosti za negaciju

Uobičajeno je i predstavljanje logičkih veznika pomoću *tablica istinitosnih vrednosti*, kao što se može videti u Tabeli 2.1.

Iako je po strukturi najjednostavniji, ovaj veznik se za primenu pokazao, bar što se tiče našeg jezika, kao najkomplikovaniji. Razlog za to leži u činjenici da gramatika (=sintaksa) našeg jezika dozvoljava čudnu konstrukciju dvostruke negacije koja u tumačenju (=semantici) funkcioniše kao jednostruka. Rečenica „Pas nije nikog ujeo“ za nas sadrži informaciju da ne postoji osoba koju je pas ujeo. Međutim, matematički pristup ovoj rečenici nam daje jedno drugačije značenje, s obzirom da je niko nepostojeća osoba, te se ona može interpretirati kao da je pas svakog ujeo. Verovatno bi najbolje rešenje bilo da se kaže „Pas nije nekog ujeo“, ali to već zalazi u domene lingvistike, te se time nećemo dalje baviti. Smisao ove kratke rasprave je da se ukaže na neke od najčešćih grešaka koje se dešavaju negiranjem iskaza, kao što ćemo videti u sledećem primeru.

Primer 8. Negacija iskaza „Jabuka je veća od kajsije.“ je „Jabuka je manja ili jednaka kajsiji.“, a ne ”Jabuka je manja od kajsije.“. Slično, „Čaša je puna.“ se često u negiranoj formi javlja kao ”Čaša je prazna.”, iako je ispravno „Čaša nije puna.“. $\triangle$

Preostala četiri veznika su binarna. Slede definicije konjunkcije i disjunkcije uz odgovarajuće tablice istinitosnih vrednosti datih u Tabeli 2.2.

Definicija 9. Neka su date iskazne formule φ i ψ.

(1) *Konjunkcija* iskaznih formula φ i ψ je iskazna formula koja je tačna ako i samo ako su obe iskazne formule tačne. Konjunkciju formula φ i ψ označavamo sa $\varphi \wedge \psi$ i čitamo „φ i ψ“.

(2) *Disjunkcija* iskaznih formula φ i ψ je iskazna formula koja je tačna

ako i samo ako je bar jedna od navedenih iskaznih formula tačna. Disjunkciju formula φ i ψ označavamo sa $\varphi \vee \psi$ i čitamo „φ ili ψ“.

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

Tabela 2.2: Tablica istinitosnih vrednosti za konjunkciju i disjunkciju

Primer 10. Neka su date iskazne formule

φ: Lav je domaća životinja.
ψ: Lav je divlja životinja.

Tada je $\varphi \wedge \psi$ netačno, a $\varphi \vee \psi$ tačno. $\triangle$

Pomoću sledećih veznika možemo opisati zaključke:

Definicija 11. Neka su date iskazne formule φ i ψ.

(1) *Implikacija* iskazne formule ψ iz iskazne formule φ je iskazna formula koja je pogrešna ako i samo ako je φ tačno i ψ netačno. Implikaciju formula φ i ψ označavamo sa $\varphi \implies \psi$ i čitamo „Ako φ, onda ψ“.

(2) *Ekvivalencija* iskaznih formula φ i ψ je iskazna formula koja je tačna ako i samo ako obe navedene iskazne formule imaju istu istinitosnu vrednost. Ekvivalenciju formula φ i ψ označavamo sa $\varphi \iff \psi$ i čitamo „φ ako i samo ako ψ“.

φ	ψ	$\varphi \implies \psi$	$\varphi \iff \psi$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

Tabela 2.3: Tablica istinitosnih vrednosti za implikaciju i ekvivalenciju

Primer 12. Neka su date iskazne formule

$$\varphi\colon \text{Pada kiša.}$$
$$\psi\colon \text{Kolovoz je mokar.}$$

Tada je $\varphi \implies \psi$ tačno, $\varphi \iff \psi$ netačno, jer kolovoz može biti mokar i iz nekog drugog razloga, na primer zbog havarije na vodovodnoj cevi. $\triangle$

Najkomplikovanija za upotrebu (od binarnih veznika) je verovatno implikacija. Posebno skrećemo pažnju da su iskazne formule oblika $F \implies \varphi$ uvek tačne. Običaj je i da se u formuli $\varphi \implies \psi$ kaže da je φ *dovoljan uslov* za ψ, odnosno, da je ψ *potreban uslov* za φ.

Tablice istinitosnih vrednosti je moguće konstruisati za svaku iskaznu formulu.

Primer 13. Napravimo tablicu istinitosnih vrednosti za formulu

$$\varphi\colon ((((p \wedge q) \implies r) \wedge (\neg q \vee (r \implies p)))).$$

Uobičajeni način konstrukcije ovakve tablice podrazumeva da se istinitosna vrednost krajnje formule određuje tako što se prethodno odrede istinitosne vrednosti njenih manjih delova, koji su sami za sebe iskazne formule. Konkretno, u ovom slučaju imamo:

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg q$	$r \implies p$	$(p \wedge q) \implies r$	$\neg q \vee (r \implies p)$	φ
T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T

Tabela 2.4: Tablica istinitosnih vrednosti za formulu φ

Alternativan zapis ove tablice ne zahteva posebno izdvajanje delova tablice, već se sama formula koristi kao tablica:

((((	p	$\wedge$	$q)$	$\implies$	$r)$	$\wedge$	$(\neg$	q	$\vee$	$(r$	$\implies$	p	))))
	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	
	T	T	T	F	F	F	F	T	T	F	T	T	
	T	F	F	T	T	T	T	F	T	T	T	T	
	T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	T	T	
	F	F	T	T	T	F	F	T	F	T	F	F	
	F	F	T	T	F	T	F	T	T	F	T	F	
	F	F	F	T	T	T	T	F	T	T	F	F	
	F	F	F	T	F	T	T	F	T	F	T	F	

Tabela 2.5: Alternativni zapis tablice istinitosnih vrednosti

Kod ovakvog zapisa tablice ispod svakog iskaznog slova/veznika pišemo odgovarajuće istinitosne vrednosti nastale njegovom primenom. Istinitosna vrednost formule je u ovom slučaju zapisana ispod središnjeg veznika, što je ovde $\wedge$ u sredini (šesta kolona). $\triangle$

Sada kada znamo da odredimo istinitosnu vrednost svake iskazne formule, možemo pristupiti klasifikaciji istih u odnosu na njihovu tačnost. Tako razlikujemo tri vrste iskaznih formula:

(1) *Tautologija* je formula koja je tačna za sve moguće istinitosne vrednosti svojih iskaznih slova.

(2) *Kontradikcija* je formula koja je netačna za sve moguće istinitosne vrednosti svojih iskaznih slova.

(3) Formula koja je tačna za bar jedan izbor istinitosnih vrednosti svojih iskaznih slova je *zadovoljiva*.

Primer 14. Formula $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$ je primer jedne tautologije, dok je $\neg p \wedge p$ primer iskazne formule koja je kontradikcija. Formula φ na kojoj smo demonstrirali konstrukciju tablice istinitosnih vrednosti je zadovoljiva. $\triangle$

U prethodnom poglavlju smo se bavili jednakošću skupova, pa slično pitanje možemo razmotriti i ovde. Kada su, dakle dve iskazne formule jednake?

Dve iskazne formule φ i ψ su *jednake* ako se radi o istim nizovima simbola. Međutim, iskazne formule mogu biti date i različitim nizovima simbola, a da pri tome ipak imaju jednake istinitosne tablice. Stoga za formule φ i ψ sa istim tablicama istinitosnih vrednosti kažemo da su *logički ekvivalentne* i pišemo $\varphi \equiv \psi$.

Primer 15. Nabrojimo nekoliko logički ekvivalentnih formula koje se često koriste:

$$
\begin{aligned}
&\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q && \text{1. De Morganov zakon}\\
&\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q && \text{2. De Morganov zakon}\\
&p \implies q \equiv \neg p \vee q && \\
&p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p) && \\
&p \implies q \equiv \neg q \implies \neg p && \text{Kontrapozicija}
\end{aligned}
$$

Čitaocu ostavljamo za vežbu da se uveri da su tablice istinitosnih vrednosti odgovarajućih formula zaista jednake. $\triangle$

Upoznajmo se još i sa dva značajna načina izvođenja zaključaka u matematici. To ćemo učiniti koristeći pojam *logičke posledice*.

Definicija 16. Za formulu φ kažemo da je *logička posledica* skupa formula Φ (pišemo $\Phi \models \varphi$), ako za svaku dodelu istinitosnih vrednosti iskaznim slovima za koje su tačne sve formule iz Φ, važi da je tačna i formula φ.
Skup formula čija je logička posledica formula F nazivamo *kontradiktornim.*

Sada možemo i da predstavimo najavljena pravila zaključivanja:

(modus ponens) Formula ψ je logička posledica skupa formula

$$\Phi = \{\varphi, \varphi \implies \psi\}.$$

(modus tollens) Formula $\neg\varphi$ je logička posledica skupa formula

$$\Phi = \{\neg\psi, \varphi \implies \psi\}.$$

Uverimo se da su modus ponens i modus tollens logičke posledice navedenih skupova, čime ćemo potvrditi njihovu ispravnost kao pravila zaključivanja. Na Slici 2.2 date su odgovarajuće tablice istinitosnih vrednosti. Za modus ponens relevantna je poslednja vrsta prve tablice, dok je za modus tollens relevantna prva vrsta druge tablice. U oba slučaja su

φ	ψ	$\varphi \implies \psi$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

φ	ψ	$\neg\psi$	$\varphi \implies \psi$	$\neg\varphi$
F	F	T	T	T
F	T	F	T	T
T	F	T	F	F
T	T	F	T	F

Slika 2.2: Tablice istinitosnih vrednosti za modus ponens i modus tollens

ispunjeni uslovi za logičku posledicu.

2.3 Tehnike dokazivanja

U prvoj glavi smo se upoznali sa tehnikom dokazivanja matematičkom indukcijom. Ona ima svoje specifičnosti i jasno je da se ne može upotrebiti da bi se pokazala tačnost proizvoljne matematičke tvrdnje. Stoga je neophodno razviti dalje tehnike za dokazivanje, u čemu nam može pomoći znanje koje smo dosad stekli iz matematičke logike. Ovde navodimo tri takve tehnike:

(1) *Dokazivanje ekvivalencije.*
U prethodnom smo se uverili da je formula $p \iff q$ logički ekvivalentna sa formulom $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$. Ovo nam dozvoljava da rezonujemo na sledeći način:
Da bismo pokazali $\varphi \iff \psi$ pokazujemo $\varphi \implies \psi$ i $\psi \implies \varphi$. To znači da se u dokazima tvrđenja koja u svojoj formulaciji sadrže sintagmu „ako i samo ako" očekuje da pokažemo verodostojnost obe implikacije, odnosno, naš dokaz će se sastojati od dva manja dokaza.

Primer 17. Zbir dva prirodna broja je paran ako i samo ako su oba broja iste parnosti.
Da bismo se uverili u tačnost ovog tvrđenja moramo pokazati da važe dve implikacije:
Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ brojevi iste parnosti. Ako su oba parna, tj. ako je $n = 2k$, a $m = 2l$, za $k, l \in \mathbb{N}$, onda je $n+m = 2k+2l = 2(k+l)$ takođe paran broj. Ako su, pak, oba neparna, tj. ako je $n = 2k+1$, a $m = 2l+1$, za $k, l \in \mathbb{N}$, onda je $n+m = 2k+1+2l+1 = 2(k+l+1)$ opet paran broj. Obrnuto, neka je zbir dva prirodna broja paran, tj. neka za $n, m \in \mathbb{N}$ važi da je $n+m = 2k$ i neka je, bez umanjenja opštosti, $n \leq m$. Tada je $n = k - l$, a $m = k + l$, za $k, l \in \mathbb{N}$. Ako su k i l iste parnosti, onda su m i n parni brojevi, a ako su k i l različitih parnosti, lako se pokazuje da su m i n neparni brojevi. Sledi da su posmatrani brojevi uvek iste parnosti, što je i trebalo pokazati. $\triangle$

(2) *Indirektni dokaz (dokaz kontrapozicijom)*
Slično kao i kod dokazivanja ekvivalencije, i ovde ćemo se pozvati na logičku ekvivalenciju između dve formule. Naime, $p \implies q \equiv \neg q \implies \neg p$ nam omogućava sledeći postupak:
Da bismo pokazali $\varphi \implies \psi$, pokazujemo $\neg\psi \implies \neg\varphi$. Ova tehnika se koristi izuzetno često.

Primer 18. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Ako je $x < -2$, onda je $x^2 > 4$.
Pokazaćemo tačnost ovog tvrđenja pomoću kontrapozicije. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $x^2 \leq 4$. Tada $x \in [-2, 2]$, pa je $x \geq -2$, odnosno, nije $x < -2$, čime je dokaz završen. $\triangle$

(3) *Dokazivanje svođenjem na kontradikciju*
U pitanju je metoda koja izuzetno liči na prethodnu, ali je ipak potrebno razlikovati je od nje. Dok smo u prethodnoj tehnici pokazivali $\neg\psi \implies \neg\varphi$, ovde mešamo uslove obe formule koje su logički ekvivalentne. Pretpostavimo da je φ tačno i ψ netačno i radimo pod tom pretpostavkom sve dok ne dođemo do neke protivrečnosti (kontradikcije).

Primer 19. $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.
Ovo tvrđenje se može napisati u obliku implikacije na sledeći način: Ako se racionalni broj može zapisati u obliku $\frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi, $q \neq 0$, onda je $\sqrt{2}$ iracionalan. Pretpostavimo sada da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada postoje uzajamno prosti celi brojevi p i q, takvi da je

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \qquad q \neq 0.$$

Kvadriranjem obe strane ove jednakosti dobijamo da je $p^2 = 2q^2$, pa je p^2, a samim tim i p, deljivo sa 2. Stoga je $p = 2r$, za neko $r \in \mathbb{Z}$, pa sledi da je $4r^2 = 2q^2$, odakle zaključujemo da je i q^2, a samim tim i q, deljivo sa 2. Sledi da p i q nisu uzajamno prosti. Kontradikcija. $\triangle$

2.4 Zadaci za vežbu

(1) Tehnikom indirektnog dokazivanja pokazati da važe sledeća tvrđenja:

(a) $\sqrt{3}$ je iracionalan broj.

(b) Ako je n^2 paran prirodan broj, onda je i n paran broj.

(c) Za svaka dva prirodna broja m i n važi:
Ako se razlomak $\frac{m+n}{m-n}$ ne može skratiti, onda se ne može skratiti ni razlomak $\frac{m}{n}$.

(2) Dati direktan i indirektan dokaz sledećeg tvrđenja:

$$\text{Za svaka dva broja } x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ važi: } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

(3) Svođenjem na kontradikciju pokazati tačnost sledećeg tvrđenja:
Ako su A i B skupovi sa osobinom $A \cup B \subseteq A \cap B$, onda je $A = B$.

(4) Indirektno pokazati da je $\log_2 6$ iracionalan broj.

(5) Za svaku od sledećih formula konstruisati korensko stablo i tablicu istinitosnih vrednosti:

(6) (a) $p \wedge (\neg p \implies (p \vee \neg q))$.

(b) $(p \implies q) \implies ((p \implies (q \implies r)) \implies (p \implies r))$,

(c) $\neg(p \vee q \vee \neg r) \wedge ((r \implies p) \vee (r \implies q))$.

Koje od njih su tautologije, koje su zadovoljive, a koje su kontradikcije?

(7) Pokazati da važe sledeće logičke ekvivalencije:

(a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

(b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.

(c) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(d) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

(8) Ugrađivanjem elemenata A, B, C i D moguće je napraviti nekoliko različitih modela jednog uređaja. Pri tome se moraju poštovati sledeća pravila:

- Elementi A i D se mogu ugraditi samo u paru.
- Ugradnja elementa D zahteva da bude ugrađen i element C.

- Model koji ne sadrži element A mora sadržati element B.
- Elementi B i D se međusobno isključuju.

Opisati svako pravilo pomoću jedne iskazne formule i utvrditi kako izgledaju modeli uređaja koje je moguće napraviti poštovanjem datih pravila.

(9) Metodom istinitosnih tablica pokazati logičku ekvivalenciju formula $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ i $p \iff q$.

3 Matematika u akciji: funkcije

> Old math teachers never die —
> they just lose their functions.
>
> *(Folklore)*

Funkciju možemo shvatiti kao radnju koju vršimo nad elementima nekog skupa. Ona takođe predstavlja jedan od osnovnih pojmova u matematici. U ovom poglavlju ćemo se skoncentrisati na formiranje pojma funkcije, ukazaćemo na neke važne vrste funkcija i naučićemo kako da ih koristimo u radu sa skupovima.

3.1 O pojmu funkcije

Nastanak pojma *funkcije* usko je povezan sa rađanjem ideje o zavisnim i nezavisnim promenljivama u četrnaestom veku u radovima Nicolasa Oresmea. Pa ipak, prvo zabeleženo pominjanje funkcije vezuje se za Leibnitza i datira sa kraja sedamnaestog veka. Ovaj pojam su u osamnaestom veku razradili Johann Bernoulli i Leonhard Euler definišući funkciju kao računsko pravilo koje je moguće napisati u obliku formule. Ovo je ujedno i način na koji mi imamo naše prve susrete sa funkcijom. Međutim, razvoj matematike u devetnaestom veku je doveo do toga da su Weierstraß, Dedekind i drugi matematičari toga vremena uvideli da je postojeći pogled na funkcije previše uzak. Ne može se, naime, svaka funkcija zadati pomoću tzv. *zatvorene formule* u kojoj je dato računsko pravilo kako dobiti vrednost zavisne promenljive pomoću datih vrednosti za nezavisne promenljive. Ovim zapažanjem pojam funkcije prerasta areal matematičke analize i postaje apstraktni skup-teoretski pojam. Danas se funkcija može sresti pod raznim imenima, u zavisnosti od oblasti u kojoj se razmatra i izučava, pa je poznata i kao preslikavanje, transformacija, operacija, morfizam, veznik(!),. . .
Za razliku od skupa, pojam funkcije možemo uvesti pomoću definicije.

Definicija 1. *Preslikavanje* (*funkcija*) je uređena trojka

$$f = (A, B, f^\bullet)$$

koja se sastoji od

- *definicionog skupa (domena)* A,
- *domena vrednosti (kodomena)* B
- i *grafika (grafa)* $f^\bullet \subseteq A \times B$ koji zadovoljava sledeće uslove:

  Za svako $a \in A$ postoji $b \in B : (a, b) \in f^\bullet$.
  Za sve $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B : \big((a, b_1) \in f^\bullet \wedge (a, b_2) \in f^\bullet\big) \implies b_1 = b_2$.

Prvi od navedena dva uslova obezbeđuje iskorišćenost celog domena (drugim rečima, vrednost funkcije se može odrediti za svaki element iz domena). Drugi predstavlja test za *dobru definisanost* funkcije, jer obezbeđuje jednoznačnost vrednosti funkcije za svaki element iz domena.

Gore navedena definicija deluje prilično opširno, ali je takav pristup neophodan ukoliko želimo da funkcije uvedemo na korektan način. U praksi se koristi nešto kraći zapis, pa umesto $(A, B, f^\bullet)$ pišemo

$$f\colon A \to B$$

dok se $(a, b) \in f^\bullet$ zapisuje u obliku

$$f(a) = b,$$

a alternativno i kao

$$f\colon a \mapsto b \quad \text{ili} \quad a \overset{f}{\mapsto} b,$$

pa možemo koristiti i zapis

$$f\colon A \to B\colon a \mapsto b.$$

U svim slučajevima kažemo da je b *slika* od a u odnosu na funkciju f, kao i da je a *original* od b u odnosu na funkciju f.

Primer 2. Ispostavlja se da izuzetno važnu ulogu u matematici igra preslikavanje koje ne vrši nikakvu transformaciju nad elementima skupa na kojem ga primenjujemo, tj. slika svaki element u samog sebe. Stoga za svaki skup A definišemo *identičko preslikavanje* $\mathrm{id}_A : A \to A$ sa

$$\text{za svako } a \in A : \mathrm{id}_A(a) = a.$$

△

U sledećem primeru predstavljamo dve funkcije koje se često koriste u računarstvu.

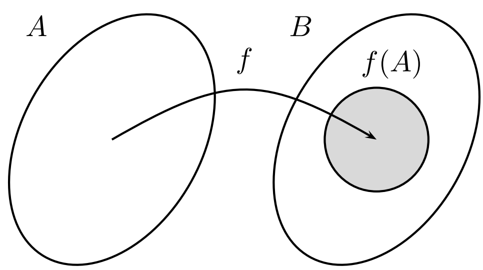
Primer 3. *Funkcija ceo deo* je preslikavanje $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, koja svakom realnom broju r dodeljuje najveći ceo broj $\lfloor r \rfloor$, koji nije veći od r, dok je *ASCII-kôd* preslikavanje koje svakom broju između 0 i 127 dodeljuje određeni znak iz datog skupa simbola. Primetimo da je baš ASCII-kôd primer funkcije koju ne možemo zadati pomoću računskog pravila. △

Primeri funkcija koje smo dosad naveli imali su jednu zajedničku osobinu: svaki element kodomena se pojavio kao slika nekog elementa iz domena. To nije uvek slučaj, jer, na primer, preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$ ne slika nijedan element domena u 1. Ovo nas motiviše da uvedemo sledeći pojam:

Definicija 4. Neka je data funkcija $f : A \to B$.
Skup

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

nazivamo *skup vrednosti* (ili *direktna slika*) funkcije f. Pišemo i $\mathrm{im} f$.



Slika 3.1: Direktna slika

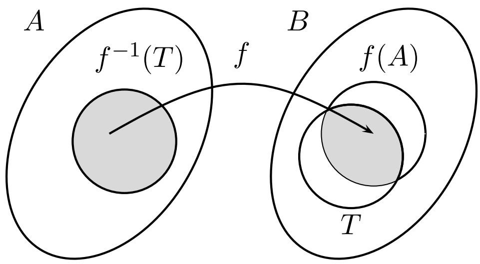
Primetimo da skup vrednosti i kodomen ne moraju biti jednaki. Na primer, za $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$ kodomen je skup prirodnih brojeva, dok je skup vrednosti skup parnih prirodnih brojeva.

Na ovom mestu je prirodno postaviti sledeće pitanje: ukoliko domen i kodomen čine jedan par skupova, postoji li i poseban podskup domena koji će činiti par sa skupom vrednosti? Iz definicije skupa vrednosti je jasno da je taj podskup upravo sam domen. Pa ipak, ponekad je potrebno znati koji elementi iz domena imaju sliku u nekom podskupu kodomena. Ta informacija se može iskazati pomoću *inverzne slike*.

Definicija 5. Neka je $f : A \to B$ i neka je $T \subseteq B$.
Inverzna slika skupa T je definisana sa

$$f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Ako je $T = \{b\}$, pišemo $f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$.



Slika 3.2: Inverzna slika

Primer 6. Neka je $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \colon x \mapsto 3x$. Tada se direktna slika sastoji od prirodnih brojeva deljivih sa 3. Za $S = \{3, 6, 9\}$ je inverzna slika data sa $f^{-1}(S) = \{1, 2, 3\}$, odnosno, za svaki element skupa S smo pronašli neki element domena koji se u njega slika pomoću f. S druge strane, za $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je inverzna slika $f^{-1}(T) = \{1, 2\}$. Primetimo da u ovom slučaju postoje elementi u T koji ne daju elemente za inverznu sliku — to su oni elementi iz T koji se ne nalaze u skupu vrednosti funkcije f. △

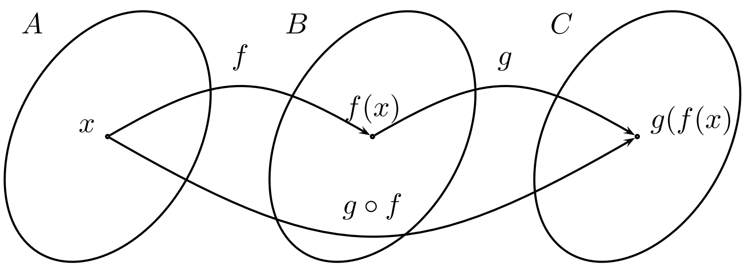
3.2 Računanje sa preslikavanjima

U prvom poglavlju smo računali sa skupovima, znamo pomalo da računamo i sa brojevima, pa se postavlja pitanje da li je moguće računati i sa funkcijama. Osnovna operacija koja se primenjuje na funkcije jeste njihova *kompozicija*.

Definicija 7. Neka su data preslikavanja $f : A \to B$ i $g : B \to C$. *Kompozicija* je preslikavanje $g \circ f : A \to C$ dato sa

$$\text{za svako } a \in A : (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

$g \circ f$ čitamo kao „g od f“, i pišemo skraćeno kao gf.



Slika 3.3: Kompozicija preslikavanja

Primer 8. Date su funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon x \mapsto x^3$ i $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon x \mapsto x - 1$. Tada je:

$$(g \circ f)(x) = x^3 - 1$$
$$(f \circ g)(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

pa možemo zaključiti da kompozicija funkcija nije komutativna operacija.

S druge strane, kompozicija funkcija jeste asocijativna operacija, odnosno,

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$$

za proizvoljne funkcije $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : C \to D$. △

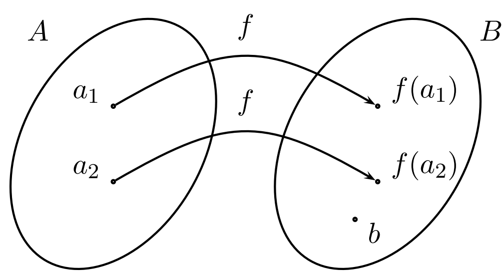
Računajući sa skupovima, upoznali smo i unarnu operaciju komplement. Primetimo da ova operacija omogućuje da dati skup U razložimo na dva skupa koji nemaju zajedničkih elemenata (tzv. *disjunktne* skupove). Zaista, za $A \subseteq U$ važi $A \cup \overline{A} = U$ i $A \cap \overline{A} = \emptyset$. U računanju sa funkcijama takođe koristimo jednu unarnu operaciju koja je na određeni način integrisana u posebnu vrstu preslikavanja, tzv. *inverzno preslikavanje*, čiji je smisao da „poništi" efekte rada datog preslikavanja i sve vrati u prvobitno stanje. Za razliku od skupova, gde se za svaki skup može odrediti njegov komplement u odnosu na dati univerzalni skup u kojem radimo, kod funkcija je situacija nešto drugačija i ne možemo pojam inverznog preslikavanja uvesti bez dodatnih napora. Prvi korak u tom poduhvatu jeste upoznavanje sa tri važne osobine koje preslikavanja mogu, ali ne moraju posedovati.

Definicija 9. Preslikavanje $f : A \to B$ je

(1) *injektivno*, ako za sve $a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$,

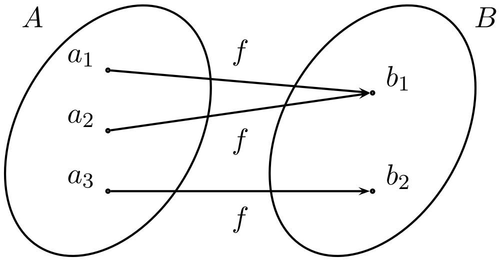
(2) *surjektivno*, ako za svako $b \in B$ postoji $a \in A : f(a) = b$ i

(3) *bijektivno*, ako je injektivno i surjektivno.



Slika 3.4: Injektivno preslikavanje

Primer 10. Proizvoljno preslikavanje može, ali ne mora imati ove osobine. Štaviše, mogući su svi scenariji, što ćemo demonstrirati na sledećim preslikavanjima na skupu celih brojeva:



Slika 3.5: Surjektivno preslikavanje

(1) $f(x) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x^4 + 1$ je primer funkcije koja nije ni injektivna ni surjektivna. Da nije injektivna sledi iz činjenica da je $f(2) = f(-2) = 17$, ali $2 \neq -2$, dok zbog nepostojanja celog broja a sa osobinom da je $f(a) = 3$ možemo odbaciti i surjektivnost.

(2) $f(x) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 3x$ je injektivna, ali ne i surjektivna funkcija. Injektivnost pokazujemo lako: iz $f(x) = f(y)$, za proizvoljne $x, y \in \mathbb{Z}$, sledi da je $3x = 3y$, odnosno, $x = y$. Međutim, ne postoji ceo broj koji se sa f slika u 7, pa funkcija nije surjektivna.

(3) $f(x) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ nije injektivna, ali jeste surjektivna. Injektivnost ne važi, jer je, recimo $f(3) = f(4)$, ali $3 \neq 4$. Da bismo potvrdili surjektivnost, moramo za svaki ceo broj b pronaći neki ceo broj a čija je on slika. Lako se pokazuje da je za $a = 3b$, $f(a) = b$, pa naša tvrdnja zaista važi.

(4) $f(x) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x + 1$ je bijektivno preslikavanje. Dokaz ove tvrdnje ostavljamo čitaocu za vežbu.

$\triangle$

Napomena 11. U praksi se injektivnost često meša sa dobrom definisanošću, što dovodi do grešaka, pa skrećemo pažnju da bi testove za ova dva pojma trebalo razlikovati. Dakle,

$$\begin{array}{rl} \textbf{dobra definisanost:} & a_1 = a_2 \implies f(a_1) = f(a_2); \\ \textbf{injektivnost:} & f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2. \end{array}$$

Zbog čega su nam ove osobine važne? Iz prethodnog izlaganja je jasno da je „povratak“ u domen moguće izvesti pomoću inverzne slike, pa za svako preslikavanje $f : A \to B$, možemo definisati preslikavanje f^{-1} koje pridružuje svakom podskupu skupa B neki podskup skupa A. To znači da je

$$f^{-1} : \mathfrak{P}(B) \to \mathfrak{P}(A),$$

odnosno, preslikavanje iz partitivnog skupa skupa B u partitivni skup skupa A. Iako je blizu onoga čemu težimo, ovako definisano preslikavanje još uvek ne garantuje da ćemo njegovom primenom na sliku nekog elementa u odnosu na dato f ponovo dobiti dotični element. Za dolazak na cilj potrebno je još odgovoriti na sledeće pitanje: Kada se f^{-1} može posmatrati kao preslikavanje iz B u A?

Da bi $f^{-1} : B \to A$ bilo preslikavanje, mora proći test dobre definisanosti. To znači da ne mogu postojati $a, b \in A$ takvi da je $f(a) = f(b)$, ali $a \neq b$, pa je jasno da moramo zahtevati injektivnost preslikavanja f. Zbog definicije domena moramo, s druge strane, za domen od f^{-1} uzeti direktnu sliku $\mathrm{im} f$. Uz ovakva ograničenja dobijamo sledeću definiciju:

Definicija 12. Neka je $f : A \to B$ injektivno. *Inverzno preslikavanje* od f je preslikavanje $f^{-1} : \mathrm{im} f \to A$ dato sa:

$$\text{za svako } b \in \mathrm{im} f : f^{-1}(b) = a \text{ ako i samo ako je } f(a) = b.$$

Primer 13. Neka je dato preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto 2x$. Kako je f injektivno i $\mathrm{im} f = 2\mathbb{N}$ (skup svih parnih prirodnih brojeva), to je $f^{-1} : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto \frac{x}{2}$ odgovarajuće inverzno preslikavanje. △

Preostalo je još da proverimo da li ovako definisano preslikavanje odgovara svrsi koju smo mu namenili.

Tvrđenje 14. *Neka je $f : A \to B$ injektivno. Tada važi*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{im} f} \quad i \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Dokaz. Neka $b \in \mathrm{im}f$. Kako je f injektivno, to postoji jedinstveno $a \in A$, takvo da je $f(a) = b$, odnosno, $f^{-1}(b) = a$. Sada imamo

$$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = \mathrm{id}_{imf}(b).$$

S druge strane, za proizvoljno $a \in A$ postoji $b \in B$, takvo da je $f(a) = b$, pa $b \in \mathrm{im}f$. Zbog injektivnosti je $f^{-1}(b) = a$. Dobijamo

$$f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a = \mathrm{id}_A(a).$$

□

Posledica 15. *Ako je $f : A \to B$ bijektivno preslikavanje, tada je f^{-1} preslikavanje iz B u A.*

Dokaz. Ako je f bijektivno, to znači da je i surjektivno, pa je $\mathrm{im}f = B$. Zbog injektivnosti i Tvrđenja 14 je f^{-1} zaista preslikavanje iz B u A. □

3.3 Funkcije veće arnosti

U prethodnom tekstu smo za argumente funkcije (tj. elemente koje zovemo originalima) uzimali elemente domena koji je bio dat u formi skupa. Međutim, taj skup može biti i komplikovanijeg oblika, recimo Descartesov proizvod dva ili više skupova, u kom slučaju će argumenti funkcije biti uređene n-torke.

Primer 16. Posmatrajmo funkciju koja u Euclidovoj ravni svakoj tački pridružuje njeno rastojanje od koordinatnog početka. Možemo je zapisati na sledeći način:

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2},$$

odnosno,

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ gde je } f((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

U ovom slučaju je primamljiva ideja da se „rešimo“ jednog para zagrada u zapisu funkcije, tj. da pišemo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Brisanjem ovog para zagrada nije došlo do suštinske promene u primeni računskog pravila, jer je njen rezultat i dalje rastojanje posmatrane tačke od koordinatnog početka. Jedina promena do koje je došlo jeste suptilna promena notacije. $\triangle$

Prethodni primer nam daje priliku da iskoristimo pogled iz drugog ugla i uvedemo u upotrebu i funkcije većih arnosti. Ako se domen funkcije sastoji od uređenih n-torki, onda kažemo da funkcija ima n argumenata. *Arnost* funkcije nije ništa drugo do broj njenih argumenata, pa su unarne funkcije arnosti 1, binarne arnosti 2, ternarne arnosti 3, itd.

