Finansijska matematika 1

Zbirka zadataka

Prvo izdanje

Goran Radojev
Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Naziv zbirke zadataka: Finansijska matematika 1

Autor: dr Goran Radojev, docent Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Recezenti: dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

dr Sanja Rapajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

dr Mirjana Brdar, docent Tehnološkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Izdavač: Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu

Za izdavača: prof. dr Milica Pavkov Hrvojević, dekan Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, broj 0602-07-369/21-11 od 18.11.2021. godine, odobreno je štampanje i upotreba ove zbirke zadataka.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

51-7:33(075.8)(076)

РАДОЈЕВ, Горан, 1979-
Finansijska matematika 1 [Elektronski izvor] : zbirka zadataka / Goran Radojev. - 1. izd. - Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet, 2021

Način pristupa (URL):
https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/radojev_finansijska_matematika_1_zbirka.pdf. - Opis zasnovan na stanju na dan 2.12.2021. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-480-1

а) Финансијска математика - Задаци

COBISS.SR-ID 52648713

Predgovor

Ova zbirka zadataka je pisana, pre svega, za studente matematike koji slušaju kurs Finansijska matematika 1, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Nastala je na osnovu višegodišnjeg nastavnog iskustva u držanju vežbi i predavanja na promenutom predmetu. Zbirka može da bude od koristi svima onima koji žele da se upoznaju sa osnovama finansijske matematike. Za razumevanje ovog kursa neophodno je srednjoškolsko poznavanje matematike (elementarne funkcije, nizovi, diferencijalni i integralni račun).

Zahvaljujem se recezentima prof. dr Nataši Krejić, prof. dr Sanji Rapajić i doc. dr Mirjani Brdar na svim primedbama i sugestijama, koje su ovu zbirku zadataka učinile kvalitetnijom.

Uvod

Zbirka je podeljena u 6 glava. Osnovni teorijski pojmovi su dati na početku svakog poglavlja, da bi čitalac mogao lakše da razume pojmove i formule koje se koriste, nakon toga, u zadacima.

U prvih 5 glava obrađujemo detaljno sve zadatke. U prvoj glavi rešavamo probleme koji zahtevaju osnovno poznavanje razmere, proporcije i procentnog računa, a bavimo se i prostim i složenim kamatnim računom. Drugi deo zbirke je najobimniji i bavi se novčanim tokovima. U glavama 3 i 5 razmatramo dve vrste hartija od vrednosti: obveznice i opcije. Četvrta glava je rezervisana za funkcije u ekonomiji. Poslednja glava sadrži zadatke izabranih ispitnih rokova u periodu od školske 2014/2015. do 2020/2021. godine. Ovi zadaci nisu rešeni i predstavljaju odličnu vežbu i pripremu studenata za ispit.

Računi u zadacima u prve tri glave su uglavnom urađeni u Excel-u, sa većom preciznošću nego što je prikazan najveći broj rezultata (rezultati u zbirci su dati uglavnom na dve decimale). U šestoj glavi je korišćen i programski paket Wolfram Mathematica. Čitaocima je neophodno samo elementarno znanje i Excel-a i Wolfram Mathematica-e, da bi mogli da isprate sve naredbe i funkcije koje su korišćene u ovoj zbirci.

Sadržaj

Glava 1

Kamatni račun

1.1 Razmera i proporcija

Zadatak 1.1 *Tri grupe radnika su ubrale redom 500 kg, 727 kg i 486 kg malina, tokom jednog dana. Za ovaj posao je ukupno plaćeno 85.650 RSD. Ako je novac podeljen svakoj grupi radnika srazmerno količini koju su ubrali, naći koliko novca je svaka grupa radnika zaradila.*

Rešenje. Sumu od 85.650 RSD, treba podeliti u razmeri 500 : 727 : 486. Ukupno je ubrano

$$500 + 727 + 486 = 1.713 \text{ kg malina.}$$

Dakle, radnici će biti plaćeni

$$\frac{85.650}{1.713} = 50{,}00 \text{ RSD}$$

za ubrani kilogram. Posledično, prva grupa radnika je zaradila

$$500 \cdot 50 = 25.000{,}00 \text{ RSD},$$

druga grupa

$$727 \cdot 50 = 36.350{,}00 \text{ RSD},$$

dok je treća zaradila

$$486 \cdot 50 = 24.300{,}00 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.2 *U nekom preduzeću zaposleno je 63 radnika. Svaki radnik dobija koeficijent na osnovu radnog mesta na kom je zaposlen. Poznato je da:*

- *31 radnik ima koeficijent 1;*
- *13 radnika imaju koeficijent 1,22;*
- *10 radnika imaju koeficijent 1,6;*

- *7 radnika imaju koeficijent 1,72;*
- *2 radnika imaju koeficijent 1,9 i*
- *1 radnik ima koeficijent 2,13*

i da je u proteklom mesecu fond za zarade iznosio 3.500.000 RSD. Visine plata su proporcionalne koeficijentima koje radnici imaju. Naći kolike su pojedinačne plate isplaćene za taj mesec.

Rešenje. Iznos od 3.500.000 RSD treba podeliti u razmeri

$$\underbrace{1:1\ldots:1}_{31} : \underbrace{1{,}22 : 1,22\ldots:1{,}22}_{13}\ldots 1{,}9 : 1{,}9 : 2{,}13.$$

Zbir svih članova u razmeri je

$$31\cdot 1 + 13\cdot 1{,}22 + 10\cdot 1{,}6 + 7\cdot 1{,}72 + 2\cdot 1{,}9 + 2{,}13 = 80{,}83.$$

Dakle, redom će plate radnika (u grupama) biti:

Radnici	Plata
Koeficijent 1	$\frac{3.500.000}{80{,}83}\cdot 1{,}00 = 43.300{,}75$ RSD
Koeficijent 1,22	$\frac{3.500.000}{80{,}83}\cdot 1{,}22 = 52.826{,}92$ RSD
Koeficijent 1,6	$\frac{3.500.000}{80{,}83}\cdot 1{,}6 = 69.281{,}21$ RSD
Koeficijent 1,72	$\frac{3.500.000}{80{,}83}\cdot 1{,}72 = 74.477{,}30$ RSD
Koeficijent 1,9	$\frac{3.500.000}{80{,}83}\cdot 1{,}90 = 82.271{,}43$ RSD
Koeficijent 2,13	$\frac{3.500.000}{80{,}83}\cdot 2{,}13 = 92.230{,}61$ RSD

Zadatak 1.3 *Dve grupe radnika su zaradile 1.430.380 RSD. Ovu sumu treba razdeliti na ove dve grupe i to direktno srazmerno broju sati provedenog na poslu i vrednosti satnice. Prva grupa je radila 30 dana sa 15 radnika po 8 sati dnevno, dok je druga grupa radila 20 dana sa 30 radnika po 6 sati dnevno. Koliko je zaradila svaka grupa, ako je satnica druge grupe veća za* 10% *od satnice prve grupe?*

Rešenje. Datu sumu treba podeliti u odgovarajućoj razmeri, koja će uključiti broj radnika, broj radnih sati rada dnevno i broj radnih dana, ali i odnos satnice ove dve grupe radnika. Ukupan broj radnih sati koji je utrošila prva grupa radnika je

$$30\cdot 15\cdot 8 = 3600,$$

dok je druga grupa radila ukupno

$$20 \cdot 30 \cdot 7 = 4200$$

sati. Kako je satnica druge grupe za 10% veća od satnice prve grupe, ukupno zaradu treba podeliti u odnosu $(3600 \cdot 1) : (4200 \cdot 1{,}1)$, odnosno $3600 : 4620$. Dakle, prva grupa radnika dobija

$$\frac{1.430.380}{3.600 + 4.620} \cdot 3600 = 626.443{,}80 \text{ RSD},$$

dok druga grupa dobija

$$\frac{1.430.380}{3.600 + 4.620} \cdot 4620 = 803.936{,}20 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.4 *Neki posao 36 radnika može završiti za 48 dana. Posao je započet 1.1.2021, ali sa 24 radnika. Posle 18 dana na posao je došlo još 30 radnika. Kog datuma će posao biti završen?*

Rešenje. Prvo ćemo izračunati za koliko dana 24 radnika može da završi ceo posao. Označimo taj broj sa x. Sa smanjenjem broja radnika, povećaće se broj dana za koji će posao biti završen, odnosno ovde je reč o obrnutoj proporciji, tj. važi

$$36 : 24 = x : 48,$$

pa je

$$x = \frac{48 \cdot 36}{24} = 72.$$

Dakle, 24 radnika će ovaj posao završiti za 72 dana. Oni su taj posao radili 18 dana, pa je nakon tog vremena njima preostalo posla za $72 - 18 = 54$ dana. Preostali deo posla završava $24 + 30 = 54$ radnika. Ako je y broj dana za završetak ovog dela posla, onda je

$$24 : 54 = y : 54,$$

pa je

$$y = \frac{54 \cdot 24}{54} = 24.$$

Kako je posao završen za $18 + 24 = 42$ dana, a započet je 1.1.2021, dobijamo je da je završen 11.2.2021.

Zadatak 1.5 *Dana 24.2.2021. (srednji) kurs dinara prema pojedinim stranim valutama dat je u sledećoj tabeli*

Država	*Valuta*	*Paritet*	*Oznaka*	*Kurs*
Japan	*Jen*	*100*	*JPY*	*91,6932*
Velika Britanija	*Funta*	*1*	*GBP*	*136,9949*
SAD	*Dolar*	*1*	*USD*	*96,7885*
EU	*Evro*	*1*	*EUR*	*117,5690*

Odrediti kurs evra u odnosu na ostale valute dana 24.2.2021.

Rešenje. Paritet x znači da je kurs dat za x jedinica neke valute, pa je

$$1 \ \ \mathrm{EUR} = \frac{117{,}5690}{\frac{91{,}6932}{100}} = 128{,}2200 \ \mathrm{JPY},$$
$$1 \ \ \mathrm{EUR} = \frac{117{,}5690}{136{,}9949} = 0{,}8582 \ \mathrm{GBP},$$
$$1 \ \ \mathrm{EUR} = \frac{117{,}5690}{96{,}7885} = 1{,}2147 \ \mathrm{USD}.$$

1.2 Procentni račun

Trgovački rabat se određuje na osnovu prodajne cene artikla:

- iskazuje se kao procenat prodajne cene (r_r);
- nabavna cena artikla (N) = prodajna cena (P) − iznos rabata.

Marža se obračunava na nabavnu cenu artikla:

- iskazuje se kao procenat nabavne cene (r_m);
- prodajna cena artikla (P) = nabavna cena (N) + iznos marže.

Zadatak 1.6 *Automobil se prodaje po ceni od 18.500 EUR. Ako je trgovački rabat 20%, odrediti nabavnu cenu.*

Rešenje. Lako dobijamo nabavnu cenu

$$N = P(1 - r_r) = 18.500(1 - 20\%) = 14.800{,}00 \ \mathrm{EUR}.$$

Zadatak 1.7 *Nabavna cena letnje automobilske gume 205/60 R16, koja se uvozi, je 82,25 EUR. Ako je marža 18%, naći prodajnu cenu ove automobilske gume u RSD, ako se računa kurs po kome 1 EUR vredi 117,82 RSD.*

Rešenje. Odredimo prvo prodajnu cenu u evrima

$$P = N(1 + r_m) = 82{,}25(1 + 18\%) = 97{,}06 \ \mathrm{EUR},$$

a potom i u dinarima

$$P = 97{,}06 \cdot 117{,}82 = 11.435{,}02 \ \mathrm{RSD}.$$

Zadatak 1.8 *Prodavnica nameštaja odobrava popust od 12% za gotovinsko plaćanje ako se kupi nameštaj u vrednosti većoj od 100.000 RSD. Ukoliko želite da kupite trosed i dve fotelje u vrednosti od 135.000 RSD i da iskoristite gotovinski popust, koliko ćete zaista platiti?*

Rešenje. Kako je ukupna cena kupljenog nameštaja veća od 100.000, ostvarićete popust od 12%, pa ćete platiti

$$135.000 - 12\% \cdot 135.000 = 135.000(1 - 12\%) = 118.800{,}00 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.9 *Posle dva poskupljenja po stopama od 4,5% i 5,5% i jednog pojeftinjenja po stopi od* 3%, *cena veš mašine iznosi 42.650 RSD. Po kojoj stopi još treba promeniti poslednju cenu, da bi se dobilo ukupno povećanje cene od 4%?*

Rešenje. Označimo sa C_0 početnu cenu veš mašine, a sa C_i, cenu posle i-te promene, $i = 1, 2, 3, 4$. Tada je

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + 4{,}5\% C_0 = (1 + 4{,}5\%)C_0 \\
C_2 &= (1 + 5{,}5\%)C_1 = (1 + 4,5\%)(1 + 5{,}5\%)C_0 \\
C_3 &= (1 - 3\%)C_2 = (1 + 4,5\%)(1 + 5{,}5\%)(1 - 3\%)C_0.
\end{aligned}$$

Kako je $C_3 = 42.650$ RSD, lako dobijamo i

$$C_0 = \frac{C_3}{(1 + 4,5\%)(1 + 5{,}5\%)(1 - 3\%)} = 39.882{,}15 \text{ RSD}.$$

Ukupna promena cene treba da bude 4%, pa je

$$C_4 = (1 + 4\%)C_0 = 41.477{,}43 \text{ RSD}.$$

Ako sa r označimo poslednju promenu cene, onda je $C_4 = (1 + r)C_3$, pa je

$$r = \frac{C_4}{C_3} - 1 = \frac{41.477{,}43}{42.650{,}00} - 1 = -2{,}75\%.$$

Dakle, poslednju cenu C_3 treba smanjiti za 2,75%, kako bi ukupno povećanje iznosilo 4%.

1.3 Prost kamatni račun

Neka je:

$$\begin{aligned}
A(0) &\quad \text{– glavnica,} \\
r &\quad \text{– godišnja kamatna stopa,} \\
t &\quad \text{– broj godina,} \\
I = rtA(0) &\quad \text{– kamata tokom } t \text{ godina,} \\
A(T) &\quad \text{– ukamaćena vrednost.}
\end{aligned}$$

Tada se ukamaćena vrednost računa po formuli

$$A(T) = A(0) + I = A(0)(1 + rt).$$

Tačna prosta kamata se obračunava na bazi 365 dana u godini (366 u prestupnim godinama):

$$t = \frac{\text{broj dana}}{365} \quad \text{ili} \quad t = \frac{\text{broj dana}}{366}.$$

Obična prosta kamata se obračunava na bazi godine sa 360 dana

$$t = \frac{\text{broj dana}}{360}.$$

Bankarsko pravilo = obična prosta kamata sa tačnim brojem dana.

Menica je hartija od vrednosti i ona se potpisuje na ukamaćenu vrednost $A(T)$. Bitni elementi menice su:

- nominalni iznos menice – iznos na koji glasi menica,
- datum dospeća menice – dan kada poverilac prima nominalni iznos,
- rok dospeća menice – vremenski interval do datuma dospeća.

Eskontovati menicu znači kupiti menicu (pre roka dospeća).

Uvedimo i sledeće oznake:

t – period od dana izračunavanja vrednosti duga do datuma dospeća,
$A(T)$ – nominalni iznos menice,
$A(t_1)$ – sadašnja vrednost duga.

Tada je

$$A(T) = A(t_1)(1 + rt), \qquad A(t_1) = \frac{A(T)}{1 + rt}.$$

Zadatak 1.10 *Menica nominalne vrednosti 160.000 RSD koja dospeva 24.12.2021. eskontovana je u Novom Sadu 6.2.2021. sa 15% godišnje kamatne stope. Odrediti eskontovanu cenu menice po bankarskom pravilu.*

Rešenje. Nominalna vrednost ove menice je $A(T) = 160.000$, dok je $r = 15\%$. Broj dana do dospeća menice možemo lako dobiti u Excel-u, oduzimanjem dva data datuma (slika 1.1). Kod ove razlike, samo jedan od krajnjih datuma se računa, što je nama i potrebno, jer se na dan dospeća menice ne obračunava kamata.

12	A(T)	160.000,00 RSD
13	r	15%
14		6.2.2021
15		24.12.2021
16	Broj dana	=B15-B14
17	t	0,89

12	A(T)	160.000,00 RSD
13	r	15%
14		6.2.2021
15		24.12.2021
16	Broj dana	321
17	t	0,89

Slika 1.1: Broj dana između dva datuma

Dakle, ukupan broj dana između 6.2.2021. i 24.12.2021. je 321, pa je

$$t = \frac{321}{360} = 0{,}89$$

(delimo sa 360, jer se primenjuje bankarsko pravilo). Dalje, lako dobijamo i eskontovanu vrednost menice

$$A(t) = \frac{A(T)}{1+rt} = \frac{160.000}{1+15\% \cdot 0{,}89} = 141.124{,}59 \text{ RSD.}$$

Zadatak 1.11 *Odrediti nominalnu vrednost menice koja dospeva 25.9.2021. ako je njena eskontovana cena na dan 12.3.2021. bila 400.000 RSD. Kamatna stopa je 10% na godišnjem nivou.*

Rešenje. Dato je $A(t) = 400.000$ i $r = 10\%$, a lako dobijamo i da u periodu od 12.3.2021. do 25.9.2021. ima ukupno 197 dana, pa je

$$t = \frac{197}{365} = 0{,}54.$$

Sada je nominalna vrednost menice

$$A(T) = A(t)(1+rt) = 400.000(1+10\% \cdot 0{,}54) = 428.065{,}75 \text{ RSD.}$$

Zadatak 1.12 *Sa kojom godišnjom kamatnom stopom je eskontovana menica od 250.000 RSD, sa datumom dospeća 17.10.2020, ako je na dan eskontovanja 1.2.2020. isplaćeno 230.000 RSD?*

Rešenje. U ovom zadatku su dati: $A(T) = 250.000$, $A(t) = 230.000$ i datumi eskontovanja i dospeća. Broj dana do dospeća menice je 259, pa dobijamo da je

$$t = \frac{259}{366} = 0{,}71,$$

jer je 2020. prestupna godina, pa ima 366 dana.
Dalje je

$$r = \frac{\frac{A(T)}{A(0)}}{t} - 1 = \frac{\frac{250.000}{230.000}}{0{,}71} - 1 = 12{,}29\%.$$

Zadatak 1.13 *Kada dospeva menica čija je nominalna vrednost 295.000 RSD, ako je na dan 14.1.2021. njena eskontovana cena bila 280.000 RSD, uz godišnju kamatnu stopu 15% ?*

Rešenje. Poznate su nam nominalna i eskontovana vrednost menice: $A(T) = 295.000$ i $A(t) = 280.000$ i kamatna stopa $r = 15\%$. Vreme do dospeća menica je

$$t = \frac{\frac{A(T)}{A(0)} - 1}{r} = \frac{\frac{295.000}{280.000}}{15\%} = 0{,}36.$$

Kako je $t = \frac{x}{365}$, gde je x broj dana do dospeća menice, to je $x = t \cdot 365 = 130{,}36$. Ako zaokružimo taj broj dana na 130, onda datum dospeća dobijamo kada na dan eskontovanja 14.1.2021. dodamo 130. Dobijamo da je datum dospeća menice 24.5.2021.

Zadatak 1.14 *Menica nominalne vrednosti 150.000 RSD dospeva 12.4.2021. Na dan dospeća dužnik, na ime dospelog duga, izdaje novu menicu nominalne vrednosti 110.000 RSD sa rokom dospeća 22.7.2021, a ostalo plaća. Odrediti koliko dužnik treba da plati 12.4.2021. ako se računa godišnja kamatna stopa od 10%.*

Rešenje. Označimo sa x iznos koji dužnik plaća 12.4.2021. Sadašnja vrednost menice koja se izdaje i iznosa x, jednaka je ukupno dospelom dugu od 150.000 dinara, tj.

$$A(t) + x = 150.000.$$

Znamo da je do dospeća te menice ostao 101 dan (od 12.4.2021. do 22.7.2021.), pa je

$$t = \frac{101}{365} = 0{,}28.$$

Sada lako dobijamo

$$A(t) = \frac{A(T)}{1 + rt} = \frac{110.000}{1 + 10\% \cdot 0{,}28} = 107.038{,}12 \text{ RSD}.$$

pa je

$$x = 150.000 - A(t) = 42.961{,}88 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.15 *Dužnik se dogovorio sa poveriocem da dug u iznosu od 100.000 RSD, koji treba da plati 27.1.2021, isplati menicama koje dospevaju za 50, 100 i 150 dana, s tim da je nominalna vrednost svake sledeće menice za 20% veća od nominalne vrednosti prethodne menice. Odrediti nominalne iznose menica, ako se obračunava godišnja kamatna stopa od 10%.*

Rešenje. Dug od 100.000 RSD mora biti jednak zbiru sadašnjih vrednosti ove tri menice. Neka je $A(T)$ nominalna vrednost prve menice. Tada je nominalna vrednost druge menice

$$A_2(T_2) = 1{,}2A(T),$$

a treće

$$A_3(T_3) = 1{,}2(1{,}2A(T)) = 1{,}44A(T),$$

pa je

$$100.000 = \frac{A(T)}{1+rt_1} + \frac{A_2(T_2)}{1+rt_2} + \frac{A_3(T_3)}{1+rt_3},$$

odnosno

$$100.000 = \frac{A(T)}{1+rt_1} + \frac{1{,}2A(T)}{1+rt_2} + \frac{1{,}44A(T)}{1+rt_3}, \tag{1.1}$$

gde je $r = 10\%$ i

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{50}{365} = 0{,}14, \\ t_2 &= \frac{100}{365} = 0{,}27, \\ t_3 &= \frac{150}{365} = 0{,}41. \end{aligned}$$

Dalje iz (1.1) dobijamo

$$100.000 = A(T)\left(\frac{1}{1+rt_1} + \frac{1{,}2}{1+rt_2} + \frac{1{,}44}{1+rt_3}\right),$$

odnosno

$$A(T) = \frac{100.000}{\dfrac{1}{1+rt_1} + \dfrac{1{,}2}{1+rt_2} + \dfrac{1{,}44}{1+rt_3}} = 28.267{,}40 \text{ RSD},$$

pa su nominalne vrednosti druge i treće menice:

$$A_2(T_2) = 1{,}2A(T) = 33.920{,}88 \text{ RSD}$$

i

$$A_3(T_3) = 1{,}44A(T) = 40.705{,}05 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.16 *Menica nominalne vrednosti 150.000 RSD dospeva 17.6.2021. Na dan dospeća dužnik izdaje, na ime duga, dve nove menice sa rokovima dospeća 13.11.2021. i 18.12.2021, pri čemu je nominalna vrednost druge menice za 20% manja od nominalne vrednosti prve. Odrediti nominalne vrednosti ovih menica ako se dug u potpunosti isplaćuje novim menicama i računa godišnja kamatna stopa 10%.*

Rešenje. Ako sa $A(T)$ označimo nominalnu vrednost prve menice, onda je nominalna vrednost druge menice $A_2(T_2) = 0{,}8A(T)$. Izračunajmo prvo vremena dospeća za obe menice. Broj dana između 17.6.2021. i 13.11.2021. je 149, pa je vreme dospeća za prvu menicu

$$t_1 = \frac{149}{365} = 0{,}41.$$

Period 17.6.2021 – 18.12.2021. sadrži 184 dana, pa je vreme dospeća za drugu menicu

$$t_2 = \frac{184}{365} = 0{,}50.$$

Kako je iznos duga (nominalna vrednost menice koja je dospela) jednak zbiru sadašnjih vrednosti novoizdatih menica, to je

$$150.000 = \frac{A(T)}{1+rt_1} + \frac{0{,}8A(T)}{1+rt_2},$$

odakle je

$$A(T) = \frac{150.000}{\dfrac{1}{1+rt_1} + \dfrac{0{,}8}{1+rt_2}} = \frac{150.000}{\dfrac{1}{1+10\% \cdot 0{,}41} + \dfrac{0{,}8}{1+10\% \cdot 0{,}50}} = 87.088{,}50 \text{ RSD}.$$

Nominalna vrednost druge menice je

$$A_2(T_2) = 0{,}8A(T) = 69.670{,}80 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.17 *Dužnik ima sledeće obaveze:*

A : *menicu nominalne vrednosti 13.200 RSD, datum dospeća 14.5.2022;*

B : *5.300 RSD pozajmljenih 15.6.2017. sa godišnjom kamatnom stopom 6,2%, datum dospeća 25.11.2020. godine;*

C : *menicu nominalne vrednosti 12.500 RSD, datum dospeća 16.2.2021. godine.*

Poverilac i dužnik su se dogovorili da 15.7.2020. isplati 5.500 RSD, a sve ostale obaveze jednom isplatom 16.6.2021. Izračunati vrednost isplate 16.6.2021. godine, ako se računa godišnja kamatna stopa 5% i bankarsko pravilo.

Rešenje. Da bismo mogli da izračunamo vrednost isplate na dan 16.6.2021, neophodno je da izračunamo vrednost svakog duga na taj dan.