Definicija 17. Neka su dati skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$. Tada je *n-arna funkcija* preslikavanje

$$f\colon A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B\colon (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

U praksi je najčešće $A_1 = \cdots = A_n = B = A$, pa u tom slučaju pišemo

$$f\colon A^n \to A\colon (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Primer 18. *Projekcije* su vrsta funkcija koja se može definisati za svaku datu arnost. Njihova uloga je da iz uređene liste ulaznih argumenata izdvoje onaj koji se nalazi na i-tom mestu (i-toj koordinati, $i \leq n$, gde je n arnost funkcije) i za dati skup A definišemo ih kao

$$\pi_i^n\colon A^n \to A\colon \pi_i^n(a_1, \ldots, a_n) = a_i.$$

$\triangle$

Sa funkcijama većih arnosti računamo kao i sa svim drugim funkcijama, primenjujući njihovu kompoziciju. Operacija kompozicije koju smo uveli u Definiciji 7 nije međutim dovoljna da bi se pomoću nje mogle izračunati sve moguće funkcije pomoću datih, pa je ovaj pojam potrebno na neki način proširiti.

Primer 19. Neka su date sledeće funkcije na skupu realnih brojeva: $+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada pomoću kompozicije možemo izraziti funkcije $\sin(x+y)$ i $\sin(\cos x)$, ali ne i $\sin x + \cos x$. $\triangle$

Da bismo rešili ovaj problem uvodimo još jednu operaciju nad funkcijama koju ćemo zvati *paralelna kompozicija*.

Definicija 20. Neka su date funkcije $f_1\colon A \to B_1$, $f_2\colon A \to B_2, \ldots,$ $f_n\colon A \to B_n$. Njihova *paralelna kompozicija* je tada data sa

$$\langle f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle\colon A \to B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n\colon x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Sada se funkcija $\sin x + \cos x$ iz prethodnog primera može zapisati kao $+\langle \sin, \cos\rangle$.

Napomena 21. Kada kažemo da neku funkciju f možemo izraziti pomoću funkcija iz datog skupa F, podrazumevaćemo da se pored funkcija iz F koriste kompozicija, paralelna kompozicija i projekcije.

Primer 22. Funkcija $\sin x + \cos y$ se može zapisati kao $+\langle \sin \circ \pi^2_1, \cos \circ \pi^2_2\rangle$.
$\triangle$

3.4 Primena u teoriji skupova

Osobine injektivnosti i surjektivnosti su se pokazale korisnim za konstrukciju inverznog preslikavanja, ali njihova upotreba nije ograničena samo na njega. Pogledajmo kako ih možemo iskoristiti za upoređivanje skupova u odnosu na njihov broj elemenata. U nastavku ćemo rešavati sledeći

Problem
Neka je $f : A \to B$ dobro definisano preslikavanje.
Koji skup ima više elemenata, A ili B?

Znamo da je f preslikavanje, tj. da za svako $a \in A$ postoji tačno jedno $b \in B$ takvo da je $f(a) = b$. Ova informacija nam nije dovoljna za bilo kakvo upoređivanje ova dva skupa, pa moramo uvesti dodatne uslove za f.

Ukoliko je f injektivno, tada za svako $b \in B$ postoji najviše jedno $a \in A$ takvo da je $f(a) = b$, pa možemo da zaključimo da skup B ima bar onoliko elemenata koliko ima skup A, tj. $|A| \leq |B|$.

Ukoliko je, pak, f surjektivno, tada za svako $b \in B$ postoji najmanje jedno $a \in A$ takvo da je $f(a) = b$, pa skup B ima najviše onoliko elemenata koliko ima skup A, tj. $|A| \geq |B|$.

Ovo razmatranje opravdava sledeću definiciju:

Definicija 23. Za skupove A i B kažemo da su *iste veličine (ekvipotentni)*, ako postoji bijektivno preslikavanje $f : A \to B$.

Napomena 24. Konačni skupovi su iste veličine ako imaju isti broj elemenata.

Ovim se pitanje utvrđivanja veličine nekog skupa može rešavati konstruisanjem bijekcije između skupa koji posmatramo i nekog skupa čiju veličinu znamo, što se intenzivno koristi u slučaju beskonačnih skupova. Međutim, konstrukcija konkretne bijekcije je, kao što se često ispostavlja, prilično težak posao. S druge strane, nije ni neophodno konstruisati konkretnu bijekciju, već je dovoljno samo utvrditi da ona postoji. Tu nam od koristi može biti sledeća teorema koju ovde navodimo bez dokaza:

Teorema 25 (Cantor, Schröder, Bernstein)**.** *Između skupova A i B postoji bijektivno preslikavanje $h : A \to B$ ako i samo ako postoje injektivno preslikavanje $f : A \to B$ i injektivno preslikavanje $g : B \to A$.*

Na jeziku skupova, ova teorema nam kaže sledeće:

$$|A| = |B| \text{ ako i samo ako je } |A| \leq |B| \text{ i } |B| \leq |A|.$$

Na osnovu njihove veličine moguće je sve skupove podeliti u dve klase: *prebrojive* i *neprebrojive* skupove.

Definicija 26. Skup je *prebrojiv*, ako je konačan ili ako je beskonačan i iste kardinalnosti kao skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Skup koji nije prebrojiv nazivamo *neprebrojiv skup.*

Napomena 27. Prebrojive skupove koji su beskonačni često nazivamo i prebrojivo beskonačni.

Primer 28. Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, dok skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije prebrojiv. $\triangle$

Ova podela je, naravno, izrazito gruba i ne daje nam precizan odgovor na pitanje koliko ima mogućnosti za veličinu skupa. Jasno je da za svaki prirodan broj n možemo konstruisati skup čija je kardinalnost jednaka n, te postoji (prebrojivo) beskonačno mnogo mogućnosti za veličinu konačnog skupa. Međutim, šta je sa beskonačnim skupovima? Da li postoje samo dve vrste beskonačnosti, prebrojiva i neprebrojiva, ili se neprebrojivost javlja u različitim veličinama? Odgovor na ovo pitanje smo već videli u prvoj glavi u Teoremi 25 — partitivni skup proizvoljno beskonačnog skupa je strogo veće kardinalnosti od tog beskonačnog skupa, pa i neprebrojivih beskonačnosti imamo beskonačno mnogo. Sada je i pravi trenutak da se uverimo u tačnost Cantorovih tvrdnji, pa stoga u nastavku donosimo i dokaz ove teoreme.

Podsetnik: Teorema 25 iz prvog poglavlja (Cantor)
Za konačne skupove S važi $|\mathfrak{P}(S)| = 2^{|S|}$.
Za beskonačne skupove S važi $|S| < |\mathfrak{P}(S)|$.

Dokaz Cantorove teoreme. Neka je dat konačan skup S i neka je $|S| = n$. Tada je $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Pridružimo svakom podskupu T skupa S uređenu n-torku $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, gde je $p_i = 1$, ako $s_i \in T$, a inače je $p_i = 0$ (ova konstrukcija se često može pronaći pod imenom *karakteristični vektor skupa*). Jasno je da svakom podskupu T odgovara tačno jedna n-torka i da se iz svake n-torke podskup T može rekonstruisati na jedinstven način, pa imamo injektivno i surjektivno preslikavanje iz skupa $\mathfrak{P}(S)$ u skup n-torki sa koordinatama iz skupa $\{0, 1\}$. Sledi da je to preslikavanje bijekcija između ova dva skupa, pa je veličina partitivnog skupa jednaka broju mogućih karakterističnih vektora dužine n, a to je $2^n = 2^{|S|}$.

Neka je sada dat beskonačan skup S. Posmatrajmo funkciju

$$f : S \to \mathfrak{P}(S) : s \mapsto \{s\}.$$

Tada iz $f(s) = f(t)$ sledi da je $\{s\} = \{t\}$, pa je $s = t$, odnosno, f je injektivno preslikavanje. Zaključujemo da je $|S| \leq |\mathfrak{P}(S)|$.
Pokažimo da je ova nejednakost i stroga, tj. da $|S| \neq |\mathfrak{P}(S)|$. Ponekad je lakše pokazati više, pa ćemo i mi iskoristiti ovaj princip i pokazaćemo da nije $|S| \geq |\mathfrak{P}(S)|$, odnosno, da ne postoji surjektivno preslikavanje skupa

S u njegov partitivni skup.
Pretpostavimo suprotno, neka je $g : S \to \mathfrak{P}(S)$ surjektivno preslikavanje i posmatrajmo skup

$$A := \{a \in S \mid a \notin g(a)\}.$$

O skupu A možemo izvesti dva zaključka. Prvo, $A \subseteq S$, pa $A \in \mathfrak{P}(S)$. Drugo, s obzirom da je g surjektivno i $\emptyset \in \mathfrak{P}(S)$, to postoji $b \in S$ takvo da je $g(b) = \emptyset$. Kako $b \notin \emptyset$, to $b \notin g(b)$, pa $b \in A$, te je A neprazan skup. S druge strane, zbog surjektivnosti preslikavanja g i činjenice da $A \in \mathfrak{P}(S)$ mora postojati i neko $a \in A$ takvo da je $g(a) = A$. Da li $a \in A$? Ako $a \in A$, tada $a \in g(a)$, zbog izbora elementa a, pa sledi da $a \notin A$. Slično, ako $a \notin A$, onda $a \in g(a)$, zbog definicije skupa A, pa zbog $g(a) = A$ dobijamo $a \in A$. U oba slučaja dolazimo u kontradikciju, pa stoga ne može postojati g koje je surjektivno i zaključujemo da je $|S| < |\mathfrak{P}(S)|$. $\square$

Činjenica da je $|\mathfrak{P}(S)| = 2^{|S|}$, kada je S konačan skup, zajedno sa idejom dokaza da ova jednakost zaista i važi, je i motiv da se skup svih preslikavanja iz skupa A u skup B označava sa B^A. Analognim zaključivanjem može se pokazati i da je

$$|B^A| = |B|^{|A|},$$

što omogućava i lako prebrojavanje svih mogućih preslikavanja između dva skupa.

Primer 29. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Tada je broj svih preslikavanja iz A u B jednak

$$6^5 = 7776.$$

$\triangle$

3.5 Zadaci za vežbu

(1) Ispitati koja od sledećih preslikavanja su injektivna, surjektivna, odnosno, bijektivna:

(a) Dati su skupovi $A = \{0, 1, 2, 3\}$ i $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \mid 8\}$. i preslikavanje $f : A \to B : x \mapsto 2^x$,

(b) preslikavanje $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

(c) preslikavanje $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ koje svakom nepraznom podskupu S skupa $\mathbb{N}$ pridružuje najmanji element iz S.

(2) Da li je preslikavanje $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato sa

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - 5x_2)$$

bijekcija? Obrazložiti odgovor.

(3) Neka je preslikavanje $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato sa

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1).$$

Odrediti inverzne slike $T^{-1}(\{(0, -1, 1)\})$ i $T^{-1}(\{(1, 1, 2)\})$, a zatim uz njihovu pomoć pokazati da T nije ni injektivno ni surjektivno.

(4) Neka su A i B skupovi i neka je $f : A \to B$ preslikavanje. Pokazati da je f injektivno ako i samo ako za sve $S, T \subseteq A$ važi

$$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T).$$

(5) Kažemo da je $x \in A$ *fiksna* tačka preslikavanja $f : A \to A$ ako je

$$f(x) = x.$$

Neka je S skup svih fiksnih tačaka funkcije f. Ako je $g : A \to A$ funkcija sa osobinom

$$f \circ g = g \circ f,$$

pokazati da je $g(S) \subseteq S$.

(6) Neka je skup A azbuka od n slova, tj. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Reč dužine m nad azbukom A je bilo koji niz dužine m čiji su elementi slova azbuke. Skup B je skup svih reči dužine m nad azbukom A. Posmatramo preslikavanje $f : B \to A$ koje svaku reč dužine m preslikava u njeno početno slovo.
Ispitati za koje vrednosti parametara m i n je preslikavanje f injektivno, surjektivno, odnosno, bijektivno.

(7) Neka je preslikavanje $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{-1,0,1\}$ dato sa

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

Ispitati da li je ovo preslikavanje injektivno, surjektivno ili čak bijektivno. Obrazložiti odgovor.

(8) Date su funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pri čemu je $f(x) = a \cdot x$ i $g(x) = x + b$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Odrediti:

(a) $g \circ f$;

(b) $f \circ g$;

(c) $f^{-1} \circ g^{-1}$;

(d) $(f \circ g)^{-1}$.

4 Relacije

> If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
>
> *(John von Neumann)*

Neizbežni pratilac pojma funkcije jeste pojam *relacije*. U ovoj glavi ćemo se upoznati sa osobinama relevantnim za određene vrste relacija, naučićemo da računamo sa njima i izučićemo detaljnije dve važne klase relacija – relacije poretka i relacije ekvivalencije.

4.1 O pojmu i osobinama (binarnih) relacija

Dok funkcijama opisujemo transformacije koje vršimo nad elementima nekog skupa, relacije nam služe za opisivanje postojećih veza između tih elemenata. Stoga ćemo put kroz svet relacija započeti vezama kakve najčešće srećemo i u realnom životu, a to su one između dva objekta, ili formalnije rečeno — *binarne relacije*.

Definicija 1. Neka su dati skupovi A i B. *Binarna relacija između skupova* A i B je podskup R skupa $A \times B$. Specijalno, za $A = B$, *binarna relacija na skupu* A je $R \subseteq A \times A$, čiji su elementi uređeni parovi čiji su elementi iz skupa A.

Da su a i b u relaciji R obično zapisujemo kao $(a, b) \in R$ ili $a\,R\,b$. Napomenimo još i da je u matematici uobičajeno za nazive relacija koristiti mala slova grčkog alfabeta ϱ, θ, σ, τ,. . . .

Najčešće se razmatraju relacije na datom skupu, pa ćemo se mi u nastavku teksta skoncentrisati na iste.

Primer 2. Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Tada je

$$\varrho = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_3), (a_4, a_3)\}$$

relacija na skupu A. $\triangle$

Kao i kod funkcija, određene osobine koje one mogu, ali ne moraju imati, mogu učiniti određene relacije pogodnijim za upotrebu u modelovanju i rešavanju određenih problema.

Definicija 3. Neka je dat skup A. Relacija $R \subseteq A \times A$ je

(1) *refleksivna*, ako za sve $a \in A : (a, a) \in R$,

(2) *irefleksivna*, ako za sve $a \in A : (a, a) \notin R$,

(3) *simetrična*, ako za sve $a, b \in A : (a, b) \in R \implies (b, a) \in R$,

(4) *antisimetrična*, ako za sve $a, b \in A : \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big) \implies (a = b)$,

(5) *asimetrična*, ako za sve $a, b \in A : \big(a, b) \in R \implies (b, a) \notin R$,

(6) *tranzitivna*, ako za sve $a, b, c \in A : \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big) \implies (a, c) \in R$.

Da relacija zaista ne mora posedovati nijednu od navedenih osobina uveriće nas sledeći primer.

Primer 4. Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Relacija

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_4, a_4), (a_5, a_4)\}$$

nema nijednu od navedenih osobina, u šta se lako možemo uveriti:

(1) R nije refleksivna, jer $(a_1, a_1) \notin R$;

(2) R nije irefleksivna, jer $(a_4, a_4) \in R$;

(3) R nije simetrična, jer $(a_1, a_2) \in R$, ali $(a_2, a_1) \notin R$;

(4) R nije ni antisimetrična, jer $(a_2, a_3), (a_3, a_2) \in R$, ali $a_2 \neq a_3$;

(5) R nije ni asimetrična, jer $(a_2, a_3) \in R$, ali i $(a_3, a_2) \in R$;

(6) Tranzitivnost ne važi, jer $(a_1, a_2), (a_2, a_3) \in R$, ali $(a_1, a_3) \notin R$.

$\triangle$

Kao što među svim funkcijama posebno mesto zauzima identičko preslikavanje, tako i među relacijama izdvajamo dve od posebnog značaja.

Definicija 5. *Dijagonalna relacija* na A je data sa

$$\Delta_A := \{(a,a) \mid a \in A\}.$$

Alternativno, ova relacija se naziva još i *identitet* ili *relacija jednakosti. Puna relacija* na A je data sa

$$\nabla_A := A \times A.$$

Primetimo da se svaka funkcija može zapisati kao relacija.

Primer 6. Posmatrajmo skup A i proizvoljnu funkciju $f : A \to A : x \mapsto f(x)$. Tada njoj možemo pridružiti binarnu relaciju

$$\varrho = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Relacija ϱ nije ništa drugo do graf funkcije f, koga smo upoznali u definiciji funkcije pod oznakom $f^\bullet$. Za $f(x) = x = \mathrm{id}_A(x)$ imamo relaciju $\{(x,x) \mid x \in A\} = \Delta_A$. △

Konstrukciju iz prethodnog primera možemo uopštiti i na funkcije sa proizvoljnim brojem argumenata, o čemu ćemo reći još par reči nešto kasnije, kada proširimo naše shvatanje relacije. Mogućnost prelaska iz sveta funkcija u svet relacija odmah otvara pitanje postojanja obrnutog procesa: Može li se pomoću slične konstrukcije od proizvoljne relacije napraviti funkcija? Odgovor je, nažalost, odričan, jer vrlo lako možemo doći u sukob sa dobrom defnisanošću funkcije što se može ilustrovati sledećim primerom:

Primer 7. Neka je data sledeća relacija na skupu prirodnih brojeva

$$\varrho = \{(a,b) \mid b \text{ je deljivo sa } a\}.$$

Da li postoji funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takva da je za svako $(a,b) \in \varrho : \quad b = f(a)$?
Ukoliko bi postojala, morala bi da bude i dobro definisana. Međutim, $(2,4) \in \varrho$ i $(2,6) \in \varrho$, pa bi u tom slučaju moralo da važi i $f(2) = 4$ i $f(2) = 6$, čime dolazimo u kontradikciju sa dobrom definisanošću. △

4.2 Računanje sa relacijama

Nakon računanja sa skupovima i računanja sa funkcijama, spremni smo i za novi izazov — računanje sa relacijama. U ovom slučaju pola posla je već obavljeno, jer su relacije po svojoj prirodi ništa drugo do skupovi, što znači da možemo da računamo njihove preseke, unije, razlike,...

Specifičnost pojma relacije zahteva, naravno, i uvođenje novih operacija pomoću kojih je moguće pojednostaviti određena izračunavanja i konstruisati nove relacije pomoću postojećih.

Definicija 8. Neka je dat skup A. *Proizvod* relacija R i S na A je dat sa

$$R \circ S := \{(a, c) \mid \text{postoji } b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Primer 9. Neka je $A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$.
Neka su, dalje, $R = \{(1, 3), (3, 6), (3, 9), (9, 6), (12, 3)\}$ i $S = \{(6, 1), (3, 12)\}$ relacije na A. Tada je

$$\begin{aligned} R \circ S &= \{(1, 12), (12, 12), (3, 1), (9, 1\}, \\ S \circ R &= \{(6, 3), (3, 3)\}. \end{aligned}$$

Odavde odmah možemo zaključiti i da proizvod relacija nije komutativan.

△

Napomena 10. Proizvod $R \circ R$ često obeležavamo i sa R^2. Analogno,

$$R^n = (\dots \underbrace{(R \circ R) \circ \dots) \circ R}_{n-puta}.$$

Iako nije komutativan, proizvod relacija jeste asocijativan, pa uviđamo i postojanje određene analogije u odnosu na kompoziciju funkcija. Prateći ovu analogiju prirodno dolazimo i do pitanja postojanja pojma *inverzne relacije*. Dok smo do definicije inverznog preslikavanja došli uz izvesne poteškoće, u ovom slučaju nemamo nikakvih prepreka koje moramo preskočiti.

Definicija 11. *Relacija inverzna* relaciji $R \subseteq A \times A$ je data sa

$$R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Kao što vidimo, relacija inverzna datoj binarnoj relaciji dobija se jednostavnom zamenom mesta elemenata u uređenom paru.

Primer 12. Neka je $A = \{\text{dan}, \text{noć}, \text{jutro}, \text{veče}\}$ i neka je

$$R = \{(\text{dan}, \text{noć}), (\text{noć}, \text{jutro}), (\text{noć}, \text{veče}), (\text{veče}, \text{jutro})\}.$$

Tada je

$$R^{-1} = \{(\text{noć}, \text{dan}), (\text{jutro}, \text{noć}), (\text{jutro}, \text{veče}), (\text{veče}, \text{noć})\}.$$

$\triangle$

Uvođenje operacija na relacijama nam omogućava i da osobine iz Definicije 3 izrazimo na drugi način, kao što je to urađeno u Tabeli 4.1 za relaciju R na skupu A.

refleksivna	$\Delta_A \subseteq R$
irefleksivna	$\Delta_A \cap R = \emptyset$
simetrična	$R = R^{-1}$
antisimetrična	$R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$
asimetrična	$R \cap R^{-1} = \emptyset$
tranzitivna	$R \circ R \subseteq R$

Tabela 4.1: Osobine koje često srećemo kod relacija

Pored dijagonalne i pune relacije, postoji još nekoliko vrsta relacija sa kojima se često susrećemo u radu. To je, pre svega, *prazna relacija*, koja ne sadrži nijedan element, te odgovara praznom skupu. Preostale „interesantne“ klase relacija određene su nekim kombinacijama gore navedenih osobina, pa tako imamo *relacije tolerancije* (=refleksivne simetrične relacije) i *kvazi uređenja* (=refleksivne tranzitivne relacije). *(Prosti) Grafovi* su irefleksivne simetrične relacije. Oni imaju sopstvenu teoriju, kojoj ćemo se posvetiti u drugom delu ovog udžbenika, a u nastavku ćemo se skoncentrisati na dve, možda i najvažnije, klase binarnih relacija — *relacije poretka* i *relacije ekvivalencije*.

4.3 Relacije poretka

Relacije poretka koristimo kada želimo da uredimo neki skup, u smislu uspostavljanja veza između njegovih elemenata na način koji omogućava određenu vrstu orijentacije.

Definicija 13. Neka je dat skup A. Relacija $R \subseteq A \times A$ je *uređenje* (*parcijalno uređenje* ili *relacija poretka*) na A, ako je R refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.
Kažemo da je (A, R) je *uređeni skup*.

Ponekad je važno da su svaka dva elementa datog skupa u relaciji, odnosno, da su *uporediva*. Tada govorimo o *linearnom (totalnom) uređenju* na A, tj. o relaciji uređenja R na A sa osobinom:

$$\text{Za sve } a, b \in A : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$$

Primer 14. Relacije poretka nam nisu u potpunosti nepoznate. Imamo već poprilično iskustvo sa nekim beskonačnim uređenim skupovima, kao što su $(\mathbb{N}, \leq)$ ili $(\mathbb{N}, |)$, gde sa $a \mid b$ označavamo relaciju „b je deljivo sa a“. Pri tome je $(\mathbb{N}, \leq)$ totalno uređen, dok $(\mathbb{N}, |)$ nije, jer, recimo 2 i 3 nisu uporedivi.
Jedan interesantan uređen skup je i $(\mathfrak{P}(A), \subseteq)$, u kom su podskupovi skupa A uređeni pomoću relacije „je podskup od“. Zaista, za $B, C, D \subseteq A$ uvek važi $B \subseteq B$ (refleksivnost), iz $B \subseteq C$ i $C \subseteq B$ sledi da je $B = C$ (antisimetričnost), i, konačno, iz $B \subseteq C$ i $C \subseteq D$ sledi i $B \subseteq D$ (tranzitivnost).
Uređenje se zato označava najčešće sa $\leq$ ili $\subseteq$, i kaže se da je a manji ili jednak b ukoliko je $a \leq b$. $\triangle$

Matematika se dešava u slikama, i zato jedan od izazova jeste vizuelno (grafičko) predstavljanje relacija. U slučaju relacija poretka to se rešava korišćenjem *Hasse-dijagrama.* Da bismo bolje razumeli ideju za ovakav način predstavljanja, potrebno je da se prvo upoznamo sa posebnostima koje neki elementi skupa dobijaju zahvaljujući relaciji poretka koju posmatramo na datom skupu.

Definicija 15. Dati su skup A i relacija uređenja R na A.

(1) Ako $m \in A$ ima osobinu da ne postoji $x \in A$ za koje važi $(x, m) \in R$ i $x \neq m$, onda kažemo da je m *minimalni* element skupa A.

(2) Ako postoji $m \in A$, takvo da za sve druge elemente $x \in A$ važi $(m, x) \in R$, tada kažemo da je m *najmanji* element skupa A.

(3) Ako $M \in A$ ima osobinu da ne postoji $x \in A$ za koje važi $(M, x) \in R$ i $x \neq M$, onda kažemo da je M *maksimalni* element skupa A.

(4) Ako postoji $M \in A$, takvo da za sve druge elemente $x \in A$ važi $(x, M) \in R$, tada kažemo da je M *najveći* element skupa A.

Primetimo da su najveći i najmanji element, ukoliko postoje, jedinstveni, dok sa maksimalnim i minimalnim to nije slučaj. Takođe, najmanji element je ujedno i minimalni, dok obrnuto ne važi. Analogno zaključujemo o vezi između maksimalnog i najvećeg elementa.

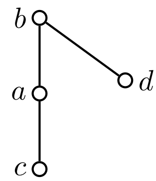
Primer 16. Posmatrajmo sada skup $A = \{a, b, c, d\}$ i na njemu definisanu relaciju poretka

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, a), (c, b), (d, b), (d, d)\}.$$

Tada su c i d minimalni elementi, b je najveći i maksimalni, dok najmanji element ne postoji. $\triangle$

Kako sada nacrtati odgovarajući Hasse-dijagram? Svaki element crtamo tako da se oni veći od njega nalaze iznad, a manji od njega ispod. Specijalno, ukoliko postoje, najmanji i najveći element se nalaze na dnu, odnosno, vrhu crteža. Elementi koji su u relaciji su povezani linijom, uz jedno pojednostavljenje: linije koje dobijamo pomoću osobine tranzitivnosti izostavljamo, povlačimo samo one neophodne, između „uzastopnih“ elemenata. Hasse-dijagram za uređeni skup iz Primera 16 je prikazan na Slici 4.1.

Napomenimo i to da dijagrami nisu jednoznačno određeni — postoji više načina da se nacrtaju na manje ili više komplikovan način. Stoga je crtanje ovakvih dijagrama problem za sebe, jer težimo što jednostavnijoj i lepšoj (=simetričnoj) slici, što nije moguće uvek postići.



Slika 4.1: Hasse-dijagram za relaciju poretka iz Primera 16

4.4 Relacije ekvivalencije

Relacije ekvivalencije koristimo za modelovanje problema u kojima je skup objekata potrebno podeliti u manje disjunktne grupacije sa osobinom da su objekti unutar njih svi međusobno povezani.

Definicija 17. Relaciju $\theta \subseteq A \times A$ nazivamo *relacija ekvivalencije* na skupu A, ako je θ refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primer 18. Najjednostavnija relacija ekvivalencije je svakako dijagonalna relacija.
Relacija ekvivalencije je i kongruencija modulo k, za $k \in \mathbb{N}$ na skupu celih brojeva, gde su dva cela broja u relaciji ukoliko daju isti ostatak pri deljenju sa k.
Na slici 4.2 je grafički predstavljena relacija ekvivalencije R na skupu $A = \{a, b, c, d, e\}$, data sa

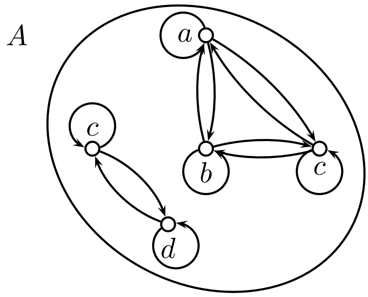
$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),\\ (c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)\}.$$

$\triangle$

Na slici u prethodnom primeru jasno uočavamo dva dela na koje su pomoću relacije ekvivalencije podeljeni elementi posmatranog skupa.

Definicija 19. Neka je θ relacija ekvivalencije na skupu A. Za $a \in A$ *klasa ekvivalencije* elementa a u odnosu na θ data je sa

$$a/\theta := \{b \in A \mid (a,b) \in \theta\},$$



Slika 4.2: Relacija ekvivalencije

a element a je tada *predstavnik* klase ekvivalencije a/θ. Za zapis klase ekvivalencije koristimo i oznake $[a]_\theta$, a^θ, $a_{/\theta}$.
Skup svih klasa ekvivalencije u odnosu na θ naziva se *količnički (faktor) skup* i označava sa

$$A/\theta := \{a/\theta \mid a \in A\}.$$

Primer 20. Posmatrajmo skup celih brojeva i na njemu relaciju θ datu sa

$$\text{Za svako } a, b \in \mathbb{Z}: \quad a\theta b \text{ ako i samo ako su } a \text{ i } b \text{ iste parnosti.}$$

Lako se proverava da je θ relacije ekvivalencije koja ima dve klase ekvivalencije:

- $1/\theta$, koja sadrži sve neparne cele brojeve, i
- $0/\theta$, koja sadrži sve parne cele brojeve.

Primetimo i da je $0/\theta = 2/\theta = -2/\theta = \cdots$, odnosno, da se svaki element iz klase može uzeti za njenog predstavnika. $\triangle$

Prethodni primer nam ukazuje i na činjenicu da se iz samog zapisa klase (pomoću njenog predstavnika) često ne može odmah identifikovati kojoj klasi pripada neki element koji nije korišćen kao njen predstavnik. Očigledno je da su nam tada potrebne i neke dodatne informacije, pa primamljivo deluje ideja da se elementi skupa na neki način „povežu“ sa odgovarajućim klasama ekvivalencije. To se postiže pomoću *kanoničke projekcije*.

Definicija 21. *Kanonička projekcija* $\pi_\theta : A \to A/\theta$ je preslikavanje koje svaki element $a \in A$ preslikava na klasu ekvivalencije elementa a.

Za relaciju θ iz Primera 20 kanonička projekcija $\pi_\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\theta$ je data sa

$$\pi_\theta(x) = \begin{cases} 1/\theta, & x \text{ je neparan ceo broj,} \\ 0/\theta, & x \text{ je paran ceo broj.} \end{cases}$$

Takođe, klase ekvivalencije su se ili u potpunosti poklapale ili nisu imale zajedničkih elemenata, pa se postavlja pitanje da li je to tako i u opštem slučaju.

Tvrđenje 22. *Neka je θ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada za svaka dva elementa $a, b \in A$ važi*

$$\textit{ili} \quad a/\theta = b/\theta \quad \textit{ili} \quad a/\theta \cap b/\theta = \emptyset.$$

Dokaz. Neka su a i b proizvoljni elementi skupa A i neka je θ relacija ekvivalencije na istom skupu. Tada je ili $a/\theta \cap b/\theta = \emptyset$ ili $a/\theta \cap b/\theta \neq \emptyset$. U prvom slučaju odmah imamo da tvrđenje važi, tako da je preostalo da istražimo šta se dešava u drugom slučaju.

Neka je, dakle, $a/\theta \cap b/\theta \neq \emptyset$. Tada postoji $c \in A$ takvo da je $c \in a/\theta \cap b/\theta$, odnosno $c \in a/\theta$ i $c \in b/\theta$. Tada $(a, c) \in \theta$ i $(b, c) \in \theta$. Simetričnost relacije θ nam daje $(c, a), (c, b) \in \theta$, pa, ovaj put zbog tranzitivnosti, sledi da $(a, b), (b, a) \in \theta$. Pokažimo da je $a/\theta = b/\theta$:
Neka $d \in a/\theta$. Tada $(a, d), (b, a) \in \theta$, pa sledi da $(b, d) \in \theta$, odnosno $d \in b/\theta$. Stoga je $a/\theta \subseteq b/\theta$. Obrnuto, neka $d \in b/\theta$. Tada $(b, d), (a, b) \in \theta$, pa sledi da $(a, d) \in \theta$, odnosno $d \in a/\theta$. Stoga je $b/\theta \subseteq a/\theta$, pa sledi tražena jednakost. □

Ovo zapažanje nam omogućava da relacije ekvivalencije povežemo sa još jednim važnim matematičkim pojmom — *particijom skupa.*

Definicija 23. *Particija* skupa A je skup

$$\mathcal{P} := \{A_i \mid i \in I\}$$

sa sledećim osobinama:

(1) za svako $i \in I : A_i \neq \emptyset$,

(2) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$,

(3) za svako $i \in I : A_i \subseteq A$ i

(4) za sve $i, j \in I : (i \neq j) \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Elementi skupa $\mathcal{P}$ su *klase* ili *delovi* particije $\mathcal{P}$.

Primer 24. Dat je skup $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tada kolekcija $\mathcal{P} = \{\{0, 2, 4\}, \{1\}, \{3, 6, 8, 9\}, \{5, 7\}\}$ jeste jedna particija skupa A, dok $\mathcal{Q} = \{\{2, 4, 6, 8\}, \{1, 2, 3, 10\}\}$ i $\mathcal{R} = \{\{0, 1, 3, 5, 8, 9\}, \{2, 4, 6, 7\}, \{8, 9\}\}$ to nisu. $\triangle$

Veza između particije i relacije ekvivalencije opisana je u sledećoj teoremi.

Teorema 25. *Količnički skup A/θ relacije ekvivalencije θ na skupu A je uvek particija. Obrnuto, ako je $\mathcal{P}$ particija skupa A, onda je*

$$\theta_{\mathcal{P}} := \bigcup_{A_i \in \mathcal{P}} (A_i \times A_i)$$

relacija ekvivalencije.
Za svaku relaciju ekvivalencije θ na skupu A važi $\theta = \theta_{A/\theta}$ i za svaku particiju $\mathcal{P}$ skupa A važi $A/\theta_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$.

Dokaz. Posmatrajmo, prvo, količnički skup $A/\theta = \{a/\theta \mid a \in A\}$ i pokažimo da klase ekvivalencije zaista daju particiju skupa A. Pri tome svaku klasu ekvivalencije zapisujemo preko izabranog predstavnika, a skup izabranih predstavnika označavamo sa P. Ovim izbegavamo pojavljivanje iste klase preko dva različita predstavnika:

(1) Kako $a \in a/\theta$, to je $a/\theta \neq \emptyset$, za svako $a \in P$.

(2) Svaki element skupa A pripada nekoj klasi ekvivalencije i svaka klasa je sačinjena od elemenata skupa A, pa je $\bigcup_{a \in A} a/\theta = A$.

(3) Iz prethodnog je i $a/\theta \subseteq A$, za svako $a \in P$.

(4) Konačno, neka su a i b predstavnici različitih klasa. Tada je $a/\theta \neq b/\theta$, pa sledi da je $a/\theta \cap b/\theta = \emptyset$ zbog Tvrđenja 22.

Obrnuto, neka je data particija $\mathcal{P} = \{A_i \mid i \in I\}$ skupa A. Pokažimo da je $\theta_{\mathcal{P}}$ relacija ekvivalencije:

Refleksivnost: Za svako $a \in A$ postoji A_i, takvo da je $a \in A_i$, pa je $(a, a) \in A_i \times A_i \subseteq \theta_{\mathcal{P}}$.

Simetričnost: Neka $(a, b) \in \theta_{\mathcal{P}}$. Tada postoji A_i, takvo da $a, b \in A_i$, pa je i $(b, a) \in A_i \times A_i \subseteq \theta_{\mathcal{P}}$.

Tranzitivnost: Neka $(a, b), (b, c) \in \theta_{\mathcal{P}}$. Tada postoje A_i i A_j, takvi da $(a, b) \in A_i \times A_i$ i $(b, c) \in A_j \times A_j$, pa je $b \in A_i \cap A_j$, odakle zaključujemo da je $i = j$, odnosno, da $a, b, c \in A_i$, pa je $(a, c) \in A_i \times A_i \subseteq \theta_{\mathcal{P}}$.

Ovim dobijamo korespondenciju između klasa ekvivalencije i delova particije. Zaista,

$$\theta_{A/\theta} = \bigcup_{a/\theta \in A/\theta} (a/\theta \times a/\theta) = \theta,$$

dok je

$$A/\theta_{\mathcal{P}} = \{a/\theta_{\mathcal{P}} \mid a \in A\} = \mathcal{P},$$

jer klase ekvivalencije predstavljaju ujedno i klase particije. □

Ovakva veza između particije skupa i relacije ekvivalencije na skupu otvara mogućnost jednostavnog upoređivanja relacija ekvivalencije na datom skupu, pa tako kažemo da je relacija ekvivalencije θ na skupu A *finija* od relacije ekvivalencije ϱ na istom skupu, ako

$$\theta \subseteq \varrho.$$

Kažemo i da je ϱ *grublja* od θ. Ukoliko važi znak jednakosti, kažemo da su relacije jednake.

Primer 26. Neka je $A = \{p, q, r, s, t\}$. Tada je

$$\theta = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q),(r,r),(s,s),(t,t)\}$$

finija od

$$\begin{aligned}\varrho =\{&(p,p),(p,q),(p,r),(q,p),(q,q),(q,r),(r,p),\\&(r,q),(r,r),(s,s),(s,t),(t,s),(t,t)\}.\end{aligned}$$

$\triangle$

Primetimo da je θ finija ili jednaka ϱ ako i samo ako je svaka klasa ekvivalencije od θ podskup neke klase ekvivalencije od ϱ. Kažemo i da je particija koja odgovara relaciji θ finija od one koja odgovara relaciji ϱ.

Relacije ekvivalencije na skupu A zajedno sa $\subseteq$ (relacijom profinjenja) daju jedan uređen skup, koji obično označavamo sa $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$. U pitanju nije totalno uređen skup, jer je jasno da nisu svake dve relacije ekvivalencije uporedive u odnosu na relaciju profinjenja. Zato je zanimljivo pitanje određivanja relacije koja se u Hasse dijagramu nalazi neposredno iznad, odnosno, neposredno ispod dve neuporedive relacije ekvivalencije.

Na jedno od ova dva pitanja odgovor je jednostavan. Nije, naime, teško uveriti se da je presek proizvoljnog broja relacija ekvivalencije ponovo relacija ekvivalencije, pa se neposredno ispod uvek nalazi presek dve posmatrane relacije. S druge strane, unija $\theta \cup \varrho$ dve relacije ekvivalencije θ i ϱ (što bi bio očekivani odgovor na drugo pitanje), obično nije relacija ekvivalencije.

Primer 27. Na skupu $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ posmatramo dve relacije ekvivalencije ϱ i θ koje su zadate preko svojih količničkih skupova

$$\begin{aligned}A/\varrho &= \{\{-2,2\},\{0,1\},\{-3,3\},\{-1\}\} \text{ i}\\ A/\theta &= \{\{-3,-2\},\{2,3\},\{-1\},\{0,1\}\}.\end{aligned}$$

Primetimo i da je ovakvo zapisivanje relacija ekvivalencije na većim skupovima znatno kraće u odnosu na uobičajeni zapis navođenjem svih uređenih parova. Tada je

$$\varrho \cap \theta = \Delta_A \cup \{(0,1),(1,0)\},$$

i to jeste relacija ekvivalencije. S druge strane,

$$(-3,-2),(-2,2) \in \varrho \cup \theta, \text{ ali } (-3,2) \notin \varrho \cup \theta,$$

pa ova relacija nije tranzitivna, a samim tim ni relacija ekvivalencije. △

Na ovom mestu moramo razjasniti dve stvari: šta znači biti neposredno iznad i neposredno ispod dva neuporediva elementa u Hasse dijagramu (dosad smo ovom pitanju prilazili intuitivno, ali ne i matematički precizno), i šta je uzrok neuspeha ideje sa unijom relacija.

„Neposredno iznad" i „neposredno ispod" se na jeziku matematike zove *supremum*, odnosno, *infimum*. Ove pojmove ne definišemo samo za dva elementa, već opštije, za skup elemenata, što ima i svoje vizuelno opravdanje: u Hasse dijagramu se često dešava da se neki element nalazi neposredno iznad ne samo dva, već tri ili više elemenata istovremeno. Supremum skupa je njegovo najmanje gornje ograničenje, odnosno, najmanji element među svim onim elementima koji su veći od svih iz posmatranog skupa. Analogno, infimum skupa je najveće donje ograničenje, odnosno, najveći element u skupu svih onih koji su manji od svih elemenata posmatranog skupa. Supremum i infimum ne moraju da postoje, ali ako postoje, onda moraju biti jedinstveni.

Sada je jasno i zašto smo pokušali sa idejom unije relacija ekvivalencije, budući da to i jeste najmanji skup koji sadrži obe relacije. Međutim, prethodni primer jasno ukazuje da to nije dovoljno — iako je uvek i refleksivna i simetrična, unija nije obavezno ponovo relacija ekvivalencije iz prostog razloga što ne mora biti tranzitivna. Ovo je ujedno i putokaz za popravak naše ideje, jer je sada jasno da tragamo za najmanjom relacijom ekvivalencije koja sadrži ϱ i θ od kojih smo pošli i da ćemo je dobiti od unije ukoliko je dopunimo sa onim što nedostaje da bi bio ispunjen uslov tranzitivnosti. Takva relacija se naziva *tranzitivno zatvorenje* od $\theta \cup \varrho$ i to je najfinija relacija koja sadrži i ϱ i θ.

Definicija 28. *Tranzitivno zatvorenje* relacije R je dato sa

$$\operatorname{trans}(R) := \bigcup_{n \geq 1} R^n.$$

Primer 29. Pronađimo sada tranzitivno zatvorenje relacije $R = \varrho \cup \theta$ iz Primera 27:

$$\begin{aligned}
R &= \Delta_A \cup \{(-3,3),(3,-3),(2,-2),(-2,2),(0,1),(1,0),(-3,-2),\\
&\quad (-2,-3),(2,3),(3,2)\},\\
R^2 &= R \cup \{(-3,2),(2,-3),(3,-2),(-2,3)\},\\
R^3 &= R^2,\\
\mathrm{trans}(R) &= R^2.
\end{aligned}$$

Zapisano preko količničkog skupa, imamo

$$A/\mathrm{trans}(R) = \{\{-3,-2,2,3\},\{0,1\},\{-1\}\}.$$

△

Za kraj priče o relacijama ekvivalencije ostavili smo jednu koja je u bliskoj vezi sa preslikavanjima.

Definicija 30. Za preslikavanje $f : A \to B$, *jezgro* preslikavanja f je relacija $\ker f$, data sa

$$\ker f := \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in A \text{ i } f(a_1) = f(a_2)\}.$$

Primer 31. Posmatrajmo preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$. Tada je

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in \mathbb{Z} \text{ i } f(a_1) = f(a_2\}\\
&= \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in \mathbb{Z} \text{ i } a_1^2 = a_2^2\}\\
&= \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in \mathbb{Z} \text{ i } (a_1 = a_2 \text{ ili } a_1 = -a_2)\}\\
&= \Delta_{\mathbb{Z}} \cup \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

△

Ispostavlja se da važi sledeće:

Tvrđenje 32. *Jezgro proizvoljnog preslikavanja $f : A \to B$ je relacija ekvivalencije na A.*

Dokaz. Pokažimo da ova relacija zaista ima odgovarajuće osobine.

Refleksivnost: S obzirom da za $a \in A$ uvek važi $f(a) = f(a)$, sledi $(a, a) \in \ker f$, za svako $a \in A$.

Simetričnost: Neka $(a, b) \in \ker f$. Tada je $f(a) = f(b)$, pa je i $f(b) = f(a)$, odnosno, $(b, a) \in \ker f$.

Tranzitivnost: Neka $(a, b), (b, c) \in \ker f$. Tada je $f(a) = f(b)$ i $f(b) = f(c)$, pa je $f(a) = f(c)$, odakle je $(a, c) \in \ker f$.

□

Štaviše, svaka relacija ekvivalencije se može zapisati kao jezgro jednog određenog preslikavanja — njene kanoničke projekcije.

Tvrđenje 33. *Neka je dat skup A i relacija ekvivalencije θ na njemu. Tada važi*

$$\theta = \ker \pi_\theta.$$

Dokaz. Neka je θ relacija ekvivalencije na skupu A i neka $(a, b) \in \theta$. Tada je $a/\theta = b/\theta$, pa je $\pi_\theta(a) = \pi_\theta(b)$, odakle je $(a, b) \in \ker \pi_\theta$. Sledi da je $\theta \subseteq \ker \pi_\theta$. Obrnuto, iz $(a, b) \in \ker \pi_\theta$ sledi $\pi_\theta(a) = \pi_\theta(b)$, pa je $a/\theta = b/\theta$ i, stoga, $(a, b) \in \theta$, odnosno, $\ker \pi_\theta \subseteq \theta$. □

4.5 Relacije drugih arnosti

Spomenuli smo već da svet relacija nije ograničen samo na svoje binarne predstavnike. Da bismo govorili o relacijama koje opisuju veze između više od dva objekta, neophodno je proširiti pojam uređenog para, što smo već realizovali uvođenjem pojma uređene n-torke.

Definicija 34. Skupove $R \subseteq A^n$ nazivamo *n-arne relacije* ili *predikati* na skupu A.

Primetimo da *unarne* relacije nisu ništa drugo do podskupovi skupa A. Dužina relacije se naziva i *arnost* relacije, pa je tako relacija $\varrho \subseteq A^3$ arnosti 3, relacija $\theta \subseteq A^7$ arnosti 7, dok je $\sigma \subseteq A$ arnosti 1.

Pojam arnosti smo ranije povezali i sa funkcijama. U tom slučaju smo govorili o broju *argumenata* funkcije (tj. broju elemenata domena na koje funkcija istovremeno deluje), pa svakoj funkciji arnosti n možemo pridružiti relaciju arnosti $n+1$. Preciznije, ako je

$$f : A^n \to A : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

onda je odgovarajuća relacija $\varrho_f \subseteq A^{n+1}$ data sa

$$\varrho_f := \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid x_1, \dots, x_n \in A\}.$$

Ovim smo zaokružili uvodnu priču o mostu između funkcija i relacija. Naš sledeći korak je da povežemo funkcije sa formulama iskazne logike.

4.6 Zadaci za vežbu

(1) Ispitati koje od osobina refleksivnosti, irefleksivnosti, simetričnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti poseduju sledeće relacije na datim skupovima:

   (a) $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (d, d)\}$;

   (b) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x - y < 1\}$;

   (c) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$.

   (d) $A = \mathbb{R}^2$, $R = \{((x, y), (z, u)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x - z = y - u\}$.

   Odgovore obrazložiti dokazom ili kontraprimerom.

(2) Ispitati koje od sledećih relacija su relacije ekvivalencije:

   (a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
   $R = \{(0, 3), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 0), (5, 1), (5, 2)\} \cup \Delta_A$.

   (b) $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(a, b) \in A^2 \mid |a - b| < \pi\}$.

   (c) Neka je A skup svih polja standardne šahovske table. Proizvoljna dva polja x i y date table su u relaciji R ($(x, y) \in R$) ako i samo ako lovac može pomoću jednog ili više poteza da stigne sa polja x na polje y.
   Da li se nešto menja ako je dozvoljen tačno jedan potez?

(3) Neka su R i S dve relacije ekvivalencije na skupu A.

(a) Dokazati da je $R \cap S$ takođe relacija ekvivalencije.

(b) Dati primer dve relacije ekvivalencije na skupu $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$, tako da njihova unija

– jeste relacija ekvivalencije;

– nije relacija ekvivalencije.

(4) Na skupu $A = \{\text{crveno}, \text{plavo}, \text{žuto}, \text{zeleno}, \text{ljubičasto}, \text{narandžasto}\}$ je data relacija

$$R = \{(\text{crveno}, \text{narandžasto}), (\text{plavo}, \text{zeleno}), (\text{ljubičasto}, \text{plavo})\}.$$

Odrediti relacije

$$S := R \cup R^{-1}, \quad T := S \cup S^2, \quad Q := T \cup \Delta_A,$$

a zatim pokazati da je Q relacija ekvivalencije na skupu A i odrediti količnički skup A/Q.

(5) Posmatramo relaciju deljivosti $|$ na skupu $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13\}$.

(a) Zapisati relaciju kao skup konkretnih uređenih parova.

(b) Pokazati da je $|$ relacija poretka na A i nacrtati njen Hasse-dijagram. Da li je $|$ linearno uređenje?

(c) Odrediti sve minimalne elemente skupa A u odnosu na $|$. Da li postoji najmanji element?

(6) Posmatramo relaciju $R = \{(x, y) \mid x \mod y = 2 \text{ i } |x - y| > 1\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(a) Zapisati relaciju kao skup konkretnih uređenih parova.

(b) Pokazati da se R može proširiti do relacije poretka na A. Odrediti najmanju relaciju poretka T na A takvu da je $R \subseteq T$ i nacrtati njen Hasse-dijagram.

(c) Odrediti sve minimalne elemente skupa A u odnosu na T. Da li postoji najmanji element?

(7) Na skupu prirodnih brojeva data je relacija

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ je paran broj}\}.$$

Ispitati koje od osobina refleksivnosti, irefleksivnosti, simetričnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti R poseduje. Obrazložiti odgovor.

(8) Neka je R relacija poretka na datom nepraznom skupu S i neka je T proizvoljni neprazni podskup skupa S. Za $s \in S$ kažemo da je *donje ograničenje* za T, ako za sve $t \in T$ važi $(s, t) \in R$, odnosno, da je *gornje ograničenje* za T, ako za sve $t \in T$ važi $(t, s) \in R$. Za $r \in S$ kažemo da je *infimum* za T, ako za sva donja ograničenja $s \in T$ važi $(s, r) \in R$, odnosno, da je *supremum* za T, ako za sva gornja ograničenja $s \in T$ važi $(r, s) \in R$. Uređeni par (S, R) je *mreža* ako svaki dvoelementni podskup skupa S ima i infimum i supremum. Za dati neprazan skup A pokazati da je $(\mathfrak{P}(A), \subseteq)$ mreža.

5 Tamo i nazad: Booleove funkcije

> Niko nije verovao da će algebarski simbolički procesi, prvobitno izumljeni za potrebe numeričkih izračunavanja, biti dovoljni za izražavanje svakog toka misli i da će nam dati gramatiku i rečnik jednog sveobuhvatnog logičkog sistema, sve dok to nije dokazano u „Zakonima razmišljanja“.
>
> *(Augustus De Morgan)*

5.1 Pojam Booleove funkcije

Logičkim veznicima konjunkcije, disjunkcije i negacije pridružujemo tablice istinitosnih vrednosti koje nam omogućavaju da odredimo istinitosnu vrednost formule dobijene od postojećih njihovim povezivanjem pomoću odgovarajućeg logičkog veznika (Slika 5.1).

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

φ	$\neg\varphi$
F	T
T	F

Slika 5.1: Tablice istinitosnih vrednosti za logičke veznike $\wedge, \vee, \neg$

Prethodnu konstrukciju možemo da posmatramo iz jednog drugog ugla: Neka je dat skup $A = \{0, 1\}$. Definišimo operacije AND, OR i NOT na skupu A pomoću tablica datih na Slici 5.2. Vidimo da smo ove tablice dobili jednostavnim preimenovanjem elemenata i naziva u tablicama iz Slike 5.1. S druge strane, efekat koji smo proizveli ovakvim preimenovanjem jeste predstavljanje dve binarne i jedne unarne operacije na dvoelementnom skupu na jedan novi način, pa je prirodno da počnemo da razmišljamo o predstavljanju proizvoljne funkcije na dvoelementnom skupu sveobuhvatnim ispisivanjem.

x	y	AND	OR
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

x	NOT
0	1
1	0

Slika 5.2: Tablice operacija AND, OR i NOT

Primetimo da proizvoljna funkcija na dvoelementnom skupu nije obavezno binarna ili unarna, odnosno, da može imati proizvoljan konačan broj argumenata. Takve funkcije nazivamo *Booleovim funkcijama.*

Definicija 1. Neka je dat skup $A = \{0, 1\}$. Skup

$$O_2 = \{f \mid f : A^n \to A, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

nazivamo *skup Booleovih funkcija.*

Svaku Booleovu funkciju možemo predstaviti potpunim ispisivanjem, koristeći tablice slične onima koje smo koristili za predstavljanje operacija AND, OR i NOT.

Primer 2. Postoje četiri unarne Booleove funkcije i one su date u Tabeli 5.1

x	f_0^1	f_1^1	f_2^1	f_3^1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Tabela 5.1: Unarne Booleove funkcije

Nije teško uočiti da je sa f_1^1 označena operacija NOT. Pored nje imamo još identičko preslikavanje f_2^1, i dve konstantne operacije f_0^1 i f_3^1, koje ceo domen slikaju u nulu, odnosno, jedinicu. $\triangle$

Jasno je da broj Booleovih funkcija raste sa njihovom arnošću, pa tako već binarnih imamo 16, dok ternarnih ima 256. Lako se može utvrditi da n-arnih Booleovih funkcija ima 2^{2^n}.

Primer 3. U Tabeli 5.2 date su sve binarne Booleove funkcije. Primetimo

x	y	f_0^2	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x	y	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 5.2: Binarne Booleove funkcije

da je operacija AND ništa drugo do f_8^2 (tj. $f_8^2(x, y) = \text{AND}(x, y)$), dok se operacija OR krije iza oznake f_{14}^2. Štaviše, svaku od prikazanih funkcija možemo prikazati koristeći samo operacije AND, OR i NOT, kao što vidimo iz Tabele 5.3. △

Na osnovu prethodnog primera možemo zaključiti da svaku binarnu Booleovu funkciju možemo prikazati na dva načina: tablicom istinitosnih vrednosti u kojoj koristimo 0 i 1, ili pomoću kompozicije funkcija AND, OR i NOT. Drugi način motiviše uvođenje *Booleovih izraza.*

Definicija 4. (1) Konstante 0 i 1, kao i promenljive $x, y, z, \ldots$ su *Booleovi izrazi.*

(2) Ako su φ i ψ Booleovi izrazi, onda su to i $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ i $\neg\varphi$.

(3) Booleovi izrazi se mogu dobiti samo konačnom primenom pravila (1) i (2).

Funkcija	Zapis pomoću kompozicije	Naziv
$f_0^2(x,y)$	AND(x, NOT(x))	`False`
$f_1^2(x,y)$	NOT(OR(x,y))	NOR
$f_2^2(x,y)$	AND(NOT(x), y)	NOT(y IMPLIES x)
$f_3^2(x,y)$	NOT(x)	NOT x, FLIP x
$f_4^2(x,y)$	AND(x, NOT(y))	NOT(x IMPLIES y)
$f_5^2(x,y)$	NOT(y)	NOT y, FLIP y
$f_6^2(x,y)$	OR(AND(NOT(x), y), AND(x, NOT(y)))	XOR
$f_7^2(x,y)$	NOT(AND(x,y))	NAND
$f_8^2(x,y)$	AND(x,y)	AND
$f_9^2(x,y)$	AND(OR(NOT(x), y), OR(x, NOT(y)))	EQUIV
$f_{10}^2(x,y)$	y	IDENTITY y
$f_{11}^2(x,y)$	OR(NOT(x), y)	x IMPLIES y
$f_{12}^2(x,y)$	x	IDENTITY x
$f_{13}^2(x,y)$	OR(x, NOT(y))	y IMPLIES x
$f_{14}^2(x,y)$	OR(x,y)	OR
$f_{15}^2(x,y)$	OR(x, NOT(x))	`True`

Tabela 5.3: Binarne Booleove funkcije kao kompozicije operacija AND, OR i NOT

Prirodno se nameće pitanje da li je ovo opažanje moguće proširiti na ceo skup Booleovih funkcija, odnosno, da li za svaku Booleovu funkciju imamo na raspolaganju obe opisane mogućnosti.

Primetimo da Booleovi izrazi nisu ništa drugo do logičke formule koje smo uveli u drugoj glavi. Promenljive odgovaraju iskaznim slovima, a konstante 0 i 1 simbolima F i T. Ukoliko je skup promenljivih Booleovog izraza φ koji razmatramo sadržan u $\{x_1, \dots, x_n\}$, onda on definiše n-arnu Booleovu funkciju $f_\varphi \colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ na sledeći način: Za $(a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n$ pronađemo odgovarajuću vrstu (gde 0 menjamo sa F i 1 sa T) u tablici istinitosnih vrednosti i očitamo vrednost izraza φ u toj vrsti. Ukoliko je ta vrednost F, onda je $f_\varphi(a_1, \dots, a_n) := 0$, a ako je T, onda je $f_\varphi(a_1, \dots, a_n) := 1$. Ovo opažanje nam dozvoljava da tablice istinitosnih vrednosti posmatramo kao tablice kojima je zadata funkcija i koristimo 0 i 1 za njihovo popunjavanje.

5.2 Kako konstruisati Booleovu funkciju

Jasno je kako se na osnovu Booleovog izraza može jednoznačno konstruisati tablica istinitosnih vrednosti. Međutim, da li i obrnuto važi?

> **Problem**
> Neka je data proizvoljna tablica istinitosnih vrednosti. Može li se pomoću nje uvek jednoznačno napraviti odgovarajući Booleov izraz?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, neophodno je da se prvo upoznamo sa dve posebne klase formula, za koje u svakodnevnom matematičkom govoru koristimo akronime KNF i DNF.

Definicija 5. *Literal* je formula koja je ili iskazno slovo ili njegova negacija.
Disjunktivna normalna forma (DNF) je formula koja je disjunkcija konjunkcija literala, dok je *konjunktivna normalna forma (KNF)* formula koja je konjunkcija disjunkcija literala.

Među svim normalnim formama posebno izdvajamo one koje se nazivaju *kanoničkim* i koje zahtevaju da se u svakoj konjunkciji, odnosno, disjunkciji literala (u zavisnosti da li se razmatra DNF ili KNF), svako iskazno slovo pojavljuje tačno jednom. Ovakve forme se najčešće i podrazumevaju kada se govori o DNF i KNF.

Primer 6. Kako izgledaju KNF i DNF od sledećeg izraza:

$$((x \implies y) \wedge z) \implies (x \wedge (y \implies z))?$$

Da li su to najjednostavnije formule logički ekvivalentne datoj?

Lako se proverava pomoću tablica istinitosnih vrednosti da je kanonička KNF koja odgovara ovom izrazu

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z),$$

dok je odgovarajuća kanonička DNF

$$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Nijedna od njih nije najjednostavnija formula ekvivalentna datoj, jer je ona logički ekvivalentna i sa

$$x \vee \neg z.$$

$\triangle$

Ovaj primer daje neke odgovore, ali bez obrazloženja, jer i dalje nije jasno kako se praktično dolazi do takvih formi, kao i da li smo sa ovim primerom samo imali sreće, ili se generalno svaka Booleova funkcija može ovako predstaviti. Tačku na ovu diskusiju stavlja sledeći rezultat.

Teorema 7. *Svaka Booleova funkcija se može napisati i pomoću formule u disjunktivnoj normalnoj formi i pomoću formule u konjunktivnoj normalnoj formi.*

Dokaz. Da bismo pokazali tačnost ovog tvrđenja, pođimo od n-arne Booleove funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$, date pomoću tablice istinitosnih vrednosti. Ukoliko je u svakoj vrsti tablice $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, onda njoj odgovara formula $\varphi \equiv F$.

U suprotnom, bar u jednoj vrsti imamo $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Sada vrsti i ($i = 1, \ldots, 2^n$) pridružujemo konjunkciju literala φ_i na sledeći način:

- ukoliko je vrednost od x_i u toj vrsti jednaka 1, onda u konjunkciji učestvuje literal x_i, a
- ukoliko je vrednost od x_i u toj vrsti jednaka 0, onda u konjunkciji učestvuje literal $\neg x_i$.

Na ovaj način svakoj vrsti pridružujemo konjunkciju koja je tačna za dati izbor vrednosti za $x_1, \ldots, x_n$. S druge strane, pridružena konjunkcija je tačna samo za izbor vrednosti u toj vrsti, jer u bilo kojoj drugoj bar jedan od literala ima drugu formu, pa time dobija vrednost 0, čime i vrednost posmatrane konjunkcije za datu vrstu takođe postaje 0. Uočimo sada sve one vrste u kojima je $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Neka su to $v_1, \ldots, v_m$, $m \geq 1$. Posmatrajmo formulu

$$\varphi = \varphi_{v_1} \vee \cdots \vee \varphi_{v_m}.$$

Ona je tačna ako i samo ako je bar jedna φ_{v_i} tačna. Kako za dati izbor vrednosti za $x_1, \dots, x_n$ samo jedna φ_{v_i} može biti tačna, sledi da je φ tačna ako i samo ako je tačno jedna φ_{v_i} tačna. Zbog toga je tablica za f ujedno i tablica istinitosne vrednosti za φ, pa se svaka Booleova funkcija može napisati kao DNF.

Neka je, dalje, g funkcija čije vrednosti dobijamo negiranjem svih vrednosti za f. Tada postoji DNF formula ψ koja odgovara funkciji g. S druge strane, funkciji f tada odgovara $\neg\psi$, tj.

$$\neg\psi \equiv \neg(\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_k) \equiv \neg\psi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\psi_k.$$

Primetimo i da je $\neg\psi_i$ negacija konjunkcije literala, pa primenom De Morganovih zakona dobijamo disjunkciju negacije literala, što je isto što i disjunkcija literala. Time je $\neg\psi$ konjunkcija disjunkcije literala, odnosno, KNF za funkciju f. □

Dokaz ove teoreme nam ujedno daje i algoritam za konstrukciju normalnih formi:
Neka je φ formula koja odgovara Booleovoj funkciji f i u kojoj se pojavljuju iskazna slova x_1, x_2,..., x_n. Normalne forme konstruišemo na osnovu tablice istinitosnih vrednosti koja je pridružena formuli φ.

(1) Konstrukcija DNF pomoću tablice

1. U tablici istinitosnih vrednosti uočimo sve vrste u kojima je vrednost funkcije 1. Ako takvih nema, onda je $\varphi \equiv F$.
2. Svaku takvu vrstu predstavimo kao konjunkciju literala, pri čemu se svako iskazno slovo x_i koje uzima vrednost 0 pojavljuje u konjunkciji u obliku $\neg x_i$, a svako iskazno slovo x_j koje uzima vrednost 1 kao x_j.
3. Sve dobijene konjunkcije povežemo u disjunkciju, čime je nastala DNF za φ.

(2) Konstrukcija KNF pomoću tablice

1. U tablici istinitosnih vrednosti uočimo sve vrste u kojima je vrednost funkcije 0. Ako takvih nema, onda je $\varphi \equiv T$.

2. Svaku takvu vrstu predstavimo kao disjunkciju literala, pri čemu se svako iskazno slovo x_i koje uzima vrednost 0 pojavljuje u disjunkciji u obliku x_i, a svako iskazno slovo x_j koje uzima vrednost 1 kao $\neg x_j$.
3. Sve dobijene disjunkcije povežemo u konjunkciju, čime je nastala KNF za φ.

Primer 8. Odredimo sada pomoću opisanog algoritma DNF i KNF za $((x \implies y) \wedge z) \implies x \wedge (y \implies z))$ iz Primera 6.

Prvo napravimo tablicu istinitosnih vrednosti:

$((x$	$\implies$	$y)$	$\wedge$	$z))$	$\implies$	$(x$	$\wedge$	$(y$	$\implies$	$z))$
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Sada prelazimo na proces rekonstrukcije normalnih formi. Na osnovu date tablice, DNF je data sa

$$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z),$$

dok je KNF data sa

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z).$$

$\triangle$

Teorema 7 nam garantuje da svaku Booleovu funkciju možemo zapisati u obliku kompozicije koristeći samo tri Booleove funkcije, i to one koje odgovaraju konjunkciji, disjunkciji i negaciji, odnosno, pomoću f_8^2, f_{14}^2 i f_1^1.

Ovim se otvara jedno novo pitanje: Da li je ovo jedina mogućnost, ili možemo koristiti i neke druge Booleove funkcije kao osnovne „gradivne" elemente?

5.3 Potpuni skupovi funkcija

Izražavanje funkcije preko nekog skupa funkcija podrazumeva njen zapis u obliku kompozicije nekoliko funkcija iz posmatranog skupa. Naš cilj je da pronađemo način da efektivno proverimo da li neki predložen skup Booleovih funkcija ima osobinu da se svaka druga može izraziti preko njega, na način opisan u trećoj glavi.

Definicija 9. Za skup Booleovih funkcija F kažemo da je *potpun* ukoliko se svaka druga Booleova funkcija može izraziti pomoću funkcija iz F.

Primer 10. Da ovakvi skupovi postoje uverili smo se još u prethodnoj sekciji, gde smo videli da je $\{f_1^1, f_8^2, f_{14}^2\}$ potpun skup Booleovih funkcija. △

Pošto znamo jedan potpun skup funkcija, prva ideja za pravljenje efektivnog testa jeste da iskoristimo upravo taj skup. Stoga ima smisla sledeći kriterijum.

Tvrđenje 11 (Jednostavni kriterijum potpunosti)**.** *Neka je F_0 potpuni skup Booleovih funkcija. Tada je skup Booleovih funkcija F potpun ako i samo ako se svaka funkcija iz F_0 može izraziti pomoću funkcija iz F.*

Dokaz. Neka je F potpun skup Booleovih funkcija. Tada se svaka Booleova funkcija, pa samim tim i svaka funkcija iz F_0 može izraziti pomoću funkcija iz F.

Obrnuto, neka se svaka funkcija iz potpunog skupa F_0 može izraziti pomoću funkcija iz F. Neka je, dalje, f proizvoljna Booleova funkcija. Tada se ona može predstaviti kao kompozicija funkcija iz F_0, a one se sve mogu zapisati kao kompozicije funkcija iz F, pa sledi da se i f može zapisati kao kompozicija funkcija iz F. Sledi da je F takođe potpun skup. □

Ilustrujmo upotrebu ovog kriterijuma.

Primer 12. $F_0 = \{f_1^1, f_8^2, f_{14}^2\}$ je potpun skup. Pokažimo i da je $F = \{f_1^1, f_8^2\}$ takođe potpun. U tu svrhu je potrebno da izrazimo f_{14}^2 preko f_1^1 i f_8^2, odnosno, disjunkciju preko negacije i konjunkcije, što za nas ne predstavlja nikakav problem, jer ono što želimo da dobijemo sledi direktno iz De Morganovih zakona. $\triangle$

Primer 13. Nije teško pokazati da je $F = \{f_3^1, f_6^2, f_8^2\}$ potpun skup Booleovih funkcija, koristeći jednostavni kriterijum potpunosti. Dovoljno je da svaku funkciju iz skupa $F_0 = \{f_1^1, f_8^2, f_{14}^2\} = \{\mathrm{NOT}, \mathrm{AND}, \mathrm{OR}\}$ izrazimo preko funkcija iz skupa F.
Funkcije skupa F su, zapravo, unarna funkcija c_1 koja svoj argument uvek preslikava u 1, i binarne funkcije XOR i AND. Primetimo prvo da AND $\in F$ i AND $\in F_0$, a zatim i da važi sledeće:

$$\begin{aligned}\mathrm{NOT}(x) &= \mathrm{XOR}(c_1(x), x) = \mathrm{XOR}(1, x),\\ \mathrm{OR}(x, y) &= \mathrm{NOT}(\mathrm{AND}(\mathrm{NOT}(x), \mathrm{NOT}(y)))\\ &= \mathrm{XOR}(1, \mathrm{AND}(\mathrm{XOR}(1, x), \mathrm{XOR}(1, y))).\end{aligned}$$

Dakle, F je zaista potpun skup.