A: Kako menica dospeva 14.5.2022, jasno je da će na dan 16.6.2021. njena vrednost biti izračunata kao eskontovana vrednost menice. Broj dana između 16.6.2021. i 14.5.2022. je 332, a kako se računa bankarsko pravilo, lako dobijamo i vreme do dospeća

$$t_A = \frac{332}{360} = 0{,}92.$$

Sadašnja vrednost ove menice je

$$A_A(t) = \frac{13.200}{1 + 5\% \cdot 0{,}92} = 12.618{,}16 \text{ RSD}.$$

B: prvo je neophodno izračunati ukamaćenu vrednost duga od $A_B(0) = 5.300$ RSD na dan dospeća duga, odnosno na dan 25.11.2020. Broj dana između 15.6.2017. i 25.11.2020. je 1.259, pa je

$$t_1 = \frac{1.259}{360} = 3{,}50.$$

Kako je ugovorena kamatna stopa za ovaj period $r_1 = 6{,}2\%$, to je

$$A_B(t_1) = 5.300(1 + 6{,}2\% \cdot 3{,}50) = 6.449{,}19 \text{ RSD}.$$

Ovo je vrednost duga na dan dospeća, prema prvobitnim uslovima. Kako je novi dogovor da se sva dugovanja, pa i ovo, vrati 16.6.2021, potrebno je sada na ovu vrednost obračunati kamatu za dati period, uz kamatnu stopu $r = 5\%$. Prvo ćemo izračunati vreme preostalo do dana izjednačavanja vrednosti, tj. vremenski period između 25.11.2020. i 16.6.2021.

$$t_2 = \frac{203}{360} = 0{,}56.$$

Vrednost duga B na dan 16.6.2021. je

$$A_B(t) = 6.449{,}19(1 + 5\% \cdot 0{,}56) = 6.631{,}02 \text{ RSD}.$$

C: Ova menica dospeva pre dana izjednačavanja vrednosti, pa je neophodno obračunati kamatu za period od 16.2.2021. do 16.6.2021, odnosno za vreme

$$t_C = \frac{120}{360} = 0{,}33.$$

Sada je

$$A_C(t) = 12.500(1 + 5\% \cdot 0{,}33) = 12.708{,}33 \text{ RSD}.$$

D: Označimo sa D poslednju obavezu – iznos koji treba platiti 15.7.2020. Izračunajmo sada ukamaćenu vrednost za D na dan 16.6.2021. Vreme do dospeća je

$$t_D = \frac{336}{360} = 0{,}93,$$

pa je

$$A_D(t) = 5.500(1 + 5\% \cdot 0{,}93) = 5.756{,}67 \text{ RSD}.$$

Konačno, ukupna vrednost isplate na dan 16.6.2021. je

$$A_A(t) + A_B(t) + A_C(t) - A_D(t) = 26.200{,}85 \text{ RSD}.$$

1.4 Složeni kamatni račun

Složena kamata je kamata koja se u jednom vremenskom periodu obračunava na iznos glavnice i na iznos kamate iz prethodnog vremenskog perioda.

Kapitalisanje je pripisivanje kamate glavnici (formiranje nove glavnice).

Koristićemo sledeće oznake:

$A(0)$ – glavnica,

r_a – godišnja kamatna stopa,

n – ukupan broj kapitalisanja,

$A(T)$ – ukamaćena vrednost

m – broj kapitalisanja godišnje,

$r = \frac{r_a}{m}$ – relativna kamatna stopa.

Ako je tokom perioda kamaćenja broj kapitalisanja ceo, onda se ukamaćena vrednost može izračunati kao

$$A(T) = A(0)(1 + r)^n.$$

Kada je potrebno izračunati kamatnu stopu za period koji je manji od perioda ka-pitalisanja, onda za taj period obračunavamo **konformnu kamatnu stopu**

$$r_k = \left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^{1/s} - 1,$$

gde je s broj perioda za koji obračunavamo kamatnu stopu, u jednom periodu kapitalisanja.

Kada je period za koji je potrebno izračunati kamatnu stopu veći od perioda kapitalisanja onda stopu za taj period dobijamo kao **efektivnu kamatnu stopu**

$$r_e = \left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^k - 1,$$

gde je k broj kapitalisanja u jednom periodu za koji obračunavamo kamatnu stopu.

Ako je period za koji treba izračunati kamatu manji od jednog perioda kapitalisanja, onda za taj period kamatu možemo obračunati pomoću konformne kamatne stope ili kao prostu kamatu, pa dobijamo dva moguća obračuna za periode kamaćenja, kod kojih nemamo samo cele periode kapitalisanja:

(i) **obračun kamate konformnim metodom**

Uvešćemo sledeće oznake:

s_b – broj dana koji prethodi prvom celom periodu kapitalisanja;

d_b – ukupan broj dana u periodu kapitalisanja kojem pripadaju dani označeni sa s_b;

s_a – broj dana koji sledi nakon poslednjeg celog perioda kapitalisanja;

d_a – ukupan broj dana u periodu kapitalisanja kojem pripadaju dani označeni sa s_a;

Ukamaćena vrednost, ako primenjujemo ovaj obračun, se dobija kao

$$A(T) = A(0)(1+r)^{s_a/d_a+n+s_b/d_b}.$$

(ii) **obračun kamate kombinacijom proste i složene kamate**

Neka su:

$t_b < 1$ – vremenski period koji prethodi prvom celom periodu kapitalisanja;

$t_a < 1$ – vremenski period od kraja poslednjeg celog perioda kapitalisanja do kraja transakcije.

Ukamaćena vrednost, ako primenjujemo ovaj obračun, se dobija kao

$$A(T) = A(0)(1+t_b r_a)(1+r)^n(1+t_a r_a).$$

Ukamaćena vrednost tokom vremena t za glavnicu $A(0)$, kamatnu stopu r_a i kontinuirano kapitalisanje je

$$A(t) = A(0)\mathrm{e}^{r_a t}.$$

Zadatak 1.18 *Ako je iznos od 250.000 RSD oročen na 5 godina sa nominalnom godišnjom kamatnom stopom od 7% i godišnjim kapitalisanjem, odrediti ukamaćenu vrednost.*

Rešenje. Glavnica je $A(0) = 250.000$, $r_a = 7\%$ i $m = 1$, dok je ukupan broj kapitalisanja u periodu kamaćenja $n = 5$, pa je ukamaćena vrednost

$$A(T) = 250.000\left(1+\frac{7\%}{1}\right)^5 = 350.637{,}93 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.19 *Ako ste 20.000 EUR oročili na 10 godina i ako ste nakon isteka tog perioda iz banke podigli 45.000 EUR, izračunati nominalnu godišnju kamatnu stopu. Banka kvartalno kapitališe.*

Rešenje. Glavnica je $A(0) = 20.000$, ukamaćena vrednost $A(T) = 45.000$ i $m = 4$ je broj kapitalisanja tokom jedne godine, dok je

$$n = 10 \cdot m = 40$$

ukupan broj kapitalisanja tokom čitavog perioda. Iz

$$A(T) = A(0)\left(1+\frac{r_a}{m}\right)^n$$

dobijamo da je

$$r_a = m\left(\sqrt[n]{\frac{A(T)}{A(0)}} - 1\right),$$

odnosno

$$r_a = 8{,}19\%.$$

Zadatak 1.20 *Za koje će se vreme bilo koji kapital udvostručiti, uz obračun 10% nominalne godišnje kamatne stope i pri kvartalnom kapitalisanju?*

Rešenje. Kako je $A(T) = 2A(0)$, to imamo da je

$$2A(0) = A(0)\left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^n,$$

odnosno

$$2 = \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^n.$$

Ako logaritmujemo obe strane prirodnim logaritmom, dobijamo da je

$$\ln 2 = n \ln\left(1 + \frac{10\%}{4}\right),$$

odnosno

$$n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{10\%}{4}\right)} = 28{,}07.$$

Pošto godišnje imamo 4 perioda kapitalisanja, dobijamo da je vreme potrebno da se kapital udvostuči jednako

$$\frac{28{,}07}{4} = 7{,}02,$$

odnosno malo više od 7 godina.

Zadatak 1.21 *Izračunati godišnju efektivnu kamatnu stopu, ako je nominalna godišnja kamatna stopa 12%, a kapitalisanje:*

a) *godišnje;*

b) *polugodišnje;*

c) *kvartalno;*

d) *mesečno;*

e) *dnevno.*

Rešenje. Traženu kamatnu stopu dobijamo iz

$$r_e = \left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^m - 1.$$

Dakle:

a) $r_e = \left(1 + \dfrac{12\%}{1}\right)^1 - 1 = 12{,}00\%;$

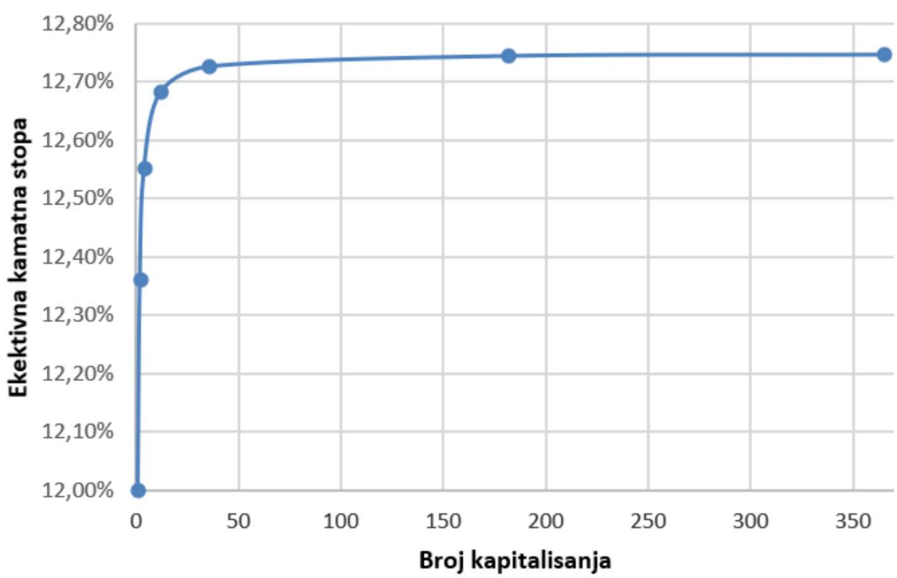
b) $r_e = \left(1 + \dfrac{12\%}{2}\right)^2 - 1 = 12{,}36\%;$

c) $r_e = \left(1 + \dfrac{12\%}{4}\right)^4 - 1 = 12{,}55\%;$

d) $r_e = \left(1 + \dfrac{12\%}{12}\right)^{12} - 1 = 12{,}68\%;$

e) $r_e = \left(1 + \dfrac{12\%}{365}\right)^{365} - 1 = 12{,}75\%.$

Grafik koji prikazuje promenu efektivne kamatne stope, u odnosu na promenu broja kapitalisanja prikazan je na slici 1.2.



Slika 1.2: Godišnja efektivna kamatna stopa

Zadatak 1.22 *Izračunati godišnju efektivnu kamatnu stopu, ako je nominalna godišnja kamatna stopa 12%, a kapitalisanje kontinuirano.*

Rešenje. Kada je kapitalisanje kontinuirano, to znači da broj kapitlisanja neograničeno raste, pa efektivnu kamatnu stopu dobijamo kao sledeću graničnu vrednost

$$r_e = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^m - 1 = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m/r_a}\right)^{m/r_a \cdot r_a} - 1 = e^{r_a} - 1.$$

Dakle,

$$r_e = e^{12\%} - 1 = 12{,}7497\%.$$

Zadatak 1.23 *Odrediti kamatnu stopu za tri meseca, ako je nominalna godišnja kamatna stopa 12% i kapitalisanje:*

a) *polugodišnje,*

b) *mesečno.*

Rešenje. U zadatku je dato $r_a = 12\%$.
a) Kako je period za koji se traži kamatna stopa manji od perioda kapitalisanja i to dva puta ($s = 2$), onda za period od tri meseca obračunavamo konformnu kamatnu stopu

$$r = r_k = \left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^{1/2} - 1 = \left(1 + \frac{12\%}{2}\right)^{1/2} - 1 = 2{,}96\%.$$

b) U ovom slučaju je period za koji obračunavamo kamatnu stopu veći i to $k = 3$ puta od jednog perioda kapitalisanja, pa sada obračunavamo efektivnu kamatnu stopu

$$r = r_e = \left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^{k} - 1 = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{3} - 1 = 3{,}03\%.$$

Zadatak 1.24 *Iznos od 120.000 RSD uložen je 17.7.2016. sa datumom dospeća 25.11.2021. Izračunati ukamaćenu vrednost, ako je nominalna godišnja kamatna stopa 4,5%, kapitalisanje je*

a) *kvartalno,*

b) *mesečno,*

a ugovoren je obračun konformne kamatne stope.

Rešenje.
a) Datum 17.7.2016. pripada trećem kvartalu u godini, odnosno periodu između 1.7.2016. i 30.9.2016. (slika 1.3). Nakon tog datuma, sledi još jedan ceo period kapitalisanja u 2016, potom po 4 perioda kapitalisanja u naredne 4 godine i tri cela perioda kapitalisanja u 2021, pa je

$$n = 1 + 4 \cdot 4 + 3 = 20.$$

Datum 25.11.2021. pripada poslednjem, četvrtom kvartalu, tj. periodu od 1.10.2021. do 31.12.2021.

Slika 1.3: Vremenska osa – kvartalno kapitalisanje

Broj dana u periodu od 17.7.2016. do 30.9.2016. (uključujući oba krajnja datuma) jednak je $s_b = 76$, dok je u periodu od 1.10.2021. do 25.11.2021. broj dana $s_a = 55$ (računamo samo sa jednim krajnjim datumom, jer na dan kada se novac podiže, kamata se ne obračunava). U trećem kvartalu 2016. godine, ukupan broj dana je $d_b = 92$, a i u poslednjem kvartalu 2021. ima ukupno $d_a = 92$ dana.
Sada, lako dobijamo ukamaćenu vrednost

$$\begin{aligned} A(T) &= A(0)\left(1+\frac{r_a}{m}\right)^{s_b/d_b+n+s_a/d_a} \\ &= 150.000\left(1+\frac{4{,}5\%}{4}\right)^{76/92+20+55/92} = 152.500{,}08 \text{ RSD}. \end{aligned}$$

b) Ovaj deo zadatka rešavamo slično kao i zadatak pod a), samo je sada svaki mesec u godini jedan period kapitalisanja (slika 1.4). Zbog toga, 17.7.2016. pripada sedmom periodu kapitalisanja u 2016. godini. U istoj godini je preostalo još 5 celih perioda kapitalisanja. Nakon toga, slede 4 cele godine sa po 12 kapitalisanja i još 10 celih perioda kapitalisanja u 2021. godini, pa je $n = 5 + 4 \cdot 12 + 10 = 63$.

Slika 1.4: Vremenska osa – mesečno kapitalisanje

Broj dana koji prethodi prvom celom periodu kapitalisanja jednak je $s_b = 15$, dok je broj dana nakon poslednjeg celog perioda kapitalisanja jednak $s_a = 24$. Sedmi period kapitalisanja (mesec jul) ima 31 dan, pa je $d_b = 31$, dok jedanaesti period kapitalisanja (mesec novembar) ima $d_a = 30$ dana.
Dakle, ukamaćena vrednost iznosi

$$A(T) = 150.000\left(1+\frac{4{,}5\%}{12}\right)^{15/31+63+24/30} = 152.643{,}54 \text{ RSD}.$$

Očekivano, iznos koji se dobije pod b) je veći od iznosa koji se dobije pod a), jer je i broj kapitalisanja u drugom delu zadatka veći.

Zadatak 1.25 *Uraditi prethodni zadatak, ako je ugovorena kombinacija proste i složene kamatne stope.*

Rešenje.
a) Razlika u odnosu na prethodni zadatak je u tome što se za periode od s_b i s_a obračunava prosta kamata. Shodno tome je

$$t_b = \frac{s_b}{366} = \frac{76}{366} = 0{,}21$$

(2016. je bila prestupna godina, pa zato delimo sa 366) i

$$t_a = \frac{s_a}{365} = \frac{55}{365} = 0{,}15.$$

Sada, lako dobijamo ukamaćenu vrednost

$$\begin{aligned} A(T) &= A(0)\,(1 + r_a t_b)\left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^n (1 + r_a t_a) \\ &= 150.000\,(1 + 4{,}5\% \cdot 0{,}21)\left(1 + \frac{4{,}5\%}{4}\right)^{20} (1 + 4{,}5\% \cdot 0{,}15) \\ &= 152.519{,}79 \text{ RSD}. \end{aligned}$$

b) I u ovom delu zadatka, jednostavnim računom dolazimo do:

$$t_b = \frac{s_b}{366} = \frac{15}{366} = 0{,}04 \quad \text{i} \quad t_a = \frac{s_a}{365} = \frac{24}{365} = 0{,}07,$$

odnosno do ukamaćene vrednosti

$$\begin{aligned} A(T) &= 150.000\,(1 + 4{,}5\% \cdot 0{,}04)\left(1 + \frac{4{,}5\%}{12}\right)^{63} (1 + 4{,}5\% \cdot 0{,}07) \\ &= 152.642{,}25 \text{ RSD}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.26 *Iznos od 80.000 RSD oročen je na 8 godina i 8 meseci. Izračunati ukamaćenu vrednost, ako je nominalna kamatna stopa 9%, kapitalisanje kvartalno i ugovorena je kombinacija proste i složene kamate.*

Rešenje. U 8 godina i 8 meseci je sadržano ukupno

$$n = 8 \cdot 4 + 2 = 34$$

cela perioda kapitalisanja (jedan kvartal čine tri meseca) i još dodatna 2 meseca (za koje obračunavamo kamatu pomoću prostog kamatnog računa). Posledično je $t_a = \frac{2}{12}$, pa je ukamaćena vrednost

$$\begin{aligned} A(T) &= A(0)\left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^n (1 + r_a t_a) \\ &= 80.000\left(1 + \frac{9\%}{4}\right)^{34}\left(1 + 9\%\frac{2}{12}\right) = 173.024{,}98 \text{ RSD}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.27 *U nekom šumskom kompleksu bilo je 5.950* m^3 *drveta. Nakon 10 godina posečeno je 3.000* m^3.

a) *Koliko je drveta ostalo nakon seče, ako je prosečan godišnji priraštaj 5%?*

b) *Koliko bi morala biti minimalna prosečna stopa priraštaja nakon seče, ako bi se 15 godina nakon seče želelo dobiti na tom šumskom kompleksu 15.000* m^3*?*

Rešenje. Ovde je reč o neprekidnom rastu, tj. kontinuiranom kapitalisanju.
a) Nakon 10 godina, pre seče, na šumskom komleksu će biti ukupno

$$A(T) = A(0)e^{tr_a} = 5.950e^{10\cdot 5\%} = 9.809{,}89\ m^3$$

drveta. Posle seče, na kompleksu će ostati

$$9.809{,}89 - 3.000{,}00 = 6.809{,}89\ m^3 \text{ drveta.}$$

b) Poznato je početno stanje (nakon seče) $A(0) = 6.809{,}89$ i željeno stanje $t = 15$ godina nakon toga, tj. $A(T) = 15.000$. Iz $A(T) = A(0)e^{tr_a}$, dobijamo da je

$$\frac{A(T)}{A(0)} = e^{tr_a}.$$

Kada logaritmujemo obe strane prirodnim logaritmom dobijamo

$$\ln\frac{A(T)}{A(0)} = tr_a,$$

a odatle je i

$$r_a = \frac{\ln A(T) - \ln A(0)}{t} = 5{,}26\%.$$

Zadatak 1.28 *Koliko dinara treba uložiti u banku danas, da bi se posle 10 godina podiglo 100.000 RSD, ako banka kapitališe polugodišnje uz 3% nominalne godišnje kamatne stope?*

Rešenje. Iz $A(T) = A(0)\left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^n$, dobijamo

$$A(0) = \frac{A(T)}{\left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^n} = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{3\%}{2}\right)^{20}} = 74.247{,}04 \text{ RSD},$$

što je suma koju treba uložiti da bismo, uz date uslove, nakon 10 godina podigli 100.000 RSD.

Zadatak 1.29 *Koji iznos je uložen 15.3.2019. da bi ukamaćena vrednost na dan 1.2.2021. iznosila 150.000 RSD? Nominalna godišnja kamatna stopa je 4,99%, kapitalisanje je mesečno, a ugovorena je:*

a) *konformna kamatna stopa;*

b) *kombinacija proste i složene kamate.*

Rešenje. Kako se 15.3.2019. nalazi u trećem periodu kapitalisanja, tokom 2019. je preostalo 9 celih perioda kapitalisanja, svih 12 u 2020. godini i samo jedno u 2021. Zato je ukupan broj celih perioda kapitalisanja

$$n = 9 + 12 + 1 = 22.$$

Slika 1.5: Vremenska osa – mesečno kapitalisanje

Broj dana koji prethodi prvom celom periodu kapitalisanju jednak je $s_b = 17$ (Slika 1.5).
Označimo sa $A(t)$ vrednost traženog iznosa na dan 15.3.2019.
a) Broj dana u trećem periodu kapitalisanja je 31, pa je

$$A(t) = \frac{A(T)}{\left(1+\frac{r_a}{m}\right)^{s_b/d_b+n}} = \frac{150.000}{\left(1+\frac{4{,}99\%}{12}\right)^{17/31+22}} = 136.601{,}24 \text{ RSD}.$$

b) Kako je $t_a = \dfrac{17}{365} = 0{,}05$, to je

$$A(t) = \frac{A(T)}{(1+r_a t_b)\left(1+\frac{r_a}{m}\right)^n} = \frac{150.000}{(1+4{,}99\% \cdot 0{,}05)\left(1+\frac{4{,}99\%}{12}\right)^{22}} = 136.594{,}98 \text{ RSD}.$$

Zadatak 1.30 *Na današnji dan dužnik ima sledeće obaveze:*

A : *dug u vrednosti od 75.000 RSD; datum dospeća 18.5.2022;*

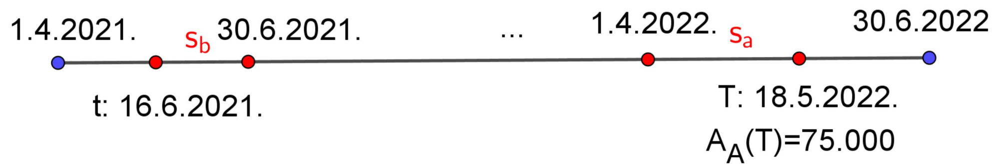
B : *14.500 RSD pozajmljenih 15.6.2015. sa nominalnom godišnjom kamatnom stopom 6,1%; datum dospeća 1.1.2019. godine;*

Poverilac i dužnik su se dogovorili da dužnik 25.7.2018. isplati 25.000 RSD, a sve ostale obaveze isplati jednom isplatom 16.6.2021. Izračunati vrednost isplate 16.6.2021, ako se obračunava nominalna godišnja kamatna stopa u visini od 5,3%, kvartalno kapitališe i ugovoren je obračun konformne kamatne stope.

Rešenje. Svaku od obaveza ćemo posmatrati posebno.
A: Dug u iznosu od $A_A(T) = 75.000$ RSD dospeva nakon datuma izjednačavanja vrednosti, tj. posle 16.6.2021. Zbog toga je neophodno izračunati sadašnju vrednost duga A. Dan 16.6.2021. se nalazi unutar drugog kvartala, pa je do kraja 2021. ostalo dva cela kvartala. Dan dospeća duga 18.5.2022. se nalazi u drugom kvartalu 2022, pa njemu prethodi samo jedan ceo kvartal. Zbog toga je

$$n = 2 + 1 = 3.$$

Neophodno je, dalje, izražunati s_b i d_b, odnosno s_a i d_a, slika 1.6.
Drugi kvartal u 2021. počinje 1.4.2021, a završava se zaključno sa danom 30.6.2021. Ukupan broj dana u tom periodu je $d_b = 91$. Dalje je s_b broj dana između 16.6.2021. i 30.6.2021, odnosno $s_b = 15$.