Napravimo ovde još jednu malu digresiju — iako je ovakav zapis funkcija blizak kôdnom zapisu istih u programskim jezicima, za nas kao ljudska bića može biti neprijatan za čitanje i razumevanje, s obzirom da smo godinama navikavani na infiksnu notaciju. Stoga se često u ovakvim zapisima korišćenim u matematičkom, a ne programerskom kontekstu, umesto $\mathrm{XOR}(x, y)$ koristi $x \oplus y$, a umesto $\mathrm{AND}(x, y)$ uobičajeno $x \wedge y$, ili jednostavno xy. $\triangle$

Primer 13 nam daje mogućnost da svaku Booleovu funkciju zapišemo na jedinstveni način kao tzv. *Žegalkinov polinom*:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} \alpha_I \prod_{i \in I} x_i,$$

gde je sabiranje dato sa $\oplus$ (sabiranje modulo 2), proizvod je $\wedge$ (množenje modulo 2), a $\alpha_I \in \{0, 1\}$. Ovim smo opravdali i predloženu notaciju iz prethodnog primera. Napomenimo još i da jedinstvenost sledi iz činjenice da postoji 2^{2^n} različitih polinoma ovog tipa, što je ujedno i broj n-arnih Booleovih funkcija.

Primer 14. Opšti oblik binarne funkcije zapisane preko Žegalkinovog polinoma je

$$f(x_1, x_2) = \alpha_\emptyset \oplus \alpha_{\{1\}} x_1 \oplus \alpha_{\{2\}} x_2 \oplus \alpha_{\{1,2\}} x_1 x_2,$$

gde je $\alpha_I \in \{0, 1\}$. Za male arnosti, ovaj zapis je moguće pojednostaviti izostavljanjem zagrada u indeksima koeficijenata, pa opšti oblik pišemo i kao

$$f(x_1, x_2) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \alpha_{12} x_1 x_2,$$

Konkretno, funkcija NOR se, na primer, može zapisati kao

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2.$$

$\triangle$

Jednostavni kriterijum potpunosti ne zahteva od nas veliko znanje, ali zato zahteva određeni stepen umešnosti u predstavljanju funkcija preko nekih drugih, pa je ponekad njegova uspešna primena posledica konkretne ideje, ili, čak, sreće. Zbog toga je i od značaja pronalaženje kriterijuma koji, potencijalno, proveravaju neke manje zahtevne činjenice, odnosno, postavljaju manje zahteve korisnicima istih. Jedan takav test je *Postov kriterijum potpunosti.* Za njegovu formulaciju i razumevanje nam je ipak potrebno i neko dodatno znanje o određenim klasama Booleovih funkcija, pa ćemo ih za početak upoznati.

Definicija 15. Neka je f n-arna Booleova funkcija. Tada

(1) f *očuvava nulu* ako je $f(0, \ldots, 0) = 0$. Skup svih takvih funkcija označavamo sa T_0.

(2) f *očuvava jedinicu* ako je $f(1, \ldots, 1) = 1$. Skup svih takvih funkcija označavamo sa T_1.

(3) f je *monotona* ako važi

$$x_i \leq y_i, i = 1, \ldots, n \implies f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n).$$

Skup svih takvih funkcija označavamo sa M.

(4) f je *samodualna* ako važi

$$f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) = \neg f(x_1, \ldots, x_n), \text{ za sve } (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n.$$

Skup svih takvih funkcija označavamo sa S.

(5) f je *linearna* ako važi

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_n x_n, \quad a_i \in \{0,1\}.$$

Skup svih takvih funkcija označavamo sa L.

Važno je uočiti da svaki od gore definisanih skupova sadrži funkcije svih mogućih arnosti, jer je n proizvoljan prirodan broj, kao i da su svi neprazni. Zaista, konstantna funkcija $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ uvek očuvava nulu, dok konstantna funkcija $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ očuvava jedinicu. Obe ove funkcije su ujedno i monotone. Linearna je svaka funkcija čiji Žegalkinov polinom sadrži samo linearne članove, pa samim tim su ove dve funkcije i linearne. Nisu samodualne, ali nije teško pronaći primer za ovu klasu — identičko preslikavanje je jedna takva funkcija. Sada možemo formulisati željeni kriterijum.

Teorema 16 (Postov kriterijum potpunosti)**.** *Skup $F \subseteq O_2$ je potpun ako i samo ako postoje funkcije $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 \in F$, takve da važi*

(1) f_0 ne očuvava nulu.

(2) f_1 ne očuvava jedinicu.

(3) f_2 nije monotona.

(4) f_3 nije samodualna.

(5) f_4 nije linearna.

Pri tome, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 ne moraju biti obavezno sve različite funkcije.

Pre nego što pređemo na sam dokaz ove teoreme, potrebno je da razumemo i šta znači da funkcija nema neku od navedenih osobina. Za prve dve, to je prilično jednostavno, dok za preostale tri moramo biti pažljivi prilikom negiranja ovih osobina. Tako dobijamo sledeće:

(1) f ne očuvava nulu ako je $f(0,\ldots,0)=1$.

(2) f ne očuvava jedinicu ako je $f(1,\ldots,1)=0$.

(3) f nije monotona ako postoje $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\in\{0,1\}$ takvi da je

$$x_i\le y_i, i=1,\ldots,n, \text{ ali } f(x_1,\ldots,x_n)=1>0=f(y_1,\ldots,y_n).$$

(4) f nije samodualna postoje $x_1,\ldots,x_n\in\{0,1\}$ takvi da važi

$$f(\neg x_1,\ldots,\neg x_n)=f(x_1,\ldots,x_n).$$

(5) f nije linearna ako bar jedan član u zapisu Žegalkinovog polinoma sadrži više od jedne promenljive. Specijalno, svaka unarna funkcija mora biti linearna.

Važno je uočiti da je postojanje funkcija koje nemaju ove osobine isto od značaja, jer nije teško uočiti da kompozicija dve funkcije koje imaju jednu od pomenutih osobina, opet ima tu istu osobinu. Drugim rečima, nijedan od skupova T_0, T_1, M, S i L nije potpun.

S obzirom da svaka unarna funkcija mora biti linearna, najmanja arnost za koju srećemo nelinearne funkcije jeste 2. Štaviše, važi sledeće zapažanje:

Lema 17. *Neka $f\notin L$. Tada postoji nelinearna binarna funkcija koja se može izraziti pomoću f i konstanti.*

Dokaz. Neka je f nelinearna funkcija. Tada je

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}}\alpha_I\prod_{i\in I}x_i,$$

i bar jedna fundamentalna konjunkcija ($\prod_{i\in I}x_i$) sadrži više od jedne promenljive. Uočimo jednu takvu fundamentalnu konjunkciju. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da se u njoj pojavljuju x_1 i x_2. Sada sva pojavljivanja promenljivih $x_3,\ldots,x_n$ zamenimo konstantama

$b_3, \dots, b_n$, ali tako da sve promenljive koje učestvuju u uočenoj konjunkciji budu zamenjene sa 1. Na taj način smo eliminisali sve promenljive sem x_1 i x_2 i dobijamo nakon sređivanja funkciju oblika

$$g(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_1 x_2.$$

Ovo je očigledno jedna binarna nelinearna funkcija i pri tome važi

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, b_3, \dots, b_n),$$

odnosno, g se može predstaviti pomoću f i konstanti, što je i trebalo pokazati. □

Sada smo konačno spremni da pokažemo tačnost Postovog kriterijuma.

Dokaz Teoreme 16. Neka je F potpun skup. Kako nijedan od skupova T_0, T_1, M, S i L nije potpun, a iz definicije potpunog skupa je jasno da svaki nadskup potpunog skupa mora isto tako biti potpun, to F ne može bit podskup nijednog od navedenih skupova, pa važi

$$F \setminus T_0 \neq \emptyset, F \setminus T_1 \neq \emptyset, F \setminus M \neq \emptyset, F \setminus S \neq \emptyset, F \setminus L \neq \emptyset.$$

Odavde sledi da postoje $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 \in F$ koje imaju tražene osobine.

Obrnuto, neka je $F_0 = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\} \subseteq F$. Pokazaćemo da je F_0 potpun, pa će iz jednostavnog kriterijuma potpunosti slediti da je i F potpun. Potpunost skupa F_0 pokazujemo u četiri koraka:

Korak 1: Pokažimo da pomoću funkcija iz F_0 možemo izraziti c_0, c_1 ili $\neg$. U tu svrhu ćemo posmatrati funkcije

$$g_0(x) := f_0(x, \dots, x) \text{ i}$$
$$g_1(x) := f_1(x, \dots, x),$$

koje su izražene preko funkcija iz F_0. Tada je $g_0(0) = 1$, a $g_1(1) = 0$. Sada razlikujemo dva slučaja:

- Ako su g_0 i g_1 konstantne funkcije, onda je $g_0 = c_1$, a $g_1 = c_0$, pa se obe konstantne funkcije mogu izraziti preko F_0.

- Ako bar jedna nije konstantna, recimo g_0, onda ona mora biti jednaka negaciji, pa se u tom slučaju $\neg$ može izraziti preko F_0.

Korak 2: Pokažimo da preko funkcija iz F_0 možemo uvek izraziti negaciju. Iz prethodnog koraka znamo da možemo izraziti negaciju (u kom slučaju smo gotovi sa dokazom) ili konstantne funkcije c_0 i c_1. U tom slučaju moramo istražiti da li je moguće ipak izraziti i negaciju. Znamo da u F_0 postoji funkcija f_2 koja nije monotona, pa postoje $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$, takvi da je $a_i \leq b_i$, ali

$$1 = f_2(a_1, \dots, a_n) > f_2(b_1, \dots, b_n) = 0.$$

Menjajući vrednosti a_i u b_i, korak po korak, dolazimo do „skoka“ sa 0 na 1 kod vrednosti funkcije:

$$\begin{aligned} f_2(a_1, \dots, a_n) &\leq f_2(a_1, \dots, a_n) \\ f_2(a_1, \dots, a_n) &\leq f_2(b_1, \dots, a_n) \\ f_2(b_1, a_2, \dots, a_n) &\leq f_2(b_1, b_2, \dots, a_n) \\ &\vdots \\ 1 = f_2(b_1, b_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) &\leq f_2(b_1, b_2, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0. \end{aligned}$$

To znači da je $0 = a_i < b_i = 1$. Definišemo sada funkciju

$$h(x) := f_2(c_{b_1}(x), c_{b_2}(x), \dots, c_{b_{i-1}}(x), x, c_{a_{i+1}}(x), \dots, c_{a_n}(x)).$$

Tada je $h(0) = 1$, a $h(1) = 0$, pa h mora biti negacija, što znači da zaista uvek možemo izraziti negaciju.

Korak 3: Izrazimo sada konstantne funkcije preko funkcija iz F_0. U prethodnom koraku smo pokazali da uvek možemo izraziti negaciju. S druge strane, $f_3 \in F_0$, pa postoje $a_1, \dots, a_n$ takvi da je

$$f_3(a_1, \dots, a_n) = f_3(\neg a_1, \dots, \neg a_n).$$

Neka je $a := f_3(a_1, \dots, a_n)$. Definišimo sada funkciju

$$h(x) := f_3(x^{a_1}, \dots, x^{a_n}),$$

gde je

$$x^{a_i} := \begin{cases} x, & a_i = 1, \\ \neg x, & a_i = 0. \end{cases}$$

Tada se h može izraziti pomoću funkcija iz F_0 (jer i negaciju možemo izraziti preko njih) i pri tome važi $h(x) = a$. Odavde je $h = c_a$, odnosno, $\neg h = \neg c_a = c_{\neg a}$, odakle sledi da se i c_0 i c_1 mogu izraziti pomoću funkcija iz F_0.

Sada znamo da na raspolaganju imamo sve unarne Booleove funkcije. Potrebna nam je još jedna binarna — konjunkcija, da bismo na osnovu jednostavnog kriterijuma potvrdili potpunost skupa F_0.

Korak 4: Pokažimo, dakle, da možemo izraziti i $\wedge$, i to pomoću f_4 i unarnih Booleovih funkcija.
Kako f_4 nije linearna, to iz Leme 17 imamo da postoji nelinearna binarna funkcija g koja se može izraziti pomoću f_4 i konstantnih funkcija. Svaka binarna funkcija je oblika

$$g(x, y) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 x \oplus a_3 xy.$$

Zbog nelinearnosti funkcije g je $a_3 = 1$, pa razmatramo sledeće slučajeve

$a_0 = 0$**:** Tada je g jedna od sledećih funkcija:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= xy \\ g_2(x, y) &= x \oplus xy \\ g_3(x, y) &= y \oplus xy \\ g_4(x, y) &= x \oplus y \oplus xy. \end{aligned}$$

Primetimo sada da važi sledeće:

$$\begin{aligned}
g_1(x, y) &= x \wedge y, \\
g_2(x, \neg y) &= x \oplus (x \wedge \neg y) = x \oplus (x(1 \oplus y)) \\
&= x(1 \oplus 1 \oplus y) = xy = x \wedge y, \\
g_3(\neg x, y) &= y \oplus (\neg x \wedge y) = y \oplus (y(x \oplus 1)) \\
&= y(1 \oplus x \oplus 1) = yx = xy = x \wedge y, \\
\neg g_4(\neg x, \neg y) &= \neg(\neg x \oplus \neg y \oplus (\neg x \wedge \neg y)) \\
&= \neg(1 \oplus x \oplus 1 \oplus y \oplus (1 \oplus x)(1 \oplus y)) \\
&= 1 \oplus (x \oplus y \oplus 1 \oplus x \oplus y \oplus xy) \\
&= 1 \oplus 1 \oplus xy = xy = x \wedge y,
\end{aligned}$$

te se $\wedge$ može izraziti u sva četiri slučaja.

$a_0 = 1$**:** U ovom slučaju je dovoljno da za g uzmemo odgovarajuće $\neg g_i = 1 \oplus g_i$ iz prethodnog slučaja, čime opet dolazimo do toga da se $\wedge$ može izraziti preko funkcija iz F_0.

Na osnovu prethodnog, iz jednostavnog kriterijuma potpunosti sledi da je F potpun. □

Svi do sada viđeni primeri su podrazumevali da se potpuni skupovi sastoje od nekoliko funkcija. Međutim, da li je to zaista i pravilo, ili postoje i jednoelementni potpuni skupovi?

Definicija 18. Booleovu funkciju f nazivamo *Shefferova funkcija* ukoliko je $\{f\}$ potpun skup.

Ova definicija nas motiviše da razmotrimo dva problema: da li ovakve funkcije uopšte postoje, i, ako postoje, da li Postov kriterijum može biti pojednostavljen u cilju karakterizacije ovakvih funkcija? Odgovor na oba pitanja je potvrdan.

Primer 19. Originalna Shefferova funkcija je tzv. *Shefferova crta* (u oznaci | ili ↑), što je još jedan naziv za binarnu Booleovu funkciju NAND. Zaista, $x \mid x = \neg(x \wedge x) = \neg x$ i $x \wedge y = \neg(\neg(x \wedge y)) = \neg(x \mid y) = \neg((x \mid$

$y) \wedge (x \mid y)) = (x \mid y) \mid (x \mid y))$, pa je $\{|\}$ potpun skup, na osnovu Jednostavnog kriterijuma potpunosti. $\triangle$

S obzirom da ovakve funkcije postoje, ima smisla pokušati pojednostaviti Postov kriterijum za ovaj specijalni slučaj:

Teorema 20 (Kriterijum potpunosti za Shefferove funkcije)**.** *Booleova funkcija f je Shefferova ako i samo ako*

$$f \notin T_0 \cup T_1 \cup S,$$

tj. kada važi

(1) $f(x, \ldots, x) = \neg x.$

(2) postoje $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\} : f(a_1, \ldots, a_n) = f(\neg a_1, \ldots, \neg a_n).$

Dokaz. Neka je f Shefferova funkcija. Tada je $\{f\}$ potpun skup, pa iz Teoreme 16 imamo $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S \cup M \cup L$, odakle sledi da $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$.

Obrnuto, da bi f bila Shefferova funkcija, dovoljno je (zbog Postovog kriterijuma) pokazati da iz $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$ sledi $f \notin M$ i $f \notin L$:

$f \notin M$: Pokazaćemo da je $M \subseteq T_0 \cup T_1$. Neka $g \in M$. Tada je

$$g(0, \ldots, 0) \leq g(1, \ldots, 1).$$

Ako je $g(0, \ldots, 0) = 0$, onda $g \in T_0$. Ako je, pak, $g(0, \ldots, 0) = 1$, onda je $g(1, \ldots, 1) = 1$, pa je $g \in T_1$. Sledi da je $g \in T_0 \cup T_1$.

$f \notin L$: Pokazaćemo da je $L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup S$. Neka $g \in L$. Tada je

$$g(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_n x_n.$$

Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da g zaista zavisi od svih argumenata, odnosno, da je

$$g(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_n.$$

Razmotrimo kakva je funkcija g, u zavisnosti od vrednosti slobodnog člana a_0.

$a_0 = 0$**:** Tada je $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$, pa je $g(0, \ldots, 0) = 0 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$, te $g \in T_0$.

$a_0 = 1$**,** n **parno:** Tada je $g(x_1, \ldots, x_n) = 1 \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$, pa je $g(1, \ldots, 1) = 1 \oplus \underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{\text{paran broj sabiraka}} = 1$, te $g \in T_1$.

$a_0 = 1$**,** n **neparno:** Tada je $g(x_1, \ldots, x_n) = 1 \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$, pa je

$$\begin{aligned}
\neg g(x_1, \ldots, x_n) &= 1 \oplus g(x_1, \ldots, x_n) \\
&= 1 \oplus 1 \oplus \underbrace{x_1 \oplus \cdots \oplus x_n}_{\text{neparan broj sabiraka}} \\
&= 1 \oplus (\underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{n\text{-puta}}) \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \\
&= 1 \oplus (1 \oplus x_1) \oplus \cdots \oplus (1 \oplus x_n) \\
&= 1 \oplus \neg x_1 \oplus \cdots \oplus \neg x_n \\
&= g(\neg x_1, \ldots, \neg x_n).
\end{aligned}$$

Sledi da $g \in S$.

Konačno, $g \in T_0 \cup T_1 \cup S$, čime je dokaz završen.

□

Demonstrirajmo sada kako se ovaj kriterijum primenjuje.

Primer 21. Pokazaćemo da postoje tačno dve binarne Shefferove funkcije.
Iz Teoreme 20 imamo da mora biti $f(0, 0) = 1$ (jer $f \notin T_0$) i $f(1, 1) = 0$ (jer $f \notin T_1$). Zbog činjenice da $f \notin S$ imamo da je $f(0, 1) = f(1, 0) = a$, pa imamo dve mogućnosti — za $a = 0$ dobijamo funkciju NAND, a za $a = 1$ funkciju NOR. △

5.4 Zadaci za vežbu

(1) Pronaći Booleove izraze date sledećom tablicom:

x	y	z	(a)	(b)	(c)
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

(2) Sledeće formule izraziti u disjunktivnoj i konjuktivnoj normalnoj formi:

(a) $(x \implies y) \wedge (y \implies x)$,

(b) $\neg(x \wedge y \wedge \neg z) \implies (\neg x \vee y)$.

(3) Pomoću Booleovih identiteta pokazati da važi

$$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg x) \equiv (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

(4) Izraziti:

(a) $\{f_8^2, f_{11}^2\}$ pomoću $\{f_1^1, f_{14}^2\}$;

(b) $\{f_{11}^2, f_{14}^2\}$ pomoću $\{f_1^1, f_8^2\}$;

(c) $\{f_8^2, f_{14}^2\}$ pomoću $\{f_1^1, f_{11}^2\}$;

(d) $\{f_1^1, f_8^2, f_{11}^2, f_{14}^2\}$ pomoću $\{f_7^2\}$;

(e) $\{f_1^1\}$ pomoću $\{f_{11}^2, f_0^2\}$;

(f) $\{f_1^1\}$ pomoću $\{f_{15}^2, f_6^2\}$;

(g) $\{f_{14}^2\}$ pomoću $\{f_{11}^2\}$.

Koji Booleovi izrazi odgovaraju gore navedenim funkcijama?

(5) Pokazati da su sledeći skupovi Booleovih funkcija potpuni:

(a) $\{f_7^2\}$;

(b) $\{f_1^1, f_8^2\}$;

(c) $\{f_1^1, f_{14}^2\}$;

(d) $\{f_1^1, f_{11}^2\}$.

(6) Na skupu $A = \{0, 1\}$ definisana je ternarna funkcija

$$g : A^3 \to A : (x, y, z) \mapsto (y \wedge x) \vee (\neg y \wedge z).$$

Dokazati da je skup $\{f_0^1, f_3^1, g\}$ potpun.

(7) Koliko ima različitih n-arnih Booleovih funkcija na skupu $A = \{0, 1\}$?

(8) Na skupu $A = \{0, 1\}$ definisana je ternarna funkcija

$$h : A^3 \to A : (x, y, z) \mapsto (x \implies \neg y) \vee (x \implies \neg z).$$

Dokazati da je skup $\{h\}$ potpun.

6 ABC teorije grafova

> Why' is the only question that bothers people enough to have an entire letter of the alphabet named after it. The alphabet does not go 'A B C D What? When? How?' but it does go 'V W X Why? Z.
>
> *(Douglas Adams)*

Prisetimo se da je binarna relacija R na skupu A definisana kao skup uređenih parova iz $A \times A$. Dosad smo skupove i relacije definisane na njima razmatrali odvojeno. Međutim, šta se desi ako binarnu relaciju i skup na kojem je definisana posmatramo zajedno, kao složeniji matematički objekat? Tada dobijamo *relacionu strukturu* $\mathbf{A}$ koja se definiše kao uređen par (A, R), gde je A skup, a R binarna relacija na njemu. Kažemo još i da je A *nosač* relacione strukture $\mathbf{A}$.

Primer 1. Uređeni skup $(\mathbb{N}, \leq)$ je primer relacione strukture. Skup koji posmatramo je skup prirodnih brojeva zajedno sa uobičajenom relacijom poretka $\leq$ koja je definisana na njemu. Ovo, naravno nije jedini način da napravimo relacionu strukturu čiji je nosač skup prirodnih brojeva, jer za relaciju možemo uzeti bilo koju relaciju koja je definisana na nosaču, pa je tako $(\mathbb{N}, \varrho)$, gde je

$$(x, y) \in \varrho \iff x \text{ i } y \text{ daju isti ostatak pri deljenju sa 7},$$

takođe primer jedne relacione strukture. $\triangle$

Napomenimo još i da se pojam relacione strukture ne ograničava samo na binarne relacije — možemo posmatrati relaciju proizvoljne arnosti na datom skupu. U opštem slučaju, relaciona struktura je data nosačem i familijom relacija na njemu. Mi se u daljem razmatranju ipak nećemo baviti svim mogućim relacionim strukturama, već ćemo se fokusirati na proučavanje onih koji imaju samo jednu binarnu relaciju, i to ne bilo kakvu. Razlog za ovakvo ograničenje leži u činjenici da relacije koje je potrebno matematički modelovati često poseduju osobinu simetričnosti.

Takve relacije često izučavamo koristeći jedan poseban jezik - *teoriju grafova.*

6.1 Upoznajmo grafove

Glavni objekat našeg proučavanja u nastavku ovog teksta biće *graf.*

Definicija 2. *Graf* G je uređen par (V, E), gde je V konačan skup, čije elemente nazivamo *čvorovima*, a E je podskup skupa svih dvoelementnih podskupova skupa V i njegove elemente nazivamo *granama*.

Nekada se u literaturi ovakva konstrukcija naziva i *prost graf*, čime se želi naglasiti da je svaka grana određena sa dva *različita* čvora. Svakom grafu možemo pridružiti relacionu strukturu (V, ϱ_E), gde je $\varrho_E = \{(u, v) \in V^2 \mid \{u, v\} \in E\}$. Primetimo da je ϱ_E irefleksivna simetrična relacija. Uobičajeno je da se oba ova pristupa koriste za definiciju grafa.

Primer 3. Da bismo, dakle, u potpunosti definisali neki graf, potrebno je da navedemo skup njegovih čvorova i skup njegovih grana:

$$
\begin{aligned}
V =&\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \\
E =&\{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_7\}, \\
&\{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}.
\end{aligned}
$$

$\triangle$

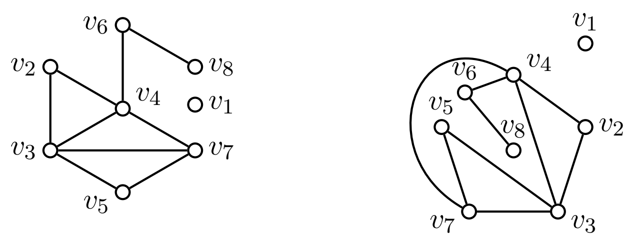
U prethodnom primeru smo čvorove označavali sa v_i, što bi trebalo da nas asocira na engleski naziv ovog pojma — *vertex.* Ovakav način označavanja čvorova je uobičajen, te za njih rezervišemo mala slova sa kraja engleske abecede: $u, v, w, \ldots$. Sa granama je, pak situacija nešto drugačija. Kao što smo videli, definicija podrazumeva njihovo zapisivanje u obliku dvoelementnih skupova, što često dovodi do loše preglednosti skupa E, pa se stoga koristi ili skraćeni zapis koji nas opet asocira na engleski naziv (*edge*): e $(e_1, e_2, \ldots)$, ili, ukoliko je bitno naglasiti koji čvorovi određuju posmatranu granu, $e = uv = \{u, v\}$, kojim se rešavamo zapisivanja pomoću zagrada. Pri tome se u i v nazivaju *krajnjim čvorovima* grane e. Dodatno, ako iz konteksta nije jasno kojem grafu pripadaju dati čvorovi, odnosno, grane, koristimo oznake $V(G)$ i $E(G)$.

Prvi problem koji ćemo razmatrati, a koji nam se nameće već nakon Primera 3, jeste da li se graf može predstaviti na neki pregledniji i intuitivniji način. S obzirom da intuicija obično dobro sarađuje sa slikama, vredelo bi pokušati predstaviti graf, kao što mu i ime kaže, grafički.

Pri tome ćemo se držati sledećih pravila:

- Svaki element skupa V crtamo kao mali krug i strogo ga razlikujemo od tačke u ravni, koja je geometrijski objekat.
- Svaki element skupa E je linija, koja ne mora biti obavezno prava, ali mora biti neprekidna i bez samopreseka, sa osobinom da spaja odgovarajuće elemente skupa V.

Primer 4. Pokušajmo sada da predstavimo grafički graf iz Primera 3 (Slika 6.1)



Slika 6.1: Različiti načini grafičkog predstavljanja istog grafa

Kao što vidimo, pravila za grafičko predstavljanje nam kažu *kako* da predstavimo odgovarajuće objekte, ali ne i *gde* da ih pozicioniramo u okviru crteža. Stoga zaključujemo da se graf na ovaj način ne može predstaviti jednoznačno i da toga moramo uvek biti svesni u daljem radu sa grafovima. $\triangle$

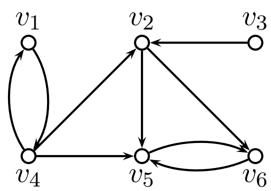
Ponekad se i crtež grafa identifikuje sa grafom, ali samo ako skupove V i E možemo u potpunosti rekonstruisati koristeći dati crtež.

Definicija prostog grafa ne omogućava nam uvek adekvatno postavljanje i rešavanje problema, pa se uvode dodatni pojmovi koji uopštavaju pojam prostog grafa:

(1) *Digraf* je usmereni graf, te ga definišemo slično prostom grafu, kao $D = (V, E)$, gde je V skup čvorova, a skup grana je dat sa

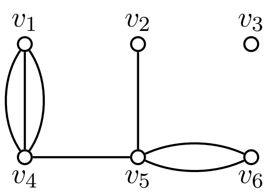
$$E \subseteq V^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in V\}.$$

Ovim je svaka grana dobila orijentaciju, tj. nije više predstavljena kao dvoelementni skup, već kao uređen par, čime je omogućeno da između dva čvora imamo dve grane različitog usmerenja. Koristimo ga ukoliko binarna relacija koju modelujemo nije simetrična.

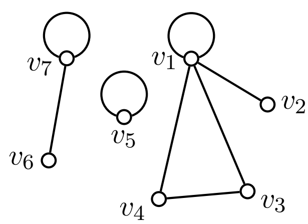


Slika 6.2: Digraf

(2) *Multigraf* je graf u kojem su dozvoljene višestruke grane. Definišemo ga kao $M = (V, E)$, gde je V standardno skup čvorova, dok je E *multiskup* dvoelementnih podskupova skupa čvorova. (Multiskup je, intuitivno, uopštenje pojma skupa u kojem je dozvoljeno ponavljanje istih elemenata.)



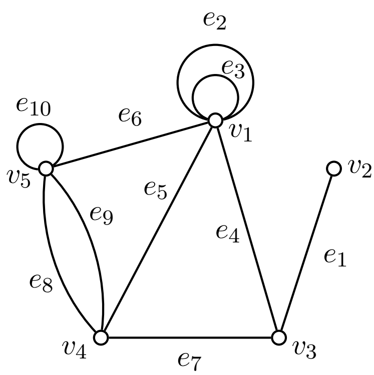
Slika 6.3: Multigraf



Slika 6.4: Pseudograf

(3) *Pseudograf* je graf sa petljama. *Petlja* je grana koja počinje i završava se u istom čvoru, te je, shodno tome, $P = (V, E)$ dat pomoću skupa čvorova V i skupa grana $E \subseteq V^2$. Ovo uopštenje je zgodno za upotrebu kod binarnih relacija koje jesu simetrične, ali ne i irefleksivne.

(4) *Opšti graf* dozvoljava i višestruke grane i petlje, te je njegova definicija nešto složenija. Definišemo ga kao $G = (V, E, \varphi)$, gde je φ funkcija incidencije, koja svakom elementu skupa E pridružuje neuređeni par čvorova iz V.



Slika 6.5: Opšti graf

U opštem grafu na Slici 6.5 funkcija incidencije je data sa

$$\varphi = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\ v_2v_3 & v_1 & v_1 & v_1v_3 & v_1v_4 & v_1v_5 & v_3v_4 & v_4v_5 & v_4v_5 & v_5 \end{pmatrix}.$$

(5) *Hipergraf* $H = (V, E)$ je uopštenje grafa u kojem se pri opisu više ne ograničavamo samo na dvoelementne podskupove skupa čvorova, već dozvoljavamo da grana bude proizvoljan element partitivnog skupa skupa čvorova (tj. $E \subseteq \mathfrak{P}(V)$).

(6) Osim konačnih grafova, postoje i *beskonačni grafovi*, kojima se nećemo baviti u okviru ovog teksta, ali ih navodimo radi što potpu-

njeg pregleda objekata koje proučava teorija grafova. Kažemo da je graf $G = (V, E)$ beskonačan, ukoliko je bar jedan od skupova V i E beskonačan.

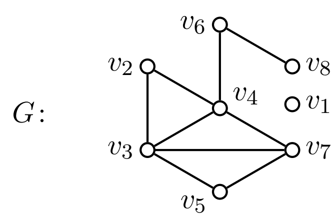
6.2 Parametri grafa

Pod parametrima grafa podrazumevamo neke brojevne vrednosti koje je moguće očitati iz same definicije grafa. Prirodno se nameću sledeće veličine:

Definicija 5. Neka je $G = (V, E)$. *Red grafa* $n(G)$ je broj njegovih čvorova, dok je *veličina grafa* $m(G)$ broj njegovih grana.

Ukoliko je iz konteksta jasno o kom grafu se radi, koristimo pojednostavljenu notaciju: n i m.

Primer 6. Prisetimo se grafa iz Primera 3. Prostim prebrojavanjem njegovih čvorova i grana dobijamo da je $n = n(G) = 8$ i $m = m(G) = 9$.



Slika 6.6: Određivanje parametara grafa G

$\triangle$

Da bismo nastavili sa proučavanjem grafova, potrebno je da razvijemo i neku terminologiju pomoću koje ćemo moći da izrazimo zaključke za koje smatramo da su od značaja. Jedna od veličina koja bi potencijalno mogla da igra važnu ulogu jeste broj čvorova sa kojima je posmatrani čvor povezan granom. Stoga ima smisla sledeća definicija:

Definicija 7. Za dva čvora u i v kažemo da su *susedni*, ako su spojeni granom. Ako je u krajnji čvor grane e (tj. $e = uv$), kažemo da su u i e *incidentni*. Dve različite grane su *susedne*, ako su incidentne sa istim čvorom. *Susedstvo* čvora u je skup svih njemu susednih čvorova, tj.

$$N(u) := \{v \in V \mid uv \in E\}.$$

Primetimo da je pojam susedstva moguće proširiti i na skup čvorova, pa tako za $S \subseteq V$ definišemo

$$N(S) := \bigcup_{u \in S} N(u).$$

Primer 8. Za graf G na Slici 6.6 važi sledeće:

$$\begin{aligned} N(v_1) &= \emptyset, \\ N(v_4) &= \{v_2, v_3, v_6, v_7\}, \\ N(\{v_3, v_4\}) &= \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}. \end{aligned}$$

△

Kako su susedstva skupovi, a mi smo zainteresovani za brojne veličine, logično je da kao moguće parametre razmotrimo veličine ovih skupova.

Definicija 9. *Stepen* $\delta(u)$ čvora u je broj grana incidentnih sa u, tj.

$$\delta(u) := |N(u)|.$$

Maksimalan stepen čvora grafa G je

$$\Delta(G) := \max\{\delta(u) \mid u \in V(G)\},$$

dok je *minimalan stepen čvora* grafa G dat sa

$$\delta(G) := \min\{\delta(u) \mid u \in V(G)\}.$$

Primer 10. Odredimo i ove parametre za graf G sa Slike 6.6. Imamo:

$$\begin{aligned}
\delta(v_1) &= 0,\\
\delta(v_2) &= \delta(v_5) = \delta(v_6) = 2,\\
\delta(v_3) &= \delta(v_4) = 4,\\
\delta(v_7) &= 3,\\
\delta(v_8) &= 1,\\
\Delta(G) &= 4,\\
\delta(G) &= 0.
\end{aligned}$$

△

Čvorovi stepena 0 i 1 su od posebnog značaja, pa imaju i specijalna imena — čvor stepena 0 je *izolovan*, dok je čvor stepena 1 *viseći*. Shodno tome, grana incidentna visećem čvoru je *viseća*.

Parametre grafa (broj čvorova, broj grana i stepene čvorova) povezuje sledeće zapažanje:

Teorema 11 (Prva teorema teorije grafova)**.** *U grafu G, zbir stepena čvorova jednak je dvostrukom broju grana, tj.*

$$\sum_{u \in V} \delta(u) = 2 \cdot |E|.$$

Dokaz. Stepen čvora označava broj grana incidentnih sa datim čvorom. Kako je svaka grana incidentna sa tačno dva čvora, to se u sumi $\sum_{u \in V} \delta(u)$ svaka grana uračunava dva puta, pa je

$$\sum_{u \in V} \delta(u) = 2 \cdot |E|.$$

□

Za čvor kažemo da je *(ne)paran* ako je njegov stepen (ne)paran.

Posledica 12. *Broj čvorova neparnog stepena u grafu je uvek paran.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka postoji graf sa neparnim brojem neparnih čvorova. Tada je zbir stepena čvorova u grafu neparan broj, koji je na osnovu Prve teoreme teorije grafova jednak dvostrukom broju grana. Kontradikcija. □

Ilustrujmo primenu ovih tvrđenja na sledećem primeru.

Primer 13. Stanovnik planete Mars može imati proizvoljan broj ruku. Jednom su se svi Marsovci uhvatili istovremeno za ruke, tako da nijedna ruka nije ostala slobodna. Sledi da je broj Marsovaca sa neparnim brojem ruku paran. Zašto?

Prevedimo ovaj problem na jezik teorije grafova:

- čvorovi su stanovnici Marsa,
- grana između dva čvora postoji ukoliko se Marsovci koji njima odgovaraju drže za ruke, i
- broj ruku jednak je stepenu odgovarajućeg čvora.

Iz Posledice 12 imamo da je broj čvorova neparnog stepena paran, pa je broj Marsovaca sa neparnim brojem ruku paran. △

Sve stepene čvorova datog grafa možemo organizovati na dva načina:

Definicija 14. *Skup stepena čvorova* grafa G je skup nenegativnih celih brojeva koji se pojavljuju kao stepeni čvorova grafa G. *Niz stepena čvorova* je niz nenegativnih celih brojeva koji se pojavljuju kao stepeni čvorova grafa G.

Niz stepena čvorova se obično predstavlja u obliku monotonog neopadajućeg niza.

Primer 15. Za graf sa Slike 6.6 skup stepena čvorova dat je sa $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, dok je niz stepena čvorova $(0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$.

Primetimo da niz stepena čvorova sadrži više informacija o grafu od skupa stepena čvorova, jer nam daje ne samo stepene koji se pojavljuju, već i njihov tačan broj. △

Postavlja se pitanje da li je moguće da u nizu stepena čvorova nekog grafa svi elementi niza budu različiti brojevi. Odgovor je odričan, o čemu svedoči sledeći rezultat:

Tvrđenje 16. *U svakom grafu sa bar 2 čvora, postoje dva čvora istog stepena.*

Dokaz. Neka je broj čvorova u posmatranom grafu jednak n. Tada su moguće vrednosti stepena čvorova $0, 1, \ldots, n-1$. Dovoljno je pokazati da se u skupu stepena čvorova ne mogu pojaviti sve te vrednosti.

Ako u grafu postoji čvor stepena 0, to znači da je taj čvor izolovan, pa ne može postojati čvor stepena $n-1$ (onaj koji je povezan sa svima), i obrnuto.

Sledi da na raspolaganju imamo najviše $n-1$ različitih mogućnosti za stepen čvora, a ukupno n čvorova, pa moraju postojati bar dva čvora istog stepena. □

Drugu krajnost je ipak moguće dostići, jer postoje grafovi u kojima su svi čvorovi istog stepena.

Definicija 17. Graf $G = (V, E)$ je *regularan* ako su mu svi čvorovi istog stepena. Kažemo još i da je G *r-regularan* ako je

$$\text{za svako } v \in V: \quad \delta(v) = r.$$

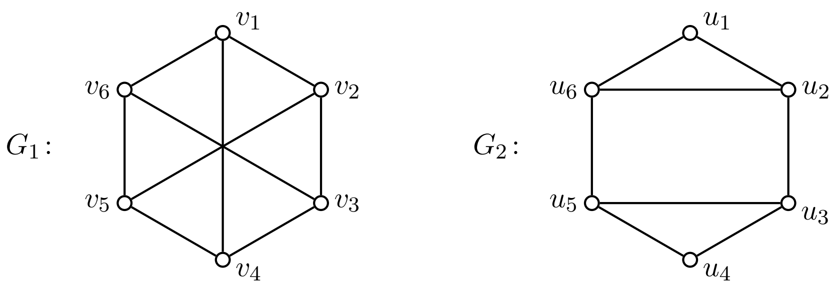
Graf $G = (V, E)$ je *poluregularan* ako je njegov skup stepena čvorova dvoelementan. Kažemo još i da je G *(p, q)-regularan*, ako

$$\text{za svako } v \in V: \quad \delta(v) = p \quad \text{ili} \quad \delta(v) = q.$$

Primer 18. Graf G_1 je 3-regularan, dok je graf G_2 je (2,3)-regularan (Slika 6.7). △

6.3 Označeni i neoznačeni grafovi

U teoriji grafova često se proučavaju ona svojstva grafa koja zavise samo od apstraktne definicije grafa, ali ne i od označavanja čvorova



Slika 6.7: Primeri regularnog i poluregularnog grafa

grafa ili njegovog konkretnog predstavljanja u vidu crteža. Zbog toga je od izuzetne važnosti razumeti šta se podrazumeva pod jednakošću dva grafa. Možemo reći da ovde koristimo dva različita koncepta jednakosti —jednakost u smislu potpune identičnosti dva data grafa i jednakost u smislu da možemo, ukoliko zanemarimo imena čvorova, oba grafa predstaviti na identičan način. Ovakvo objašnjenje koncepta jednakosti je, naravno, prilično maglovito i služi samo stvaranju intuicije. Matematički preciznu formulaciju dajemo u sledećoj definiciji:

Definicija 19. Neka su dati grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$. Kažemo da su G_1 i G_2

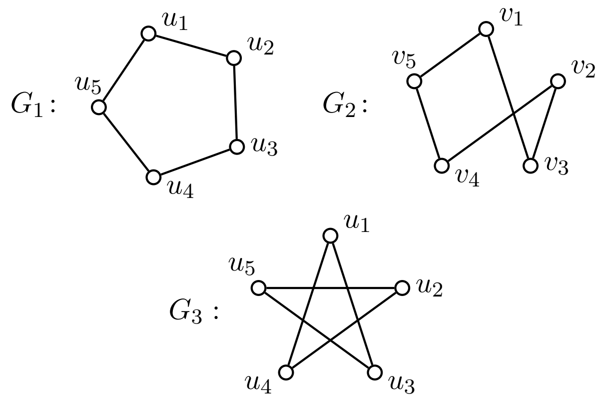
- *jednaki*, ako je $V_1 = V_2$ i $E_1 = E_2$, i u tom slučaju pišemo $G_1 = G_2$;
- *izomorfni*, ako postoji bijektivno preslikavanje $\varphi\colon V_1 \to V_2$ koje očuvava susednost čvorova, tj.

  $$uv \in E_1 \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E_2,$$

  i u tom slučaju pišemo $G_1 \cong G_2$.

Primer 20. Razmotrimo grafove prikazane na Slici 6.8. Grafovi G_1 i G_3 su jednaki, a G_2 je različit od njih, ali ipak izomorfan sa oba. Jedan izomorfizam između $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je $\varphi\colon V_1 \to V_2$, pri čemu je

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ v_1 & v_5 & v_4 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

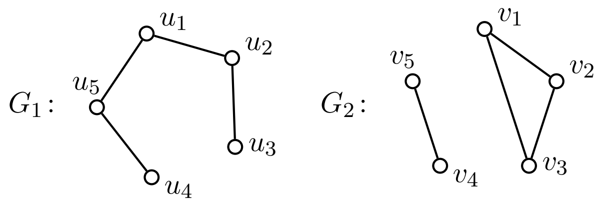


Slika 6.8: Jednaki i izomorfni grafovi

Primetimo i da se jednakost grafova G_1 i G_2 ne vidi na prvi pogled sa crteža, već je utvrđujemo upoređivanjem skupova čvorova, odnosno, grana. $\triangle$

Testiranje izomorfnosti grafova je veoma neprijatan i težak algoritamski problem, jer se svodi na proveru osobine čuvanja susednosti čvorova kod svih bijekcija između skupova čvorova. Kako je broj bijekcija između n-elementnih skupova jednak $n!$, jasno je da broj provera koje je potrebno izvršiti izuzetno brzo raste sa porastom broja čvorova, čime se ovaj posao značajno usložnjava. Zbog toga je značajno svako saznanje koje omogućava sužavanje ovakve provere. Prvo ograničenje je jednostavno — skupovi čvorova moraju biti iste veličine, a zatim se nameće i drugo ograničenje — isto mora da važi i za skupove grana. Međutim, provera ova dva parametra nije dovoljna za utvrđivanje izomorfnosti. Na Slici 6.9 vidimo dva grafa sa istim brojem čvorova i grana koji očigledno nisu izomorfni.

Naša očekivanja, da se izomorfnost može utvrditi pomoću nekih od parametara grafa koje smo upoznali, nisu nažalost realna — čak ni identični nizovi stepena čvorova ne garantuju izomorfnost odgovarajućih grafova,



Slika 6.9: Neizomorfni grafovi sa istim brojem čvorova i grana

što možemo videti na istom primeru. Postavimo zato sebi jedno drugačije pitanje: Kada dva grafa *nisu* izomorfna?

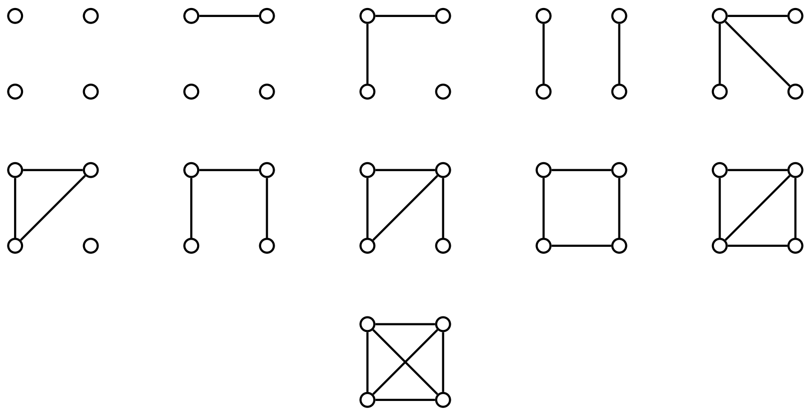
Na ovo pitanje možemo dati jednostavan odgovor: Grafovi nisu izomorfni ako postoji *strukturno svojstvo* jednog grafa koje nema drugi. U primeru sa Slike 6.9 vidimo da je jedna takva osobina postojanje „trougla" kod grafa G_2, odnosno, tri čvora koja su susedna svaki sa svakim. Prilikom bijektivnog preslikavanja koje očuvava susednost, veze među ova tri čvora moraju ostati iste. Kako ovakvu konfiguraciju nemamo kod G_1, posmatrana dva grafa ne mogu biti izomorfna.

Nije teško pokazati da je izomorfnost grafova relacija ekvivalencije, pa razbija klasu grafova na klase ekvivalencije. Svi članovi iste klase ekvivalencije su tada međusobno izomorfni. Biranjem predstavnika svake klase i izostavljanjem odgovarajućih oznaka dobijamo *neoznačene grafove.*

Primer 21. Na Slici 6.10 dati su svi neoznačeni grafovi koji imaju četiri čvora. $\triangle$

Kao što smo videli, postoji 11 neoznačenih grafova na skupu od četiri čvora. Na skupu od tri čvora ima ih 4, a na skupu od pet čvorova 34. U opštem slučaju, za skup od n čvorova teško je pronaći i prebrojati sve neoznačene grafove sa datim brojem čvorova.

Za razliku od neoznačenih grafova, *označeni grafovi* su grafovi nad datim skupom čvorova, odnosno, oznake čvorova igraju važnu ulogu u radu sa ovakvim grafovima. Prvo pitanje koje se nameće jeste ono koje je ostalo neodgovoreno pri razmatranju neoznačenih grafova: Koliko ima različitih označenih grafova nad n-elementnim skupom čvorova?

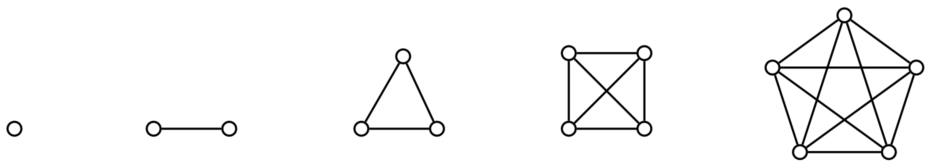


Slika 6.10: Neoznačeni grafovi reda 4

Tvrđenje 22. *Broj označenih grafova nad datim skupom čvorova veličine n jednak je* $2^{\binom{n}{2}}$.

Dokaz. Neka je $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dati skup čvorova. Za svaka dva čvora v_i, v_j iz skupa V i svaki graf G takav da je $V(G) = V$ važi da je ili $v_iv_j \in E(G)$ ili $v_iv_j \notin E(G)$. S druge strane, svaki graf na datom skupu čvorova je jednoznačno određen svojim skupom grana. Broj načina da formiramo granu jednak je broju dvoelementnih podskupova skupa V, što je $\binom{n}{2}$. Svaka od tih grana se u grafu ili pojavljuje ili ne pojavljuje, pa lako prebrojavamo da označenih grafova mora biti $2^{\binom{n}{2}}$. $\square$

Iz razmatranja u prethodnom dokazu zaključujemo i da je broj grana u svakom grafu zapravo ograničen i sa donje i sa gornje strane, pa je tako za graf sa n čvorova najmanji mogući broj grana 0 i tada govorimo o *praznom* grafu sa n čvorova. S druge strane, najveći broj grana koji se pojavljuje u grafu je $\binom{n}{2}$, u slučaju kada su svaka dva čvora spojena granom, i tada govorimo o *potpunom* ili *kompletnom* grafu sa n čvorova, u oznaci K_n. Primeri potpunih grafova za male vrednosti n mogu se videti na Slici 6.11. Napomenimo još i da je graf K_1 poznat pod imenom *trivijalni graf*.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Slika 6.11: Primeri potpunih grafova

Dakle, nije uopšte teško odrediti ukupan broj označenih grafova za dati skup čvorova, pa se pitamo da li je označene grafove moguće prebrojavati i po dva parametra, odnosno, da li se može odgovoriti na pitanje: Koliko ima označenih grafova sa m grana nad n-elementnim skupom čvorova?

Tvrđenje 23. *Broj označenih grafova sa m grana nad datim skupom čvorova veličine n jednak je*

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}.$$

Dokaz. Kao što smo već videli, graf je jednoznačno određen skupom čvorova i skupom grana. Skup čvorova je već dat, a m grana od $\binom{n}{2}$ onih koje možemo uopšte formirati, možemo izabrati na

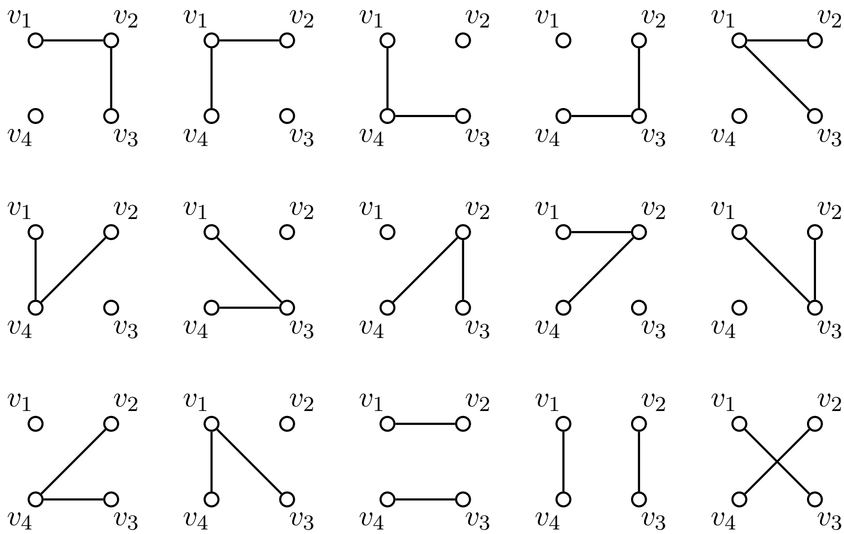
$$\binom{\binom{n}{2}}{m} \text{ načina.}$$

□

Primer 24. Postoji

$$\binom{\binom{4}{2}}{2} = \binom{6}{2} = 15$$

različitih označenih grafova sa 2 grane nad 4-elementnim skupom čvorova i svi su prikazani na Slici 6.12. △



Slika 6.12: Označeni grafovi sa četiri čvora i dve grane

6.4 Podgrafovi

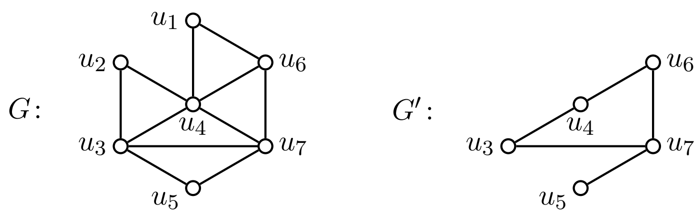
Pri radu sa grafovima često dolazimo u situaciju da nas ne interesuje čitav graf, već samo jedan njegov deo. Tada može biti od važnosti da taj deo, posmatran ovaj put kao celina, isto po svojoj prirodi bude graf. Ukoliko je to i ispunjemo, govorimo o *podgrafu*.

Definicija 25. Neka je dat graf $G = (V, E)$. Za graf $G' = (V', E')$ kažemo da je *podgraf* grafa G ako važi $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Kažemo i da je G *nadgraf* grafa G'.

Primetimo da zahtev da G' bude graf implicira da je E' podskup skupa svih dvoelementnih podskupova skupa V', odnosno, ne može se desiti da imamo granu koja nema oba krajnja čvora u V'. Iz definicije odmah sledi da se svaki podgraf može dobiti višestrukom primenom sledećih *lokalnih* operacija:

- *odstranjivanjem (brisanjem) čvora*: brišemo čvor $v \in V$ i sve grane incidentne sa njim, a dobijeni graf označavamo sa $G - v$;
- *odstranjivanjem (brisanjem) grane*: brišemo samo granu $e \in E$, a dobijeni graf označavamo sa $G - e$.

Primer 26. Na Slici 6.13 vidimo graf G i njegov podgraf G'. Graf G'



Slika 6.13: Graf i jedan njegov podgraf

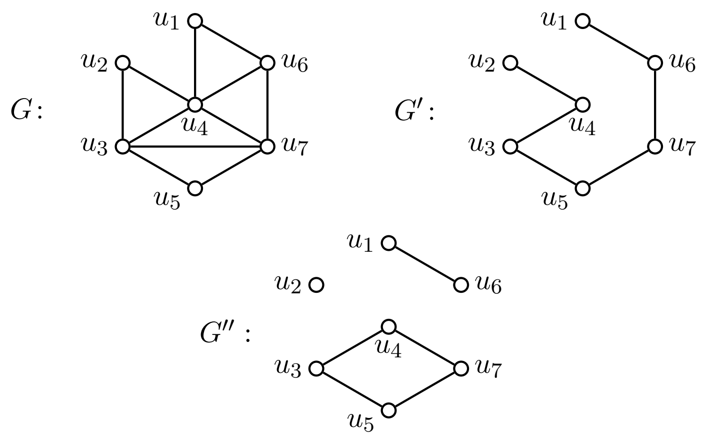
možemo dobiti brisanjem čvorova u_1 i u_2 (čime smo ujedno obrisali i grane u_1u_6 i u_1u_4, odnosno, u_2u_3 i u_2u_4), a zatim i grana u_4u_7 i u_3u_5. $\triangle$

Među svim podgrafovima, posebno mesto zauzimaju *pokrivajući podgrafovi* koji igraju značajnu ulogu u velikom broju računarskih algoritama koji se baziraju na grafovima.

Definicija 27. Graf $G' = (V', E')$ je *pokrivajući podgraf* grafa G ako je $V' = V$ i $E' \subseteq E$.

Primer 28. Na Slici 6.14 dat je graf G i njegovi pokrivajući podgrafovi G' i G''. Iz ovog primera i definicije pokrivajućeg pografa možemo izvući dva zaključka: graf može imati više pokrivajućih podgrafova i svaki od njih možemo dobiti višestrukom primenom operacije brisanja grane. $\triangle$

Prethodno data definicija podgrafa nije, međutim, uvek i zadovoljavajuća, s obzirom da daje prilično veliku slobodu u odabiru grana koje ćemo „poneti sa sobom“ iz početnog grafa, a koje su određene čvorovima iz izabranog podskupa. Štaviše, mnogi problemi zahtevaju preuzimanje svih grana određenih čvorovima iz izabranog podskupa, pa zato uvodimo još jedan pojam podgrafa.



Slika 6.14: Graf i njegovi pokrivajući podgrafovi

Definicija 29. Dat je graf $G = (V, E)$.

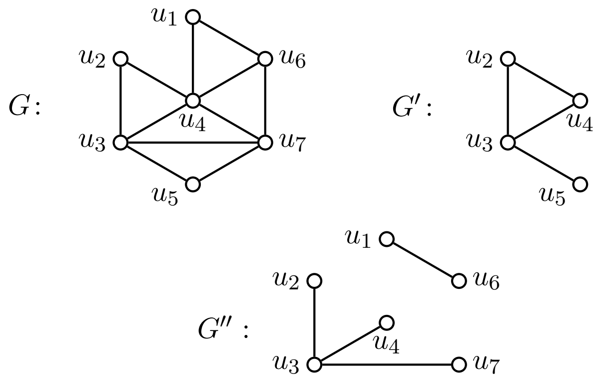
(1) Neka je $\emptyset \neq U \subseteq V$. Tada je $G[U] = (U, F)$ *podgraf grafa G indukovan skupom čvorova* U, pri čemu je F skup svih grana iz E koje su incidentne samo sa čvorovima iz U.

(2) Neka je $\emptyset \neq F \subseteq E$. Tada je $G\langle F\rangle = (U, F)$ *podgraf grafa G indukovan skupom grana* F, pri čemu je U skup svih čvorova iz V incidentnih sa bar jednom granom iz F.

Primer 30. Na Slici 6.15 prikazan je graf G sa dva svoja podgrafa G' i G'', od kojih je prvi indukovan skupom čvorova, a drugi skupom grana. Konkretno, $G' = G[\{u_2, u_3, u_4, u_5\}]$, a $G'' = G\langle\{u_1u_6, u_3u_7, u_3u_4, u_3u_2\}\rangle$. $\triangle$

6.5 Računanje sa grafovima

Dosad smo naučili da računamo sa skupovima, iskazima, funkcijama i relacijama, pa se logično postavlja pitanje da li je (i kako) moguće



Slika 6.15: Graf i njegovi indukovani podgrafovi

računati sa grafovima. S obzirom da su grafovi nastali udruživanjem skupova i relacija, za očekivati je da se može izvršiti transfer nekih operacija koje smo već upoznali. S druge strane, veća složenost pojma koji proučavamo nagoveštava i pojavu nekih novih operacija.

Predstavljanje operacija nad grafovima započećemo na uobičajeni način, predstavljanjem binarnih operacija. Napomenimo još i da nam nije cilj da se upoznamo sa svim mogućim, već samo sa najreprezentativnijim, odnosno, najčešće korišćenim operacijama.

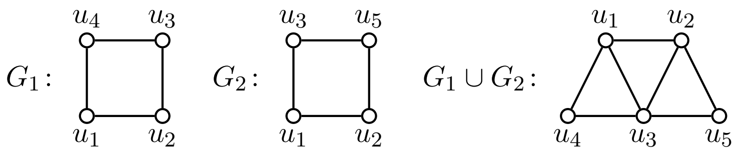
Neka su dati grafovi G_1 i G_2.

(1) *Unija* grafova G_1 i G_2 je graf koji se označava sa $G_1 \cup G_2$ i dat je sa

$$V(G_1 \cup G_2) := V(G_1) \cup V(G_2) \text{ i}$$
$$E(G_1 \cup G_2) := E(G_1) \cup E(G_2).$$

Na Slici 6.16 možemo videti kako se primenjuje operacija unije. Primetimo još i da u slučaju disjunktnih skupova čvorova crtamo jednostavno kopije datih grafova jednu pored druge.

(2) *Presek* grafova G_1 i G_2 je graf koji se označava sa $G_1 \cap G_2$ i dat je

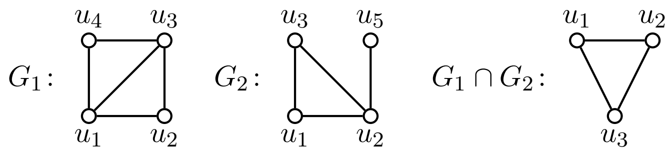


Slika 6.16: Unija dva grafa

sa

$$V(G_1 \cap G_2) := V(G_1) \cap V(G_2) \text{ i}$$
$$E(G_1 \cap G_2) := E(G_1) \cap E(G_2).$$

Na Slici 6.17 možemo videti kako se primenjuje operacija preseka.

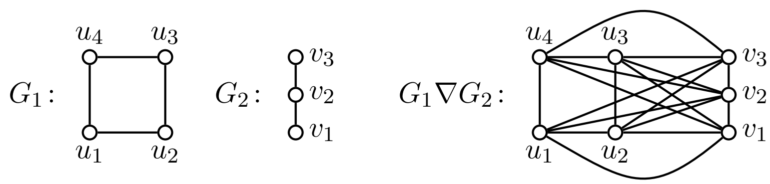


Slika 6.17: Presek dva grafa

(3) *Potpun proizvod* grafova G_1 i G_2 je graf koji se označava sa $G_1 \nabla G_2$ i dat je sa

$$V(G_1 \nabla G_2) := V(G_1) \cup V(G_2) \text{ i}$$
$$E(G_1 \nabla G_2) := E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}.$$

Standardno se uzima da su skupovi čvorova grafova G_1 i G_2 disjunktni. Na Slici 6.18 možemo videti kako se primenjuje ova operacija. Konstrukcija je, u suštini, jednostavna. Crtamo kopije oba grafa, a zatim svaki čvor jednog povežemo granom sa svakim čvorom drugog grafa.

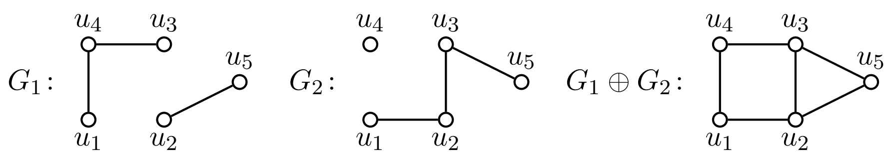


Slika 6.18: Potpun proizvod dva grafa

(4) *Granska suma* grafova G_1 i G_2 je graf koji se označava sa $G_1 \oplus G_2$. Ovu operaciju je moguće primeniti samo u slučaju kada je $V(G_1) = V(G_2)$, a $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$, i to na sledeći način:

$$V(G_1 \oplus G_2) := V(G_1) = V(G_2) \text{ i}$$
$$E(G_1 \oplus G_2) := E(G_1) \cup E(G_2).$$

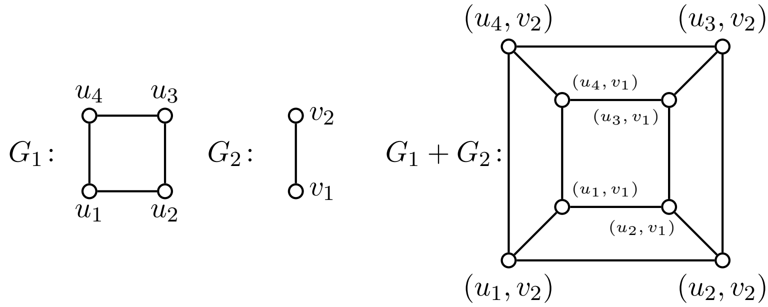
Na Slici 6.19 možemo videti kako se realizuje ova operacija.



Slika 6.19: Granska suma dva grafa

(5) *Descartesova (kartezijanska) suma* je verovatno najzahtevnija standardna operacija na grafovima. Rezultat njene primene na grafove G_1 i G_2 je graf $G_1 + G_2$ dat sa

$$\begin{aligned} V(G_1 + G_2) :=& V(G_1) \times V(G_2) \text{ i} \\ E(G_1 + G_2) :=& \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid (u_1 = u_2 \ \wedge \ v_1 v_2 \in E(G_2)) \\ & \qquad \vee (u_1 u_2 \in E(G_1) \ \wedge \ v_1 = v_2)\}. \end{aligned}$$



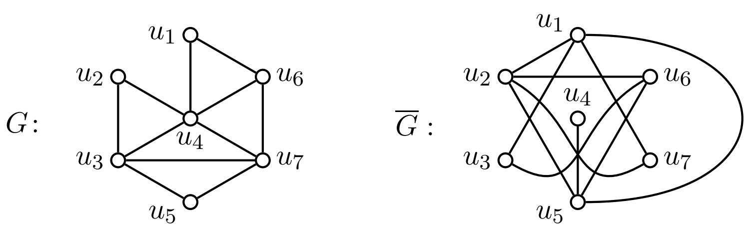
Slika 6.20: Descartesova suma dva grafa

Na Slici 6.20 prikazana je Descartesova suma dva grafa.

Najčešće korišćena unarna operacija je, očekivano, *komplement*.

Definicija 31. Neka je $G = (V, E)$ graf. *Komplement* $\overline{G}$ grafa G je graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, gde je $\overline{E} = \{uv \mid u, v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$.

Primer komplementa grafa je dat na Slici 6.21.



Slika 6.21: Graf i njegov komplement

Zanimljivo je da je parametre komplementa grafa moguće odrediti direktno iz datog grafa.

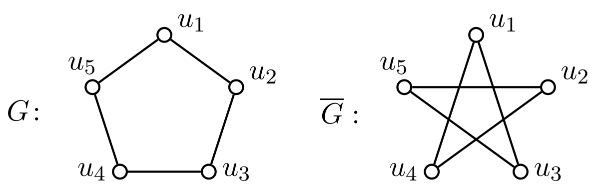
Tvrđenje 32. *Ako je G graf sa n čvorova i m grana, onda je $\overline{G}$ graf sa n čvorova i $\binom{n}{2} - m$ grana. Štaviše, ako je stepen čvora v u grafu G jednak $\delta_G(v)$, onda je njegov stepen u komplementu $\delta_{\overline{G}} = n - 1 - \delta_G(v)$.*

Dokaz. Jasno je da su u komplementu grafa G sadržane tačno one grane koje nisu sadržane u grafu G, pa je njihov broj $\binom{n}{2} - m$. Broj čvorova je isti, na osnovu definicije. Maksimalni stepen čvora u grafu sa n čvorova je $n-1$, pa odmah dobijamo i $\delta_{\overline{G}} = n - 1 - \delta_G(v)$. □

Iz prethodnog tvrđenja sledi da postoje grafovi koji imaju jednak broj grana kao i njihov komplement (ukoliko je $\binom{n}{2}$ paran broj). S druge strane, ukoliko je n neparan broj, može se desiti da su i nizovi stepena čvorova grafa i njegovog komplementa jednaki, pa je potpuno prirodno pitanje da li graf i njegov komplement mogu, u principu, izgledati isto. Uz pomoć već usvojene terminologije možemo precizno formulisati ovu situaciju:

Definicija 33. *Samokomplementaran* graf je graf koji je izomorfan svom komplementu.

Primer 34. Na Slici 6.22 dat je primer jednog samokomplementarnog grafa.



Slika 6.22: Samokomplementarni graf

Pri tome je izomorfizam $\varphi\colon V(G) \to V(\overline{G})$ dat sa

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_1 & u_3 & u_5 & u_2 & u_4 \end{pmatrix}.$$

△

Iz prethodnog razmatranja je jasno da samokomplementarni grafovi ne postoje za svaki prirodan broj, jer $\binom{n}{2}$ nije uvek paran (na pr. $\binom{7}{2} = 21$, pa ne postoji samokomplementaran graf sa 7 čvorova). Dakle, potrebno je da $\binom{n}{2}$ bude paran, da bismo uopšte uzeli u razmatranje pronalaženje samokomplementarnog grafa sa n čvorova. Iznenađujuće je da je ovaj uslov i dovoljan.

Teorema 35. *Samokomplementaran graf sa n čvorova postoji ako i samo ako je $n \equiv 0 \pmod 4$ ili $n \equiv 1 \pmod 4$.*

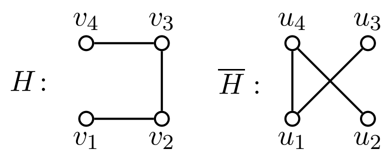
Dokaz. Neka je G samokomplementaran graf sa n čvorova. Tada je

$$m = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \in \mathbb{Z},$$

pa sledi da je $n(n-1)$ deljivo sa 4. Kako dva uzastopna prirodna broja ne mogu biti istovremeno parna, sledi da je jedan od njih deljiv sa 4, pa je ili n deljiv sa 4, ili daje ostatak 1 pri deljenju sa 4.