Slika 1.6: Dug A

Isto tako, drugi kvartal u 2022. počinje 1.4.2022, a završava se zaključno sa danom 30.6.2022. pa je $d_a = 91$, dok je s_a broj dana u periodu od 1.4.2022. do 18.5.2022, tj. $s_a = 47$.
Sada dobijamo da je

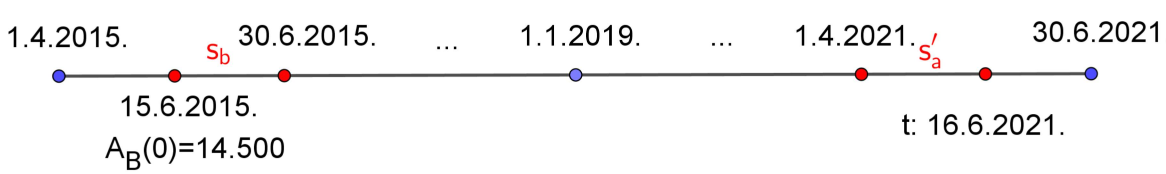
$$A_A(t) = \frac{75.000}{\left(1 + \frac{5{,}3\%}{4}\right)^{15/91+3+47/91}} = 71.452{,}36 \text{ RSD}.$$

B: Znamo da je na dan 15.6.2015. vrednost ovog duga $A_B(0) = 14.500$ RSD. Prvo, treba izračunati ukamaćenu vrednost ovog duga na dan 1.1.2019, slika 1.7. U tom periodu obračunava se nominalna kamatna stopa od 6,1%. Datum kada je ovaj iznos pozajmljen pripada drugom kvartalu tekuće godine, pa je opet $d_b = 91$. Period od 15.6.2015. do kraja tog kvartala, tj. do 30.6.2015. ima ukupno $s_b = 16$ dan. Sa druge strane, datum dospeća ovog duga se poklapa sa prvim danom prvog kvartala u 2019. godini, pa je $s_a = 0$. Broj celih perioda kapitalisanja u 2015. je 2, a nakon toga imamo još cele 3 godine sa po 4 kapitalisanja, pa je

$$n = 2 + 3 \cdot 4 = 14.$$

Dakle, na dan 1.1.2019. vrednost duga B je

$$A_B(t_1) = 14.500\left(1 + \frac{6{,}1\%}{4}\right)^{16/91+14} = 17.969{,}90 \text{ RSD}.$$



Slika 1.7: Dug B

Sada je neophodno izračunati i ukamaćenu vrednost za ovaj dug na dan 16.6.2021. Ovaj datum pripada drugom kvartalu, pa je do tog datuma ostao jedan kvartal u 2021. godini i cele 2019. i 2020. godina, odnosno

$$n' = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

Sada je $s'_b = 0$, a opet broj dana u drugom kvartalu $d'_a = 91$. Ostalo je još da izračunamo broj dana između 1.4.2021. i 16.6.2021. Lako dobijamo da je $s'_a = 76$. Napokon,

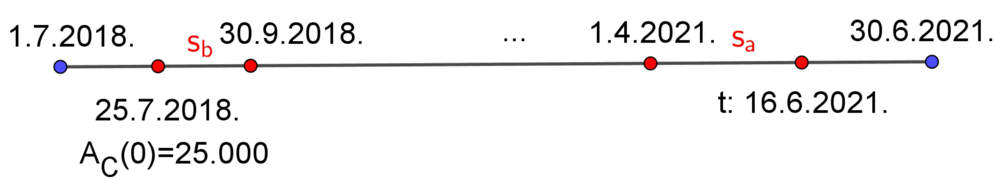
$$A_B(t) = 17.969{,}90\left(1 + \frac{5{,}3\%}{4}\right)^{9+76/91} = 20.453{,}59 \text{ RSD}.$$

C: Neka je sa C označen iznos plaćanja $A_C(0) = 25.000$ na dan 25.7.2018. Potrebno je izračunati ovaj iznos na dan 16.6.2021. Dan 25.7.2018. pripada trećem kvartalu tekuće godine, pa je nakon toga do kraja te godine ostao još samo jedan kvartal, potom u naredne dve godine imamo po 4 cela kvartala i pre dana izjednačavanja vrednosti još jedan (prvi kvartal u 2021.), pa je

$$n = 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 10.$$

Broj dana u trećem kvartalu je $d_b = 92$, a ukupan broj dana od 25.7.2018. do 30.9.2018. je $s_b = 68$, slika 1.8. Slično, kao kod duga B dobijamo i $s_a = 76$ i $d_a = 91$, pa je

$$A_C(t) = 25.000\left(1 + \frac{5{,}3\%}{4}\right)^{68/92+10+76/91} = 29.114{,}26 \text{ RSD}.$$



Slika 1.8: Isplata C

Dakle, ukupna vrednost isplata na dan 16.6.2021. je

$$A_A(t) + A_B(t) - A_C(t) = 17.969{,}90 + 20.453{,}59 - 29.114{,}26 = 62.791{,}69 \text{ RSD}.$$

Glava 2

Novčani tokovi

2.1 Periodična plaćanja

2.1.1 Dekurzivna periodična plaćanja

Dekurzivna periodična plaćanja su ona plaćanja kod kojih se:

- plaćanja vrše na kraju intervala,
- sva plaćanja su međusobno jednaka.

Koristićemo sledeće oznake:

T – trajanje plaćanja;

r – kamatna stopa po intervalu plaćanja;

n – broj plaćanja u vremenu T.

Buduća (ukupna) vrednost ovakvog novčanog toka je

$$A(T) = R\frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

dok se njegova sadašnja vrednost može izračunati na sledeći način

$$A(0) = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Ako je poznata sadašnja vrednost $A(0)$ dekurzivnog periodičnog novčanog toka, onda se R može izračunati na sledeći način

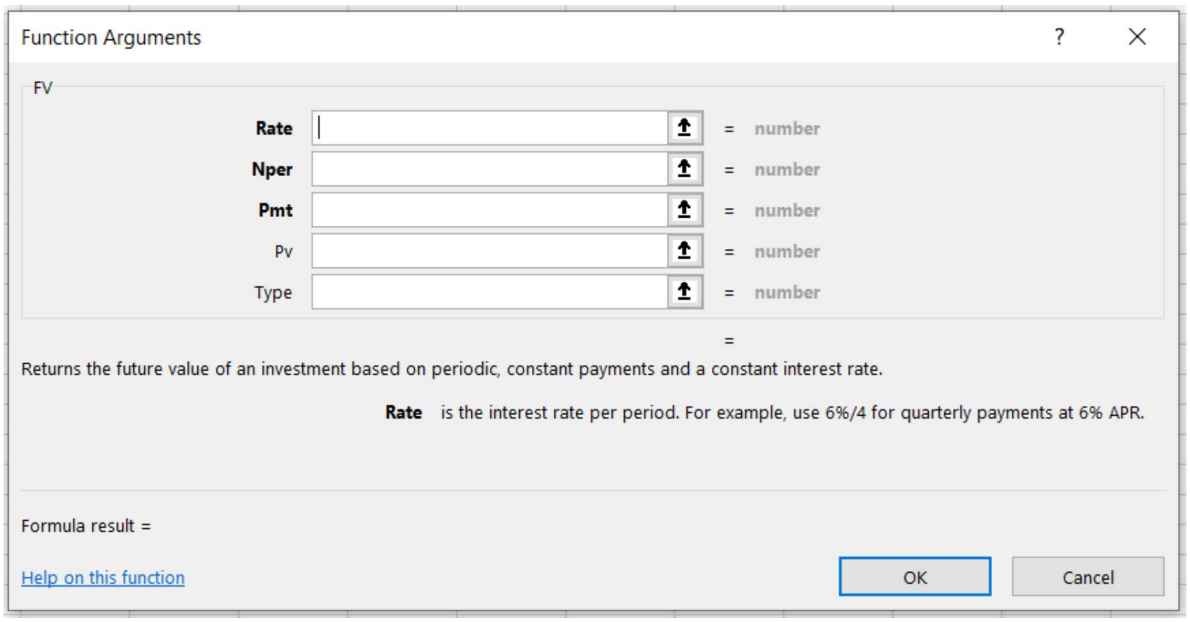
$$R = A(0)\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Zadatak 2.1 *Ukoliko na kraju svake godine uplaćujete po 1.000 EUR na račun u banci, koliko ćete imati na tom računu nakon 8 godina, ako banka obračunava nominalnu godišnju kamatnu stopu u visini od 5% i kapitališe godišnje.*

Rešenje. Znamo da je $R = 1.000$, $n = 8$, $r = r_a = 5\%$, pa lako dobijamo da je

$$A(T) = R\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 1.000\frac{(1+5\%)^8 - 1}{5\%} = 9.549{,}11 \text{ EUR}.$$

Ovaj zadatak se može uraditi i pomoću ugrađene funkcije u Excel-u – "FV", slika 2.1.



Slika 2.1: Ugrađena funkcija "FV"

Ova funkcija ima 5 argumenata, od kojih je obavezan unos za (bar) 3 od prva četiri:

- "rate" – kamatna stopa za jedan anuitetni period;
- "nper" – ukupan broj rata tokom otplate kredita;
- "PMT" – iznos plaćanja (payment);
- "pv" – sadašnja vrednost duga (present value);
- "type" – logička vrednost, ako su plaćanja na kraju perioda unosi se vrednost 0 (ili se ovo polje ostavlja praznim), a ako su plaćanja na početku perioda, onda se u ovo polje upisuje 1.

U polje "PMT" se unosi negativna vrednost plaćanja (kao dug).
Dakle,

$$A(T) = \mathrm{FV}(5\%; 8; -1000) = 9.549{,}11 \text{ EUR}.$$

Zadatak 2.2 *Dužnik duguje poveriocu 350.000 RSD. Poverilac i dužnik su se dogovorili da se dug vraća narednih 5 godina jednakim periodičnim plaćanjima krajem svakog meseca. Ako je ugovorena nominalna godišnja kamatna stopa 12% i mesečno kapitalisanje, odrediti:*

a) *iznos periodičnog plaćanja;*

b) *buduću (ukupnu) vrednost periodičnih plaćanja.*

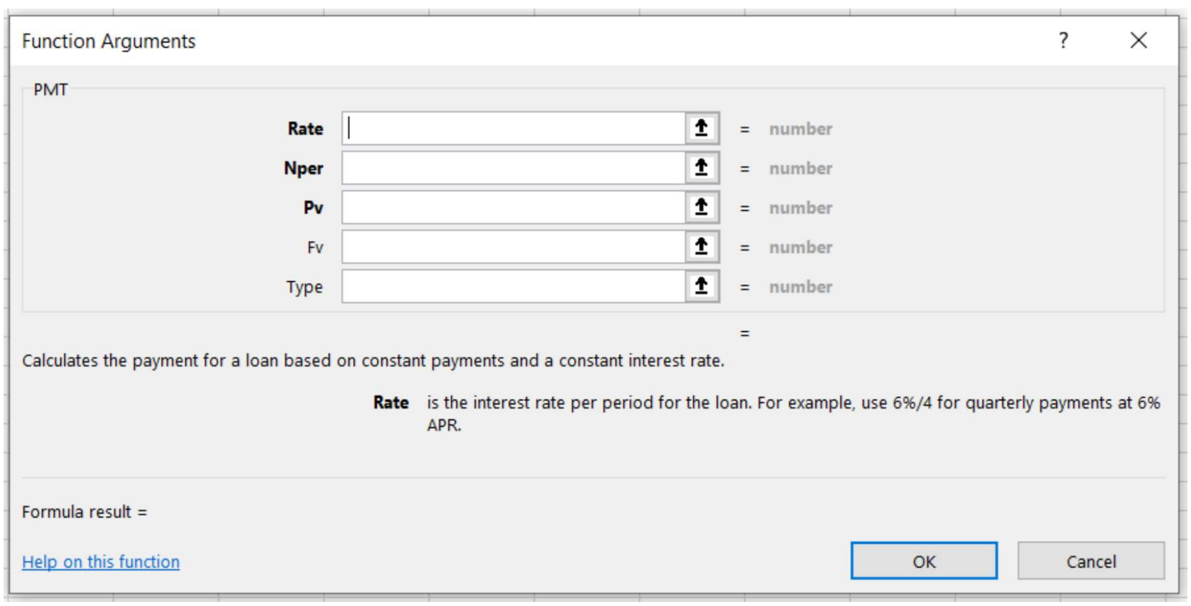
Rešenje. Dato je $A(0) = 350.000$, $n = 5 \cdot 12 = 60$, a kako se period plaćanja i period kapitalisanja poklapaju, to je

$$r = \frac{r_a}{m} = \frac{12\%}{12} = 1\%.$$

a) Iznos periodičnog plaćanja je

$$R = A(0)\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 350.000\frac{1\%}{1-(1+1\%)^{-60}} = 7.785{,}56 \text{ RSD}.$$

Ovaj zadatak možemo rešiti i pomoću ugrađene funkcije "PMT", slika 2.2.



Slika 2.2: Ugrađena funkcija "PMT"

Argumente "rate", "nper", "type" i "pv" smo već upoznali. Jedino novo polje je "fv" – ukupna (buduća vrednost duga (future value), koju uglavnom posmatramo kao alternativu polju "pv". Očekuje se da se u oba pomenuta polja unese negativna vrednost (kao dugovanje).

Dakle,

$$R = \text{PMT}(1\%; 60; -350000) = 7.785{,}56 \text{ RSD}.$$

b) Buduća (ukupna) vrednost je

$$A(T) = R\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 7.785{,}56\frac{(1+1\%)^{60} - 1}{1\%} = 635.843{,}84 \text{ RSD.}$$

Zadatak 2.3 *Pri kupovini automobila kupac daje učešće od 5.000 EUR, dok preostali iznos potreban za ovu kupovinu uzima na kredit čije rate u visini od 276 EUR isplaćuje krajem svakog meseca naredne 3 godine. Banka koja odobrava kredit obračunava 9,9% nominalne godišnje kamatne stope i mesečno kapitališe. Odrediti:*

a) *cenu automobila, ako bi isplata bila odmah u celosti;*

b) *iznos koji kupac mora platiti u osmoj uplati, ako je propustio prvih 7 uplata, a želi da nastavi sa plaćanjem po dogovorenim uslovima;*

c) *iznos koji kupac mora platiti pri devetnaestoj uplati, ako želi da isplati ceo dug, a prethodnih 18 rata je uplaćivao redovno;*

d) *iznos koji kupac mora platiti u 21. uplati ako želi da isplati ceo dug, a propustio je prethodne 4 rate.*

Rešenje. Period kapitalisanja i period plaćanja se poklapaju, pa je mesečna kamatna stopa

$$r = \frac{r_a}{m} = \frac{9{,}9\%}{12} = 0{,}83\%,$$

dok je učešće $U = 5.000$, iznsos rate $R = 276$, a broj plaćanja

$$n = 3 \cdot 12 = 36.$$

a) Cena automobila je jednaka zbiru učešća i iznosa kredita koji se uzima, a koji lako dobijamo

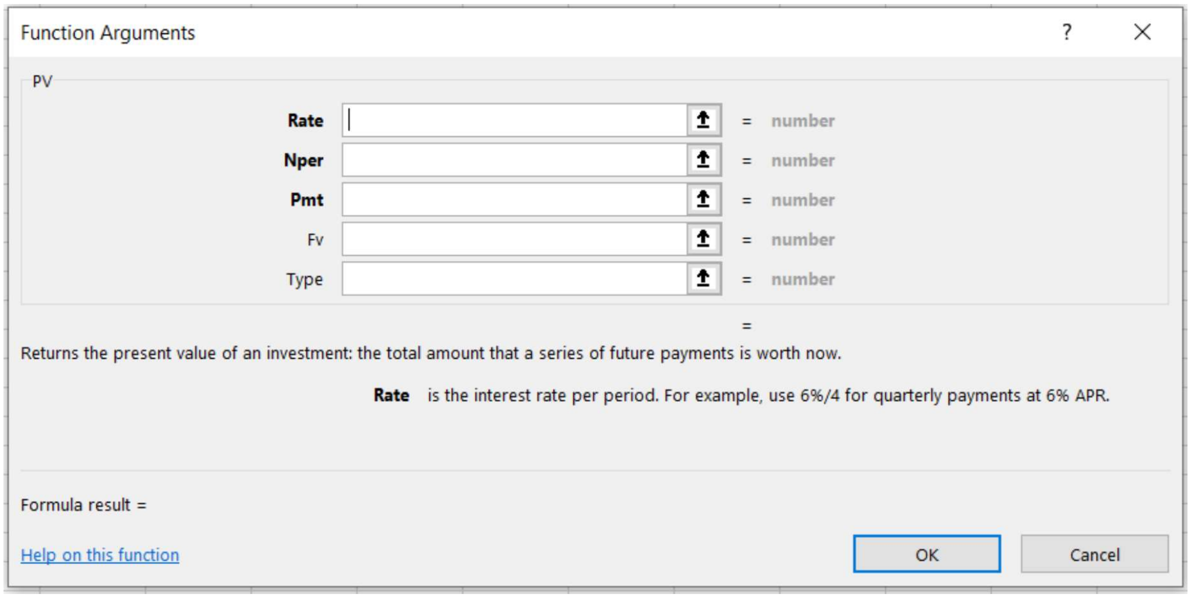
$$A(0) = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 276\frac{1-(1+0{,}83\%)^{-36}}{0{,}83\%} = 8.566{,}04 \text{ EUR.}$$

Dakle, cena automobila je

$$U + A(0) = 13.566{,}04 \text{ EUR.}$$

Vrednost za $A(0)$ smo mogli dobiti i preko ugrađene funkcije ”PV”, slika 2.3.
Dakle,

$$A(0) = \text{PV}(0{,}83\%; 36; -276) = 8.566{,}04 \text{ EUR.}$$



Slika 2.3: Ugrađena funkcija "PV"

b) Da bismo nastavili plaćanje pod istim uslovima, neophodno je da kupac plati sve zaostale rate (sa odgovarajućim kamatama). Dakle, neophodno je izračunati ukupnu (buduću) vrednost za ukupno 8 rata (prethodnih 7 rata i osma, koja dospeva), što je

$$A(T) = 276\frac{(1+0{,}83\%)^8 - 1}{0{,}83\%} = 2.272{,}82 \text{ EUR}.$$

c) Kupac treba da plati dospelu 19. ratu i preostalih $36 - 19 = 17$ rata, pa je potrebno da plati

$$276 + 276\frac{1-(1+0{,}83\%)^{-17}}{0{,}83\%} = 4.637{,}10 \text{ EUR}.$$

d) Kupac treba da plati iznos koji predstavlja zbir budućih vrednosti za 5 plaćanja (prethodne 4 i sada dospelu ratu) i sadašnje vrednosti za preostala $36 - 21 = 15$ plaćanja, odnosno

$$276\frac{(1+0{,}83\%)^5 - 1}{0{,}83\%} + 276\frac{1-(1+0{,}83\%)^{-15}}{0{,}83\%} = 1.402{,}96 + 3.879{,}07 = 5.282{,}03 \text{ EUR}.$$

Zadatak 2.4 *Tokom 4 godine krajem svakog kvartala se ulaže 8.000 RSD sa 8% nominalne godišnje kamatne stope. Odrediti ukupnu vrednost periodičnog plaćanja ako je kapitalisanje*

a) *polugodišnje,*

b) *mesečno.*

Rešenje. Iznos periodičnog plaćanja je $R = 8.000$, dok je ukupan broj plaćanja $n = 4 \cdot 4 = 16$.
a) Period plaćanja je manji od perioda kapitalisanja i to $s = 2$ puta, pa se stopa za jedan period plaćanja računa kao konformna kamatna stopa, tj.

$$r = r_k = \left(1 + \frac{8\%}{2}\right)^{1/2} - 1 = 1{,}98\%.$$

Dalje, lako dobijamo da je

$$A(T) = 8.000 \frac{(1 + 1{,}98\%)^{16} - 1}{1{,}98\%} = 148.887{,}44 \text{ RSD}.$$

b) Period plaćanja je veći od perioda kapitalisanja (i to $k = 3$ puta), pa stopu za period plaćanja računamo kao efektivnu kamatnu stopu, tj.

$$r = r_e = \left(1 + \frac{8\%}{12}\right)^{3} - 1 = 2{,}01\%,$$

pa je

$$A(T) = 8.000 \frac{(1 + 2{,}01\%)^{16} - 1}{2{,}01\%} = 149.269{,}10 \text{ RSD}.$$

2.1.2 Anticipativna periodična plaćanja

Anticipativna periodična plaćanja su periodična plaćanja kod kojih se plaćanje vrši na početku intervala plaćanja. Buduća (ukupna) vrednost ovakvog plaćanja dobija se na sledeći način

$$A(T) = R(1 + r)\frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Sadašnja vrednost anticipativnog novčanog toka je

$$A(0) = R\frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r)^{n-1} r}.$$

Zadatak 2.5 *Mesečni zakup garsonjere je 180 EUR uz plaćanje unapred, mesečno. Odrediti sadašnju i ukupnu vrednost zakupnine za 3 godine, ako je nominalna godišnja kamatna stopa 5% i kapitalisanje mesečno.*

Rešenje. Kako se plaćanja izvršavaju na početku svakog perioda (meseca), reč je o anticipativnim plaćanju, kod koga je $R = 180$ EUR, $m = 12$, $n = 3 \cdot 12 = 36$. Kako se period plaćanja poklapa sa periodom kapitalisanja, kamatna stopa za jedan mesec se računa kao relativna kamatna stopa, odnosno

$$r = \frac{r_a}{m} = \frac{5\%}{12} = 0{,}42\%.$$

Sadašnja vrednost ovog novčanog toka je

$$A(0) = R\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^{n-1}r} = 180\frac{(1+0{,}42\%)^{36} - 1}{(1+0{,}42\%)^{36-1}0{,}42\%} = 6.030{,}85 \text{ EUR}.$$

Buduća (ukupna) vrednost ovog novčanog toka je

$$A(T) = R(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 180(1+0{,}42\%)\frac{(1+0{,}42\%)^{36} - 1}{0{,}42\%} = 7.004{,}67 \text{ EUR}.$$

Ovaj zadatak smo mogli da uradimo i pomoću Excel-ovih ugrađenih funkcija "PV" i "FV". Kod anticipativnih plaćanja u ovim funkcijama u polju "type" pišemo 1 (kod dekurzivnih plaćanja smo ovo polje ostavljali prazno, ili upisivali nulu). Dakle, sadašnju vrednost zakupnine ove garsonjere možemo dobiti i kao

$$A(0) = \text{PV}(0{,}42\%; 36; -180; ; 1) = 6.030{,}85 \text{ EUR},$$

dok je buduća vrednost

$$A(T) = \text{FV}(0{,}42\%; 36; -180; ; 1) = 7.004{,}67 \text{ EUR}.$$

Zadatak 2.6 *Odlučili ste da mesečno od plate odvajate po 12.000 RSD i da ih početkom svakog meseca uplaćujete u banku, i to tokom narednih 8 godina. Koliku sumu ćete imati na računu za 10 godina, ako banka sve vreme na iznos koji imate na računu obračunava 8% nominalne godišnje kamatne stoeu i polugodišnje kapitališe?*

Rešenje. Kamatna stopa za period plaćanja (mesec dana) je konformna kamatna stopa

$$r = r_k = \left(1 + \frac{8\%}{2}\right)^{1/6} - 1 = 0{,}66\%.$$

Broj plaćanja u narednih 8 godina je $n_1 = 8 \cdot 12 = 96$, pa je ukupna vrednost na isteku tog perioda

$$A(T_1) = 12.000(1+0{,}66\%)\frac{(1+0{,}66\%)^{96} - 1}{0{,}66\%} = 1.607.831{,}73 \text{ RSD}.$$

Potrebno je naći ukamaćenu vrednost od ovog iznosa, za period od dve godine. Ukupan broj kapitalisanja u tom periodu je $n = 2 \cdot 2 = 4$, pa je

$$A(T) = 1.607.831{,}73\left(1 + \frac{8\%}{2}\right)^4 = 1.880.935{,}72 \text{ RSD}$$

iznos koji ćete imati na računu nakon 10 godina od početka ove štednje.

2.2 Amortizacija kredita

U ovom poglavlju koristićemo sledeće oznake:

- Z – iznos kredita;
- R_j – anuitet (rata) u j–tom periodu;
- I_j – kamata u j–tom periodu;
- B_j – otplata u j–tom periodu;
- D_j – preostali dug u j–tom periodu;
- O_j – otplaćeni deo duga u j–tom periodu.

Plan amortizacije sadrži 5 kolona, slika 2.4. Prva kolona sadrži redni broj j tekućeg perioda rate kredita. U narednoj koloni se nalazi ostatak duga D_{j-1} koji prethodi tekućoj rati, pa je

$$D_0 = Z,$$
$$D_j = D_{j-1} - B_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Treća kolona sadrži kamatu I_j za j-ti period i ona je jednaka

$$I_j = r \cdot D_{j-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	D_0=Z	=r*D_0		
2	D_1=D_0-B_1	=r*D_1		
3	D_2=D_1-B_2	=r*D_2		

...