Obrnuto, neka je $n \equiv 0 \pmod 4$ ili $n \equiv 1 \pmod 4$. Pokažimo da postoji samokomplementaran graf sa n čvorova indukcijom po n:

BI. Za $n = 1$ postoji samokomplementaran graf — to je K_1. Za $n = 4$, odgovarajući samokomplementarni graf H je dat na Slici 6.23:

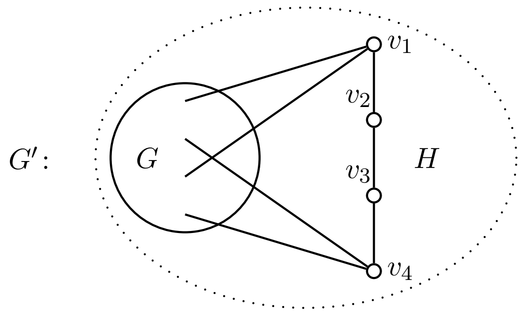


Slika 6.23: Samokomplementaran graf sa četiri čvora

IH. Neka postoji samokomplementaran graf sa n čvorova. Označimo ga sa G. Neka je $V(G) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i neka je $\varphi\colon V(G) \to V(\overline{G})$ odgovarajući izomorfizam.

IK. Pokažimo da je graf $G' = (V', E')$ dat sa

$V(G') := V(G) \cup V(H)$ i
$E(G') := E(G) \cup E(H) \cup \{uv_i \mid u \in V(G), v_i \in V(H), i \in \{1, 4\}\}.$



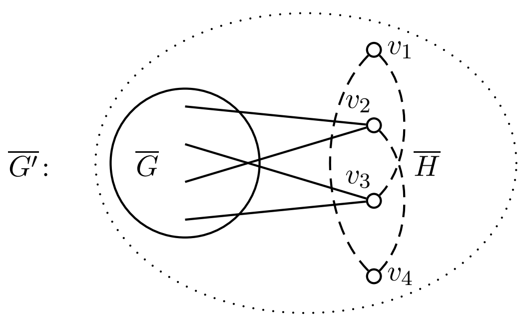
Slika 6.24: Kandidat za samokomplementarni graf sa $n+4$ čvorova

samokomplementarni graf sa $n+4$ čvorova (Slika 6.24).

Zaista, nije teško proveriti da je preslikavanje dato sa

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in V(G), \\ v_2, & x = v_1, \\ v_4, & x = v_2, \\ v_1, & x = v_3, \\ v_3, & x = v_4, \end{cases}$$

izomorfizam između grafova G' i $\overline{G'}$ (Slika 6.25).



Slika 6.25: Komplement grafa G'

Njime se G preslikava izomorfno na $\overline{G}$, a H se preslikava izomorfno na $\overline{H}$, pa je potrebno samo proveriti grane određene čvorom iz G i čvorom iz H. Direktna provera pokazuje da se susednost očuvava, pa je ψ traženi izomorfizam i G' je samokomplementaran graf.

□

Napomena 36. U prethodnom dokazu koristili smo matematičku indukciju koja ima dve baze. Ovaj postupak je uobičajen u matematici i može se proširiti na proizvoljan konačan broj vrednosti baze ukoliko je to neophodno.

6.6 Globalizacija: graf grana i totalni graf

Na stranicama koje slede upoznaćemo se i sa dva globalna operatora koji se primenjuju na grafove. Namerno ih ne navodimo u listi unarnih operacija, jer u pitanju nisu preslikavanja koja se dešavaju na istom skupu, već imamo posla sa transformacijama koje vrše suštinske i pomalo egzotične izmene na grafu na koji se primenjuju.

Definicija 37. *Graf grana* $L(G)$ grafa G u potpunosti je definisan

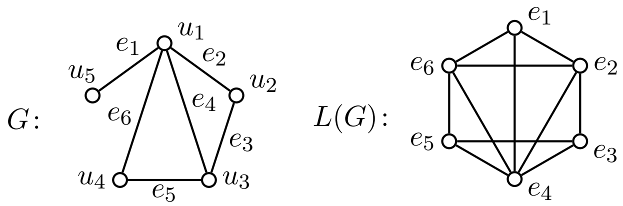
(1) svojim skupom čvorova $E(G)$ i

(2) relacijom susednosti svojih čvorova: dva čvora su susedna ako i samo ako su njima odgovarajuće grane u G susedne.

Primer 38. Na Slici 6.26 prikazani su graf G i njegov graf grana $L(G)$.

Primetimo da je graf grana $L(G)$ nešto složeniji graf, jer ima i više čvorova i više grana od G u ovom konkretnom slučaju. Ipak, sa crteža još uvek možemo jednostavnim prebrojavanjem da odredimo njegov broj čvorova i grana, pa dobijamo $n(L(G)) = 6$, a $m(L(G)) = 11$. △

Šta raditi ukoliko je graf dovoljno velik da predstavljanje njemu odgovarajućeg grafa grana postane pravi izazov, ili bolje rečeno nemoguća misija? Da li je i uprkos ovim poteškoćama moguće odrediti osnovne parametre grafa grana?



Slika 6.26: Graf i njegov graf grana

Tvrđenje 39. *Neka je G graf sa n čvorova i m grana, i neka je $L(G)$ njegov graf grana sa n_L čvorova i m_L grana. Tada važi:*

$$n_L = m, \quad m_L = \sum_{i=1}^{n} \binom{\delta(v_i)}{2}, \quad v_i \in V(G).$$

Dokaz. Da je $n_L = m$ sledi direktno iz definicije grafa grana. Znamo da je svaka grana u $L(G)$ određena parom susednih grana u G. Dve grane u G su, pak, susedne, ukoliko su incidentne sa istim čvorom u G, pa je dovoljno da prebrojimo neuređene parove susednih grana po čvorovima grafa G. U čvoru v_i je međusobno susedno $\delta(v_i)$ grana, odnosno, $\binom{\delta(v_i)}{2}$ parova grana, pa je

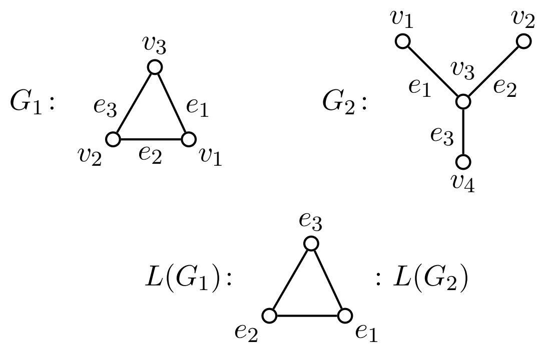
$$m_L = \sum_{i=1}^{n} \binom{\delta(v_i)}{2}.$$

□

Svakom grafu je na jedinstveni način moguće pridružiti graf grana. Stoga izomorfni grafovi imaju izomorfne grafove grana. Ali, da li je i obrnuto tačno? Da li izomorfni grafovi grana garantuju izomorfnost odgovarajućih polaznih grafova?

Tvrđenje 40. *Ako je $G_1 \cong G_2$, onda je i $L(G_1) \cong L(G_2)$. Obrnuto tvrđenje ne važi.*

Dokaz. Prvo deo tvrđenja je očigledno tačan. Da bismo pokazali da obrnuti smer ne važi, dovoljno je da pronađemo dva neizomorfna grafa koji imaju izomorfne grafove grana. U tu svrhu posmatrajmo grafove na Slici 6.27 .



Slika 6.27: Neizomorfni grafovi sa istim grafom grana

Kao što vidimo, $G_!$ i G_2 su neizomorfni grafovi, ali imaju izomorfne grafove grana. □

Pored grafa grana nekog grafa, često razmatramo i *graf grana* kao nezavisan pojam.

Definicija 41. Graf G_L nazivamo *graf grana*, ako postoji graf G takav da je $G_L \cong L(G)$.

Iz dokaza prethodnog tvrđenja imamo da je graf G_1 sa Slike 6.27 graf grana. Da li je generalno tačno da se svaki graf može posmatrati kao graf grana?

Tvrđenje 42. *Postoji graf koji nije graf grana.*

Dokaz. Pokažimo da graf G_2 sa Slike 6.27 nije graf grana. Pretpostavimo suprotno, da postoji graf G takav da je $L(G) \cong G_2$. Tada graf G ima četiri grane, od kojih su tri međusobno nesusedne, a četvrta je susedna sa svakom od njih. Ovo je, naravno, nemoguće, pa dolazimo u kontradikciju. □

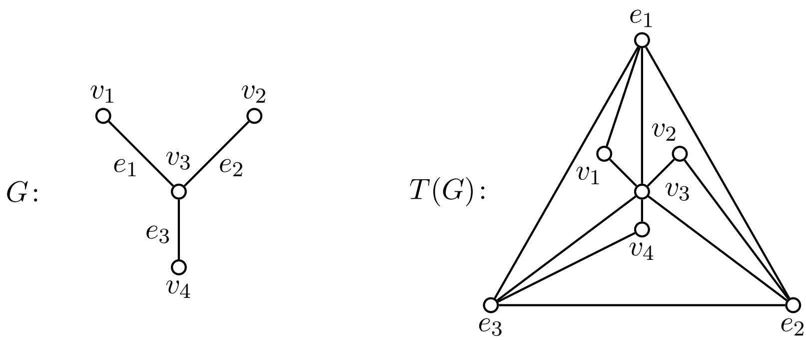
Osim grafa grana, postoji i globalni operator poznatiji kao *totalni graf.*

Definicija 43. *Totalni graf* $T(G)$ grafa G u potpunosti je dat

(1) svojim skupom čvorova $V(G) \cup E(G)$ i

(2) relacijom susednosti svojih čvorova: dva čvora su susedna ako i samo ako su odgovarajući elementi u G susedni ili incidentni.

Primer 44. Na Slici 6.28 predstavljeni su graf G i njegov totalni graf $T(G)$. Ovo je ujedno i jedan od standardnih primera za totalni graf. Iz definicije se jasno vidi da je totalni graf još složeniji od grafa grana,



Slika 6.28: Graf i njegov totalni graf

pa ga uopšte nije lako pregledno predstaviti za nešto veći broj čvorova i grana. △

Slično kao i u slučaju grafa grana, parametre totalnog grafa je moguće odrediti pomoću parametara polaznog grafa.

Tvrđenje 45. *Neka je G graf sa n čvorova i m grana, i neka je $T(G)$ njegov totalni graf sa n_T čvorova i m_T grana. Tada važi:*

$$n_T = n + m, \quad m_T = m + \sum_{i=1}^{n} \binom{\delta(v_i) + 1}{2}, \quad v_i \in V(G).$$

Dokaz. Da je $n_T = n + m$ sledi direktno iz definicije totalnog grafa. Primetimo sada da je skup grana totalnog grafa u bijekciji sa disjunktnom unijom sledeća tri skupa:

- skupa grana grafa G,
- skupa neuređenih parova (tj. dvoelementnih skupova) grana susednih u G, odnosno, skupa grana grafa $L(G)$ i
- skupa uređenih parova incidentnih čvorova i grana u grafu G,

pa je

$$m_L = m + \sum_{i=1}^{n} \binom{\delta(v_i)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = m + \sum_{i=1}^{n} \binom{\delta(v_i)+1}{2}.$$

□

Pored totalnog grafa nekog grafa, postoji i *totalni graf* kao nezavisan pojam.

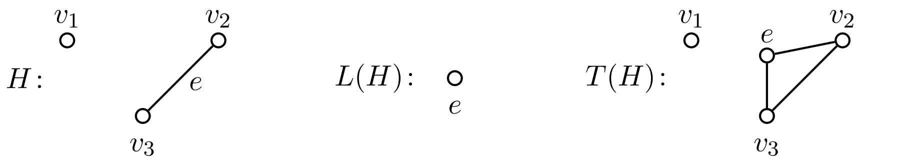
Definicija 46. Graf G_T nazivamo *totalni graf*, ako postoji graf G takav da je $G_T \cong T(G)$.

Nakon iskustva sa grafom grana, za očekivati je da nije svaki graf totalni graf, što se i ispostavlja tačnim.

Tvrđenje 47. *Postoji graf koji nije totalni graf.*

Dokaz. Pokažimo da graf G sa Slike 6.28 ne može biti totalni graf. Pretpostavimo suprotno, da G jeste totalni graf. Tada mora postojati graf H sa n čvorova i m grana, takav da je $G \cong T(H)$. U tom slučaju je $n + m = 4$, pa mora biti $n = 3$ i $m = 1$. U tom slučaju su H, $L(H)$ i $T(H)$ grafovi prikazani na Slici 6.29.

Jasno, G i $T(H)$ nisu izomorfni. Kontradikcija. □



Slika 6.29: Grafovi H, $L(H)$ i $T(H)$ iz dokaza Tvrđenja 47

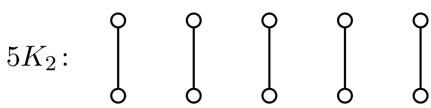
6.7 Grafovski zoo-vrt

Neki grafovi imaju veći značaj od drugih, pa nam je cilj da se upoznamo sa „prominentnijim" primercima ove vrste. Oni uglavnom poseduju neke od osobina koje smo razmatrali u prethodnom tekstu. Ovde ćemo ih posmatrati kao neoznačene grafove. Prvu veću grupu takvih grafova čine specijalni regularni i poluregularni grafovi:

(1) Potpun graf sa n čvorova smo već upoznali (Slika 6.11). To je graf u kojem su svaka dva čvora spojena granom i označavamo ga sa K_n.

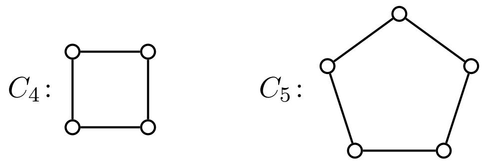
(2) Prazan graf sa n čvorova je takođe već razmatran. Podsetimo se da u njemu nikoja dva čvora nisu povezana granom. Prema tome, on je komplement potpunog grafa, pa nam za njega nije potrebna posebna oznaka — označavamo ga sa $\overline{K_n}$.

(3) U nekim razmatranjima teorije grafova često se koristi 1-regularan graf sa $2n$ čvorova (Slika 6.30). Ovaj graf se sastoji od n disjunktnih kopija potpunog grafa sa dva čvora, pa ga zato obeležavamo sa nK_2.



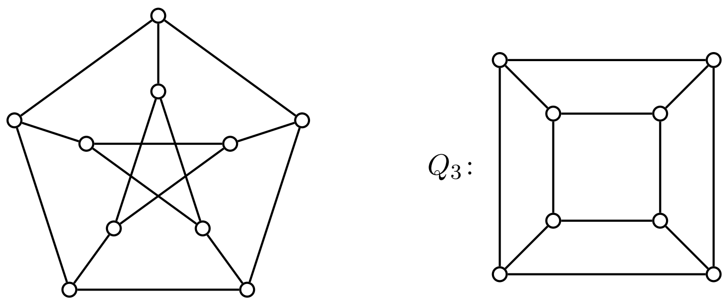
Slika 6.30: 1-regularan graf sa 10 čvorova

(4) *Kontura* C_n je najjednostavniji 2-regularan graf (Slika 6.31). Štaviše, svaki 2 regularan graf je disjunktna unija jedne ili više kontura.



Slika 6.31: Konture sa četiri i pet čvorova

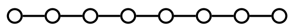
(5) Među 3-regularnim grafovima pronalazimo nekoliko specijalnih. To su, pre svega, *Petersenov graf* i *trodimenzionalna kocka* Q_3 koje vidimo na Slici 6.32. Petersenov graf je 3-regularan graf sa 10 čvorova



Slika 6.32: Petersenov graf i trodimenzionalna kocka

i predstavlja jedan od najčešćih kontraprimera u teoriji grafova, jer nema skoro nijednu od osobina koje se proučavaju. Trodimenzionalnu kocku možemo dobiti i pomoću operacija na grafovima. Važi, naime, $Q_3 = C_4 + K_2$.

(6) *Lanac* od n čvorova P_n je $(1, 2)$-regularan graf sa tačno dva viseća čvora (Slika 6.33).

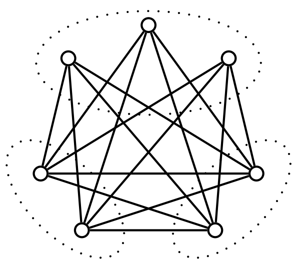
P_4:


Slika 6.33: Lanac sa 8 čvorova

Drugu interesantnu klasu čine tzv. *k-partitni grafovi.*

Definicija 48. Graf $G = (V, E)$ je *k-partitan*, $k \geq 1$, ako postoji particija $(V_1, \ldots, V_k)$ skupa čvorova V, takva da svaka grana iz E spaja dva čvora iz različitih delova particije (tj. čvor iz V_i sa čvorom iz V_j, gde je $i \neq j$).

Važni primeri k-partitnih grafova su *potpuni k-partitni* grafovi. Oni imaju dodatnu osobinu da su svaka dva čvora iz različitih delova particije povezana granom. Ako je $|V_i| = n_i$, označavamo ga sa $K_{n_1,\ldots,n_k}$. Na Slici 6.34 dat je primer jednog potpunog 3-partitnog grafa.

$K_{2,2,3}$:


Slika 6.34: Potpun 3-partitni graf $K_{2,2,3}$

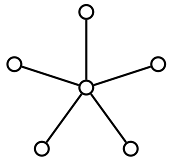
U pitanju je graf $K_{2,2,3}$, koji možemo izraziti i pomoću operacija na grafovima na sledeći način:

$$K_{2,2,3} = (\overline{K_2} \nabla \overline{K_2}) \nabla \overline{K_3}.$$

Među svim k-partitnim grafovima, posebnu pažnju privlači slučaj $k = 2$, gde govorimo o *bipartitnom* grafu. Videćemo kasnije da neke važne klase grafova imaju ovu osobinu.

Primer 49. Zvezda S_n je potpun bipartitni graf na skupu od n čvorova. Na Slici 6.35 vidimo zvezdu S_6. Primetimo da je $S_6 \cong K_{1,5}$. Generalno, važi da je $S_n \cong K_{1,n-1}$.

S_6:



Slika 6.35: Zvezda S_6

△

6.8 Zadaci za vežbu

(1) Odrediti maksimalan broj grana u grafu sa n čvorova.

(2) Neka je G graf sa n čvorova i $(n-1)$-om granom. Dokazati da u tom grafu postoji izolovani ili viseći čvor.

(3) Neka je G graf sa n čvorova i m grana. Dokazati da je

$$\Delta(G) \geq \frac{2m}{n}.$$

(4) Neka je G graf sa

- n čvorova,
- m grana,
- n_k čvorova stepena k i
- n_{k+1} čvorova stepena $k+1$, pri čemu je $n_k + n_{k+1} = n$.

Dokazati da je

$$n_k = (k+1)n - 2m.$$

(5) Koji od sledećih nizova mogu da se pojave kao nizovi stepena čvorova nekog grafa:

- $(1, 2, 2, 4, 5, 6, 7)$;

- $(1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$;
- $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9)$?

Ukoliko je moguće, ilustrovati primerom.

(6) Dokazati da za svako $n \geq 2$ postoji graf sa n čvorova u kome tačno jedan par čvorova ima isti stepen.

(7) Neka je G graf sa bar jednom granom u kome ne postoje dva čvora istog stepena koji imaju zajedničkog suseda. Dokazati da G ima viseći čvor.

(8) Na jednom skupu našlo se 13 osoba od kojih su se neke rukovale međusobno. Da li je moguće da se svaka osoba rukovala sa 5 drugih osoba?

(9) U kubnom grafu sa 2014 čvorova, svaki čvor je obojen jednom od dve boje tako da ima 1007 crvenih i 1007 plavih čvorova. Dokazati da je u tom grafu broj grana koje spajaju čvorove različitih boja – neparan.

(10) Neka je G kubni (n, m) graf, takav da je $m = 2n - 3$. Kako izgleda graf G?

(11) Naći sve neoznačene grafove koji imaju 5 čvorova.

(12) Naći sve označene $(4, 3)$ grafove sa skupom čvorova $\{1, 2, 3, 4\}$.

(13) Koliko ima neoznačenih, a koliko označenih grafova sa skupom čvorova $\{1, 2, 3, 4\}$?

(14) Koliko ima neoznačenih grafova sa 10 grana koji imaju tačno 2 čvora stepena 4, a svi ostali čvorovi su stepena 3?

(15) Neka je $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dokazati da je broj označenih (n, m)-grafova na skupu čvorova V jednak broju označenih $(n, \binom{n}{2} - m)$ grafova na istom skupu čvorova.

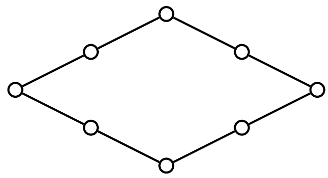
(16) Odrediti sve neoznačene samokomplementarne grafove sa 4 i 5 čvorova.

(17) Ispitati da li za disjunktne grafove G i H važe sledeće jednakosti:

(a) $\overline{G \nabla H} = \overline{G} \cup \overline{H}$;

(b) $\overline{G \cup H} = \overline{G} \nabla \overline{H}$.

(18) Koliko neoznačenih pokrivajućih podgrafova ima graf na slici?



(19) Ako je G bipartitan (n, m) graf, onda je $m \leq \frac{n^2}{4}$. Dokazati.

(20) (a) Odrediti broj grana potpunog k-partitnog grafa.

(b) Neka je G neprazan graf sa osobinom da $uv \notin E \wedge vw \notin E \Rightarrow uw \notin E$. Dokazati da je G potpun k-partitan graf akko ima navedenu osobinu.

(21) *Hiperkocka* Q_n je graf čiji je skup čvorova skup svih nizova nula i jedinica dužine n. Dva čvora su povezana granom ako i samo ako se njima odgovarajući nizovi razlikuju na tačno jednoj poziciji. Odrediti broj čvorova i broj grana grafa Q_n.

(22) Naći primere 3-regularnih grafova na skupu od 8, 10 i 12 čvorova.

(23) Koliko ima kontura dužine 6 u grafu $K_{m,n}$, za $m, n \geq 3$?

7 Putovanje kroz graf: povezanost i metrika

No man is an island, entire of itself.

(John Donne, No man is an island)

Grafovi se često koriste kao matematički modeli putnih, društvenih i komunikacionih mreža. Ovakve konstrukcije zahtevaju mogućnost kretanja, protoka i razmene, pa je prirodna potreba da se razmotri kako se ovi procesi manifestuju u matematičkom svetu i kakve je uslove potrebno obezbediti da bi se oni uopšte mogli realizovati. Cilj ovog poglavlja je da odgovori na pitanja izvodljivosti kretanja po grafu, razmotri vrste putanja koje se mogu realizovati pri kretanju, utvrdi stabilnost postojanja takvih putanja u grafu i predloži način za vršenje raznih merenja na grafu.

7.1 Šetnje, staze, putevi

Putanje po kojima se krećemo kroz graf napravljene su po uzoru na putanje iz realnog života, pa su čak preuzele i neka od njihovih imena. Najopštiji način kretanja po grafu jeste *šetnja*.

Definicija 1. *Šetnja* u grafu G je konačan niz

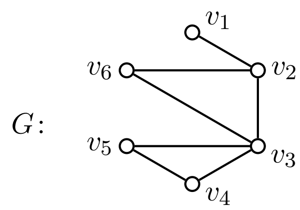
$$W\colon v_0e_1v_1e_2v_2\dots v_{k-1}e_kv_k,$$

gde su $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$, $e_1, \dots, e_k \in E$ i grana e_{i+1} je incidentna sa čvorovima v_i i v_{i+1}, $i = 0, \dots, k-1$. Kažemo još i $v_0 - v_k$ šetnja.

Primetimo da je u prostom grafu šetnja određena čvorovima. Čvor v_0 je *početak* šetnje, čvor v_k je *kraj* šetnje, a čvorovi $v_1, \dots, v_{k-1}$ su *unutrašnji čvorovi* šetnje. U šetnji je dozvoljeno višestruko pojavljivanje čvorova i grana, a njena dužina određena je sa k.

U grafu G sa Slike 7.1, jedna šetnja dužine 9 je data sa

$$W\colon v_3v_2v_1v_2v_6v_3v_5v_4v_5v_4.$$



Slika 7.1: Šetnje u grafu

Ponavljanje čvorova i grana ne mora biti uobičajena pojava u putanjama. Uvođenjem određenih ograničenja, dobijamo i neke specijalne vrste šetnji, za koje ćemo dati primere koristeći graf sa slike 7.1:

(1) *Trivijalna šetnja* je šetnja bez grana. Sastoji se od jednog jedinog čvora. Primer takve šetnje je $W: v_1$.

(2) *Zatvorena šetnja* je šetnja u kojoj se početak i kraj poklapaju, kao što je slučaj sa $W: v_3v_6v_3v_5v_4v_3$.

(3) Pod *stazom* podrazumevamo šetnju u kojoj se svaka grana javlja najviše jednom. To znači da ne može doći do ponavljanja grana, ali je ponavljanje čvorova i dalje dozvoljeno, kao u $W: v_2v_3v_5v_4v_3v_6$.

(4) *Zatvorena staza* je staza u kojoj se početak i kraj poklapaju, na primer $W: v_2v_6v_3v_5v_4v_2$.

(5) *Put* je staza u kojoj se svaki čvor javlja najviše jednom. U ovakvoj putanji nema ponavljanja ni čvorova ni grana, kao što je to slučaj sa $W: v_5v_4v_3v_2$.

(6) Zatvoreni put se naziva *kontura*, isto kao i 2-regularni graf koji smo već upoznali. Grane koje pripadaju konturi nazivamo *konturne grane*. Jedna kontura u grafu G je $v_2v_3v_6v_3$.

Jasno je da prisustvo specijalnih šetnji ne mora biti obavezno u svim grafovima. Međutim, da li je moguće utvrditi kada graf poseduje neku specijalnu šetnju? U nastavku dajemo delimičan odgovor na ovo pitanje:

Tvrđenje 2. *U nekom grafu postoji $u - v$ šetnja ako i samo ako u njemu postoji $u - v$ put.*

Dokaz. Svaki put je šetnja, pa ako postoji $u - v$ put, onda postoji i $u - v$ šetnja. Obrnuto, pretpostavimo da u posmatranom grafu postoji $u - v$ šetnja. Razlikujemo dva slučaja:

(1) Uočena $u - v$ šetnja je zatvorena. Tada je $u = v$, pa u grafu postoji trivijalni $u - v$ put.

(2) Uočena $u - v$ šetnja je otvorena. Neka je to

$$W\colon uv_1v_2\ldots v_{k-1}v, \quad u \neq v.$$

Ako su svi čvorovi međusobno različiti, onda je W jedan $u - v$ put. U suprotnom, postoji čvor koji se više puta javlja u W. Neka su v_i i v_j, $i < j$, pojavljivanja istog čvora. Odstranimo iz W deo $v_i - v_{j-1}$, čime dobijamo $u - v$ šetnju W_1 koja je kraća od W. Ako su svi čvorovi u W_1 međusobno različiti, W_1 je traženi put. Ako nisu, ponavljamo opisani postupak sve dok ne dobijemo $u - v$ put, što se mora desiti u konačno mnogo koraka, zbog konačnosti posmatranog grafa.

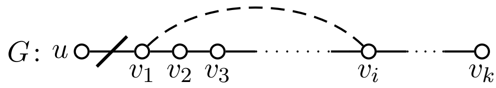
□

Sada bi bilo zanimljivo znati da li se i kada u grafu može garantovati egzistencija konture. Jedan izuzetno koristan dovoljan uslov je dat u sledećem tvrđenju:

Tvrđenje 3. *Ako u grafu G važi $\delta(G) \geq 2$, onda G sadrži konturu.*

Dokaz. Među svim putevima u grafu G uočimo jedan koji ima maksimalnu dužinu. Neka je to $W\colon v_1v_2\ldots v_k$. Kako je svaki čvor stepena 2, to je i $\delta(v_i) \geq 2$, pa, specijalno, v_1 ima bar još jednog suseda u G. Neka je to čvor u (Slika 7.2).

Ako $u \notin \{v_3, \ldots, v_k\}$, onda je $uv_1v_2\ldots v_k$ put duži od W, što je u kontradikciji sa izborom puta W. Sledi da mora biti $u \in \{v_3, \ldots, v_k\}$. Tada je $u = v_i$, za neko i, pa je $v_1v_2\ldots v_iv_1$ tražena kontura. □



Slika 7.2: Put maksimalne dužine i kontura u G

7.2 Povezanost i komponente povezanosti

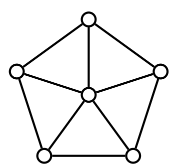
Kretanje po grafu omogućava osobina *povezanosti*. Ova osobina se u grafu javlja na dva nivoa: lokalnom, gde govorimo o povezanosti čvorova, i globalnom, gde govorimo o povezanosti grafa.

Definicija 4. Čvor u je *povezan* sa čvorom v u grafu G, ako u grafu G postoji $u-v$ šetnja.

Iz Tvrđenja 2 odmah sledi da je čvor u povezan sa čvorom v ako i samo ako postoji i $u-v$ put. Naravno, postojanje $u-v$ puta znači i postojanje $v-u$ puta, što je suštinski isti put, samo naveden obrnutim redosledom čvorova, pa je povezanost simetrična relacija. Zato ima smisla reći da su u i v povezani u G.

Definicija 5. Graf $G=(V,E)$ je *povezan*, ako su svaka dva čvora u G povezana.

Na slici 7.3 dat je primer jednog povezanog grafa.

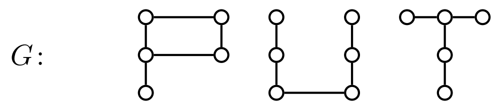


Slika 7.3: Primer povezanog grafa

Zanimljivo je da je relacija povezanosti relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa G. Svaki čvor je povezan sam sa sobom trivijalnom šetnjom, pa je povezanost refleksivna relacija. Simetričnost smo već razmotrili, a tranzitivnost je isto lako obrazložiti: ako je u povezan sa v i v povezan sa w u grafu G, onda postoje $u-v$ šetnja i $v-w$ šetnja u G. Njihova unija je jedna $u-w$ šetnja, pa sledi da je u povezan sa w. Relacija ekvivalencije daje particiju skupa na kojem je definisana, pa tako dolazimo do pojma *komponente povezanosti*.

Definicija 6. Podgraf indukovan skupom čvorova jedne klase ekvivalencije naziva se *komponenta povezanosti* grafa G. Broj komponenti povezanosti označavamo sa $\mathrm{k}(G)$.

Primer 7. Na Slici 7.4 dat je nepovezan graf G za koji je $\mathrm{k}(G) = 3$.



Slika 7.4: Primer nepovezanog grafa sa tri komponente povezanosti

Primetimo da je za nepovezane grafove $\mathrm{k}(G) \geq 2$, dok je za povezane grafove $\mathrm{k}(G) = 1$. $\triangle$

Uvođenjem pojma povezanosti postavili smo sebi nekoliko zadataka:

Problem
Za dati graf G utvrditi:

- da li je povezan,
- koliko ima komponenti povezanosti i
- kako izgledaju te komponente.

Pođimo od prvog problema i pokušajmo da napravimo test za povezanost grafa.

Teorema 8. *Graf $G = (V, E)$ je povezan ako i samo ako za svaku particiju (V_1, V_2) skupa V postoji grana koja spaja neki čvor iz V_1 sa nekim čvorom iz V_2.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$, i neka je (V_1, V_2) jedna particija skupa V, odnosno, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Neka je G povezan. Pretpostavimo da su V_1 i V_2 takvi da je svaki čvor iz V_1 nesusedan sa svakim iz V_2. Tada ne postoji nijedna $u - v$ šetnja, za proizvoljne $u \in V_1$ i $v \in V_2$, pa je G, po definiciji, nepovezan, čime smo došli u kontradikciju.

Obrnuto, neka za svaku particiju (V_1, V_2) skupa V postoji grana koja spaja neki čvor iz V_1 sa nekim čvorom iz V_2. Pretpostavimo da je G nepovezan. Uočimo čvor u i definišimo skupove V_1 i V_2 na sledeći način:

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{x \in V \mid x \text{ je povezan sa } u\}, \\ V_2 &:= V \setminus V_1. \end{aligned}$$

Jasno je da je $V = V_1 \cup V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dalje, $u \in V_1$, pa je V_1 neprazan. Skup V_2 je neprazan, jer je G nepovezan. Sledi da je (V_1, V_2) particija skupa V sa osobinom da nijedan čvor iz V_1 nije povezan sa čvorom iz V_2. Kontradikcija. $\square$

Za broj komponenti povezanosti ne možemo dati formulu koja zavisi od parametara grafa i pomoću koje bi ga mogli izračunati. Međutim, možemo dati neke donje i gornje granice.

Tvrđenje 9. *Neka je $G = (V, E)$ graf sa n čvorova. Tada važi*

$$1 \leq \mathrm{k}(G) \leq n.$$

Dokaz. Ukoliko je G povezan, onda je $\mathrm{k}(G) = 1$. Ukoliko je, pak, nepovezan, najveći broj komponenti povezanosti dostižemo ako je svaki čvor komponenta povezanosti za sebe, tj. $\mathrm{k}(G) = n$. Sledi da je $1 \leq \mathrm{k}(G) \leq n$. $\square$

Tvrđenje 10. *Neka je $G = (V, E)$ graf.*

(1) Za nesusedne $u, v \in V$ važi

$$\mathrm{k}(G) - 1 \leq \mathrm{k}(G + uv) \leq \mathrm{k}(G).$$

(2) Za susedne $u, v \in V$ važi

$$\mathrm{k}(G) \leq \mathrm{k}(G - uv) \leq \mathrm{k}(G) + 1.$$

Dokaz. Posmatrajmo graf $G = (V, E)$ i uočimo u njemu dva proizvoljna čvora u i v.

(1) Neka su u i v nesusedni. Ako se nalaze u istoj komponenti povezanosti, onda se dodavanjem grane između njih broj komponenti povezanosti grafa ne menja, tj. $\mathrm{k}(G + uv) = \mathrm{k}(G)$. U suprotnom, oni se nalaze u različitim komponenatama povezanosti pa se dodavanjem grane između njih te dve komponente stapaju u jednu, čime se ukupan broj komponenti povezanosti smanjuje za 1, odnosno, $\mathrm{k}(G + uv) = \mathrm{k}(G) - 1$.