Slika 2.4: Plan amortizacije

U poslednje dve kolone se nalaze tekuća otplata B_j i tekući anuitet R_j, redom. Jedan deo anuiteta odlazi na plaćanje kamate, a drugi na otplatu samog kredita, tj.

$$R_j = I_j + B_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kako se u poslednjoj rati otplaćuje ceo iznos duga, to mora biti

$$D_{n-1} = B_n.$$

Takođe, zbir svih otplata mora biti jednak iznosu kredita Z, odnosno

$$\sum_{j=1}^{n} B_j = Z.$$

2.2.1 Krediti sa jednakim anuitetima

Ako se kredit u iznosu od Z otplaćuje u n jednakih rata, sa kamatnom stopom r za jedan anuitetni period, onda se rata R može izračunati na sledeći način

$$R = \frac{rZ}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Zadatak 2.7 *Napraviti plan amortizacije za keš kredit od 150.000 RSD, ako se obračunava nominalna godišnja kamatna stopa u visini 7%, a banka kapitališe polugodišnje. Ugovoreni rok otplate je godinu dana, a anuiteti su dvomesečni.*

Rešenje. Kako su anuiteti dvomesečni, a rok otplate godinu dana, ukupan broj rata je $n = 6$. Period kapitalisanja je 6 meseci i tri puta je veći nego period za koji treba da obračunamo kamatnu stopu (period jednog anuiteta – dva meseca). Zbog toga se kamatna stopa r za traženi period obračunava kao konformna kamatna stopa, za $s = 3$, pa je

$$r = \left(1+\frac{r_a}{m}\right)^{1/s} - 1 = \left(1+\frac{7\%}{2}\right)^{1/3} = 1{,}15\%.$$

Kako je $Z = 150.000$, to anuitet R lako možemo izračunati

$$R = \frac{rZ}{1-(1+r)^{-n}} = 26.018{,}79 \text{ RSD}.$$

	A	B	C	D	E
1	Z	150.000,00 RSD			
2	r_a	7%			
3	m	2			
4	n	6			
5	s	3			
6	r	1,15%			
7	R	26.018,79 RSD			
8					
9	j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
10	1	150.000,00 RSD	1.729,97 RSD	24.288,82 RSD	26.018,79 RSD
11	2	125.711,18 RSD	1.449,84 RSD	24.568,95 RSD	26.018,79 RSD
12	3	101.142,23 RSD	1.166,49 RSD	24.852,30 RSD	26.018,79 RSD
13	4	76.289,93 RSD	879,86 RSD	25.138,93 RSD	26.018,79 RSD
14	5	51.151,00 RSD	589,93 RSD	25.428,86 RSD	26.018,79 RSD
15	6	25.722,14 RSD	296,66 RSD	25.722,14 RSD	26.018,79 RSD
16			6.112,76 RSD	150.000,00 RSD	156.112,76 RSD

=(1+B2/B3)^(1/B5)-1

=PMT(B6;B4;-B1)

=B10*B$6

=E10-C10

=B$7

=B10-D10

Slika 2.5: Plan amortizacije

Ratu smo mogli dobiti i preko ugrađene funkcije "PMT"

$$R = \mathrm{PMT}(r; n; -Z) = 26.018{,}79 \text{ RSD}.$$

Plan amortizacije kreiramo pomoću odgovarajućih formula, slika 2.5 (poslednja vrsta je kontrolna i sadrži ukupnu kamatu, otplaćeni iznos kredita i ukupan iznos svih plaćanja po kreditu, redom).

Zadatak 2.8 *Odlučili ste se za kupovinu automobila, čija je cena 22.350 EUR. Da biste dobili kredit morate da imate učešće u visini od 30% cene automobila. Banka vam odobrava kredit sa godišnjom kamatnom stopom od 5,2% i polugodišnjim kapitalisanjem. Kredit se otplaćuje jednakim tromesečnim anuitetima. Ako je kredit odobren na 5 godina, izračunati:*

a) *treću otplatu,*

b) *iznos otplate u prva četiri anuiteta,*

c) *deo duga koji se otplaćuje sa anuitetima u prvoj polovini druge godine.*

Rešenje. Učešće predstavlja iznos koji uplaćujete u gotovini prodavcu automobila i taj iznos je

$$30\% \cdot 22.350{,}00 = 6.705{,}00 \text{ EUR}.$$

Iznos kredita je jednak razlici cene automobila i učešća, tj.

$$Z = 22.350{,}00 - 6.705{,}00 = 15.645{,}00 \text{ EUR}.$$

Kako je period za koji treba da računamo kamatnu stopu (tri meseca) dva puta manji od perioda kapitalisanja (šest meseci), tražena tromesečna kamatna stopa se računa kao konformna kamatna stopa r za $s = 2$, pa je

$$r = \left(1 + \frac{5{,}2\%}{2}\right)^{1/2} - 1 = 1{,}29\%.$$

a) Ukupan broj rata je $n = 5 \cdot 4 = 20$, pa se rata lako može izračunati

$$R = \frac{rZ}{1 - (1+r)^{-n}} = \mathrm{PMT}(r; n; -Z) = 892{,}65 \text{ EUR}.$$

Iznos treće otplate možemo izračunati na sledeći način

$$B_3 = R - I_3 = R - rD_2.$$

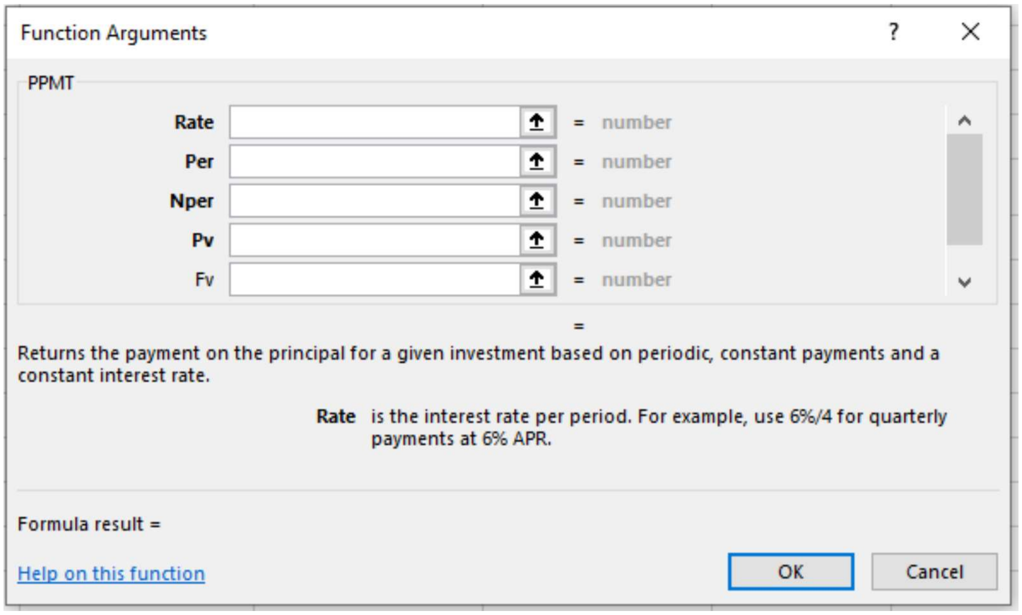
D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ je ostatak duga nakon k otplata, odnosno sadašnja vrednost preostalih $n - k$ otplata, tj.

$$D_k = R\frac{1 - (1+r)^{-n+k}}{r},$$

a za $k = 2$, dobijamo

$$B_3 = R\left(1 - \frac{1-(1+r)^{-n+2}}{r}\right) = 892{,}65\left(1 - \frac{1-(1+1{,}29\%)^{-20+2}}{1{,}29\%}\right)$$
$$= 708{,}52 \text{ EUR}.$$

Bilo koju otplatu možemo dobiti i preko ugrađene funkcije "PPMT" u Excel-u. Ova funkcija ima samo jedno novo polje u odnosu na "PMT". To polje je "per" i predstavlja period za koji želimo da izračunamo otplatu, slika 2.6.



Slika 2.6: Ugrađena funkcija "PPMT"

Dakle, dobijamo da je

$$B_3 = \text{PPMT}(r; 3; -Z) = 708{,}52 \text{ EUR}.$$

b) Ukupan iznos otplaćen u prvih k rata jednak je razlici kredita i preostalog duga nakon k otplata (sadašnja vrednost za preostalih $n-k$ rata), odnosno

$$O_k = Z - D_k = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - R\frac{1-(1+r)^{-(n-k)}}{r} = R(1+r)^{-n}\frac{(1+r)^k-1}{r}.$$

Za naš problem je $k = 4$, pa je iznos ukupno otplaćenog dela kredita u prva 4 anuiteta

$$O_4 = R(1+r)^{-n}\frac{(1+r)^4-1}{r} = 2.816{,}26 \text{ EUR}.$$

Isti rezultat možemo dobiti i u Excel-u

$$O_4 = \sum_{k=1}^{4} B_k = \sum_{k=1}^{4} \text{PPMT}(r; k; -Z) = 2.816{,}26 \text{ EUR}.$$

c) Deo duga koji je otplaćen u prvoj polovini druge godine jednak je zbiru pete i šeste otplate i lako se računa (na jedan od načina iz zadatka pod b)).

$$B_5 + B_6 = O_6 - O_4 = 1.463{,}28 \text{ EUR}.$$

Ceo zadatak smo mogli da uradimo i izradom plana amortizacije. U tom planu možemo da nađemo sve vrednosti koje se traže, slika 2.7.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	15.645,00 €	202,08 €	690,57 €	892,65 €
2	14.954,43 €	193,16 €	699,49 €	892,65 €
3	14.254,94 €	184,13 €	708,52 €	892,65 €
4	13.546,42 €	174,97 €	717,68 €	892,65 €
5	12.828,74 €	165,70 €	726,95 €	892,65 €
6	12.101,80 €	156,31 €	736,34 €	892,65 €
7	11.365,46 €	146,80 €	745,85 €	892,65 €

...

Slika 2.7: Plan amortizacije

Zadatak 2.9 *Ako ste se u ugovoru sa bankom obavezali da ćete kredit od 100.000 RSD vraćati tromesečnim anuitetima od 8.000 RSD i ako banka računa nominalnu godišnju kamatnu stopu 6%, uz mesečno kapitalisanje, koliko godina ćete isplaćivati ovaj dug?*
Napraviti i plan amortizacije kredita.

Rešenje. Kako su rate tromesečne, a periodi kapitalisanja mesečni, period za koji računamo kamatnu stopu je $k = 3$ puta veći od perioda kapitalisanja, pa traženu kamatnu stopu računamo kao efektivnu kamatnu stopu

$$r = \left(1 + \frac{r_a}{m}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{6\%}{12}\right)^3 - 1 = 1{,}51\%.$$

Iz

$$R = \frac{rZ}{1 - (1+r)^{-n}}$$

dobijamo da je

$$(1+r)^{-n} = 1 - \frac{Zr}{R}$$

i nakon logaritmovanja leve i desne strane sledi

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{Zr}{R}\right)}{\ln(1+r)}.$$

Dakle,

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{100.000 \cdot 1,51\%}{8.000}\right)}{\ln(1 + 1{,}51\%)} = 13{,}95.$$

Ovaj rezultat smo mogli dobiti i prek ugrađene funkcije u Excel-u

$$\text{NPER}(1{,}51\%; 100000; -8.000) = 13{,}95.$$

Ovo znači da će 13 rata biti u iznosu od 8.000 dinara, dok će poslednja 14. rata biti nešto manja (ukupan period otplate je 3,5 godine).
Plan amortizacije kreiramo u 13 perioda, kao što smo to radili i u prethodnim zadacima. Poslednju, 14. vrstu popunjavamo na nešto drugačiji način. Prvo računamo koliko je preostalo duga pre poslednjeg perioda otplate, a potom i kamatu za poslednji period:

$$D_{13} = 7.525{,}08 \text{ RSD}, \qquad I_{14} = r \cdot D_{13} = 113{,}44 \text{ RSD}.$$

Poslednja otplata mora biti jednaka preostalom dugu, odnosno

$$B_{14} = D_{13} = 7.525{,}08 \text{ RSD}.$$

Na kraju, poslednju ratu dobijamo kao zbir poslednje kamate i poslednje otplate, tj.

$$R_{14} = I_{14} + B_{14} = 7.638{,}52 \text{ RSD}.$$

Kompletan plan amortizacije je prikazan na slici 2.8.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	100.000,00 RSD	1.507,51 RSD	6.492,49 RSD	8.000,00 RSD
2	93.507,51 RSD	1.409,64 RSD	6.590,36 RSD	8.000,00 RSD
3	86.917,15 RSD	1.310,29 RSD	6.689,71 RSD	8.000,00 RSD
4	80.227,44 RSD	1.209,44 RSD	6.790,56 RSD	8.000,00 RSD
5	73.436,88 RSD	1.107,07 RSD	6.892,93 RSD	8.000,00 RSD
6	66.543,95 RSD	1.003,16 RSD	6.996,84 RSD	8.000,00 RSD
7	59.547,10 RSD	897,68 RSD	7.102,32 RSD	8.000,00 RSD
8	52.444,78 RSD	790,61 RSD	7.209,39 RSD	8.000,00 RSD
9	45.235,40 RSD	681,93 RSD	7.318,07 RSD	8.000,00 RSD
10	37.917,32 RSD	571,61 RSD	7.428,39 RSD	8.000,00 RSD
11	30.488,93 RSD	459,62 RSD	7.540,38 RSD	8.000,00 RSD
12	22.948,56 RSD	345,95 RSD	7.654,05 RSD	8.000,00 RSD
13	15.294,51 RSD	230,57 RSD	7.769,43 RSD	8.000,00 RSD
14	7.525,08 RSD	113,44 RSD	7.525,08 RSD	7.638,52 RSD
		11.638,52 RSD	100.000,00 RSD	111.638,52 RSD

Slika 2.8: Plan amortizacije

Zadatak 2.10 *Zajam od 700.000 RSD se otplaćuje 6 godina dvomesečnim anuitetima tako da su anuiteti jednaki, uz 10% nominalne godišnje kamatne stope i uz mesečno kapitalisanje. Nakon dve godine, u sledećoj (13. uplati) kao ratu ste uplatili tačno 120.000 RSD, a potom nastavili otplatu pod istim uslovima kao i ranije. Napraviti plan amortizacije kredita.*

Rešenje. Pošto je kapitalisanje mesečno, a anuitetni period dva puta veći, onda je kamatna stopa za dva meseca dobija kao efektivna kamatna stopa

$$r = \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^2 = 1{,}67\%.$$

Kako su anuiteti dvomesečni, godišnje moramo plaćati 6 rata, pa je ukupan broj anuiteta

$$n = 6 \cdot 6 = 36.$$

Sada lako možemo izračunati iznos tih rata

$$R = \mathrm{PMT}(1{,}67\%; 36; -700000) = 26.044{,}24 \text{ RSD}.$$

Za prvih dvanaest perioda otplate, plan amortizacije se popunjava na standardan način. Nakon toga, prvo računamo ostatak duga D_{12} nakon dvanaeste rate, a na osnovu njega i kamatu I_{13} za tekući period. Sada upisujemo i 13. anuitet, koji iznosi

$$R_{13} = 120.000{,}00 \text{ RSD},$$

dok je

$$B_{13} = R_{13} - I_{13} = 111.442{,}70 \text{ RSD}.$$

Dug koji prethodi 14. periodu, dobijamo lako

$$D_{13} = D_{12} - B_{12} = 399.865{,}09 \text{ RSD}.$$

Dalje, na osnovu ovog ostatka duga, lako možemo dobiti i sve naredne rate (do kraja otplate kredita)

$$R' = \mathrm{PMT}(r, 36 - 12, -D_{13}) = 21.088{,}99 \text{ RSD}.$$

Plan amortizacije za ovaj kredit je prikazan na slici 2.9.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	700.000,00 RSD	11.715,28 RSD	14.328,96 RSD	26.044,24 RSD
2	685.671,04 RSD	11.475,47 RSD	14.568,77 RSD	26.044,24 RSD
3	671.102,26 RSD	11.231,64 RSD	14.812,60 RSD	26.044,24 RSD
4	656.289,67 RSD	10.983,74 RSD	15.060,50 RSD	26.044,24 RSD
		...		
11	545.422,86 RSD	9.128,26 RSD	16.915,98 RSD	26.044,24 RSD
12	528.506,88 RSD	8.845,15 RSD	17.199,09 RSD	26.044,24 RSD
13	511.307,79 RSD	8.557,30 RSD	111.442,70 RSD	120.000,00 RSD
14	399.865,09 RSD	6.692,19 RSD	14.396,80 RSD	21.088,99 RSD
15	385.468,29 RSD	6.451,24 RSD	14.637,75 RSD	21.088,99 RSD
16	370.830,54 RSD	6.206,26 RSD	14.882,73 RSD	21.088,99 RSD
17	355.947,81 RSD	5.957,18 RSD	15.131,81 RSD	21.088,99 RSD
18	340.816,01 RSD	5.703,93 RSD	15.385,05 RSD	21.088,99 RSD
		...		
32	100.350,76 RSD	1.679,48 RSD	19.409,51 RSD	21.088,99 RSD
33	80.941,25 RSD	1.354,64 RSD	19.734,35 RSD	21.088,99 RSD
34	61.206,90 RSD	1.024,37 RSD	20.064,62 RSD	21.088,99 RSD
35	41.142,28 RSD	688,56 RSD	20.400,43 RSD	21.088,99 RSD
36	20.741,85 RSD	347,14 RSD	20.741,85 RSD	21.088,99 RSD
		217.577,63 RSD	700.000,00 RSD	917.577,63 RSD

Slika 2.9: Plan amortizacije

Zadatak 2.11 *Stambeni kredit u visini od* 72.000 *EUR se otplaćuje 20 godina jednakim mesečnim anuitetima uz 3,5% nominalne godišnje kamatne stope sa godišnjim kapitalisanjem. Posle 5 godina nominalna godišnja kamatna stopa je pala na 3,2%, a vreme amortizacije produženo za još dve godine.*

a) *Naći novi anuitet.*

b) *Napraviti plan amortizacije.*

Rešenje. a) Kako je kapitalisanje godišnje, a anuiteti mesečni, to je period za koji treba da izračunamo kamatnu stopu 12 puta manji od perioda kapitalisanja, pa računamo konformnu kamatnu stopu uz $s = 12$, odnosno

$$r = r_k = \left(1 + \frac{3{,}5\%}{1}\right)^{1/12} - 1 = 0{,}29\%.$$

Kredit se otplaćuje 20 godina, odnosno na $n = 20 \cdot 12 = 240$ rata. Na početku otplate kredita rata kredita je

$$R = \frac{0{,}29\% \cdot 72.000}{1-(1+0{,}29\%)^{-240}} = 415{,}54 \text{ EUR}.$$

Nakon 5 godina, kamatna stopa pada, a vreme otplate se produžava, pa će nova rata biti manja od početne. Da bismo izračunali tu ratu, neophodno je prvo izračunati koliki je preostali dug nakon 5 godina otplate. Uradićemo to na dva načina, bez pravljenja (celog) plana amortizacije.
Pomoću ugrađene funkcije ”PPMT” možemo dobiti traženi ostatak duga. U Excel-u možemo lako kreirati tabelu koja sadrži sve otplate u prvih 5 godina

$$(B_1, B_2, \ldots, B_{60}),$$

slika 2.10. Kada saberemo sve ove otplate (pomoću funkcije ”SUM”) dobijamo iznos dela kredita, koji je otplaćen u prvih 5 godina, odnosno $O_{60} = 13.652{,}82$ EUR.

	A	B	C	D
1	Z	72.000,00 €		
2	r_a	3,50%		
3	m	1		
4	s	12		
5	r	0,29%		
6	n	240		
7	R	415,54 €		
8				
9	j	B_j		
10	1	208,84 €	=PPMT(B$5;A10;B$6;-B$1)	
11	2	209,44 €		
12	3	210,04 €		
13	4	210,64 €		
67		...		
68	58	245,91 €		
69	59	246,62 €		
70	60	247,32 €		
71	∑	**13.652,82 €**		

Slika 2.10: Otplate

Preostali iznos kredita, koji treba otplatiti, je

$$Z' = Z - O_{60} = 72.000{,}00 - 13.652{,}82 = 58.347{,}18 \text{ EUR}.$$

Ovaj dug otplaćujemo 17 godina (15 preostalih + 2 godine, za koje je produženo vreme amortizacije). Dakle, $n' = 17 \cdot 12 = 204$. Nova nominalna godišnja kamatna stopa je $r'_a = 3{,}2\%$, pa je

$$r' = r'_k = \left(1 + \frac{3{,}2\%}{1}\right)^{1/12} - 1 = 0{,}26\%.$$

Dakle, nova rata je

$$R' = \frac{0{,}26\% \cdot 58.347{,}18}{1 - (1 + 0{,}26\%)^{-204}} = 369{,}88 \text{ EUR}.$$

Nađimo sada ostatak duga nakon 5 godina otplate, na drugi način – korišćenjem početne rate. Nakon 5 godine otpate, preostalo je još 15 godina, odnosno

$$n' = 15 \cdot 12 = 180$$

rata u visini od $R = 415{,}54$ EUR, kako bi kredit bio u potpunosti isplaćen. Dakle, ostatak duga nakon 60 rata je sadašnja vrednost preostalih 180 rata (po početnim uslovima), odnosno

$$Z' = \mathrm{PV}(0{,}29\%; 180; -415{,}54) = 58.347{,}18 \text{ EUR}.$$

Sada, novu ratu računamo identično, kao i kod prvog načina rešavanja ovog problema.

b) Na osnovu izračunatih vrednosti u zadatku pod a) lako dobijamo i plan amortizacije, slika 2.11.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	72.000,00 €	206,70 €	208,84 €	415,54 €
2	71.791,16 €	206,11 €	209,44 €	415,54 €
3	71.581,73 €	205,50 €	210,04 €	415,54 €
		...		
59	58.841,11 €	168,93 €	246,62 €	415,54 €
60	58.594,50 €	168,22 €	247,32 €	415,54 €
61	58.347,18 €	153,36 €	216,52 €	369,88 €
62	58.130,65 €	152,79 €	217,09 €	369,88 €
63	57.913,56 €	152,22 €	217,66 €	369,88 €
		...		
262	1.103,83 €	2,90 €	366,98 €	369,88 €
263	736,85 €	1,94 €	367,94 €	369,88 €
264	368,91 €	0,97 €	368,91 €	369,88 €
		28.388,04 €	72.000,00 €	100.388,04 €

Slika 2.11: Plan amortizacije

2.2.2 Krediti sa različitim anuitetima

Sada ćemo napraviti plan amortizacije za kredite, koji se otplaćuju tako da su im otplate jednake. Svaku otplatu možemo lako izračunati $B_j = \dfrac{Z}{n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom, računamo i anuitete $R_j = I_j + B$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zadatak 2.12 *Kredit od 60.000 RSD treba otplatiti za godinu dana uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 12%, uz*

a) *godišnje,*

b) *mesečno*

kapitalisanje i dvomesečne anuitete kod kojih su otplate jednake. Napraviti plan amortizacije.

Rešenje. a) Broj anuiteta je $n = 6$, pa je svaka otplata jednaka

$$B = \frac{60.000}{6} = 10.000{,}00 \text{ RSD}.$$

Kako je period kapitalisanja 6 puta veći od anuitetnog perioda, to se kamatna stopa za period od dva meseca računa kao konformna kamatna stopa

$$r = \left(1 + \frac{12\%}{1}\right)^{1/6} - 1 = 1{,}91\%.$$

Dalje je lako napraviti plan amortizacije, slika 2.12.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	60.000,00 RSD	1.144,06 RSD	10.000,00 RSD	11.144,06 RSD
2	50.000,00 RSD	953,38 RSD	10.000,00 RSD	10.953,38 RSD
3	40.000,00 RSD	762,70 RSD	10.000,00 RSD	10.762,70 RSD
4	30.000,00 RSD	572,03 RSD	10.000,00 RSD	10.572,03 RSD
5	20.000,00 RSD	381,35 RSD	10.000,00 RSD	10.381,35 RSD
6	10.000,00 RSD	190,68 RSD	10.000,00 RSD	10.190,68 RSD
		4.004,20 RSD	60.000,00 RSD	64.004,20 RSD

Slika 2.12: Plan amortizacije

b) U odnosu na zadatak pod a), ovde se razlikuje samo kamatna stopa za anuitetni period. Pošto u svakom anuitetnom periodu imamo dva kapitalisanja, onda se tražena kamatna stopa dobija kao efektivna

$$r = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{2} - 1 = 2{,}01\%.$$

Naravno, ova kamatna stopa je nešto veća u odnosu na stopu iz prvog dela zadatka, pa su samim tim i kamate i rate, u svakom periodu veće, što se može videti i u planu amortizacije, slika 2.13.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	60.000,00 RSD	1.206,00 RSD	10.000,00 RSD	11.206,00 RSD
2	50.000,00 RSD	1.005,00 RSD	10.000,00 RSD	11.005,00 RSD
3	40.000,00 RSD	804,00 RSD	10.000,00 RSD	10.804,00 RSD
4	30.000,00 RSD	603,00 RSD	10.000,00 RSD	10.603,00 RSD
5	20.000,00 RSD	402,00 RSD	10.000,00 RSD	10.402,00 RSD
6	10.000,00 RSD	201,00 RSD	10.000,00 RSD	10.201,00 RSD
		4.221,00 RSD	60.000,00 RSD	64.221,00 RSD

Slika 2.13: Plan amortizacije

U sledećem zadatku ćemo razmotriti kredite kod kojih anuiteti čine aritmetičku progresiju sa razlikom d. Prvi takav anuitet možemo izračunati na sledeći način

$$R_1 = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\left(Z - dQ\right),$$

gde je

$$Q = \frac{1}{r}\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - n(1+r)^{-n}\right). \tag{2.1}$$

Zadatak 2.13 *Kredit od 5.000 EUR treba vratiti za godinu dana mesečnim anuitetima koji se*

a) *povećavaju,*

b) *smanjuju*

za 100 evra pri mesečnom kapitalisanju i računajući 14% nominalnu godišnju kamatnu stopu. Odrediti prvi anuitet i napraviti plan amortizacije.