(2) Neka su u i v susedni. Tada se moraju nalaziti u istoj komponenti povezanosti, pa brisanjem grane broj komponenti povezanosti ili ostaje isti ili se povećava. Pretpostavimo da je $k(G-uv) > k(G)+1$. Tada iz prethodnog imamo

$$\mathrm{k}(G) = \mathrm{k}((G - uv) + uv) \geq \mathrm{k}(G - uv) - 1 > \mathrm{k}(G),$$

čime smo došli u kontradikciju.

□

Pod opisom komponenti povezanosti obično podrazumevamo određivanje njihovih grafovskih parametara, kao što su broj čvorova i grana. Jasno je da se svaka komponenta može za sebe posmatrati kao povezan graf. Naše trenutno poznavanje teorije grafova je dovoljno da možemo da izvršimo procenu broja grana povezanog grafa.

Tvrđenje 11. *U svakom povezanom grafu sa n čvorova i m grana važi*

$$m \geq n - 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka za neki povezan graf sa n čvorova i m grana važi $m < n - 1$. Na osnovu Tvrđenja 10, odstranjivanjem njegovih grana broj komponenti povezanosti se može povećati za najviše $n-2$, pa je krajnji rezultat tog procesa povezan graf sa $n-1$ komponenti povezanosti, odnosno, $n-1$ izolovanih čvorova.

S druge strane, odstranjivanjem svih grana iz grafa G dobijamo graf sa n izolovanih čvorova, što je n komponenti povezanosti. Kontradikcija. $\square$

Ako je G povezan graf sa n čvorova i $(n-1)$-om granom, tada govorimo o jednom *minimalno povezanom* grafu.

Primer 12. Zvezda S_n je minimalno povezan graf. $\triangle$

7.3 Najslabije karike povezanosti

Minimalno povezani graf je granični slučaj za povezane grafove, jer bismo brisanjem proizvoljne grane dobili graf koji više ne bi bio povezan. Prirodno se nameće pitanje da li u proizvoljnom povezanom grafu možemo postići isti efekat brisanjem jedne grane i ukoliko možemo, kako se takva grana može prepoznati.

Definicija 13. Neka je dat graf $G = (V, E)$. *Most* je grana e grafa G sa osobinom

$$\mathrm{k}(G-e) > \mathrm{k}(G),$$

tj. grana čijim se brisanjem povećava broj komponenti povezanosti datog grafa G.

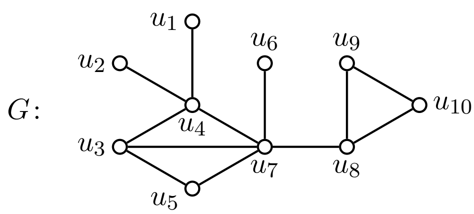
Iz tvrđenja o broju komponenti povezanosti sledi da važi

$$\mathrm{k}(G-e) = \mathrm{k}(G) + 1.$$

Primer 14. U grafu G na Slici 7.5 mostovi su sledeće grane: u_1u_4, u_2u_4, u_6u_7 i u_7u_8. Primetimo da su viseće grane uvek mostovi. $\triangle$

U potrazi za testom koji će nam omogućiti da prepoznajemo mostove, dolazimo do sledećeg tvrđenja.

Teorema 15. *Grana e povezanog grafa G je most ako i samo ako u G postoje čvorovi u i v takvi da svaka $u-v$ šetnja u grafu G sadrži granu e.*



Slika 7.5: Najslabije karike u grafu

Dokaz. Neka je e most u povezanom grafu G. Tada je graf $G-e$ nepovezan. Ako su u i v čvorovi iz različitih komponenti povezanosti grafa $G-e$, onda u $G-e$ ne postoji $u-v$ šetnja, dok u G postoji, pa zaključujemo da svaka $u-v$ šetnja u G mora da sadrži e.

Obrnuto, ako su u i v čvorovi grafa G takvi da svaka $u-v$ šetnja sadrži e, onda u $G-e$ ne postoji $u-v$ šetnja, pa je $G-e$ nepovezan, tj. e je most u G. □

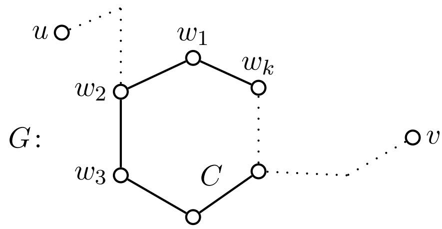
Ipak, još zanimljivije je sledeće zapažanje:

Teorema 16. *Grana e grafa G je most ako i samo ako ne pripada nijednoj konturi grafa G.*

Dokaz. S obzirom da razmatranje možemo ograničiti na komponentu povezanosti kojoj pripada grana e, možemo, bez umanjenja opštosti, pretpostaviti da je G povezan graf.

Pretpostavimo, prvo, da je e most koji leži na konturi C grafa G (Slika 7.6). Neka su u i v proizvoljni čvorovi sa osobinom da svaka $u-v$ šetnja u G sadrži granu e (ovakvi čvorovi postoje zbog Teoreme 15). Tada u $G-e$ ne postoji $u-v$ šetnja. Međutim, ako u proizvoljnoj $u-v$ šetnji u G zamenimo granu $e = w_1w_k$ sa putem $w_1w_2\dots w_k$ koji se dobija odstranjivanjem grane e iz konture C, dobićemo $u-v$ šetnju u $G-e$, pa e ne može biti most. Kontradikcija.

Obrnuto, pretpostavimo da $e = w_1w_k$ ne pripada nijednoj konturi i da



Slika 7.6: Kontura iz dokaza Teoreme 16

nije most. Tada je graf $G-e$ povezan, pa u njemu postoji $w_1 - w_k$ šetnja, a samim tim i $w_1 - w_k$ put, koji zajedno sa e čini konturu u G. □

Posledica 17. *Svaka grana u grafu je ili most ili konturna grana.*

Pojam analogan pojmu mosta jeste *artikulacioni čvor*.

Definicija 18. Neka je dat graf $G = (V, E)$. *Artikulacioni čvor* je čvor v grafa G sa osobinom

$$\mathrm{k}(G - v) > \mathrm{k}(G),$$

tj. čvor čijim se brisanjem povećava broj komponenti povezanosti grafa G.

U grafu na Slici 7.5 artikulacioni čvorovi su u_8, u_7 i u_4.

S obzirom na analogiju između mostova i artikulacionih čvorova, nije iznenađenje da postoji isti tip testa koji nam pomaže u prepoznavanju potonjih.

Teorema 19. *Čvor u povezanog grafa G je artikulacioni čvor ako i samo ako u G postoje čvorovi v i w ($u \notin \{v, w\}$), takvi da svaka $v - w$ šetnja u G sadrži čvor u.*

Dokaz ove teoreme se ostavlja za vežbu pažljivom čitaocu, jer prati glavnu liniju dokaza odgovarajućeg tvrđenja za mostove.

Iz Teoreme 16 sledi da je u grafu bez kontura svaka grana most, što nas dovodi do sledećeg pitanja: Da li postoji graf u kojem je svaki čvor artikulacioni?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, moramo prvo naučiti da merimo rastojanja u grafu.

7.4 Kako izmeriti rastojanja u grafu

Da bismo vršili merenje rastojanja na grafu, neophodno je da se dogovorimo šta će biti jedinična mera i da matematički opišemo pojam rastojanja. Ovaj problem se razrešava uvođenjem *metrike*.

Definicija 20. Kažemo da je na skupu X definisana *metrika* ako je definisano preslikavanje

$$d : X^2 \to \mathbb{R},$$

koje ispunjava sledeće uslove (tzv. aksiome rastojanja) za proizvoljne $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrija),

(M3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (nejednakost trougla).

Tada se d naziva *rastojanje*, a (X, d) *metrički prostor*.

Rastojanja merimo na povezanim grafovima:

Definicija 21. Neka je $G = (V, E)$ povezan graf sa skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Rastojanje* između čvorova v_i i v_j je dužina najkraće $v_i - v_j$ šetnje.

Primetimo da je rastojanje uvek nenegativan broj. Zaista, ako u $(M3)$ uzmemo $x = z$, onda iz $(M1)$ i $(M2)$ sledi

$$\text{za sve } x, y \in X: \quad d(x, y) \geq 0.$$

Rastojanja smo uveli na povezanim grafovima. Međutim, nije svaki graf povezan. Kako izraziti rastojanje između čvorova koji se nalaze u različitim komponentama nepovezanog grafa G? U tom slučaju, u teoretskim razmatranjima uzimamo da je po definiciji

$$d(u,v) := +\infty.$$

U računarskoj praksi, međutim, imamo potrebu da to bude neki konkretan broj sa kojim ćemo moći da vršimo realna izračunavanja, pa uzimamo

$$d(u,v) := M,$$

gde je M dovoljno veliki konačan broj, takav da su zadovoljene i sve aksiome metrike i ograničenost opsega skupa celih brojeva za odgovarajući tip podataka.

Merenje različitih rastojanja obično dovodi do interesovanja za ekstremne vrednosti koje se mogu pojaviti tom prilikom. One su obuhvaćene metričkim parametrima grafa:

Neka je $G = (V, E)$ graf.

(1) *Ekscentricitet čvora v* u grafu G je

$$\mathrm{e}(v) = \max_{u \in V} d(u,v),$$

odnosno, maksimalno rastojanje koje možemo pronaći između datog čvora i proizvoljnog čvora posmatranog grafa.

(2) *Poluprečnik* grafa G je

$$\mathrm{r}(G) = \min_{v \in V} \mathrm{e}(v) = \min_{v \in V} \max_{u \in V} d(u,v),$$

i to je minimalnimalni ekscentricitet koji se može registrovati u posmatranom grafu.

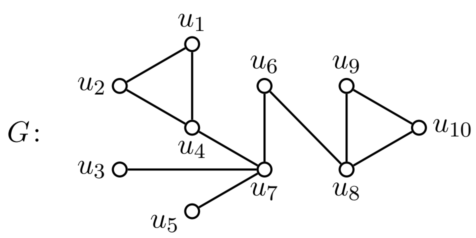
(3) *Prečnik* grafa G je

$$\mathrm{d}(G) = \max_{v \in V} \mathrm{e}(v) = \max_{v \in V} \max_{u \in V} d(u,v),$$

odnosno najveće moguće rastojanje između dva čvora u grafu.

Ovakva terminologija neodoljivo podseća na geometrijski pojam kruga, pa nam nedostaje još centar, da bismo upotpunili sliku. Situacija je nešto složenija nego u geometriji. Čvor v iz V je *centralan*, ako je $\mathrm{e}(v) = \mathrm{r}(G)$. Skup svih centralnih čvorova u G naziva se *centar* grafa G.

Primer 22. Odredimo metričke parametre grafa G datog na Slici 7.7. Prvo ćemo odrediti ekscentricitete svih čvorova u grafu G. Dobijamo:



Slika 7.7: Metrički parametri grafa

$$
\begin{aligned}
&e(u_1) = e(u_2) = e(u_9) = e(u_{10}) = 5\\
&e(u_3) = e(u_4) = e(u_5) = e(u_8) = 4\\
&e(u_6) = e(u_7) = 3.
\end{aligned}
$$

Poluprečnik grafa G je najmanji ekscentricitet, odnosno, $\mathrm{r}(G) = 3$, dok je prečnik najveći ekscentricitet, tj. $\mathrm{d}(G) = 5$. Centralni čvorovi su u_6 i u_7, a centar je $\{u_6, u_7\}$. △

Međutim, ovde se mora biti oprezan — intuicija stečena u geometriji nas može pogrešno navesti da verujemo da je poluprečnik jednak polovini prečnika. Ovo ne samo da nije tačno, nego važi:

Tvrđenje 23. *U svakom povezanom grafu G važi*

$$\mathrm{r}(G) \le \mathrm{d}(G) \le 2\mathrm{r}(G).$$

Dokaz. Da je $\mathrm{r}(G) \leq \mathrm{d}(G)$ sledi direktno iz definicije. Da bismo pokazali da važi i druga nejednakost, uočimo u G čvorove u i v takve da je $d(u, v) = \mathrm{d}(G)$ i proizvoljni centralni čvor w grafa G. Tada je

$$d(u, w) + d(w, v) \geq d(u, v) = \mathrm{d}(G).$$

S druge strane, $d(u, w) + d(w, v) \leq e(w) + e(w) = 2\mathrm{r}(G)$, pa sledi tražena nejednakost. □

7.5 Pogled iz drugog ugla

Neke od fenomena teorije grafova koje smo dosad upoznali, razmotrićemo sada i iz ugla metrike. Videćemo kako nam metrika može pomoći pri proučavanju artikulacionih čvorova, odredićemo neke od metričkih parametara za samokomplementarne grafove i uspostavićemo kriterijum za prepoznavanje bipartitnih grafova.

Zahvaljujući metrici, u mogućnosti smo da damo odgovor na već postavljeno pitanje: Da li postoji graf u kojem je svaki čvor artikulacioni?

Tvrđenje 24. *U grafu sa n čvorova postoje najviše $n - 2$ artikulaciona čvora.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da tvrđenje važi za povezane grafove. Neka su u i v čvorovi datog grafa G takvi da je $d(u, v) = \mathrm{d}(G)$. Pokazaćemo da u i v ne mogu biti artikulacioni čvorovi.

Pretpostavimo suprotno, neka je u artikulacioni čvor. Tada je $G - u$ nepovezan graf. Neka je w čvor u G takav da su v i w u različitim komponentama grafa $G - u$. Tada svaka $v - w$ šetnja, a samim tim i $v - w$ put sadrži čvor u, pa je

$$d(v, w) = d(v, u) + d(u, w) > d(u, v) = \mathrm{d}(G).$$

Kontradikcija. Sledi da u ne može biti artikulacioni čvor. Za v se pokazuje analogno, pa G može imati najviše $n - 2$ artikulaciona čvora. □

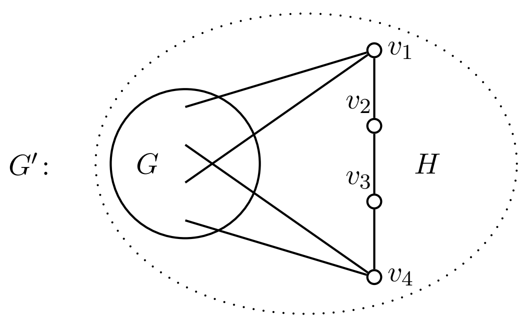
Primer 25. Jedan graf sa n čvorova koji ima tačno $n - 2$ artikulaciona čvora je lanac P_n. △

U prethodnoj glavi smo saznali da postoji samokomplementaran graf sa n čvorova tačno u onim slučajevima kada je ili n deljivo sa 4, ili daje ostatak 1 pri deljenju sa 4. Sada ćemo pokazati da za takve vrednosti $n > 5$ postoje po dva različita samokomplementarna grafa i odredićemo njihove prečnike:

Tvrđenje 26. *Za svaki prirodan broj $n > 5$ sa osobinom $n \equiv 0 \pmod 4$ ili $n \equiv 1 \pmod 4$, postoji bar jedan samokomplementaran graf prečnika 2 i bar jedan samokomplementaran graf prečnika 3.*

Dokaz. Graf konstruisan u dokazu Teoreme 35 je prečnika 2 (Slika 7.8). Zaista, za $u, v \in G'$ imamo sledeće mogućnosti:

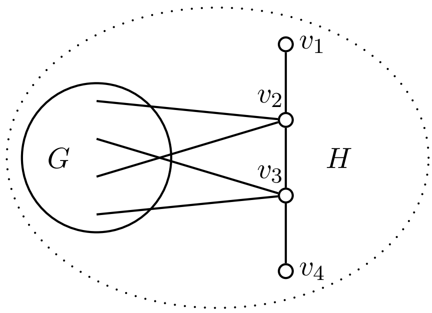
- $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$, pa je $d(u, v) = 1$;
- $u, v \in V(G)$, $uv \notin E(G)$, pa je $d(u, v) = d(u, v_1) = d(v_1, v) = 1 + 1 = 2$;
- $u \in V(G)$, $v \in V(H)$, pa je $d(u, v_1) = d(u, v_4) = 1$, a $d(u, v_2) = d(u, v_3) = 2$;
- $u, v \in V(H)$, pa je $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_3) = d(v_3, v_4) = 1$, dok je $d(v_1, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_1, v_4) = 2$.



Slika 7.8: Samokomplementarni graf prečnika 2

Sledi da je $\mathrm{d}(G') = 2$.

G'':



Slika 7.9: Samokomplementarni graf prečnika 3

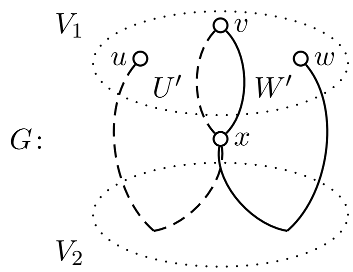
Samokomplementarni graf prečnika 3 konstruiše se na sličan način (Slika 7.9). Analiza rastojanja u grafu je analogna onoj kod samokomplementarnog grafa prečnika 2, s tim da je ovde $d(v_1, v_4) = 3$, pa je stoga i $\mathrm{d}(G'') = 3$. $\square$

I na kraju, posvećujemo našu pažnju karakterizaciji bipartitnih grafova:

Teorema 27. *Netrivijalan graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži konturu neparne dužine.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ bipartitan graf sa particijom skupa čvorova (V_1, V_2), i neka je $C\colon v_1 v_2 \ldots v_k v_1$ kontura u G. Ako $v_1 \in V_1$, sledi da $v_i \in V_2$, za $i \leq k$ parno, i $v_i \in V_1$, za $i \leq k$ neparno. To znači da je k parno, odnosno, da je C kontura parne dužine.

Obrnuto, možemo bez umanjenja opštosti uzeti da je $G = (V, E)$ povezan netrivijalan graf koji nema neparnih kontura. Uočimo $v \in V$ i sa V_1 označimo skup svih čvorova grafa G koji se nalaze na parnom rastojanju od v. Neka je $V_2 := V \setminus V_1$. Tada $v \in V_1$. Pokažimo da je (V_1, V_2) particija skupa čvorova takva da ni u V_1 ni u V_2 ne postoje dva susedna čvora. Pretpostavimo suprotno, neka u V_1 postoje susedni čvorovi u i w (Slika 7.10). Tada $v \notin \{u, w\}$. Posmatrajmo po jedan najkraći $u - v$ i $w - v$ put, recimo puteve U i W, redom. Neka je x čvor koji je na najvećem rastojanju od v od svih čvorova koji se nalaze na putevima U i W. Tada je $v - x$ put U' iste dužine kao i $v - x$ put W', jer u suprotnom



Slika 7.10: Najkraći $u-v$ i $w-v$ putevi u G

postoji $u-v$ put kraći od U ili $w-v$ put kraći od W, što je u suprotnosti sa izborom ovih puteva. Putevi U i V su parne dužine, pa sledi da su putevi $u-x$ i $w-x$ iste parnosti, odakle je $u \dots x \dots wu$ kontura neparne dužine. Kontradikcija. Sledi da je G bipartitan graf. $\square$

7.6 Zadaci za vežbu

(1) Ako je u grafu G stepen svakog čvora bar 3, onda G sadrži konturu parne dužine. Dokazati.

(2) Ako je u grafu G stepen svakog čvora bar 3, onda ne postoji ceo broj $d > 2$ takav da je dužina svake konture u G deljiva sa d. Dokazati.

(3) Dat je graf $G = P_4 + K_3$.

  (a) Odrediti poluprečnik, prečnik i centar grafa G.

  (b) Odrediti broj čvorova i broj grana grafa $L(G)$.

(4) Pronaći graf čiji je prečnik 13, a poluprečnik 8.

(5) Dokazati da je graf G sa n čvorova, u kome je stepen svakog čvora bar $\frac{n-1}{2}$ – povezan. Odrediti prečnik takvog grafa.

(6) U grafu G bez kontura dužine 3, svaka dva nesusedna čvora imaju tačno dva zajednička suseda. Dokazati da je graf G regularan.

(7) Odrediti maksimalan broj mostova u grafu sa $n \geq 2$ čvorova.

(8) Dokazati da kubni graf koji ima most, ima bar 10 čvorova.

(9) Dokazati da svaki povezani graf sa n čvorova i $n-1$ granom, $n \geq 3$ sadrži artikulacioni čvor.

(10) Dokazati da svaki povezan graf sa n čvorova i m grana, $3 \leq n \leq m$ sadrži konturnu granu.

(11) Dokazati da ako je v artikulacioni čvor povezanog grafa G, onda v nije artikulacioni čvor grafa $\overline{G}$.

(12) Dokazati da kubni graf ima artikulacioni čvor ako i samo ako ima most.

8 Stabla

A fool sees not the same tree that a wise man sees.

(William Blake, The Marriage of Heaven and Hell, "Proverbs of Hell")

Klasa grafova koja igra izuzetno važnu ulogu u računarskim naukama, jer se koristi u velikom broju algoritama, jesu *stabla*. Iskoristićemo ovaj prvi susret sa njima da otkrijemo neke njihove suštinske osobine, upoznamo se sa vrstama stabala koje se intenzivno koriste u računarstvu i naučimo kako da ih prebrojavamo.

8.1 O stablu u šumi

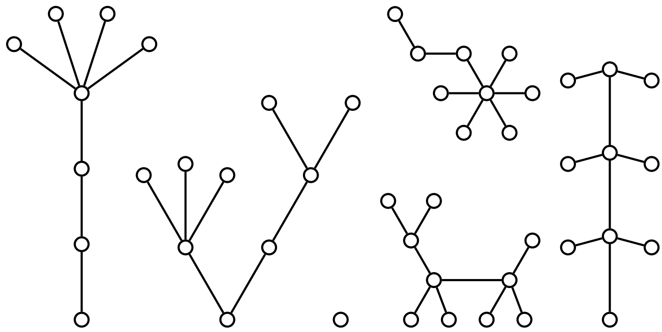
U prethodnom poglavlju smo konstantovali da svaki graf ima dve vrste grana: konturne i mostove. Brisanje konturne grane nije uticalo na povezanost grafa, dok brisanje mosta jeste. Pored toga, primetili smo da postoje i grafovi kod kojih je svaka grana most, ili, drugačije rečeno, grafovi koji nemaju konturnih grana, a samim tim ni kontura. Oni zaslužuju da im se posveti posebna pažnja.

Definicija 1. Za graf koji ne sadrži konture kažemo da je *acikličan*. Acikličan graf se naziva još i *šuma*. *Stablo* je povezana šuma, odnosno, povezan acikličan graf.

Primer 2. Na Slici 8.1 data je jedna šuma koja se sastoji od nekoliko stabala. Stabla su, dakle, komponente povezanosti šume i to su, ujedno, i najprostiji netrivijalni grafovi. $\triangle$

Zanimljivo je da povezan graf bez konture nije jedini sinonim za stablo. U sledećoj teoremi je sakupljeno nekoliko korisnih načina da opišemo stablo:

Teorema 3 (Karakterizacija stabala). *Neka je T graf sa n čvorova. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*



Slika 8.1: Šuma sa šest stabala

(1) T je stablo.

(2) T je acikličan i ima $n-1$ granu.

(3) T je povezan i ima $n-1$ granu.

(4) T je povezan i svaka njegova grana je most.

(5) Svaka dva čvora u T su povezana tačno jednim putem.

(6) T nema kontura, ali dodavanjem bilo koje nove grane dobija se graf sa tačno jednom konturom.

Dokaz. Umesto da pokazujemo ekvivalenciju svake dve od iznesenih tvrdnji, iskoristićemo činjenicu da se svaka ekvivalencija sastoji od dve implikacije i pokazaćemo

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (6) \implies (1),$$

pomoću matematičke indukcije po broju čvorova n:

BI. Za $n = 1$ tvrđenje je trivijalno tačno.

IH. Neka tvrđenje važi za sve grafove sa manje od n čvorova.

IK. Neka je T graf sa n čvorova, gde je $n \geq 2$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : T je stablo, odnosno, povezan acikličan graf, pa je svaka grana most. Brisanjem proizvoljne grane e, T se „raspada" na dve komponente povezanosti, od kojih je svaka stablo sa manje od n čvorova, pa za njih važi induktivna hipoteza. To znači da jedna komponenta ima k čvorova i $k-1$ granu, dok druga ima $n-k$ čvorova i $n-k-1$ granu, pa sledi da T ima ukupno

$$k - 1 + n - k - 1 + 1 = n - 1 \text{ grana.}$$

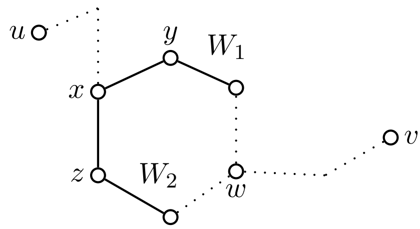
(2) $\Longrightarrow$ (3) : Pretpostavimo da T nije povezan. Tada je svaka njegova komponenta povezanosti stablo, tj. komponente povezanosti $T_1, T_2, \ldots, T_k$ imaju redom $n_1-1, n_2-1, \ldots, n_k-1$ grana, $k \geq 2$. Sledi da T ima ukupno

$$n_1 - 1 + n_2 - 1 + \cdots + n_k - 1 = n - k \leq n - 2 \text{ grana.}$$

Time dolazimo u kontradikciju sa činjenicom da T ima $n-1$ granu, pa T mora biti povezan graf.

(3) $\Longrightarrow$ (4) : Pretpostavimo da T ima granu koja nije most. Njenim brisanjem se dobija povezan graf sa n čvorova i $n-2$ grane, čime dolazimo u kontradikciju sa Tvrđenjem 11.

(4) $\Longrightarrow$ (5) : T je povezan, pa su svaka dva čvora povezana putem. Pokažimo da je taj put jedinstven. U tu svrhu, pretpostavimo suprotno, neka u T postoje čvorovi u i v povezani sa dva različita puta, označimo ih sa W_1 i W_2. Uočimo čvor x koji se nalazi na oba puta, takav da je put $u - x$ početni deo i puta W_1 i puta W_2 (Slika 8.2) i koji ima susede y i z takve da $y \in V(W_1) \setminus V(W_2)$, a $z \in V(W_2) \setminus V(W_1)$. Primetimo da takav čvor mora da postoji, s obzirom da su putevi različiti. Zatim uočimo čvor w takav da putevi $x - w$ (sadržan u W_1) i $x - w$ (sadržan u W_2) imaju zajedničke samo čvorove x i w. Tada ova dva puta obrazuju konturu u T, pa ne mogu sve grane biti mostovi. Kontradikcija.



Slika 8.2: Različiti putevi sa dva zajednička čvora

(5) $\implies$ (6) : Svaka dva čvora u T spojena su putem, pa dodavanjem grane između njih dobijamo konturu. Pokažimo da je ona i jedinstvena. Pretpostavimo suprotno, neka dodavanjem grane $e = uv$ u T nastaju dve različite konture, C_1 i C_2. Neka je $C_1 = uu_1u_2 \dots u_kvu$, a $C_2 = uv_1v_2 \dots v_lvu$, gde je $k \leq l$. Uočimo najmanje $i \in \{1, \dots, k\}$ takvo da je $u_i \neq v_i$ i najmanje $j > i$, takvo da je $u_j = v_s$, za neko $s > i$ (ako takvo ne postoji, onda uočimo v). Tada je

$$u_{i-1}u \dots u_jv_{s-1} \dots v_iv_{i-1}$$

kontura koja ne sadrži e, pa T ima konturu. Međutim, tada između u i v postoje dva različita puta. Kontradikcija.

(6) $\implies$ (1) : Pretpostavimo da je T nepovezan. Dodavanjem grane koja spaja čvorove iz različitih komponenti povezanosti ne dobijamo konturu, pa dolazimo u kontradikciju. Sledi da T mora biti povezan.

$\square$

Prethodna teorema ima zanimljive posledice koje nam ukazuju na dodatne osobine stabala.

Posledica 4. *U svakom stablu sa bar dva čvora postoje bar dva viseća čvora.*

Dokaz. Neka je T stablo sa n čvorova. Iz Prve teoreme teorije grafova imamo

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2n - 2.$$

Pretpostavimo da T ima najviše jedan viseći čvor. Tada je

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1,$$

čime smo došli u kontradikciju. □

Stabla sa tačno dva viseća čvora smo već upoznali — to su ništa drugo do lanci P_n. S druge strane, maksimalan broj visećih čvorova u stablu je $n-1$ i dostiže se u slučaju još jednog nama poznatog stabla — zvezde S_n. Čvorove stabla koji nisu viseći nazivamo *unutrašnjim* čvorovima stabla.

Bilo da je v viseći ili unutrašnji čvor stabla, jedno je sigurno: v se ne nalazi ni na jednoj konturi, jer ih stabla ne sadrže. Samim tim, stabla ne sadrže ni konture neparne dužine, pa zbog Teoreme 27 važi:

Posledica 5. *Svako netrivijalno stablo je bipartitan graf.*

Isti argument možemo primeniti i na šumu, pa njegovim kombinovanjem sa činjenicom da je svaka komponenta povezanosti šume stablo i da svako stablo ima jednu granu manje nego što ima čvorova dobijamo:

Posledica 6. *Svaka šuma sa $n \geq 2$ čvorova je bipartitan graf. Ako ima k komponenti, onda je broj grana u toj šumi jednak $n - k$.*

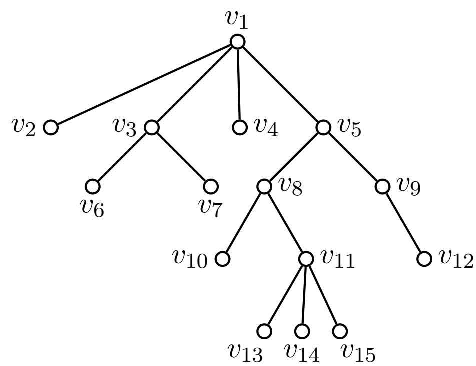
8.2 O stablima u računarstvu

Stabla imaju veoma široku primenu u računarstvu, jer se koriste u raznim algoritmima za pretraživanja, kao i generalno u situacijama u kojima je neophodno razmatranje neke hijerarhije. Ovakve primene zahtevaju i poseban pogled na stabla, pa se stoga u računarskim naukama najčešće govori o *korenskom*, *binarnom* i *pokrivajućem* stablu.

Definicija 7. *Korensko stablo* je stablo u kojem je jedan čvor posebno označen i naziva se *koren*, čime se uspostavlja određena orijentacija u stablu. Viseći čvorovi takvog stabla nazivaju se *listovi*.

Kao što je već nagovešteno u definiciji korenskog stabla, ovakav pogled na stablo uspostavlja hijerarhiju nad skupom čvorova i raspoređuje ih na nivoe. Ukoliko se pažljivom čitaocu ovo učini kao već viđeno, možemo mu samo potvrditi da je u pravu. Ovakvu konstrukciju smo već sreli u priči o iskaznoj logici, pa se prisetimo da je čvor direktno „iznad" posmatranog čvora u korenskom stablu njegov *roditelj*, dok su čvorovi koji se nalaze direktno „ispod" njegova *deca*. Pomenimo još i da su *preci* datog čvora svi oni čvorovi koji se nalaze na putu od njega do korena, dok su *potomci* ili *naslednici* svi čvorovi na putu od posmatranog čvora do listova. Primeri ovakvih konstrukcija u svakodnevnom životu su recimo porodična stabla, koja su ovde najverovatnije i poslužila kao inspiracija.

Primer 8. Na Slici 8.3 dat je primer jednog korenskog stabla. U ovom

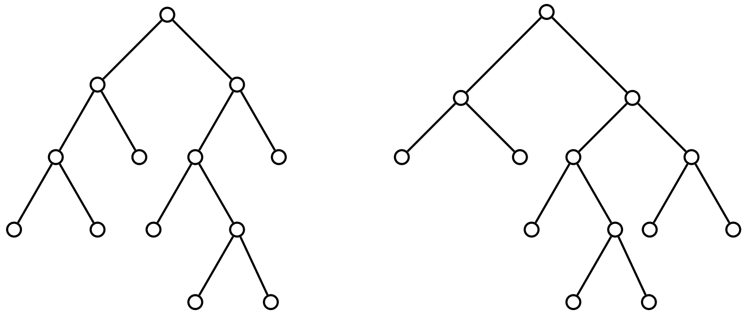


Slika 8.3: Primer korenskog stabla

slučaju koren je čvor v_1, listovi su $v_2, v_4, v_6, v_7, v_{10}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}$, dok su preostali čvorovi unutrašnji. △

Među svim korenskim stablima izdvajaju se binarna stabla.

Definicija 9. *Binarno stablo* je korensko stablo u kojem je tačno jedan čvor (koren) stepena 2, dok su ostali čvorovi stepena 1 ili 3.



Slika 8.4: Dva binarna stabla na skupu od 13 čvorova

Na Slici 8.4 predstavljena su dva binarna stabla, svako sa 13 čvorova.

Jasno je da svaki čvor koji nije list u binarnom stablu ima tačno dva deteta, pa razlikujemo levo i desno dete. Primetimo i da je broj čvorova u binarnom stablu uvek neparan broj, jer ima tačno jedan čvor parnog stepena, dok su svi ostali neparnog stepena, a takvih mora biti paran broj u grafu. Štaviše, zbog specifičnosti u ograničenju broja dece koje može imati čvor u binarnom stablu, u mogućnosti smo da precizno odredimo broj listova.