Rešenje. Kako je anuitetni period jednak periodu kapitalisanja, onda se kamatna stopa za mesec dana – relativna kamatna stopa

$$r = \frac{r_a}{m} = \frac{14\%}{12} = 1{,}17\%.$$

a) U ovom delu zadatka je razlika $d = 100$. Prvo ćemo izračunati Q pomoću (2.1)

$$Q = \frac{1}{1{,}17\%}\left(\frac{1-(1+1{,}17\%)^{-6}}{1{,}17\%} - 6(1+1{,}17\%)^{-6}\right) = 14{,}21,$$

a potom i prvu ratu

$$R_1 = \frac{1{,}17\%}{1-(1+1{,}17\%)^{-6}}(5000 - 14{,}21\cdot 1000) = 621{,}07 \text{ EUR}.$$

Svaka sledeća rata se lako računa

$$R_{j+1} = R_j + 100, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Plan amortizacije je prikazan na slici 2.14.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	5.000,00 €	58,33 €	562,74 €	621,07 €
2	4.437,26 €	51,77 €	669,30 €	721,07 €
3	3.767,96 €	43,96 €	777,11 €	821,07 €
4	2.990,84 €	34,89 €	886,18 €	921,07 €
5	2.104,66 €	24,55 €	996,52 €	1.021,07 €
6	1.108,14 €	12,93 €	1.108,14 €	1.121,07 €
		226,44 €	5.000,00 €	5.226,44 €

Slika 2.14: Plan amortizacije

b) Ovaj deo zadatka se rešava isto kao i deo pod a), samo je $d = -100$, slika 2.15.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	5.000,00 €	58,33 €	1.055,97 €	1.114,31 €
2	3.944,03 €	46,01 €	968,29 €	1.014,31 €
3	2.975,73 €	34,72 €	879,59 €	914,31 €
4	2.096,14 €	24,45 €	789,85 €	814,31 €
5	1.306,29 €	15,24 €	699,07 €	714,31 €
6	607,22 €	7,08 €	607,22 €	614,31 €
		185,84 €	5.000,00 €	5.185,84 €

Slika 2.15: Plan amortizacije

Razmotrimo, sada, i one kredite kod kojih anuiteti čine geometrijsku progresiju sa količnikom q. Prvi anuitet možemo izračunati kao

$$R_1 = Z(1+r)\frac{1-r_1}{1-r_1^n}, \qquad r_1 = \frac{q}{1+r},$$

gde je r kamatna stopa za period plaćanja, a n ukupan broj rata.

Zadatak 2.14 *Kredit od 5.000 EUR treba vratiti za pola godine mesečnim anuitetima tako da svaki anuitet bude duplo*

a) *veći,*

b) *manji,*

od prethodnog, računajući 9% nominalnu godišnju kamatnu stopu uz kvartalno kapitalisanje. Napraviti plan amortizacije.

Rešenje. a) Kako je kapitalisanje kvartalno, mesečna kamatna stopa je

$$r = \left(1 + \frac{9\%}{4}\right)^{1/3} - 1 = 0{,}74\%.$$

Kako je količnik $q = 2$, pa posledično $r_1 = \dfrac{2}{1+9\%} = 1{,}99$ i $n = 6$, to je prva rata

$$R_1 = 5.000(1+9\%)\frac{1-1{,}99}{1-1{,}99^6} = 82{,}42 \text{ EUR}.$$

Sada se plan amortizacije lako kreira, uz rekurentnu vezu $R_{i+1} = 2R_i,\ i = 1, 2, \ldots 5$, slika 2.16.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	5.000,00 €	37,22 €	45,20 €	82,42 €
2	4.954,80 €	36,89 €	127,95 €	164,84 €
3	4.826,85 €	35,93 €	293,74 €	329,67 €
4	4.533,11 €	33,75 €	625,60 €	659,35 €
5	3.907,51 €	29,09 €	1.289,61 €	1.318,70 €
6	2.617,90 €	19,49 €	2.617,90 €	2.637,39 €
		192,37 €	5.000,00 €	5.192,37 €

Slika 2.16: Plan amortizacije

b) Ovaj zadatak rešavamo analogno zadatku pod a), samo uz količnik $q = \dfrac{1}{2}$. Plan amortizacije ovog kredita je prikazan na slici 2.17.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	5.000,00 €	37,22 €	2.538,49 €	2.575,72 €
2	2.461,51 €	18,32 €	1.269,53 €	1.287,86 €
3	1.191,97 €	8,87 €	635,06 €	643,93 €
4	556,92 €	4,15 €	317,82 €	321,96 €
5	239,10 €	1,78 €	159,20 €	160,98 €
6	79,90 €	0,59 €	79,90 €	80,49 €
		70,94 €	5.000,00 €	5.070,94 €

Slika 2.17: Plan amortizacije

Zadatak 2.15 *Zajam od 30.000 EUR se otplaćuje 20 godina jednakim mesečnim anuitetima uz 6,1% nominalne godišnje kamatne stope i godišnjim kapitalisanjem. Posle 5 godina godišnja kamatna stopa je smanjena na 5,7%, vreme amortizacije produženo za još jednu godinu, a mesečni anuiteti se otplaćuju tako da su otplate jednake. Napraviti plan amortizacije ovog kredita.*

Rešenje. Kako je kapitalisanje godišnje, a nama treba kamatna stopa za jedan mesec, to ćemo kamatnu stopu za period plaćanja dobiti konformnim metodom, odnosno

$$r = \left(1 + \frac{6{,}1}{1}\right)^{1/12} - 1 = 0{,}49\%.$$

Broj rata je

$$n = 20 \cdot 12 = 240$$

i onda lako možemo dobiti i anuitet

$$R = \mathrm{PMT}(0{,}49\%; 240; -30000) = 213{,}82 \text{ EUR}.$$

Sada za prvih 5 godina (odnosno 60 rata), pravimo plan amortizacije sa prethodno izračunatim vrednostima, slika 2.18.

j	D_{j-1}	I_j	B_j	R_j
1	30.000,00 €	148,40 €	65,42 €	213,82 €
2	29.934,58 €	148,07 €	65,75 €	213,82 €
3	29.868,83 €	147,75 €	66,07 €	213,82 €
4	29.802,75 €	147,42 €	66,40 €	213,82 €
5	29.736,35 €	147,09 €	66,73 €	213,82 €
		...		
59	25.617,49 €	126,72 €	87,10 €	213,82 €
60	25.530,38 €	126,29 €	87,53 €	213,82 €
61	25.442,85 €			

Slika 2.18: Plan amortizacije – I deo

Nakon 60. uplate, neophodno je izračunati ostatak duga, koji se u našem planu amortizacije nalazi u 61. vrsti

$$D_{60} = D_{61-1} = 25.442{,}85 \text{ EUR}.$$

Vreme amortizacije je produženo za godinu dana, pa je ostalo ukupno $15 + 1 = 16$ godina do kraja otplate kredita, odnosno

$$n' = 16 \cdot 12 = 192$$

rate. Dakle, preostali dug je potrebno podeliti na 192 jednake otplate, odnosno

$$B' = B_{61} = B_{62} = \ldots = B_{252} = \frac{25.442{,}85}{192} = 132{,}51 \text{ EUR}.$$

Nova mesečna kamatna stopa je

$$r' = \left(1 + \frac{5{,}7\%}{1}\right)^{1/12} - 1 = 0{,}46\%.$$

Sada, lako dobijamo i ostatak plana amortizacije kredita, slika 2.19.

61	25.442,85 €	117,81 €	132,51 €	250,32 €
62	25.310,33 €	117,19 €	132,51 €	249,71 €
63	25.177,82 €	116,58 €	132,51 €	249,09 €
64	25.045,30 €	115,97 €	132,51 €	248,48 €
		...		
250	397,54 €	1,84 €	132,51 €	134,36 €
251	265,03 €	1,23 €	132,51 €	133,74 €
252	132,51 €	0,61 €	132,51 €	133,13 €
		19.640,39 €	30.000,00 €	49.640,39 €

Slika 2.19: Plan amortizacije – II deo

2.3 Evaluacija novčanih tokova

Sadašnja vrednost novčanog toka $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ uz kamatnu stopu r po intervalu plaćanja je

$$A(0) = x_0 + x_1(1+r)^{-1} + \cdots + x_{n-1}(1+r)^{-(n-1)} + x_n(1+r)^{-n}$$

Interna stopa prinosa novčanog toka $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ je broj r koji zadovoljava jednačinu

$$x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+r)^n} = 0,$$

odnosno to je ona kamatna stopa za koju je sadašnja vrednost novčanog toka jednaka nuli.

Zadatak 2.16 *Student je iznajmio stan za period oktobar tekuće – juni naredne godine. Ugovorena je mesečna stanarina u visini od 150 EUR i morao je da uplati stanarinu za dva meseca unapred, bez mogućnosti povratka novca. Nakon nekoliko dana je dobio ponudu za stan koji mu takođe odgovara i za čiji zakup bi plaćao 120*

EUR. Na osnovu sadašnje vrednosti novčanih tokova proceniti da li mu se isplati da iznajmi drugi stan. Napraviti procenu i za slučaj iznajmljivanja na godinu dana. Nominalna godišnja kamatna stopa je 6% i mesečno se kapitališe.

Rešenje. Kamatna stopa za mesec dana je $r = \dfrac{6\%}{12} = 0{,}5\%$. Ako je student ostao u prvom stanu onda je novčani tok koji predstavlja plaćene stanarine

$$s_1 = (-300, 0, -150, -150, -150, -150, -150, -150, -150).$$

Sadašnja vrednost ovog novčanog toka je

$$A_{s_1}(0) = -300 + \frac{-150}{(1+0{,}5\%)^2} + \frac{-150}{(1+0{,}5\%)^3} + \ldots + \frac{-150}{(1+0{,}5\%)^8} = -1.324{,}19 \text{ EUR}.$$

Ako je student pak izabrao drugi stan, onda je student na početku platio 420 EUR (300 EUR za prvi stan + 120 EUR za drugi), pa je nočani tok koji predstavlja plaćene stanarine za drugi stan dat sa

$$s_2 = (-420, -120, -120, -120, -120, -120, -120, -120, -120).$$

Sadašnja vrednost drugog novčanog toka je

$$A_{s_2}(0) = -450 + \frac{-120}{(1+0{,}5\%)^1} + \frac{-120}{(1+0{,}5\%)^2} + \ldots + \frac{-120}{(1+0{,}5\%)^8} = -1.358{,}76 \text{ EUR}.$$

Kako je $A_{s_1}(0) > A_{s_2}(0)$, isplativije je da ostane u prvom stanu.
Ove rezultate smo mogli dobiti i u Excel-u pomoću ugrađene funkcije "NPV", slika 2.20.
Funkcija "NPV" za unetu stopu r i niz elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$ računa sumu $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{(1+r)^n}$, pa je na tu vrednost potrebno još dodati i x_0.
Ako posmatramo iznajmljivanje stana na 12 meseci, onda dobijamo novčani tok

$$s_1' = (-300, 0, \underbrace{-150, -150, \ldots, -150}_{10})$$

za prvi stan, a za drugi

$$s_2' = (-420, \underbrace{-120, -120, \ldots, -120}_{11}).$$

Sada lako dobijamo i sadašnje vrednosti za ova dva novčana toka:

$$A_{s_1'}(0) = -1.752{,}30 \text{ EUR}, \qquad A_{s_2'}(0) = -1.701{,}24 \text{ EUR}.$$

Kako je $A_{s_1'}(0) < A_{s_2'}(0)$, to je u slučaju zakupa stana na 12 meseci, studentu povoljnije da iznajmi drugi stan.

	A	B	C	D	E
1		I stan	II stan		
2	i	x_i	x_i		
3	0	-300,00 €	-420,00 €		
4	1	0,00 €	-120,00 €		
5	2	-150,00 €	-120,00 €		
6	3	-150,00 €	-120,00 €		
7	4	-150,00 €	-120,00 €		
8	5	-150,00 €	-120,00 €		
9	6	-150,00 €	-120,00 €		
10	7	-150,00 €	-120,00 €		
11	8	-150,00 €	-120,00 €		
12		-1.324,19 €	-1.358,76 €	=NPV(6%/12;C4:C11)+C3	

Slika 2.20: Ugrađena funkcija "NPV"

Zadatak 2.17 *Za otvaranje frizerskog salona (oprema, adaptacija prostora i ostalo) neophodno je uložiti 1.200.000 RSD. Od ovog posla se na kraju svakog meseca očekuju prihodi od 485.000 RSD i rashodi od 320.000 RSD. Nakon punih 15 meseci rada očekuje se da ovaj posao (sa opremom) preuzme (kupi) drugi preduzetnik za 800.000 RSD. Odrediti sadašnju vrednost ove investicije, ako je nominalna godišnja kamatna stopa 10%, a kapitalisanje je mesečno.*

Rešenje. Za ovu investiciju, odgovarajući novčani tok je $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{15})$, gde je

$$x_0 = -1.200.000, \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_{14} = 485.000 - 320.000 = 165.000.$$

Nakon 14 punih meseci – na kraju 15-tog meseca uz mesečni prihod 165.000 se obavlja i prodaja u iznosu od 800.000 RSD, pa je

$$x_{15} = 165.000 + 800.000 = 965.000.$$

Kamatna stopa je $r = \dfrac{10\%}{12}$. Sadašnja vrednost ovog novčanog toka je

$$\begin{aligned} A_x(0) &= -1.200.000 + \frac{165.000}{1+r} + \frac{165.000}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{165.000}{(1+r)^{14}} + \frac{965.000}{(1+r)^{15}} \\ &= 1.823.871{,}77 \text{ RSD}. \end{aligned}$$

Ovo može lako da se dobije u Excel-u, slika 2.21.

	A	B	C	D
1	i	x_i		
2	0	-1.200.000,00 RSD		
3	1	165.000,00 RSD		
4	2	165.000,00 RSD		
5	3	165.000,00 RSD		
6	4	165.000,00 RSD		
		...		
14	12	165.000,00 RSD		
15	13	165.000,00 RSD		
16	14	165.000,00 RSD		
17	15	965.000,00 RSD		
18	A(0)	**1.823.871,77 RSD**	NPV(10%/12;B3:B17)+B2	

Slika 2.21: Novčani tok investicije

Zadatak 2.18 *Investitor ima mogućnost da uloži u jedan od dva ponuđena projekta:*

(i) *Za prvi projekat neophodno je ulaganje u visini od 100.000 EUR. Nakon svake godine, tokom pet godina trajanja investicije, očekuje se dobit od 30.000 EUR.*

(ii) *U drugi projekat treba uložiti 150.000 EUR, a nakon prve godine se očekuje dobit od 35.000 EUR i nakon svake sledeće godine se očekuje dobit za 3.400 evra veći nego što je bio ostvaren u prethodnoj godini. I ovaj projekat traje punih 5 godina.*

Proceniti u koji projekat je bolje investirati na osnovu:

a) *sadašnje vrednosti novčanog toka, ako je nominalna godišnja kamatna stopa 6%, a kapitalisanje godišnje;*

b) *interne stope prinosa.*

Rešenje. a) Novčane tokove koje reprezentuju ova dva projekta možemo lako kreirati u Excel-u, slika 2.22.
Sadašnje vrednosti ovih novčanih tokova su, redom,

$$A_1(0) = 26.370{,}91 \text{ EUR}, \qquad A_2(0) = 28.622{,}56 \text{ EUR}.$$

Kako je $A_1(0) < A_2(0)$ isplativije je uložiti u drugi projekat, na osnovu kriterijuma sadašnje vrednosti novčanog toka.

	A	B	C	D
1	Godine	Projekat 1	Projekat 2	
2	0	-100.000,00 €	-150.000,00 €	
3	1	30.000,00 €	36.000,00 €	
4	2	30.000,00 €	39.400,00 €	=C3+3400
5	3	30.000,00 €	42.800,00 €	
6	4	30.000,00 €	46.200,00 €	
7	5	30.000,00 €	49.600,00 €	
8		26.370,91 €	**28.622,56 €**	

Slika 2.22: Sadašnja vrednost novčanih tokova

b) Interne stope prinosa r_1 i r_2 za ova dva projekta, dobijaju se rešavanjem jednačina:

$$-100.000 + \frac{30.000}{1+r_1} + \frac{30.000}{(1+r_1)^2} + \frac{30.000}{(1+r_1)^3} + + \frac{30.000}{(1+r_1)^4} + \frac{30.000}{(1+r_1)^5} = 0$$

i

$$-150.000 + \frac{36.000}{1+r_2} + \frac{39.400}{(1+r_2)^2} + \frac{42.800}{(1+r_2)^3} + \frac{46.200}{(1+r_2)^4} + \frac{49.600}{(1+r_2)^5} = 0.$$

Rešenja ovih jednačina možemo dobiti i u Excel-u, pomoću funkcije "IRR" (Internal return of rate).

	A	B	C	D
1	Godine	Projekat 1	Projekat 2	
2	0	-100.000,00 €	-150.000,00 €	
3	1	30.000,00 €	36.000,00 €	
4	2	30.000,00 €	39.400,00 €	
5	3	30.000,00 €	42.800,00 €	
6	4	30.000,00 €	46.200,00 €	
7	5	30.000,00 €	49.600,00 €	=IRR(C2:C7)
8		**15,24%**	12,39%	

Slika 2.23: Interne stope prinosa novčanih tokova

Kako je $r_1 = 15{,}24\% > 12{,}39\% = r_2$, na osnovu ovog kriterijuma isplativije je ulaganje u prvi projekat.

Zadatak 2.19 *Dva projekta imaju sledeće novčane tokove:*

$$(-A_1, B_1, B_1, \ldots, B_1)$$

i

$$(-A_2, B_2, B_2, \ldots, B_2),$$

koji su iste dužine i važi A_1, A_2, B_1, B_2 *su pozitivne vrednosti. Dokazati da ako je*

$$\frac{B_1}{A_1} > \frac{B_2}{A_2},$$

da tada prvi projekat ima veću internu stopu prinosa od drugog projekta.

Rešenje. Neka je r_1 interna stopa prinosa za projekat $(-A_1, B_1, B_1, \ldots, B_1)$, a r_2 interna stopa prinosa za projekat $(-A_2, B_2, B_2, \ldots, B_2)$. Tada je

$$-A_1 + \frac{B_1}{1+r_1} + \frac{B_1}{(1+r_1)^2} + \ldots + \frac{B_1}{(1+r_1)^n} = 0,$$
$$-A_2 + \frac{B_2}{1+r_2} + \frac{B_2}{(1+r_2)^2} + \ldots + \frac{B_2}{(1+r_2)^n} = 0.$$

Ako uvedemo oznaku $c_i = \dfrac{1}{1+r_i}$, $i = 1, 2$, onda je

$$A_1 = B_1 c_1 + B_1 c_1^2 + \ldots + B_1 c_1^n,$$
$$A_2 = B_2 c_2 + B_2 c_2^2 + \ldots + B_2 c_2^n,$$

odnosno

$$\frac{A_1}{B_1} = c_1 + c_1^2 + \ldots + c_1^n,$$
$$\frac{A_2}{B_2} = c_2 + c_2^2 + \ldots + c_2^n.$$

Kako je iz uslova zadatka $\dfrac{B_1}{A_1} > \dfrac{B_2}{A_2}$, to je

$$c_1 + c_1^2 + \ldots + c_1^n < c_2 + c_2^2 + \ldots + c_2^n.$$

Neka je $p(c) = c + c^2 + \ldots + c^n$. Poslednju nejednakost, sada možemo zapisati kao $p(c_1) < p(c_2)$. Pošto su $c_1, c_2 > 0$, jasno je da iz $p(c_1) < p(c_2)$ sledi $c_1 < c_2$, odnosno

$$\frac{1}{1+r_1} < \frac{1}{1+r_2},$$

odakle je $r_1 > r_2$, što je trebalo i pokazati.

Zadatak 2.20 *Za dva novčana toka* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *i* $(y_0, y_1, ..., y_n)$ *kažemo da se ukrštaju ako važi* $x_0 < y_0$ *i*

$$\sum_{i=0}^{n} x_i > \sum_{i=0}^{n} y_i.$$

Neka su $A_x(c)$ *i* $A_y(c)$, *gde je* $c = \dfrac{1}{1+r}$ *sadašnje vrednosti dva novčana toka koji se ukrštaju. Dokazati da tada postoji vrednost* $d > 0$ *da je* $A_x(d) = A_y(d)$.

Rešenje. Sadašnje vrednosti novčanih tokova x i y su

$$A_x(c) = x_0 + x_1 c + x_2 c^2 + \ldots + x_n c^n,$$
$$A_y(c) = y_0 + y_1 c + y_2 c^2 + \ldots + y_n c^n.$$

Definišimo, sada, $p(c) = A_x(c) - A_y(c)$. Treba da pokažemo da postoji tačka d tako da je $p(d) = 0$. Jasno je da je

$$p(c) = (x_0 - y_0) + (x_1 - y_1)c + (x_2 - y_2)c^2 + \ldots + (x_n - y_n)c^n.$$

Jedan od uslova zadatka je da važi $x_0 < y_0$, odnosno $x_0 - y_0 < 0$. To znači i da je

$$p(0) = x_0 - y_0 < 0.$$

Drugi uslov je

$$\sum_{i=0}^{n} x_i > \sum_{i=0}^{n} y_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i > 0.$$

Sada je

$$p(1) = \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i > 0.$$

Iz $p(0) < 0$, $p(1) > 0$ i neprekidnosti funkcije p na $[0, 1]$ sledi da postoji $d \in (0, 1)$ takvo da je $p(d) = 0$, odnosno $A_x(d) - A_y(d) = 0$ odakle je $A_x(d) = A_y(d)$.

Glava 3

Obveznice

Prodajna cena obveznice je

$$P = \frac{F}{(1+\lambda/m)^n} + \frac{C}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{(1+\lambda/m)^n}\right),$$

gde je:

- F – nominalna vrednost obveznice (iznos kredita koji je poverilac platio emitentu za obveznicu);
- V – otkupna vrednost (pretpostavljaćemo da je $V = F$);
- r – godišnja kamatna stopa naznačena na obveznici (posmatraćemo samo obveznice sa fiksnom kamatnom stopom);
- m – broj kapitalisanja na godišnjem nivou;
- λ – prinos do dospeća.

Srednje vreme obveznice (duration) se dobija kao

$$D = \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc((1+y)^n - 1) + my},$$

gde je $c = \dfrac{r}{m}$ kupon stopa po periodu, a $y = \dfrac{\lambda}{m}$ prinos po periodu i n ukupan broj perioda do dospeća obveznice.

Modifikovano srednje vreme obveznice je

$$D_m = \frac{1}{1+\lambda/m} D.$$

Konveksnost obveznice je

$$K = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\lambda^2} = \frac{1}{P(1+\lambda/m)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)A(t_k)}{m^2},$$

gde je $A(t_k)$ sadašnja vrednost isplate koja dospeva u trenutku t_k.

Zadatak 3.1 *Obveznica nominalne vrednosti 3.000 USD, sa kamatnom stopom 6%, kvartalnim kuponima i datumom dospeća 1.10.2025, kupljena je 1.1.2021. uz prinos kupca 4%. Odrediti prodajnu cenu obveznice i sadašnji prinos.*

Rešenje. Kako je nominalna vrednost $F = 3.000$, a kamatna stopa 6%, to je

$$C = 6\% \cdot 3000 = 180 \text{ USD}$$

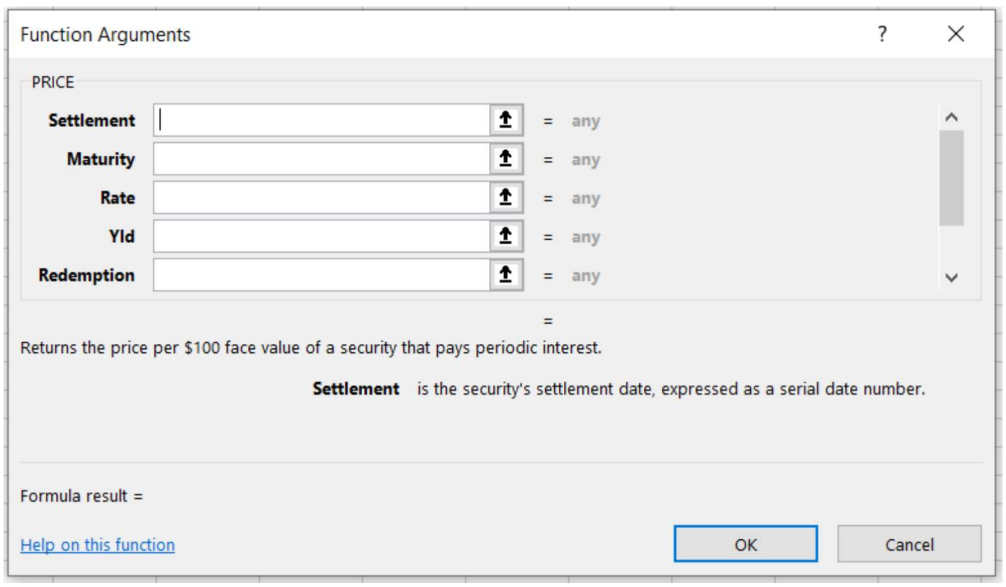
i taj iznos je podeljen u 4 jednake isplate – 4 kvartalna kupona po

$$\frac{C}{m} = \frac{180}{4} = 45 \text{ USD}.$$

Prinos je $\lambda = 4\%$, a ukupan broj kupona je $n = 19$, pa je

$$P = \frac{3000}{(1 + 4\%/4)^{19}} + \sum_{k=1}^{19} \frac{45}{(1 + 4\%/4)^k} = 3.258{,}39 \text{ USD}.$$

Prodajnu cenu obveznice možemo izračunati i preko ugrađene funkcije "PRICE" (slika 3.1).