Tvrđenje 10. *Broj listova u binarnom stablu sa n čvorova jednak je $\frac{n+1}{2}$.*

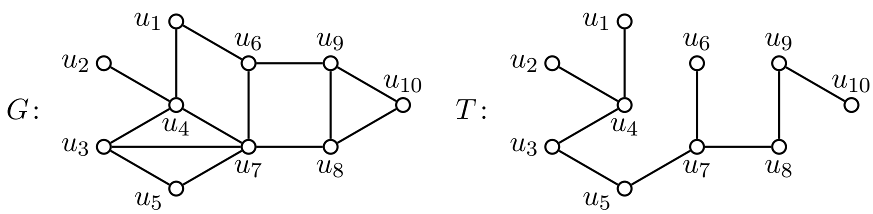
Dokaz. Neka je l broj listova u binarnom stablu T sa n čvorova. Iz Prve teoreme teorije grafova imamo

$$1 \cdot 2 + l \cdot 1 + (n-1-l) \cdot 3 = \sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2n-2,$$

odakle sledi da je $l = \frac{n+1}{2}$. $\square$

Za razliku od korenskog i binarnog stabla koji se vezuju za probleme koji zahtevaju postojanje uređenja, odnosno hijerarhije, pokrivajuća stabla su neizbežna u problemima pretraživanja.

Definicija 11. *Pokrivajuće stablo* je pokrivajući podgraf koji je stablo.



Slika 8.5: Graf i njegovo pokrivajuće stablo

Primer 12. Na Slici 8.5 dato je jedno pokrivajuće stablo T grafa G. $\triangle$

Drugim rečima, pokrivajuće stablo nekog grafa, ukoliko postoji, je njegov „kostur“. Ko su, dakle, kičmenjaci među grafovima, odnosno, koji grafovi imaju pokrivajuće stablo?

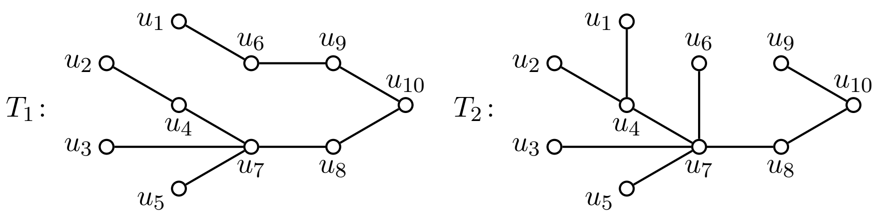
Tvrđenje 13. *Graf je povezan ako i samo ako ima pokrivajuće stablo.*

Dokaz. Neka je dat povezan graf G. Ako on ne sadrži konturu, onda je G stablo, pa je ujedno i pokrivajuće. U suprotnom, G sadrži konturu. Primetimo da brisanje jedne grane iz konture ne utiče na povezanost grafa dobijenog na ovaj način iz G, pa ovu operaciju ponavljamo sve dok ne dobijemo acikličan graf, što će se desiti posle konačno mnogo koraka. Na taj način smo konstruisali traženo pokrivajuće stablo.
Obrnuto, ukoliko graf ima pokrivajuće stablo, onda u njemu postoji jedinstveni put između svaka dva čvora, pa je povezan. $\square$

Primetimo i da graf može imati nekoliko različitih pokrivajućih stabala. Na Slici 8.6 data su još dva pokrivajuća stabla grafa G sa Slike 8.5.

8.3 O prebrojavanju i kodiranju stabala

Videli smo da je prebrojavanje označenih grafova za dati broj čvorova i grana zadatak koji nije nimalo težak ukoliko znamo najosnovnije iz kombinatorike. Međutim, da li je ovaj zadatak podjednako lak ako pokušamo



Slika 8.6: Pokrivajuće stablo nije jedinstveno

da prebrojimo označena stabla? Broj čvorova i broj grana nam je poznat iz prethodnog, ali tu je i dodatni uslov povezanosti (ili acikličnosti) koji nam može otežati rešavanje ovog problema. Da bismo stekli ideju o tome kako se razvija broj različitih označenih stabala porastom broja čvorova, pokušajmo da prebrojimo sva takva za „male“ skupove čvorova.

Primer 14. Prebrojaćemo označena stabla na skupovima čvorova veličine najviše 4:

- Na skupu $V = \{1\}$ imamo samo jedno označeno stablo K_1.
- Na skupu $V = \{1, 2\}$ imamo samo jedno označeno stablo K_2.
- Na skupu $V = \{1, 2, 3\}$ imamo tri označena stabla S_3.
- Na skupu $V = \{1, 2, 3, 4\}$ imamo šesnaest označenih stabala. Četiri dobijamo označavanjem zvezde S_4, a preostalih dvanaest označavanjem lanca P_4.

$\triangle$

Iako nam ovo ne daje odmah intuiciju da li se (i kako) može doći do formule za prebrojavanje, to ne znači da na ovo pitanje ne postoji odgovor. Štaviše, ispostavlja se da je to moguće učiniti i da je formula izuzetno jednostavne forme, ali i da se do nje dolazi uz izvesne poteškoće.

Teorema 15 (Cayley, 1889)**.** *Broj označenih stabala na skupu od n čvorova jednak je*

$$n^{n-2}.$$

Postoji nekoliko dokaza ove teoreme. Mi ćemo se u ovom tekstu skoncentrisati na Prüferov dokaz iz 1918. godine. Razlog leži u činjenici da je ovaj dokaz pre svega konstruktivne prirode, kao i da nam daje jedan veoma kompaktan način da stablo na jedinstven način „zapakujemo" u string, što može biti od koristi u radu sa stablima u računarskoj praksi.

Dokaz. Osnovna ideja dokaza je da se pokaže postojanje bijekcije između skupa svih označenih stabala na skupu od n čvorova i skupa svih nizova čvorova dužine $n-2$, kojih ima n^{n-2}. Time će oba ova skupa biti iste veličine, pa ćemo na taj način i dobiti traženi broj označenih stabala.

Neka je dat skup čvorova $V = \{1, 2, \dots, n\}$ i neka je T proizvoljno stablo sa ovim skupom čvorova. Definišimo preslikavanje f koje datom stablu dodeljuje niz dužine $n-2$ nad datom azbukom V na sledeći način:

Korak 1**:** U listi čvorova $1, 2, \dots, n$ nađemo prvi koji je viseći u $T = T_0$, izbrišemo ga iz stabla, odnosno, liste, čime smo dobili novo stablo T_1, a na prvo mesto u nizu upišemo čvor koji je njegov jedini sused. Obratimo pažnju na to da brisanje visećeg čvora podrazumeva i brisanje viseće grane.

Korak i**:** U listi dobijenoj u $(i-1)$-om koraku pronađemo prvi čvor koji je viseći u stablu T_{i-1}. Njega izbrišemo iz stabla i liste i dobijemo novu listu i stablo T_i, a na i-to mesto u nizu upišemo čvor koji je njegov jedini sused.

Ovaj postupak se završava u $(n-2)$-om koraku, u kojem dobijamo stablo T_{n-2} koje je izomorfno sa K_2 i niz dužine $n-2$. Na ovaj način smo stablu T jednoznačno pridružili niz dužine $n-2$. Dobijeni niz poznat je kao *Prüferov kôd* tog stabla.

Obrnuto, za svaki niz $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$ dužine $n-2$ nad azbukom V odgovarajuće stablo konstruišemo pomoću sledeće procedure rekonstrukcije:

Korak 1: Odredimo stepen svakog čvora iz skupa $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Stepen čvora i će biti broj pojavljivanja broja i u nizu $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-2})$ uvećan za 1 (grana koja ga vezuje za ostatak stabla u trenutku kad je viseći čvor). Formiramo niz stepena čvorova tako što na prvo mesto upišemo stepen čvora 1, na drugo stepen čvora 2 itd.

Korak 2: U nizu stepena čvorova uočimo prvi koji je jednak 1. Neka je to j-ti član niza. Nacrtamo granu jv_1. Smanjimo stepen j-tog člana i čvora v_1 za po 1.

Korak 3: Novodobijeni niz proglasimo za niz stepena čvorova.

Korak 4: Primenimo Korake 2 i 3 na sve članove niza $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-2})$.

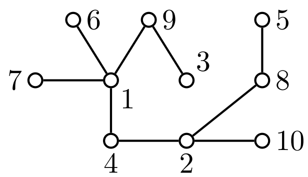
Na kraju nam preostanu još dva člana u nizu stepena čvorova koji su jednaki 1. Njihovim povezivanjem završava se proces rekonstrukcije.

Graf dobijen ovim postupkom je jedinstven za dati niz $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-2})$ i ima n čvorova, $n - 1$ granu i acikličan je, jer svaki put kad dodamo granu ili dodamo novi čvor ili povežemo dve komponente povezanosti. Zaključujemo da je u pitanju stablo.

S obzirom da smo konstruisali injektivno preslikavanje iz skupa označenih stabala na skupu od n čvorova u skup nizova dužine $n-2$ nad azbukom od n slova i obrnuto, sledi da između ova dva skupa postoji bijekcija, čime je dokaz završen. □

Ovu tehniku ćemo demonstrirati u sledećem primeru:

Primer 16. Dokaz prethodne teoreme nas uči tome kako da kodiramo dato označeno stablo sa n čvorova kao niz dužine $n-2$ i kako da izvršimo dekodiranje. Odredićemo prvo Prüferov kod stabla sa Slike 8.7.



Slika 8.7: Određivanje Prüferovog kôda označenog stabla

Najmanji viseći čvor je 3. Njega brišemo, a na prvo mesto u nizu koji konstruišemo upisujemo njegovog jedinog suseda — čvor 9. U novodobijenom stablu najmanji čvor je 5, njega brišemo i upisujemo 8 na drugo mesto u nizu, i nastavljamo sa ovim postupkom (Tabela 8.1) sve dok nam

čvor koji brišemo iz stabla	3	5	6	7	8	9	1	4
čvor koji upisujemo u niz	9	8	1	1	2	1	4	2

Tabela 8.1: Formiranje Prüferovog kôda

ne ostanu čvorovi 2 i 10 povezani granom. Time smo dobili traženi niz $(9, 8, 1, 1, 2, 1, 4, 2)$ dužine 8 i to je Prüferov kôd za dato stablo.

Iskoristimo sada ovaj niz da bismo rekonstruisali stablo. Prvo ćemo odrediti sve stepene čvorova u stablu po formuli broj pojavljivanja u kôdu uvećan za 1. Zatim vršimo izmene na ovom nizu stepena čvorova na način opisan u dokazu prethodne teoreme (Tabela 8.2, u poljima su opisane promene na stepenima čvorova pri prolasku kroz kôd, gde elementi kôda predstavljaju imena odgovarajućih kolona):

čvor	$\delta(v)$	9	8	1	1	2	1	4	2
1	4	4	4	3	2	2	1	0	0
2	3	3	3	3	3	2	2	2	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2	2	2	2	2	2	2	1	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0
8	2	2	1	1	1	0	0	0	0
9	2	1	1	1	1	1	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 8.2: Formiranje stabla

Pri crtanju stabla, u svakom koraku se dodaje grana između čvorova kod kojih je došlo do promene stepena u odnosu na prethodnu kolonu, što je označeno sivom bojom u tabeli. Prateći ovaj postupak, zaista ponovo dobijamo stablo prikazano na Slici 8.7, crtanjem, redom, grana $\{3,9\}$, $\{5,8\}$, $\{6,1\}$, $\{7,1\}$, $\{8,2\}$, $\{9,1\}$, $\{4,1\}$ i $\{4,2\}$. Na kraju nam preostaju tačno dva čvora stepena 1 i, kao poslednju, crtamo granu $\{2,10\}$. △

8.4 Zadaci za vežbu

(1) Svako stablo ima ili jedan centralni čvor ili dva centralna čvora koji su susedi. Dokazati.

(2) Naći sva neoznačena stabla sa $n = 7$ čvorova.

(3) Označimo sa n_1 broj visećih čvorova nekog stabla, a sa c broj čvorova stepena većeg od 2. Dokazati da ako to stablo ima bar dva čvora, onda je $n_1 \geq c + 2$.

(4) Dokazati da je niz prirodnih brojeva $d_1, d_2, \dots d_n$ niz stepena čvorova nekog stabla ako i samo ako je $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1)$.

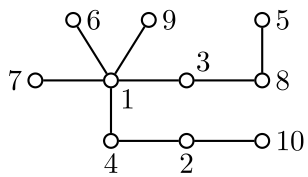
(5) Za koje sve prirodne brojeve $d > 1$ postoji stablo sa 2014 čvorova kod koga su svi čvorovi koji nisu viseći stepena d?

(6) Koliko ima poluregularnih stabala sa 17 čvorova?

(7) Neka je T stablo, $\Delta = \Delta(T)$ i f_k broj čvorova stepena k u tom stablu. Dokazati da je

$$f_1 = 2 + \sum_{k=3}^{\Delta} (k-2) f_k.$$

(8) a) Odrediti Prüferov kod stabla sa slike.



b) Naći stablo na skupu čvorova $V = \{0, \ldots, 8\}$ čiji je Prüferov kod $(7, 7, 2, 6, 2, 3, 8)$.

9 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Über sieben Brücken musst du geh'n
Sieben dunkle Jahre übersteh'n
Siebenmal wirst du die Asche sein
Aber einmal auch der helle Schein

(Helmut Richter, 1978)

Na kraju našeg kratkog obilaska najosnovnijih fenomena teorije grafova upoznaćemo se sa dve zanimljive klase grafova: jednu čine grafovi koje možemo nacrtati iz jednog poteza, ne dižući ruku sa papira, dok je u drugoj moguće pronaći rutu na kojoj se nalaze svi čvorovi grafa i svaki možemo posetiti tačno jednom pri obilasku te rute.

9.1 Leonhard Euler i problem mostova u Königsbergu

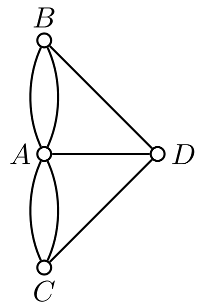
Početak ove priče ujedno je i početak teorije grafova. Godina je 1735. i nalazimo se u Königsbergu, gradu sa sedam mostova na reci Pregel (današnjem Kalinjingradu). Dva ostrva takođe pripadaju gradu, pa su mostovi izgrađeni tako da povezuju ili dve obale reke ili jednu od obala sa jednim od ostrva ili dva ostrva. Ako obale označimo sa B i C, a ostrva sa A i D, raspored mostova možemo prikazati pomoću Slike 9.1.

Omiljena zabava stanovnika grada u to vreme bila je šetnja preko gradskih mostova. Neko je postavio sledeći izazov:

Da li je moguće organizovati obilazak grada, tako da se preko svakog mosta pređe tačno jednom? Do ostrva je moguće stići samo preko mostova i svaki most se mora u potpunosti preći.

Mnogobrojni pokušaji se završavaju bezuspešno, ali stanovnici grada ne gube nadu i ne odustaju. Sve dok...

U gradu boravi i Leonhard Euler, koji razmatra malo ovaj problem i ubrzo dolazi do zaključka da ovakav obilazak ne postoji. To je trenutak rođenja teorije grafova. Doduše, da bi bila zvanično i prepoznata kao



Slika 9.1: Matematički model problema mostova u Königsbergu

posebna matematička oblast, proći će još dva veka — prvi udžbenik iz teorije grafova objavljen je tek 1936. godine, a autor je bio Dénes Kőnig.

U čast rešavača pomenutog problema, priželjkivana putanja je nazvana po njemu.

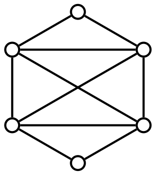
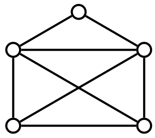
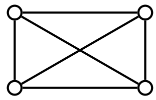
Definicija 1. Za stazu u povezanom grafu G kažemo da je *Eulerova staza*, ako svaka grana iz $E(G)$ pripada toj stazi. Za Eulerovu stazu u kojoj se početni i završni čvor poklapaju kažemo da je *zatvorena Eulerova staza*.
Graf je *polueulerov* ako sadrži Eulerovu stazu, a *Eulerov* ako sadrži zatvorenu Eulerovu stazu.

Definicija, kao i sva tvrđenja vezana za (polu)Eulerove grafove važe i u slučaju opštih grafova.

Primer 2. Na Slici 9.2 prikazano je nekoliko grafova.

Pri tome je graf G_1 Eulerov, G_2 je polueulerov, ali nije Eulerov, dok G_3 nije ni Eulerov ni polueulerov. △

Naravno, pronalaženje Eulerove staze, odnosno, pokazivanje da takva ne postoji u datom grafu može biti prilično zahtevno, pa se dajemo u potragu za nekim jednostavnijim testom. Ispostavlja se da Eulerove grafove uopšte nije teško prepoznati.

G_1:  G_2:  G_3: 

Slika 9.2: Grafovi i eulerovost

Teorema 3 (Karakterizacija Eulerovih grafova)**.** *Povezan graf je Eulerov ako i samo ako su mu svi čvorovi parnog stepena.*

Dokaz. Neka je G povezan Eulerov graf. Tada on ima zatvorenu Eulerovu stazu. Uočimo proizvoljan čvor u i krenemo po toj stazi. Na početku je stepen čvora u inicijalizovan na 1 dok su svi preostali čvorovi inicijalizovani na 0. Pri svakom „prolasku“ kroz neki čvor, njegov stepen se uveća za 2, a stepen čvora u se na kraju uveća za još 1. Kada završimo obilazak zatvorene Eulerove staze prošli smo sve grane tačno jednom i svi čvorovi su parnog stepena.

Obrnuto, neka je G graf sa svim čvorovima parnog stepena. Pokažimo da je G Eulerov graf indukcijom po broju grana m:

BI. Za $m = 3$ jedini povezan graf čiji su svi čvorovi parnog stepena je C_3 koji je očigledno Eulerov.

IH. Neka je svaki povezan graf čiji su svi čvorovi parnog stepena i ima manje od m grana Eulerov.

IK. Neka G ima m grana. Kako je G povezan i svi čvorovi parni, to je $\delta(G) \geq 2$, pa G ima konturu C. Posmatramo graf G' koji dobijamo iz G odstranjivanjem svih grana konture C. Tada svaka komponenta povezanosti grafa G' ima manje od m grana i svi čvorovi su i dalje parnog stepena, jer im je stepen ili ostao nepromenjen ili se smanjio za 2. Stoga iz induktivne hipoteze sledi da je svaka komponenta Eulerov graf. Zatvorena Eulerova staza u G se sada dobija na sledeći način: Uočimo čvor u konturi C i obilazimo konturu. Kada dođemo u čvor koji pripada nekoj komponenti grafa G' obiđemo tu komponentu po njenoj zatvorenoj Eulerovoj stazi i nastavimo obilazak do sledeće komponente. Postupak ponavljamo sve dok se ne vratimo u u.

$\square$

Teorema o karakterizaciji Eulerovih grafova za posledicu ima karakterizaciju polueulerovih grafova:

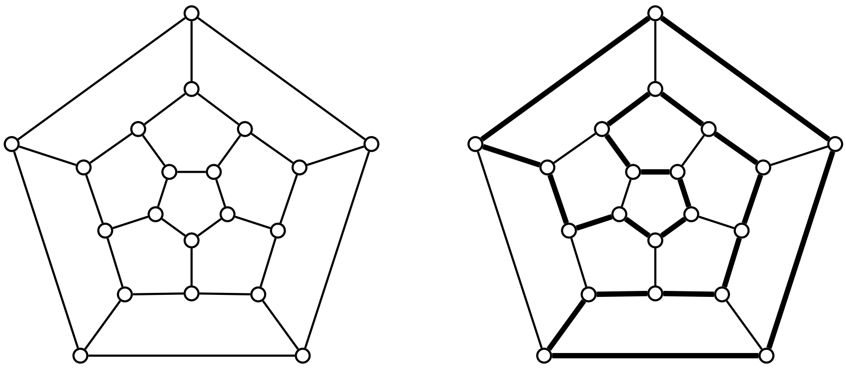
Posledica 4. *Povezan graf je polueulerov ako i samo ako ima najviše dva neparna čvora.*

Dokaz. Neka je povezan graf polueulerov. Tada on sadrži Eulerovu stazu. Ako je ta staza zatvorena, iz prethodne teoreme sledi da su svi čvorovi parnog stepena. U suprotnom, staza je otvorena, pa ćemo obilaskom kao u dokazu Teoreme 3, dobiti da su krajnji čvorovi ove staze neparnog, a svi unutrašnji parnog stepena.

Obrnuto, neka su najviše dva čvora povezanog grafa neparnog stepena. Ukoliko su svi parnog stepena, graf je Eulerov. Broj neparnih čvorova mora biti paran, pa sledi da posmatrani graf ima tačno dva neparna čvora, recimo u i v. Dodajmo u graf pomoćni čvor w i grane uw i vw. Time smo dobili graf čiji su svi čvorovi parni, pa je on Eulerov, a samim tim ima i zatvorenu Eulerovu stazu. Ta staza mora da sadrži grane uw i vw, jer su to jedine dve grane incidentne sa čvorom w. Brisanjem čvora w dobijamo otvorenu Eulerovu stazu početnog grafa, pa je on polueulerov. $\square$

9.2 Put oko sveta Williama Rowana Hamiltona

Stotinjak godina nakon što je Euler razrešio misteriju mostova grada Königsberga, jedna nova igra izazvala je šire interesovanje. William Rowan Hamilton je svetu ponudio 1857. godine sledeću zanimaciju: geometrijsko telo dodekaedar poslužilo je kao model zemaljske kugle, a njegova temena su igrala ulogu dvadeset gradova koje je trebalo obići na putu oko sveta. Pravila su bila jednostavna: igrač mora posetiti svaki od dvadeset gradova tačno jednom i završiti putovanje u gradu iz kojeg je krenuo na put. To čini pomoću jedne pantljike, koja se zakači za početno teme, a zatim obmota oko svakog temena kroz koje se prođe nakon toga i time se obeleži putanja. Postojala je i planarna verzija ove igre koja je zahtevala projekciju dodekaedra na ravan, koja je verovatno jednostavnija za razmatranje i proučavanje (Slika 9.3).



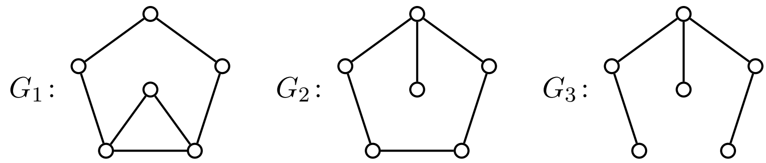
Slika 9.3: Hamiltonova igra i jedno njeno rešenje

Nama je iz ove perspektive jasno da gledamo ni u šta drugo do crtež jednog 3-regularnog grafa, a traženo rešenje problema je kontura koja sadrži sva temena grafa koji predstavlja dodekaedar.

Postavlja se pitanje da li je dodekaedar jedini primer grafa na kojem se ovakva igra može igrati ili možemo proširiti raznovrsnost polja za ovakvu igru. Kao što se da naslutiti, mogućnost izbora polja za ovakvu igru postoji i time je motivisana sledeća definicija:

Definicija 5. Za put u povezanom grafu G kažemo da je *Hamitonov put*, ako svaki čvor iz $V(G)$ pripada tom putu. Za Hamiltonov put u kojem se početni čvor poklapa sa završnim kažemo da je *Hamiltonova kontura*. Povezan graf je *poluhamiltonov* ako sadrži Hamiltonov put, a *Hamiltonov* ako sadrži Hamiltonovu konturu.

Primer 6. Na Slici 9.4 prikazano je nekoliko grafova.



Slika 9.4: Grafovi i hamiltonovost

Pri tome je graf G_1 Hamiltonov, G_2 je poluhamiltonov, ali nije Hamiltonov, dok G_3 nije ni Hamiltonov ni poluhamiltonov. $\triangle$

Ohrabreni razvojem događaja kod Eulerovih grafova, možemo se nadati da problem jednostavnog testiranja hamiltonovosti grafova možemo razrešiti na zadovoljavajući način, jer pronalaženje Hamiltonove konture za dati graf može biti neprijatan i zahtevan posao. Nažalost, situacija je ovde nešto drugačija.

Za razliku od Eulerovih grafova, Hamiltonovi grafovi još uvek nisu okarakterisani, u smislu da ne postoji kriterijum koji ih opisuje na koristan i operativan način. Dakle, u pitanju je jedan *otvoren problem.* Zbog toga ćemo se skoncentrisati na pronalaženje potrebnih i dovoljnih uslova da bi graf bio Hamiltonov.

Potreban uslov da bi graf bio Hamiltonov dat je u sledećem tvrđenju:

Tvrđenje 7. *Neka je G Hamiltonov graf i neka je $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$. Tada važi*

$$\mathrm{k}(G - S) \leq |S|.$$

Dokaz. Neka je C Hamiltonova kontura u grafu G. Kako su sve grane grafa $C - S$ ujedno i grane grafa $G - S$, $G - S$ potencijalno sadrži i neke dodatne grane, sledi da je $\mathrm{k}(C - S) \geq \mathrm{k}(G - S)$. S druge strane brisanjem čvorova skupa S iz konture C ne možemo dobiti graf koji će imati više od $|S|$ komponenti povezanosti, pa je $\mathrm{k}(C - S) \leq |S|$. Tvrđenje sada sledi iz dve ustanovljene nejednakosti. $\square$

Ispostavlja se da su Hamiltonovi grafovi dobro povezani i da nemaju slabih karika:

Posledica 8. *Hamiltonov graf nema mostove ni artikulacione čvorove.*

Dokaz. Pretpostavimo da G ima artikulacioni čvor v. Tada $G - v$ ima bar dve komponente povezanosti. S druge strane, iz prethodnog tvrđenja je $\mathrm{k}(G - v) \leq |\{v\}| = 1$, čime dolazimo do kontradikcije, pa G ne može imati artikulacioni čvor.

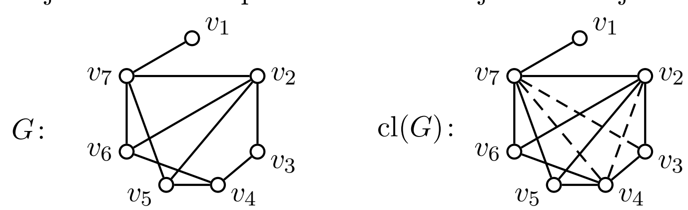
Pretpostavimo da G ima most e. Tada je $G - e$ nepovezan. S druge strane, e ne pripada Hamiltonovoj konturi, pa je $G - e$ i dalje povezan. Kontradikcija. Sledi da G ne može imati ni most. $\square$

Drugim rečima, ako u grafu konstatujemo prisustvo mostova ili artikulacionih čvorova, možemo biti sigurni da se ne radi o Hamiltonovom grafu.

Što se tiče dovoljnih uslova, na raspolaganju nam je nekoliko rezultata. Prvi od njih jeste istovremeno i potreban, ali je operativno upotrebljiv samo u vrlo specijalnim slučajevima, pa mu ne možemo pridavati veliku važnost kao potrebnom uslovu — njegova vrednost je više teoretska nego praktična. Da bismo formulisali ovaj rezultat, moramo se upoznati sa jednim novim operatorom na grafovima.

Definicija 9. *Zatvorenje* $\mathrm{cl}(G)$ grafa G je graf koji se dobija od G dodavanjem grana između nesusednih čvorova čiji je zbir stepena bar $|V(G)|$, sve dok je to moguće.

Primer 10. Na Slici 9.5 prikazani su graf G i njegovo zatvorenje $\mathrm{cl}(G)$. Grane koje su dodate u procesu konstrukcije zatvorenja označene su is-



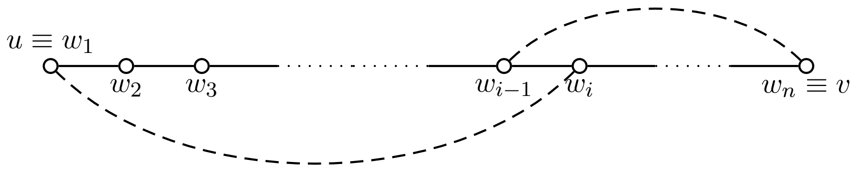
Slika 9.5: Graf i njegovo zatvorenje

prekidanom linijom. $\triangle$

Teorema 11 (Bondy, Chvátal 1972)**.** *Graf je Hamiltonov ako i samo ako je njegovo zatvorenje Hamiltonov graf.*

Dokaz. Ako je graf G Hamiltonov, onda sadrži Hamiltonovu konturu, koju onda sadrži i njegovo zatvorenje, pa je time i $\mathrm{cl}(G)$ Hamiltonov.

Obrnuto, neka je $\mathrm{cl}(G)$ Hamiltonov. Pretpostavimo da G nije Hamiltonov. Neka je $G = G_0, G_1, \ldots, G_k = \mathrm{cl}(G)$ niz grafova koji se dobijaju rekurzivnim dodavanjem grana u konstrukciji zatvorenja. Tada postoji $i \in \{0, 1 \ldots k\}$, takvo da G_i nije, a $G_{i+1} = G_i + uv$ jeste Hamiltonov graf. Tada su u i v nesusedni u G_i i $\delta_{G_i}(u) + \delta_{G_i}(v) \geq n$. Osim toga, svaka Hamiltonova kontura C u G_{i+1} sadrži granu uv, a $C - uv$ je Hamiltonov put u G_i ($C - uv = uw_2 \ldots w_{n-1}v$, Slika 9.6)



Slika 9.6: Hamiltonov put i Hamiltonova kontura u G_i

Primetimo da ako je čvor u G_i susedan sa čvorom w_i, onda v nije susedan sa w_{i-1}. Da bismo se uverili u tačnost ove tvrdnje, pretpostavimo da je susedan. Tada G_i ima Hamiltonovu konturu $u \ldots w_i \ldots v \ldots w_{i-1} \ldots u$. Odavde sledi da, ako je $\delta_{G_i}(u) = k$, onda je $\delta_{G_i}(v) \leq n - k - 1$, pa je $\delta_{G_i}(u) + \delta_{G_i}(v) \leq k + n - k - 1 = n - 1$, što je u suprotnosti sa $\delta_{G_i}(u) + \delta_{G_i}(v) \geq n$. Zaključujemo da G mora biti Hamiltonov. $\square$

Kao što vidimo hamiltonovost nekog grafa zavisi od hamiltonovosti grafa koji ima još više grana, pa se očekuje da je istu osobinu po pravilu još teže proveriti. Ovo pravilo ipak ima jedan izuzetak — odgovor je jednostavan ukoliko je $\mathrm{cl}(G)$ potpun graf, budući da su ovakvi grafovi Hamiltonovi.

Naredna dva rezultata, iako dobijena nezavisno i pre gore navedene teoreme, mogu se posmatrati i dobiti kao njene posledice:

Posledica 12 (Ore 1960)**.** *Neka je G graf sa n čvorova, $n \geq 3$, takav da za svaka dva nesusedna čvora u i v iz $V(G)$ važi*

$$\delta(u) + \delta(v) \geq n.$$

Tada je G Hamiltonov.

Dokaz. Ako za svaka dva nesusedna čvora u i v grafa G važi $\delta(u)+\delta(v) \geq n$, onda je $\mathrm{cl}(G) \cong K_n$. Kako je K_n uvek Hamiltonov, za $n \geq 3$, tvrđenje sledi iz prethodne teoreme. □

Posledica 13 (Dirac 1952)**.** *Neka je G graf sa n čvorova, $n \geq 3$, takav da za svaki čvor u iz $V(G)$ važi*

$$\delta(u) \geq \frac{n}{2}.$$

Tada je G Hamiltonov.

Dokaz. Neka su u i v proizvoljni nesusedni čvorovi u G. Tada je

$$\delta(u) + \delta(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n,$$

pa tvrđenje sledi iz Posledice 12. □

9.3 Zadaci za vežbu

(1) U današnjem Kalinjingradu postoje još dva dodatna mosta, jedan između obala B i C, i jedan između obale B i ostrva D. Da li je sada moguće trasirati put preko svih mostova, tako da svaki bude pređen samo jednom?

(2) (a) Da li postoji regularan Eulerov graf sa parnim brojem čvorova i neparnim brojem grana?

(b) Da li postoji Eulerov graf sa parnim brojem čvorova i neparnim brojem grana?

(3) Povezan graf je Eulerov ako i samo ako se skup njegovih grana može razbiti na disjunktne (po granama) konture. Dokazati.

(4) Ispitati da li se povezan graf sa $2k$ neparnih čvorova može se razložiti na k staza.

(5) Dokazati da je $K_{n,2n,3n}$ Hamiltonov za svako pozitivno n, a da $K_{n,2n,3n+1}$ nije Hamiltonov ni za jedno pozitivno n.

(6) Da li je Petersenov graf Hamiltonov? Obrazložiti odgovor.

(7) Neka je G regularan graf, takav da je $\bar{G}$ nepovezan. Dokazati da je G Hamiltonov.

(8) Ako je broj grana grafa G sa n čvorova $m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$, tada graf G ima Hamiltonovu konturu. Dokazati.

(9) Ako je G Eulerov graf, onda je $L(G)$

   (a) Eulerov;

   (b) Hamiltonov.

   Dokazati.

Literatura

[1] Cameron P. J., *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge 1994

[2] Cameron P. J., *Sets, logics and combinatorics*, Springer 1999

[3] Chartrand G., Lesniak L., *Graphs & Digraphs*, 3rd Ed., Chapman & Hall, London 1996

[4] Diestel R., *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin 2017

[5] Ebbinghaus H. D., *Einführung in die Mengenlehre*, Spektrum Akademischer Verlag Berlin Heidelberg 2003

[6] Van Lint J. H., Wilson R. M., *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge 1993

[7] Mašulović D., *Odabrane teme diskretne matematike*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2007

[8] Mašulović D., *Diskretna matematika za infomatičare 1*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2014

[9] Matoušek J., Nešetril J., *Invitation to Discrete Mathematics with proof*, Oxford University Press, 2008.

[10] Pöschel, R., Kalužnin L., *Funktionen- und Relationenalgebren*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979; Birkhäuser Verlag Basel, Math. Reihe Bd. 67, 1979

[11] Teschl G., Teschl S., *Mathematik für Informatiker*, eXamen.press, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006, 2007

[12] Truss J. K. *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, Addison Wesley Longman Limited, 1999

[13] West D. B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall 2001