Slika 3.1: Funkcija "PRICE"

Ova funkcija ima 6 argumenata, od kojih je obavezan unos za (bar) 3 od prva četiri:

- "Settlement" – datum prodaje obveznice;
- "Maturity" – datum dospeća obveznice;
- "Rate" – kamatna stopa;
- "Yld" – prinos;

- "Redemption" – otkupna cena obveznice na 100 USD nominalne vrednosti obveznice. Mi ćemo isključivo posmatrati obveznice kod kojih je otkupna cena jednaka nominalnoj vrednosti obveznice, pa ćemo u ovo polje pisati 100;
- "Basis" – način obračuna broja dana u mesecu i godini. Ako u ovo polje ne upišemo ništa ili upišemo nulu – računa se 30 dana u mesecu i 360 u godini, a ako se u ovo polje unese 1 – računa se tačan broj dana u mesecu i u godini.

"PRICE" računa prodajnu cenu obveznice na 100 USD nominalne vrednosti. Dakle, ako je nominalna vrednost obveznice F, vrednost koju daje ova funkcija, treba pomnožiti još sa $\frac{F}{100}$, da bismo dobili prodajnu cenu P. Dakle,

$$P = 30 \cdot \text{PRICE}(\text{"1.1.2021"}; \text{"1.10.2025"}; 6\%; 4\%; 100; 2; 1) = 3.258{,}39 \text{ USD}.$$

Ovu funkciju možemo koristiti isključivo kada se dan prodaje obveznice poklapa sa datumom dospeća jednog od kupona, što jeste slučaj u ovom zadatku.

Zadatak 3.2 *Obveznica nominalne vrednosti 3.000 USD, sa kamatnom stopom 4%, kvartalnim kuponima i datumom dospeća 21.12.2025, kupljena je 31.3.2018. uz prinos od 5%. Odrediti prodajnu cenu obveznice.*

Rešenje. Datum prodaje se nalazi unutar perioda jednog od kvartalnih kupona, tačnije između 21.3.2018. i 21.6.2018. Lako dobijamo da je godišnja kamata

$$C = 4\% \cdot 3000 = 120 \text{ USD},$$

podeljena u četiri jednaka iznosa $\frac{C}{m} = 30$ USD. Izračunaćemo prvo prodajnu cenu P_1 na dan 21.3.2018. Tada je broj kupona do dospeća $n = 31$, pa je

$$P_1 = \frac{3000}{(1+5\%/4)^{31}} + \sum_{k=1}^{31} \frac{30}{(1+5\%/4)^k} = 2.808{,}23 \text{ USD}.$$

Na ovaj iznos treba dodati i osvojenu kamatu (deo iznosa koji se naplaćuje tokom ovog kupon perioda pripada prodavcu obveznice). Broj dana od prvog dana kupon perioda do dana prodaje (21.3.2018. – 31.3.2018.) je $n_1 = 10$, dok je ukupan broj dana u tom kupon periodu $n_0 = 92$, pa je

$$AI = \frac{n_1}{n_0}\frac{C}{m} = \frac{10}{92}30 = 3{,}26 \text{ USD}.$$

Sada znamo i prodajnu cenu ove obveznice

$$P = P_1 + AI = 2.811{,}49 \text{ USD}.$$

Zadatak 3.3 *Obveznica nominalne vrednosti 1.300 USD, sa kamatnom stopom 5%, polugodišnjim kuponima i datumom dospeća 1.1.2027. godine, kupljena je 1.7.2021. po ceni od 1.250 USD. Odrediti prinos do dospeća obveznice.*

Rešenje. Kako polugodišnji kuponi za ovu obveznicu dospevaju svakog 1.1. i 1.7. u godini (datum dospeća je 1.7.) to se datum prodaje poklapa sa datumom dospeća obveznice. Iznos svakog kupona je

$$\frac{C}{m} = \frac{5\% \cdot 1300}{2} = 32{,}50 \text{ USD}.$$

Sada možemo da kreiramo odgovarajući novčani tok

$$(-1250; 32{,}50; 32{,}50; \ldots; 32{,}50; 1332{,}50)$$

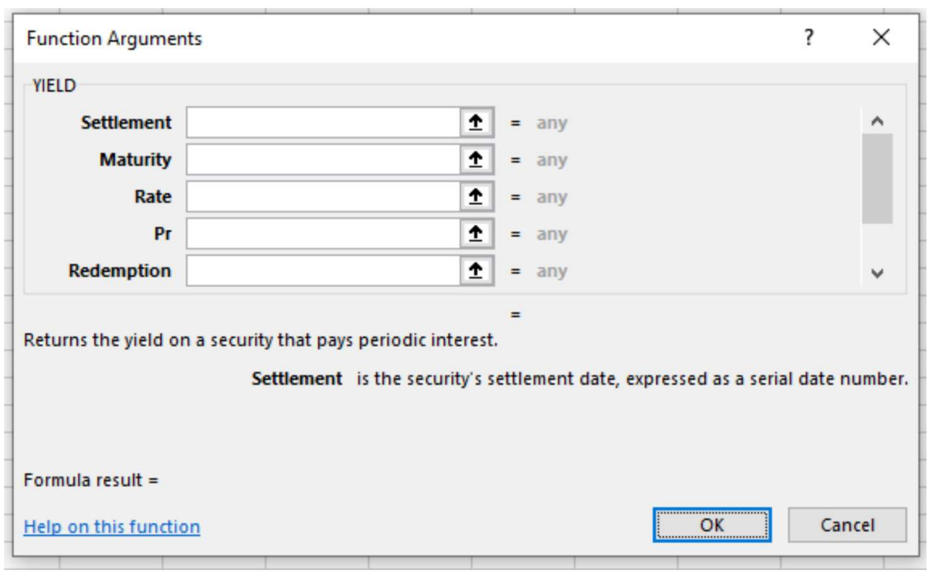
čija će interna stopa prinosa biti, u stvari, prinos do dospeća po periodu, odnosno $\frac{\lambda}{2}$. Dakle,

$$\frac{\lambda}{2} = \mathrm{IRR}(-1250; 32{,}50; 32{,}50; \ldots; 32{,}50; 1332{,}50) = 2{,}91\%,$$

odnosno

$$\lambda = 5{,}83\%.$$

Traženi prinos smo mogli da dobijemo i pomoću ugrađene funkcije ”YIELD”, slika 3.2.



Slika 3.2: Funkcija ”YIELD”

Uz već viđene argumente (koje ima i funkcija PRICE), ovde se pojavljuje i jedan novi ”Pr”, koji predstavlja prodajnu cenu obveznice na 100 jedinica nominalne vrednosti. U našem zadatku, vrednost za ”Pr” možemo dobiti preko direktne proporcije iz koje dobijamo da je

$$\mathrm{Pr} = \frac{1250 \cdot 100}{1300} = \frac{1250}{13}.$$

Dalje je

$$\lambda = \text{YIELD}(\text{"}1.7.2021\text{"}; \text{"}1.1.2027\text{"}; 5\%; 1250/13; 2; 1) = 5{,}83\%.$$

Zadatak 3.4 *Odrediti cenu obveznice sa godišnjim kuponima, čija je nominalna vrednost 100 USD rok dospeća 30 godina za različite vrednosti prinosa do dospeća:*

a) 0%, b) 1%, c) 2%, d) 3%,

e) 5%, f) 10%, g) 20%.

i različite kamatne stope:

i) 5%, ii) 10%, iii)20%.

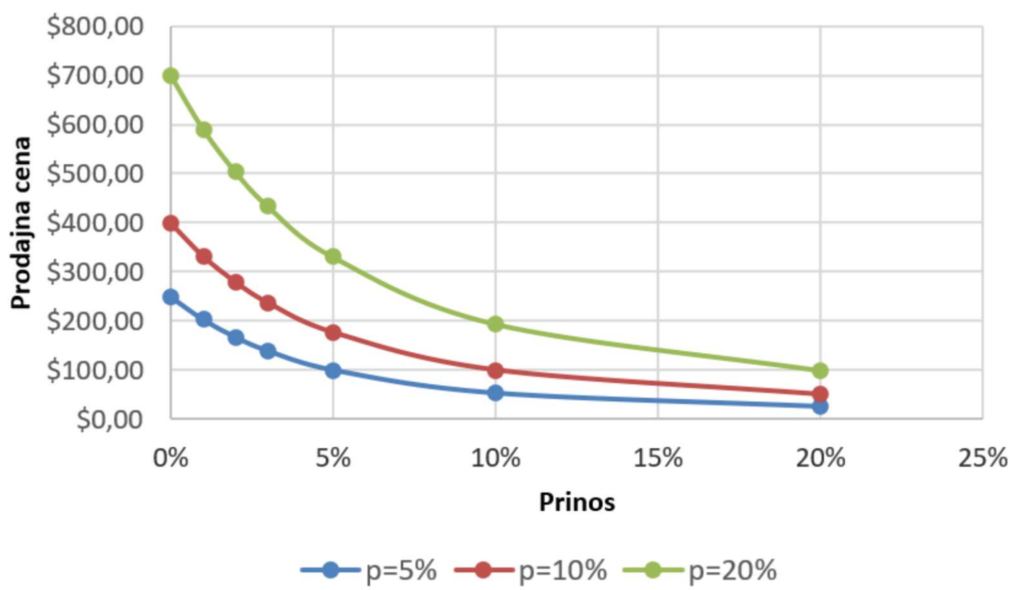
Rešenje. Pomoću ugrađene funkcije PRICE možemo lako popuniti tabelu sa traženim vrednostima, slika 3.3.

B2 =PRICE("1.1.2000";"1.1.2030";$A2;B$1;100;1;1)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	p \ λ	0%	1%	2%	3%	5%	10%	20%
2	5%	$250,00	$203,23	$167,19	$139,20	$100,00	$52,87	$25,32
3	10%	$400,00	$332,27	$279,17	$237,20	$176,86	$100,00	$50,21
4	20%	$700,00	$590,35	$503,14	$433,21	$330,59	$194,27	$100,00

Slika 3.3: Prodajna cena obveznice

Kretanje prodajne cene obveznice u zavisnosti od prinosa, za različite kamatne stope, prikazano je na slici 3.4.



Slika 3.4: Prodajna cena obveznice

Zadatak 3.5 *Odrediti cenu obveznice na dan 18.8.2021. čija je nominalna vrednost 100 USD, godišnji kuponi i kamatna stopa 10%, za različite vrednosti prinosa do dospeća:*

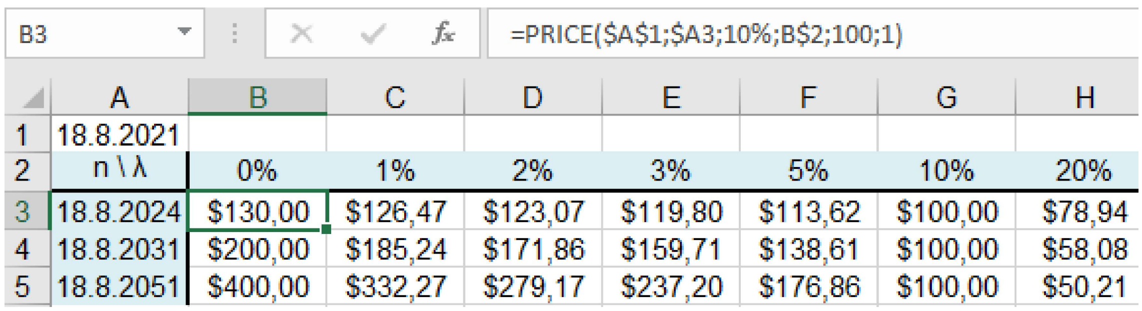
a) 0%, *b) 1%,* *c) 2%,* *d) 3%,*

e) 5%, *f) 10%,* *g) 20%.*

i različitih rokova dospeća:

i) 18.8.2024, *ii) 18.8.2031,* *iii) 18.8.2051.*

Rešenje. I ovaj zadatak možemo rešiti pomoću ugrađene funkcije PRICE. Lako možemo kreirati i popuniti tablicu koja će nam dati tražene podatke, videti sliku 3.5.

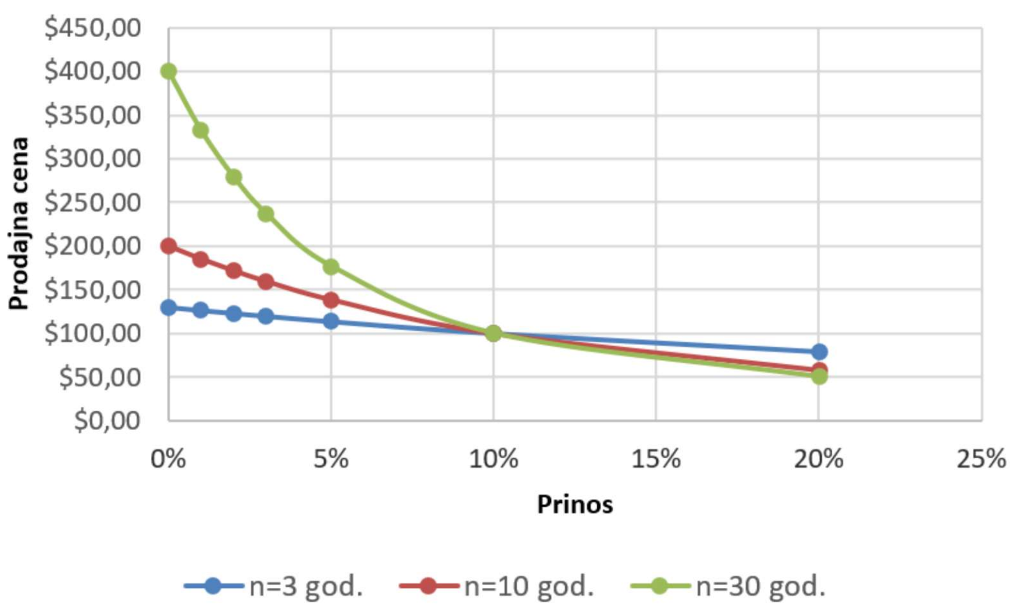


B3 =PRICE(A1;$A3;10%;B$2;100;1)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	18.8.2021							
2	n \ λ	0%	1%	2%	3%	5%	10%	20%
3	18.8.2024	$130,00	$126,47	$123,07	$119,80	$113,62	$100,00	$78,94
4	18.8.2031	$200,00	$185,24	$171,86	$159,71	$138,61	$100,00	$58,08
5	18.8.2051	$400,00	$332,27	$279,17	$237,20	$176,86	$100,00	$50,21

Slika 3.5: Prodajna cena obveznice

Kretanje cene obveznice, u zavisnosti od prinosa, sa različitim rokovima dospeća, prikazano je na slici 3.6.



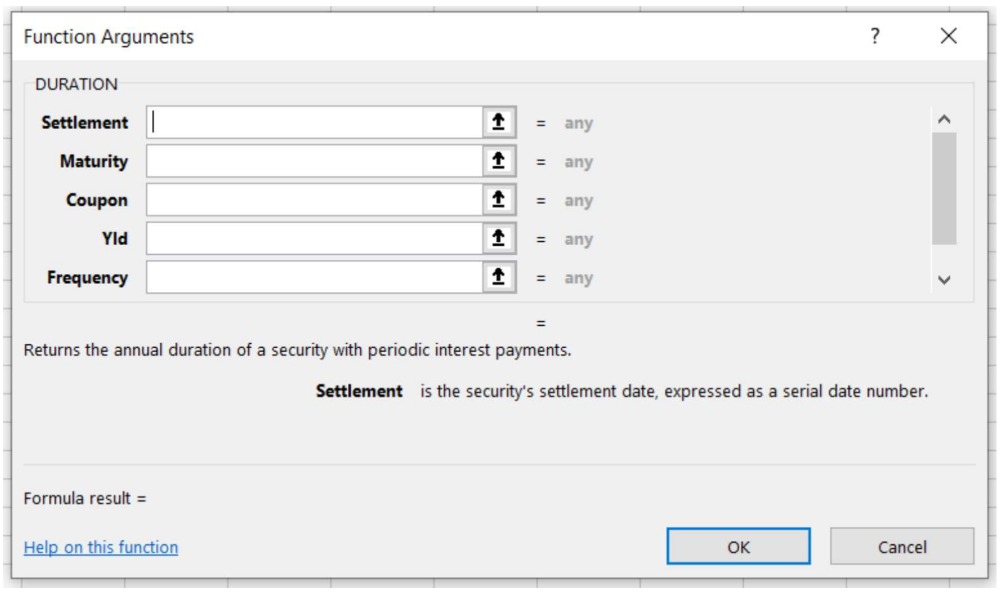
Slika 3.6: Prodajna cena obveznice

Zadatak 3.6 *Za obveznicu sa godišnjim kuponima, nominalne vrednosti 300 USD, sa kamatnom stopom 7% koja ima rok dospeća 10 godina, odrediti srednje vreme obveznice, ako je prinos do dospeća 9%.*

Rešenje. Jasno je da je $c = r = 7\%$, $y = \lambda = 9\%$, $m = 1$ i $n = 10$, pa je srednje vreme

$$\begin{aligned} D &= \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc((1+y)^n-1)+my} \\ &= \frac{1+9\%}{9\%} - \frac{1+9\%+10(7\%-9\%)}{7\%((1+9\%)^{10}-1)+9\%} = 7{,}32. \end{aligned}$$

Srednje vreme možemo dobiti, takođe i preko ugrađene funkcije "DURATION".



Slika 3.7: Funkcija "DURATION"

U odnosu na prethodne funkcije, koje smo obradili u ovoj glavi, jedini novi argument u funkciji "DURATION" je "Coupon" – iznos godišnje kamatne stope. Dakle,

$$D = \text{DURATION}(\text{"1.1.2000"}; \text{"1.1.2010"}; 7\%; 9\%; 1; 1) = 7{,}32.$$

Kako nisu navedeni tačni datumi prodaje i dospeća ove obveznice, u ovu funkciju možemo da unesemo bilo koja dva datuma između kojih je vremenski period od 10 godina. Mi smo, zbog jednostavnijeg računa, ovde uzeli datume 1.1.2000. i 1.1.2010.

Zadatak 3.7 *Odrediti srednje vreme obveznice sa polugodišnjim kuponima, ako je prinos do dospeća 8%, a kupon stopa po periodu:*

a) 1%, *b) 2%,* *c) 5%,* *d) 10%*

i rok dospeća

i) 1 godina, *ii) 2 godine,* *iii) 10 godina,*

iv) 50 godina, *v) 100 godina,* *vi) 1000 godina.*

Rešenje. Ovaj zadatak možemo da rešimo u Excel-u pomoću ugrađene funkcije "DURATION", ako kreiramo tablicu sa podacima koji su dati. Neka nam je datum prodaje obveznice 1.1.2021. Prinos je $\lambda = 8\%$, a kako su date stope po periodu c, a kapitalisanje je polugodišnje, onda je $r = 2c$. Sada lako popunjavamo tabelu, slika 3.8.

C3 =DURATION("1.1.2021";$B3;2*C$2;7%;2)

Rok dospeća		Kupon stope po periodu (c)			
		1%	2%	5%	10%
1	1.1.2022	0,99	0,99	0,98	0,96
2	1.1.2023	1,97	1,94	1,87	1,77
10	1.1.2031	8,83	8,08	6,89	6,07
50	1.1.2071	16,96	15,15	13,97	13,55
100	1.1.2121	14,99	14,84	14,74	14,71
1000	1.1.3021	14,79	14,79	14,79	14,79

Slika 3.8: Srednje vreme obeveznice u zavisnosti od kamatne stope i roka dospeća.

Zadatak 3.8 *Odrediti graničnu vrednost srednjeg vremena obveznice kada rok dospeća teži beskonačno velikom broju.*

Rešenje. Neophodno je naći

$$\lim_{n\to\infty} D = \lim_{n\to\infty} \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc((1+y)^n-1)+my}.$$

Ukoliko je $c = y$, onda je ova granična vrednost trivijalno jednaka $\dfrac{1+y}{my}$. Razmotrimo, zato samo slučaj $c \neq y$. Kako je n prirodan broj, tražimo graničnu vrednost niza. Da bismo mogli da iskoristimo Lopitalovo pravilo, umesto ovog niza posmatraćemo odgovarajuću funkciju i njenu graničnu vrednost

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+x(c-y)}{mc((1+y)^x-1)+my},$$

gde je $x \in R$. Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+y}{my} = \dfrac{1+y}{my}$, neophodno je još samo da nađemo

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{1+y+x(c-y)}{mc((1+y)^x-1)+my}.$$

Ovaj limes je oblika ”$\frac{\pm\infty}{\infty}$”. Kako su i funkcije u brojiocu i imeniocu diferencijabilne, možemo primeniti Lopitalovo pravilo, pa je

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{c-y}{mc(1+y)^x \ln(1+y)} = 0,$$

odnosno dobijamo da je

$$\lim_{x\to\infty} D = \frac{1+y}{my}.$$

Kako onda i odgovarajući niz konvergira ka istoj vrednosti kao i ova funkcija, dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} D = \frac{1+y}{my}.$$

Zadatak 3.9 *U tabeli su date tri obveznice sa godišnjim kuponima i prinosom do dospeća 15% (iznosi su prikazani u USD).*

	Obveznica		
Isplate krajem	*A*	*B*	*C*
1.godine	*120*	*0*	*50+1000*
2.godine	*120+1200*	*0*	*0*
3.godine	*0*	*0+2000*	*0*

a) *Odrediti prodajne cene obveznica.*

b) *Odrediti srednja vremena obveznica.*

c) *Ako na kraju druge godine treba da vratite dug od 64.000 USD, konstruisati portfolio tako da dug bude podmiren.*

Rešenje. a) Iz tabele se može zaključiti da je rok dospeća obveznice A dve godine, da je iznos godišnjih kupona $C = 120$ USD i da je nominalna vrednost ove obveznice $F = 1200$ USD. Prodajna cena ove obveznice je

$$P_A = \frac{C}{(1+\lambda/m)^1} + \frac{C+F}{(1+\lambda/m)^2} = \frac{120}{(1+15\%/1)^1} + \frac{1320}{(1+15\%/1)^2} = 1.102{,}46 \text{ USD}.$$

Ovaj rezultat smo mogli dobiti i pomoću ugrađene funkcije ”PRICE”. Kako je $r = \frac{C}{F} = \frac{120}{1200} = 10\%$, to je

$$P_A = 12 \cdot \text{PRICE}(\text{"1.1.2000"}; \text{"1.1.2002"}; 10\%; 15\%; 100; 1) = 1.102{,}46 \text{ USD}.$$

Slično dobijamo i prodajne cene za preostale dve obveznice:

$$P_B = \frac{2000}{(1+15\%/1)^3} = 1.315{,}03 \text{ USD}$$

i

$$P_C = \frac{1050}{(1+15\%/1)^1} = 913{,}04 \text{ USD}.$$

b) Srednje vreme obveznice A možemo dobiti kao

$$D_A = \frac{\frac{1}{1}\frac{120}{(1+15\%/1)^1} + \frac{2}{1}\frac{1320}{(1+15\%/1)^2}}{P_A} = 1{,}91,$$

ili pomoću ugrađene funkcije

$$D_A = \text{DURATION}(\text{"1.1.2000"}; \text{"1.1.2002"}; 10\%; 15\%; 1) = 1{,}91.$$

Srednje vreme obveznice B takođe možemo dobiti na isti način. Međutim, kako je ova obveznica sa nula kuponima, znamo da je njeno srednje vreme jednako vremenu dospeća, tj. $D_B = 3$. Takođe, lako dobijamo da je $D_C = 1$.

c) Da bismo konstruisali portfolio uzećemo obveznice A i B – srednje vreme jedne obveznice je veće, a druge manje od vremena dospeća duga (dve godine). Prvo je neophodno da izračunamo sadašnju vrednost duga

$$A(0) = \frac{64.000}{(1+15\%/1)^2} = 48.393{,}19 \text{ USD}.$$

Označimo sa V_A i V_B iznose za koje ćemo kupiti pomenute obveznice. Tada je

$$\begin{aligned} V_A + V_B &= A(0), \\ D_A V_A + D_B V_B &= 2A(0). \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema lako dobijamo da je

$$V_B = \frac{2 - D_A}{D_B - D_A} A(0) = \frac{2 - 1{,}91}{3 - 1{,}91} 48.393{,}19 = 4.184{,}37 \text{ USD},$$

odnosno

$$V_A = A(0) - V_B = 48.393{,}19 - 4.184{,}37 = 44.208{,}82 \text{ USD}.$$

Ako dalje sa N_A i N_B označimo količinu kupljenih obveznica A i B, redom, dobijamo da je:

$$N_A = \frac{V_A}{P_A} = \frac{44.208{,}82}{1.102{,}46} = 40{,}10 \approx 40$$

i

$$N_B = \frac{V_B}{P_B} = \frac{4.184{,}37}{1.315{,}03} = 3{,}18 \approx 3.$$

Zadatak 3.10 *Dužnik ima obavezu da 22.8.2023. vrati dug u iznosu od 770.000 RSD. Na tržištu dana 22.8.2021. nude se dve vrste obveznica:*

- *obveznica A koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 2.500 RSD, kamatnu stopu 5%, datum dospeća 22.8.2022. godine;*
- *obveznica B koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 2.000 RSD, kamatnu stopu 9% i datum dospeća 22.2.2024. godine;*

Konstruisati portfolio u cilju zaštite od rizika promene kamatnih stopa koji će omogućiti vraćanje duga na vreme, ako je prodajna cena obveznice A 2.490 dinara (na dan 22.8.2021.), a prinos do dospeća za obe obveznice je isti.

Rešenje. Da bismo konstruisali odgovarajući portfolio, moramo prvo izračunati prodajne cene i srednja vremena za obe obveznice, a za to moramo prvo izračunati prinos do dospeća λ. Vrednost $\dfrac{\lambda}{m}$ je interna stopa prinosa novčanog toka

$$(-2.490; 62{,}5; 2.562{,}5)$$

(vrednost polugodišnjih kupona je $\dfrac{5\%}{2}2500 = 62{,}50$ RSD). Lako se dobija preko ugrađene funkcije

$$\frac{\lambda}{2} = \mathrm{IRR}(-2490; 62{,}5; 2562{,}5),$$

odakle dobijamo da je $\lambda = 5{,}42\%$.
Sada možemo dobiti i prodajnu cenu za obveznicu B.

$$P_B = 20 \cdot \mathrm{PRICE}(\text{"22.8.2021"}; \text{"22.2.2024"}; 9\%; 5{,}42\%; 100; 2; 1) = 2.165{,}50 \text{ RSD}.$$

Preko ugrađene funkcije možemo dobiti i srednja vremena ovih obveznica:

$$D_A = \mathrm{DURATION}(\text{"22.8.2021"}; \text{"22.8.2022"}; 5\%; 5{,}42\%; 2; 1) = 0{,}99$$

i

$$D_B = \mathrm{DURATION}(\text{"22.8.2021"}; \text{"22.2.2024"}; 9\%; 5{,}42\%; 2; 1) = 2{,}30.$$

Izračunajmo i sadašnju vrednost duga.

$$A(0) = \frac{770.000}{\left(1 + \frac{5{,}42\%}{2}\right)^4} = 691.943{,}95 \text{ RSD}.$$

Kao i prethodnom zadatku, sledi:

$$V_A = \frac{2 - D_B}{D_A - D_B} A(0) = \frac{2 - 2{,}30}{0{,}99 - 2{,}30} 691.943{,}95 = 159.385{,}56 \text{ RSD}$$

i

$$V_B = A(0) - V_A = 691.943{,}95 - 159.385{,}56 = 532.558{,}40 \text{ RSD}.$$

Količine kupljenih obveznica su:

$$N_A = \frac{V_A}{P_A} = \frac{159.385{,}56}{2.490{,}00} = 64{,}01 \approx 64$$

i

$$N_B = \frac{V_B}{P_B} = \frac{532.558{,}40}{2.165{,}50} = 245{,}93 \approx 246.$$

Zadatak 3.11 *Ako je kapitalisanje kontinuirano, srednje vreme obveznice postaje*

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \mathrm{e}^{-\lambda t_k} c_k}{P},$$

gde je λ prinos do dospeća i

$$P = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda t_k} c_k.$$

Izraziti $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}$ u zavisnosti od D i P.

Rešenje. Lako dobijamo da je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda t_k} c_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t_k} c_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda t_k}(-t_k) c_k = -\sum_{k=1}^{n} t_k \mathrm{e}^{-\lambda t_k} c_k = -PD.\end{aligned}$$

Zadatak 3.12 *U tabeli su date tri obveznice sa godišnjim kuponima i prinosom do dospeća 12%.*

	Obveznica		
Isplate krajem	*A*	*B*	*C*
1. godine	*100*	*60*	*0*
2. godine	*100*	*60*	*0*
3. godine	*100+1000*	*60+1100*	*0+1400*

a) *Odrediti srednja vremena obveznica.*

b) *Odrediti modifikovana srednja vremena obveznica.*

c) *Odrediti konveksnost obveznica.*

Rešenje. a) Kako je $c = \frac{10}{100} = 10\%$, a $y = 12\%$ i $n = 3$, srednje vreme obveznice A možemo izračunati kao

$$D_A = \frac{1 + 12\%}{1 \cdot 12\%} - \frac{1 + 12\% + 3(10\% - 12\%)}{1 \cdot 10\%((1 + 12\%)^3 - 1) + 1 \cdot 12\%} = 2{,}73.$$

Analogno, dobijamo i srednja vremena za preostale dve obveznice:

$$D_B = \frac{1 + 12\%}{1 \cdot 12\%} - \frac{1 + 12\% + 3(6\% - 12\%)}{1 \cdot 6\%((1 + 12\%)^3 - 1) + 1 \cdot 12\%} = 2{,}83$$

i

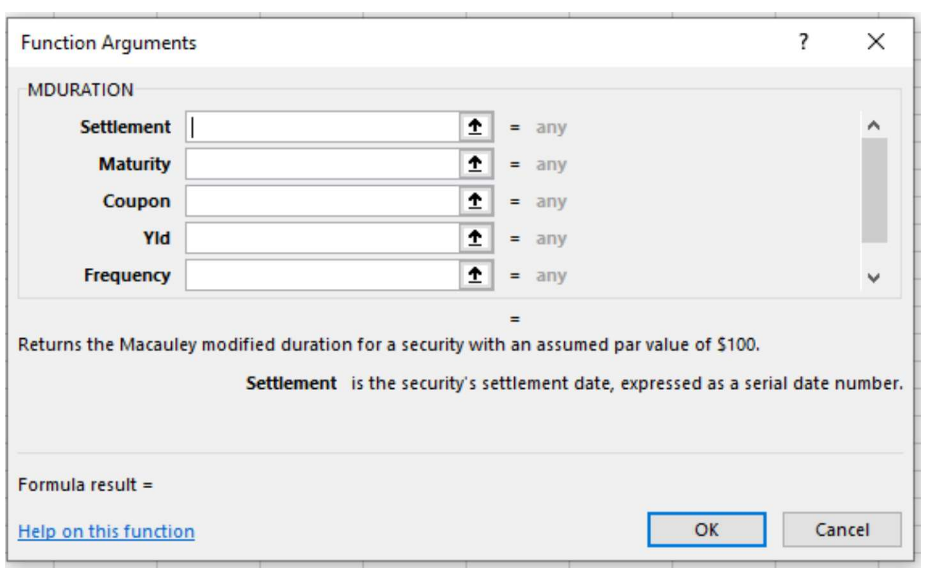
$D_C = 3$ (obveznica sa nula kuponima, pa je srednje vreme jednako vremenu dospeća).

b) Kako je $D_m = \dfrac{1}{1 + \lambda/m} D$, to je

$$D_{m,A} = \frac{1}{1 + 12\%/1} 2{,}73 = 2{,}44.$$

Modifikovano srednje vreme možemo dobiti i pomoću ugrađene funkcije "MDURATION", slika 3.9. Argumenti ove funkcije su potpuno isti kao i kod funkcije "DURATION." Dakle,

$$D_{m,A} = \text{MDURATION}(\text{"1.1.2000"}; \text{"1.1.2003"}; 10\%; 12\%; 1) = 2{,}44.$$



Slika 3.9: Funkcija "MDURATION"

Na isti način možemo dobiti i modifikovana srednja vremena preostale dve obveznice:

$$D_{m,B} = \frac{1}{1 + 12\%/1} 2{,}83 = 2{,}53$$

i

$$D_{m,C} = \frac{1}{1 + 12\%/1} 3 = 2{,}68.$$

c) Kao i u prethodnim zadacima, najpre računamo cenu obveznice A.

$$P_A = \frac{1000}{(1 + 12\%/1)^3} + \frac{100}{12\%} \left(1 - \frac{1}{(1 + 12\%/1)^3}\right) = 951{,}96.$$

Konveksnost se sada može izračunati kao

$$\begin{aligned} K_A &= \frac{1}{P(1 + \lambda/m)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)A(t_k)}{m^2} = \\ &= \frac{1}{951{,}96(1 + 12\%/1)^2} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 100}{1^2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 100}{1^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 1100}{1^2}\right) = 8{,}42. \end{aligned}$$

Analogno možemo dobiti i konveksnost za obveznice B i C. Prvo izračunamo njihove prodajne cene:

$$P_B = \frac{1100}{(1 + 12\%/1)^3} + \frac{60}{12\%} \left(1 - \frac{1}{(1 + 12\%/1)^3}\right) = 927{,}07 \text{ USD}$$

i

$$P_C = \frac{1400}{(1 + 12\%/1)^3} = 996{,}49 \text{ USD},$$

a potom i konveksnost:

$$K_B = \frac{1}{927{,}07(1 + 12\%/1)^2} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 60}{1^2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 60}{1^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 1160}{1^2}\right) = 8{,}86$$

i

$$K_C = \frac{1}{996{,}49(1 + 12\%/1)^2} \frac{3 \cdot 4 \cdot 1400}{1^2} = 9{,}57.$$

Zadatak 3.13 *Odrediti konveksnost obveznice sa nula kuponima, rokom dospeća T, pri čemu se kontinuirano kapitališe.*

Rešenje. U slučaju kada imamo obveznicu sa nula kuponima ($c_k = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $c_n = F$) i kontinuiranim kapitalisanjem (videti Zadatak 3.11), tada je prodajna cena $P = F\mathrm{e}^{-\lambda T}$. Sada je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\lambda^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(F\mathrm{e}^{-\lambda T}(-T)\right) \\ &= -FT\mathrm{e}^{-\lambda T}(-T) = FT^2\mathrm{e}^{-\lambda T} = PT^2. \end{aligned}$$

Sledi

$$K = \frac{1}{P} \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{1}{P} PT^2 = T^2.$$

Glava 4

Funkcije u ekonomiji

Funkcija tražnje se definiše kao funkcija cene P nekog artikla (robe ili usluge)

$$Q_d = f(P)$$

i predstavlja količinu artikla za kojim postoji tražnja na tržištu.
Funkcija ponude se definiše kao funkcija cene P nekog artikla (robe ili usluge):

$$Q_s = g(P)$$

i predstavlja količinu artikla koji se nudi na tržištu.
Ponuda i tražnja su u ravnoteži ako je

$$Q_d = Q_s.$$

Funkcija ukupnih prihoda je

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q, \qquad Q = Q_d.$$

Funkcija prosečnih prihoda je

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q}, \qquad Q > 0$$

i predstavlja cenu jedinične količine artikla.
Funkcija prosečnih troškova je

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = h(Q), \qquad Q > 0.$$

Funkcija ukupnih troškova je

$$TC(Q) = C_0 + C(Q), \qquad Q = Q_s,$$

gde su:

- C_0 – fiksni troškovi;
- $C(Q)$ – varijabilni troškovi koji se obračunavaju za sve proizvedene (ponuđene) proizvode.

Funkcija dobiti (profita) je

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q).$$

Funkcija marginalnog prihoda je

$$MR(Q) = TR'(Q).$$

Funkcija marginalnog troška je

$$MC(Q) = TC'(Q).$$

Elastičnost u ekonomiji se definiše kao

$$\varepsilon_y^x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y(x)} y'(x).$$

Ako je:

- $\varepsilon_y^x = 0$, onda je veličina y **potpuno (savršeno) neelastična** prema veličini x;
- $|\varepsilon_y^x| < 1$, onda je veličina y **neelastična** prema veličini x;
- $|\varepsilon_y^x| = 1$, onda je veličina y **indiferentno elastična** prema veličini x;
- $|\varepsilon_y^x| > 1$, onda je veličina y **elastična** prema veličini x.

Zadatak 4.1 *Po ceni od 1000 RSD tražnja neke robe je 450 jedinica robe, a po ceni 1600 RSD tražnja iznosi 150 jedinica robe.*

a) *Odrediti funkciju tražnje oblika* $Q_d = \dfrac{a}{P+b}$, *gde su* a, b *konstante.*

b) *Izračunati tražnju koja odgovara ceni od 1200 dinara.*

c) *Za koju cenu će tražnja biti 520 jedinica robe?*

Rešenje. a) U funkciji $Q_d(P)$ neophodno je naći konstante a i b iz uslova datih u zadatku:

$$Q_d(1000) = 450 \quad \text{i} \quad Q_d(1600) = 150,$$

tj. rešavaćemo sistem

$$\frac{a}{1000+b} = 450, \qquad \frac{a}{1600+b} = 150,$$

odnosno

$$a - 450b = 450000,$$
$$a - 150b = 240000.$$

Sledi:

$$a = 135000 \quad \text{i} \quad b = -700,$$

Funkcija tražnje je, dakle,

$$Q_d(P) = \frac{135000}{P - 700}.$$

b) Lako možemo izračunati i tražnju, kada je cena $P = 1200$. Dobijamo

$$Q_d(1200) = \frac{135000}{1200 - 700} = 270.$$

c) Rešavanjem jednačine $Q_d(P) = 520$, odnosno

$$\frac{135000}{P - 700} = 520,$$

dobijamo da je tražena cena $P = 970$.

Uradićemo ovaj zadatak i u programskom paketu Wolfram Mathematica.
Prvo je potrebno definisati funkciju tražnje

```
Qd[P_] = a/(P+b);
```

a nakon toga rešiti odgovarajući sistem

```
Solve[{Qd[1000]==450,Qd[1600]==150},{a,b}].
```

Rezultat koji se ispisuje na izlaznoj liniji je

```
{{a → 135000,b → -700}}.
```

Potrebno je i dodeliti vrednosti ovim konstantama:

```
a=13500; b=-700;
```

i tako dobijamo funkciju Q_d.
Rezultat pod b) dobijamo jednostavnim pozivom

```
Qd[1200]
```

posle kog se na izlazu ispisuje

```
{{P → 270}}.
```

Rezultat pod c) možemo dobiti rešavanjem jednačine

```
Solve[Qd[P]==500,P]
```

odakle dobijamo u izlaznoj liniji

$\{\{\mathtt{P} \to \mathtt{970}\}\}$.

Zadatak 4.2 *Odrediti funkciju tražnje (datu u hiljadama pakovanja po 100 g) čokolade, ako je poznata funkcija ukupnih prihoda*

$$TR(Q) = -Q^2 + 220Q.$$

Kolika je cena ove čokolade, ako postoji tražnja za 35000 ovih čokolada?

Rešenje. Kako je $TR(Q) = PQ$, to je

$$P = \frac{TR(Q)}{Q} = \frac{-Q^2 + 220Q}{Q} = -Q + 220.$$

Posledično je $Q = 220 - P$.
Ako je tražnja $Q = 35$, onda je cena $P = -35 + 220 = 185$.

Zadatak 4.3 *Date su funkcije tražnje i ponude:*

$$Q_d = -P^2 + 95P + 380,$$

$$Q_s = 3P^3 + 100P.$$

Odrediti uslove ravnoteže tržišta.

Rešenje. Ravnoteža na tržištu se postiže kada su ponuda i tražnja jednake. Dakle, neophodno je rešiti jednačinu

$$-P^2 + 95P + 380 = 3P^3 + 100P,$$

odnosno

$$3P^3 + P^2 + 5P - 380 = 0.$$

I ovu jednačinu znamo da rešimo, ali je postupak malo komplikovaniji, nego što je to bio slučaj sa rešavanjem jednačina u prethodnim zadacima. Sa druge strane, približna rešenja ove jednačinu možemo lako dobiti, pomoću programskog paketa Wolfram Mathematica. Definišimo prvo obe funkcije:

```
Qd[P_]=-P^2+95 P+380; Qs[P_]=3P^3+100P;
```

a potom ih izjednačimo i tako dobijenu jednačinu rešimo numerički, uz pomoć samo jedne naredbe

```
NSolve[Qd[P]==Qs[P],P].
```

Rezultat ove naredbe je

{{P → -2.56933-4.44502I},{P → -2.56933+4.44502I},{P → 4.80533}}.

Samo jedno rešenje je realno, pa je cena po kojoj je uspostavljena ravnoteža na tržištu $P = 4{,}81$. Za tu cenu lako dobijamo da je

$$Qd(4{,}81) = Qs(4{,}81) = 813{,}42.$$

Zadatak 4.4 *Data je funkcija prosečnih troškova*

$$AC(Q) = 20Q - 75 + \frac{42}{Q}.$$

Odrediti:

a) *funkciju ukupnih troškova,*

b) *fiksne troškove,*

c) *ukupne i prosečne troškove na nivou proizvodnje 100.*

Rešenje. a) Kako je $AC(Q) = \dfrac{TC(Q)}{Q}$, to je

$$\begin{aligned} TC(Q) = AC(Q)Q &= \left(20Q - 75 + \frac{42}{Q}\right)Q \\ &= 20Q^2 - 75Q + 42. \end{aligned}$$

b) Fiksne troškove, možemo dobiti kao ukupne troškove kada nema proizvodnje, odnosno kao $TC(0) = 42$.

c) Lako dobijamo da je $TC(100) = 192542$ i $AC(100) = 1925{,}42$.

Zadatak 4.5 *Odrediti interval rentabilne proizvodnje ako su date sledeće funkcije:*

$$Q_d = -P + 145,$$

$$TC(Q) = Q^2 - 149Q + 5500.$$

Rešenje. Da bismo odredili interval rentabilne proizvodnje, prvo je neophodno naći funkciju profita

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q).$$

Ako iz funkcije tražnje izrazimo cenu, dobijamo $P = 145 - Q$, a onda posledično i

$$TR(Q) = PQ = (145 - Q)Q = -Q^2 + 145Q.$$

Dalje je

$$\pi(Q) = -Q^2 + 145Q - (Q^2 - 149Q + 5500) = -2Q^2 + 294Q - 5500.$$

Da bismo našli kada je $\pi(Q) > 0$, potrebno je prvo naći vrednosti nule funkcije profita, tj. rešiti jednačinu

$$\pi(Q) = -2Q^2 + 294Q - 5500 = 0.$$

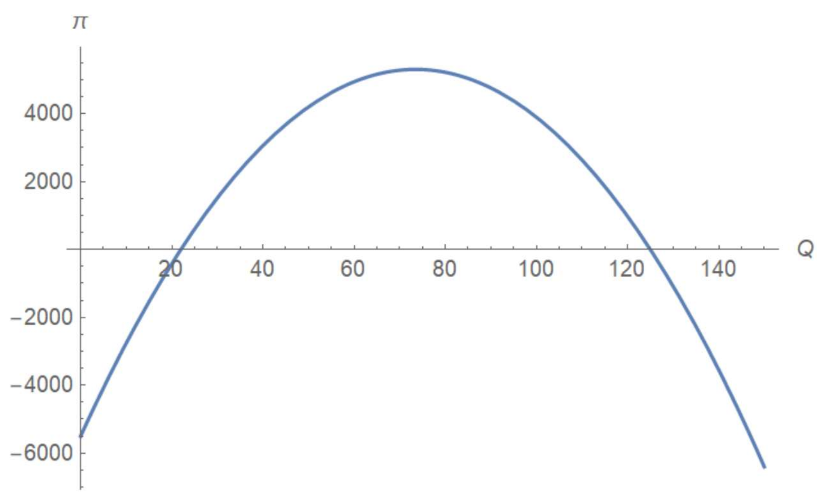
Rešenja ove jednačine su $Q_1 = 22$ i $Q_2 = 125$. Funkcija $\pi(Q)$ je kvadratna, a koeficijent uz kvadratni član je negativan, pa je

$$\pi(Q) > 0, \text{ na intervalu } \ Q \in (22, 125).$$

Ovo možemo videti i ako nacrtamo grafik funkcije profita u programskom paketu Wolfram Mathematica.

Plot[-2Q^2+294Q-5500,{Q,0,150},AxesLabel $\rightarrow$ {Q,π}].

Na izlazu se dobija grafik ove funkcije, slika 4.1.



Slika 4.1: Funkcija profita.

Zadatak 4.6 *Poznato je da je funkcija profita nekog proizvoda kvadratna i da je funkcija tražnje*

$$Q_d = -20P + 64000.$$

Ako je profit na nivou proizvodnje od 1200 jedinica jednak nuli, na nivou proizvodnje 2200 jednak 260000 EUR, a optimalan nivo proizvodnje je 2350:

a) *odrediti interval rentabilne proizvodnje;*

b) *izračunati prosečne troškove na nivou od 1000 jedinica proizvodnje.*

Rešenje. a) Funkcija profita ima oblik

$$\pi(Q) = aQ^2 + bQ + c, \qquad a, b, c \in R,$$

pa je potrebno iz datih uslova naći konstante a, b i c. Poznato je:

$$\pi(1200) = 1200^2 a + 1200b + c = 0,$$
$$\pi(2200) = 2200^2 a + 2200b + c = 260000.$$

Treću jednačinu dobijamo iz uslova optimalnosti. Ako se za vrednost $Q = 2350$ ostvaruje maksimalni profit, to znači da je $\pi'(2350) = 0$, a kako je

$$\pi'(Q) = 2aQ + b,$$

to je treća jednačina

$$2 \cdot 2350a + b = 0.$$

Rešavanjem dobijenog sistema tri linearne jednačine sa tri nepoznate dobijamo konstante a, b i c. To možemo dobiti lako i pomoću programskog paketa Wolfram Mathematica.

```
Pr[Q_]=a*Q^2+b*Q+c;
prvi[Q_]=D[Pr[Q],Q];
Solve[{Pr[1200]==0,Pr[2200]==260000,prvi[2350]==0},{a,b,c}]
```

Kao rezultat dobijamo

$$\{\{\mathtt{a} \to -\frac{1}{5}, \mathtt{b} \to 940, \mathtt{c} \to -840000\}\}.$$

Kako je $a = -\frac{1}{5} < 0$, tačka $Q = 4000$ je zaista vrednost u kojoj funkcija profita dostiže maksimum. Sada možemo odrediti kada je

$$\pi(Q) = -\frac{1}{5}Q^2 + 940Q - 840000 > 0,$$

odnosno interval rentabilne proizvodnje. Prvo ćemo naći nule ove funkcije. Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo:

$$Q_1 = 1200, \qquad Q_2 = 3500.$$

Kako je π kvadratna i konkavna funkcija, interval rentabilne proizvodnje je $(1200, 3500)$.
b) Da bismo mogli da izračunamo prosečne troškove, neophodno je da znamo funkciju ukupnih troškova. Kako je

$$TC(Q) = TR(Q) - TC(Q),$$

prvo ćemo naći funkciju ukupnih prihoda. Iz funkcije tražnje

$$Q = -20P + 64000$$

dobijamo da je

$$P = -\frac{Q}{20} + 3200Q,$$

pa je

$$TR(Q) = PQ = -\frac{Q^2}{20} + 3200Q$$

i posledično

$$TC(Q) = \frac{3Q^2}{20} + 2260Q + 840000.$$

Sada je lako naći i funkciju prosečnih troškova

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{3Q}{20} + \frac{840000}{Q} + 2260,$$

pa je

$$AC(1000) = 3250 \text{ EUR}.$$

Zadatak 4.7 *Ako je tražnja neke robe data funkcijom*

$$Q_d = \sqrt{3072 - 4P},$$

naći cenu i količinu robe tako da ukupan prihod bude maksimalan, i odrediti taj prihod.

Rešenje. Iz funkcije tražnje se dobija

$$P = -\frac{Q^2}{4} + 768,$$

a odatle i

$$TR(Q) = PQ = \left(-\frac{Q^2}{4} + 768\right)Q = -\frac{1}{4}Q^3 + 768Q.$$

Nađimo prvo kritične tačke. Prvi izvod funkcije profita je

$$\pi'(Q) = -\frac{3}{4}Q^2 + 768.$$

Nule prvog izvoda su:

$$Q_1 = -32 \quad \text{i} \quad Q_2 = 32.$$

Kako je $Q_1 < 0$, onda je jedini kandidat za maksimums tačka $Q_2 = 32$. Funkcija $\pi'(Q)$ je kvadratna, a koeficijent uz kvadratni član je negativan, pa je

$$\pi'(Q) > 0, \text{ za } Q \in (0, 32) \quad \text{i} \quad \pi'(Q) < 0, \text{ za } Q \in (32, \infty).$$

Dakle, funkcija π je rastuća na intervalu $(0, 32)$, a opadajuća na $(32, \infty)$, pa je $Q = 32$ tačka maksimuma.
Da je reč o maksimumu mogli smo utvrditi i pomoću drugog izvoda

$$\pi''(Q) = -\frac{3}{2}Q.$$

Kako je $\pi''(32) < 0$, u $Q = 32$ se dostiže (lokalni) maksimum.
Ukupni prihod na nivou proizvodnje $Q = 32$ je

$$TR(32) = 16384.$$

Zadatak 4.8 *Nakon analize cena komponenti i drugih troškova potrebnih za proizvodnju jednog tipa mobilnog telefona, dobijeno je da je funkcija prosečnih troškova*

$$AC(Q) = 25 + \frac{320000}{Q}.$$

Takođe, nakon ispitivanja tržišta, procenjeno je da tražnja za tim mobilnim telefonom može da se prikaže kao

$$Q_d(P) = 120000 - 400P,$$

gde je Q količina u komadima, a P cena u evrima.

a) *Odrediti koji nivo proizvodnje omogućava proizvođaču da posluje sa dobitkom.*

b) *Odrediti cenu P pri kojoj će se ostvariti maksimalna dobit, i naći tu dobit.*

Rešenje. a) Da bismo dobili funkciju profita, neophodno je izračunati i funkciju ukupnih prihoda i funkciju ukupnih troškova. Kako su nam poznati prosečni troškovi, lako dobijamo i ukupne troškove

$$TR(Q) = AC(Q)Q = \left(25 + \frac{320000}{Q}\right)Q = 25Q + 320000.$$

Iz funkcije tražnje prvo dobijamo cenu

$$P(Q) = -\frac{Q}{400} + 300,$$

a potom i funkciju ukupnih prihoda

$$TR(Q) = P(Q)Q = -\frac{Q^2}{400} + 300Q.$$

Sada možemo izračunati i funkciju profita

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -\frac{Q^2}{400} + 275Q - 320000.$$

Nule ove funkcije su:

$$Q_1 = 1176{,}21 \quad \text{i} \quad Q_2 = 108823{,}79,$$

pa je interval rentabilne proizvodnje

$$Q \in (1177, 108823).$$

b) Dalje ćemo izračunati prvi izvod i izjednačiti ga sa nulom

$$\pi'(Q) = -\frac{Q}{200} + 275 = 0.$$

Rešenje ove jednačine je $Q = 55000$, što je i maksimum (kvadratne) funkcije π. Iznos maksimalnog profita je

$$\pi(55000) = 7242500 \text{ EUR}.$$

Zadatak 4.9 *Funkcija marginalnih troškova je*

$$MC(Q) = \frac{Q}{30} - 5.$$

Odrediti funkciju ukupnih troškova kao i količinu pri kojoj su prosečni troškovi minimalni, ako se zna da su fiksni troškovi 900.

Rešenje. Funkcija ukupnih troškova je

$$TC(Q) = \int MC(Q)\mathrm{d}Q = \int \left(\frac{Q}{30} - 5\right)\mathrm{d}Q = -\frac{Q^2}{60} - 5Q + c.$$

Fiksni troškovi su ukupni troškovi kada nema proizvodnje, pa je

$$c = TC(0) = 900,$$

odnosno

$$TC(Q) = -\frac{Q^2}{60} - 5Q + 900,$$

odakle dobijamo i prosečne troškove

$$AC(Q) = \frac{Q}{60} - 5 + \frac{900}{Q}.$$

Sada ćemo naći minimum ove funkcije i to tako što ćemo prvi izvod izjednačiti sa nulom

$$AC'(Q) = -\frac{900}{Q^2} + \frac{1}{60} = 0,$$

a rešenja te jednačine su:

$$Q_1 = -232{,}38 \quad \text{i} \quad Q_2 = 232{,}38.$$

Kako je $Q_1 < 0$, jedina potencijalna tačka minimuma je Q_2. Jasno je da je

$$AC'(Q) < 0, \text{ za } Q \in (0, Q_2) \quad \text{i} \quad AC'(Q) > 0, \text{ za } Q \in (Q_2, \infty),$$

odnosno $Q_2 = 232{,}38$ zaista jeste tačka u kojoj funkcija prosečnih troškova dostiže minimum.
Ovaj zadatak možemo rešiti i pomoću Mathematica.

```
MC[Q_]=Q/5;
TC[Q_]=Integrate[MC[Q],Q]+c
```

Na izlazu dobijamo

$$c-5Q+\frac{Q^2}{60}.$$

Konstantu c dobijamo rešavanjem jednačine

```
Solve[TC[0]==900,c].
```

čiji je rezultat trivijalno

$$\{c \to 900\}.$$

Dodelimo vrednosti konstanti c i $AC(Q)$ i nađemo nule prvog izvoda funkcije prosečnih troškova.

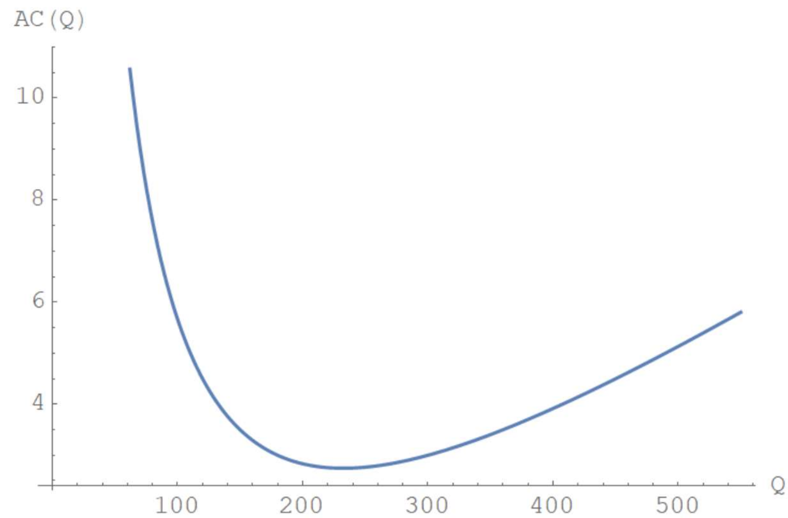
```
c=900;
AC[Q_]=TC[Q]/Q;
NSolve[D[AC[Q],Q]==0,Q].
```

Kao rezultat dobijamo

$$\{\{Q \to 232.379\},\{Q \to -232.379\}\}.$$

Na kraju, možemo nacrtati i funkciju prosečnih troškova da potvrdimo da se u $Q = 232{,}379$ dostiže minimum.

```
Plot[AC[Q],{Q,0,550},AxesLabel->{"Q","AC(Q)"}]
```



Slika 4.2: Funkcija prosečnih troškova.

Zadatak 4.10 *Tražnja za bananama je*

$$Q_s = 200 - 40P \quad \textit{(izraženo u tonama)},$$

gde je P cena banana po kilogramu (data u evrima).

a) *Koja tražnja banana obezbeđuje da je tražnja indiferentno elastična prema ceni?*

b) *Ako je $Q_s = 80$, odrediti da li je tražnja elastična prema ceni.*

Rešenje. a) Elastičnost tražnje prema ceni se definiše kao

$$\varepsilon_{Q_d}^P(P) = \frac{P}{Q(P)}Q'(P) = \frac{P}{200-40P}(-40) = \frac{P}{P-5}.$$

Da bismo dobili koja količina obezbeđuje da je tražnja indiferentno elastična prema ceni, neophodno je prvo naći cenu pri kojoj je

$$\left|\frac{P}{P-5}\right| = 1.$$

Rešenje ove jednačine je $P = 2{,}5$, a odgovarajuća količina je

$$Q_d(2{,}5) = 100 \text{ tona}.$$

b) Prvo nađimo cenu koja odgovara tražnji od 80 tona banana.

$$200 - 40P = 80,$$

odakle je $P = 3$. Dalje je

$$\varepsilon_{Q_d}^P(3) = \frac{3}{3-5} = -\frac{3}{2},$$

pa je tražnja prema ceni elastična (na nivou proizvodnje 80).

Zadatak 4.11 *Date su funkcije marginalnih prihoda i marginalnih troškova:*

$$MR(Q) = -4Q + 54000,$$
$$MC(Q) = 4Q + 14000.$$

Ako elastičnost prosečnih troškova prema tražnji na nivou proizvodnje 100 iznosi -0.4*, naći interval rentabilne proizvodnje.*

Rešenje. Da bismo dobili funkciju profita, neophodno je prvo da izračunamo funkcije ukupnih prihoda i ukupnih troškova. Iz funkcije marginalnih prihoda, dobijamo da je

$$TR(Q) = \int MR(Q)\mathrm{d}Q = \int (-4Q + 54000)\mathrm{d}Q = -2Q^2 + 54000Q + c_1.$$

Kako je ukupan prihod na nivou proizvodnje 0 jednak nuli, to je

$$0 = TR(0) = c_1.$$

Dalje je

$$TC(Q) = \int MC(Q)\mathrm{d}Q = \int (4Q + 14000)\mathrm{d}Q = 2Q^2 + 14000Q + c_2.$$

Treba odrediti konstantu c_2. Funkciju prosečnih troškova dobijamo lako

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{2Q^2 + 14000Q + c_2}{Q} = 2Q + 14000 + \frac{c_2}{Q},$$

a potom i

$$AC'(Q) = 2 - \frac{c_2}{Q^2}.$$

Sada je

$$\varepsilon^{Q}_{AC(Q)}(Q) = \frac{Q}{AC(Q)}AC'(Q) = \frac{Q}{2Q + 14000 + \frac{c_2}{Q}}\left(2 - \frac{c_2}{Q^2}\right).$$

Posle sređivanja dobijamo da je

$$\varepsilon^{Q}_{AC(Q)}(Q) = \frac{2Q^2 - c_2}{2Q^2 + 14000Q + c_2}.$$

Kako je

$$\varepsilon^{Q}_{AC(Q)}(100) = -0.4$$

iz ovog uslova možemo naći c_2. Rešavanjem linearne jednačine

$$2 \cdot 100^2 - c_2 = -0.4(2 \cdot 100^2 + 14000 \cdot 100 + c_2)$$

dobijamo da je $c_2 = 980000$.
Sada znamo i funkciju profita

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) = -2Q^2 + 54000 - (2Q^2 + 14000Q + 980000) \\ &= -4Q^2 + 40000Q - 980000.\end{aligned}$$

Ovo je kvadratna i konkavna funkcija, pa je pozitivna na intervalu između svojih nula. Rešenja jednačine $\pi(Q) = 0$ su:

$$Q_1 = 24{,}56 \quad \text{i} \quad Q_2 = 9975{,}44.$$

Dakle, interval rentabilne proizvodnje je (Q_1, Q_2).

Zadatak 4.12 *Neka firma je monopolista u proizvodnji svog proizvoda. Funkcija tražnje za tim proizodom je data sa*

$$Q_d = \frac{a - P}{b},$$

gde su a i b pozitivni parametri. Funkcija ukupnih troškova firme je linearna funkcija sa konstantnom funkcijom marginalnih troškova c i fiksnim troškovima d.

a) *Odrediti funkciju profita i optimalan nivo proizvodnje.*

b) *Pretpostavimo da je vlada uvela porez t po jedinici prodatog proizvoda. Odrediti novi optimalan nivo proizvodnje.*

c) *Vlada je odlučila da odredi visinu poreza t tako da maksimizuje prihod oporezivanjem proizvoda ove firme. Odrediti koliko treba da iznosi t.*

Rešenje. a) Funkcija marginalnih troškova je

$$MC(Q) = c,$$

pa su ukupni troškovi

$$TC(Q) = \int MC(Q)\,\mathrm{d}Q = \int c\,\mathrm{d}Q = cQ + C_1.$$

Kako su fiksni troškovi d, to je $C_1 = TC(0) = d$, pa je

$$TC(Q) = cQ + d.$$

Dalje, izrazimo P iz funkcije tražnje. Dobijamo

$$P(Q) = -bQ + a,$$

a potom i funkciju ukupnih prihoda

$$TR(Q) = P(Q)Q = (-bQ + a)Q = -bQ^2 + aQ.$$

Sada imamo i funkciju profita

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -bQ^2 + aQ - (cQ + d) = -bQ^2 + (a - c)Q - d.$$

Kako je funkcija profita kvadratna i konkavna ($-b < 0$), to ova funkcija ima maksimum i to u tački

$$Q = \frac{a - c}{2b}.$$

b) Funkcija profita, u koju je uključen i dati porez, je sada

$$\pi_1(Q) = \pi(Q) - tQ = -bQ^2 + (a - c - t)Q - d.$$

I ova kvadratna funkcija je konkavna i dostiže maksimum u jedinoj nuli prvog izvoda

$$\pi'(Q) = -2bQ + a - c - t = 0,$$

odnosno u tački

$$Q = \frac{a - c - t}{2b}.$$

c) Proizvodnja ove firme će biti takva da i uz porez Vlade, optimizuje sopstveni profit. Zato će profit Vlade biti

$$\pi_V(t) = t\frac{a - c - t}{2b} = -\frac{1}{2b}t^2 + \frac{a - c}{2b}t.$$

Nađimo nule prvog izvoda ove funkcije

$$\pi_V'(t) = -\frac{1}{b}t + \frac{a - c}{2b} = 0.$$

Jedino rešenje ovog problema je

$$t = \frac{a - c}{2},$$

pa kako je $-\frac{1}{b} < 0$, to je tražena tačka u kojoj profit Vlade dostiže maksimum.

Zadatak 4.13 *Poznato je da je funkcija marginalnih troškova nekog proizvoda linearna funkcija, fiksni troškovi iznose 200 dinara, a funkcija ukupnih prihoda je*

$$TR(Q) = -2Q^2 + 80Q.$$

a) *Naći funkciju profita, ako se zna da je profit jednak nuli na nivou proizvodnje od 10 i od 25 jedinica proizvoda.*

b) *Koliki je maksimalan profit koji se može ostvariti?*

Rešenje. a) Funkcija marginalnih troškova je oblika

$$MC(Q) = aQ + b, \qquad a, b \in R.$$

Funkcija ukupnih troškova je

$$TC(Q) = \int MC(Q)\mathrm{d}Q = \int (aQ + b)\mathrm{d}Q = a\frac{Q^2}{2} + bQ + c.$$

Kako su dati fiksni troškovi, to je

$$200 = TC(0) = c.$$

Funkcija profita je

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) = -2Q^2 + 80Q - \left(\frac{a}{2}Q^2 + bQ + 200\right)\\ &= -\left(2 + \frac{a}{2}\right)Q^2 + (80 - b)Q - 200.\end{aligned}$$

Konstante a i b ćemo naći uz uslova $\pi(5) = \pi(25) = 0$. Dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned}-\left(2 + \frac{a}{2}\right)5^2 + (80 - b)5 - 200 = 0,\\ -\left(2 + \frac{a}{2}\right)25^2 + (80 - b)25 - 200 = 0,\end{aligned}$$

čija su rešenja:

$$a = -\frac{4}{5} \qquad \text{i} \qquad b = 32.$$

Dakle,

$$\pi(Q) = -\frac{8}{5}Q^2 + 48Q - 200.$$

b) Prvi izvod funkcije profita je

$$\pi'(Q) = -\frac{16}{5}Q + 48,$$

a jedina nula ovog izvoda je $Q = 15$. Funkcija profita je kvadratna funkcija, koja uz kvadratni član ima negativan koeficijent, pa se maksmimum funkcije π dostiže u $Q = 15$, a maksimalan profit je

$$\pi(15) = -\frac{8}{5}15^2 + 48 \cdot 15 - 200 = 160.$$

Glava 5

Opcije

Opcija je ugovor koji kupcu (vlasniku) opcije nudi pravo, bez obaveze, da kupi ili proda predmet opcije pod određenim uslovima, u zamenu za plaćanje premije kojom to pravo stiče.

Call opcija – opcija na kupovinu:

- daje pravo njenom kupcu da kupi predmet opcije u određenom vremenskom periodu po unapred ugovorenoj ceni K;
- osnovni motiv za kupovinu call opcije je očekivanje da će cena podloge S porasti;
- očekivanje prodavca call opcije je da će cena podloge pasti i da će u tom slučaju ostvariti dobit u visini premije C.

Profit/gubitak ostvaren kupovinom call opcije čija je cena izvršenja (strajk cena) K, premija C i tržišna cena podloge S, se može iskazati formulom

$$\pi = \max\{S - K, 0\} - C.$$

Put opcija – opcija na prodaju:

- daje pravo njenom kupcu da proda predmet opcije u određenom vremenskom periodu po unapred ugovorenoj ceni K;
- osnovni motiv za kupovinu put opcije je očekivanje da će cena podloge S pasti;
- očekivanje prodavca put opcije je da će cena podloge porasti i da će u tom slučaju ostvariti dobit u visini premije P.

Profit/gubitak ostvaren kupovinom put opcije čija je cena izvršenja (strajk cena) K, premija P i tržišna cena podloge S, se može iskazati formulom

$$\pi = \max\{K - S, 0\} - P.$$

Zadatak 5.1 *Izračunati profit ostvaren kupovinom call opcije (opcije na kupovinu) na 100 kg kukuruza, 7. januara 2021. po ceni od 1,5 USD, sa datumom dospeća 21. novembra 2022. ako je cena izvršenja 20 USD (za 100 kg), za različite tržišne cene kukuruza: S =14,18, 20, 21, 22, 28 USD.*

Rešenje. Ako je cena izvršenja (strajk cena) K veća ili jednaka sa trenutnom cenom S na tržištu ($S \leq K$), ova opcija neće biti realizovana, pa će gubitak biti jednak visini premije. Dakle, za $S = 14$, $S = 18$ i $S = 20$, profit iznosi $\pi = -C = -1{,}5$ USD, odnosno ostvaren je gubitak. Ukoliko je cena na tržištu veća od cene izvršenja, onda će opcija biti realizovana i profit se dobija kao $\pi = (S - K) - C$. Dakle, ako je $S = 21$, onda je

$$\pi = (21 - 20) - 1{,}5 = -0{,}5 \text{ USD}.$$

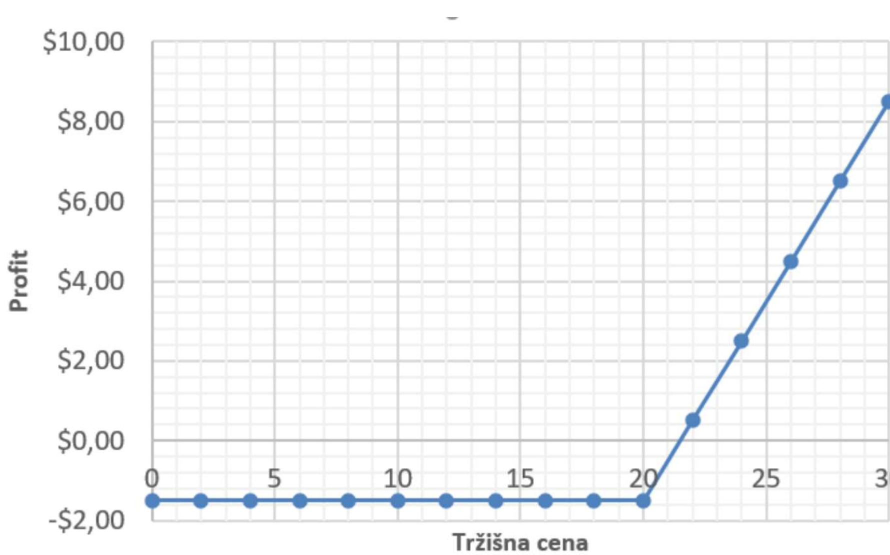
U ovom slučaju i dalje imamo gubitak, ali je on manji u odnosu na gubitak koji bi se ostvario ako ne bismo realizovali opciju.
Ako je $S = 22$, onda je

$$\pi = (22 - 20) - 1{,}5 = 0{,}5 \text{ USD}.$$

Konačno, ako je $S = 28$, onda je

$$\pi = (28 - 20) - 1{,}5 = 6{,}5 \text{ USD}.$$

Na slici 5.1 je prikazano kretanje profita kupca opcije u zavisnosti od cene kukuruza na tržištu.



Slika 5.1: Funkcija profita (kupca) opcije na kupovinu

Zadatak 5.2 *Izračunati profit ostvaren prodajom call opcije (opcije na kupovinu) na 100 kg kukuruza, 7. januara 2021. po ceni od 1,5 USD, sa datumom dospeća 21. novembra 2022. ako je cena izvršenja 20 USD (za 100 kg), za različite tržišne cene kukuruza: S =14,18, 20, 21, 22, 28 USD.*

Rešenje. Kao i u prethodnom zadatku, ako je cena izvršenja (strajk cena) K veća ili jednaka sa trenutnom cenom S na tržistu ($S \leq K$), ova opcija neće biti realizovana. U tom slučaju za $S = 14$, $S = 18$ i $S = 20$, prodavac opcije ostvaruje maksimalnu dobit u visini premije, tj. $\pi = C = 1{,}5$ USD.
U suprotnom, ako je strajk cena manja od tržišne, onda je profit prodavca opcije

$$\pi = C - (S - K).$$

Dakle, ako je $S = 21$, onda je profit

$$\pi = 1{,}5 - (21 - 20) = 0{,}5 \text{ USD}.$$

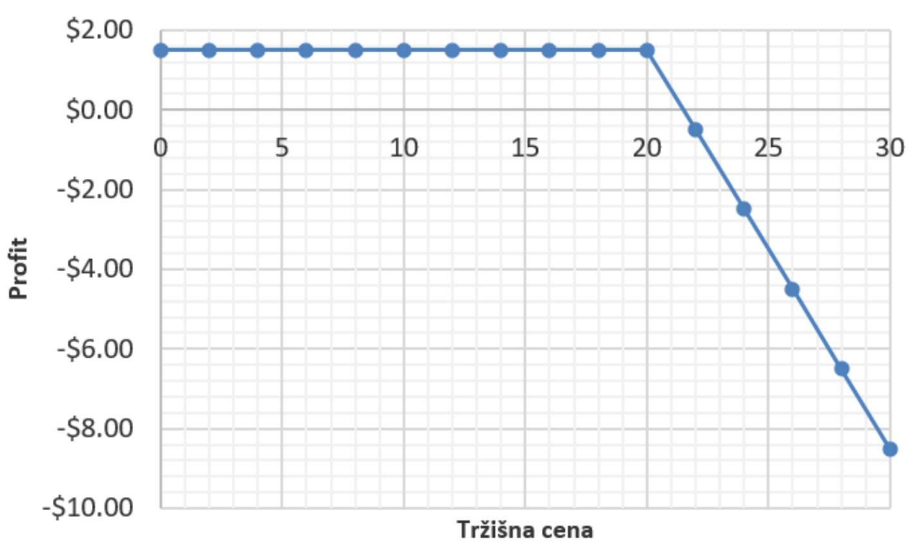
Ukoliko je $S = 22$, onda je profit

$$\pi = 1{,}5 - (22 - 20) = -0{,}5 \text{ USD}.$$

Konačno, za $S = 28$ prodavac ostvaruje gubitak u visini od

$$\pi = 1{,}5 - (28 - 20) = -6{,}5 \text{ USD}.$$

Na slici 5.2 je prikazano kretanje profita kupca opcije u zavisnosti od cene kukuruza na tržištu.



Slika 5.2: Funkcija profita (prodavca) opcije na kupovinu

Zadatak 5.3 *Izračunati profit ostvaren kupovinom put opcije (opcije na prodaju) na 100 kg kukuruza, 7. januara 2021. po ceni od 1,5 USD, sa datumom dospeća 21. novembra 2022. ako je cena izvršenja 20 USD (za 100 kg), za različite tržišne cene kukuruza: S =14,18, 20, 21, 22, 28 USD.*

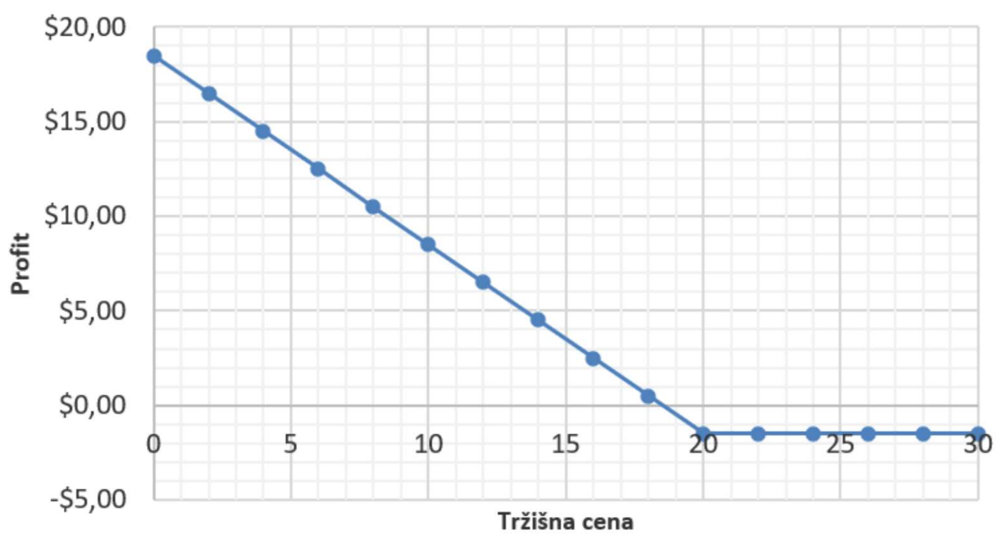
Rešenje. Opcija se će biti realizovana kada je cena na tržištu manja od cene izvršenja. Tada je profit $\pi = (K - S) - P$.
Dakle, ako je $S = 14$, onda je

$$\pi = (20 - 14) - 1{,}5 = 4{,}5 \text{ USD}.$$

Kada je $S = 18$, profit je jednak

$$\pi = (20 - 18) - 1{,}5 = 0{,}5 \text{ USD}.$$

U slučaju da je $S \geq K$, opcija se neće realizovati, pa će kupac opcije ostvariti gubitak u visini premije P, odnosno za $S = 20$, $S = 21$, $S = 22$ i $S = 28$ profit je $\pi = -P = -1{,}5$ USD. Na slici 5.3 je prikazano kretanje profita kupca opcije u zavisnosti od cene kukuruza na tržištu.



Slika 5.3: Funkcija profita (kupca) opcije na prodaju

Zadatak 5.4 *Izračunati profit ostvaren prodajom put opcije (opcije na prodaju) na 100 kg kukuruza, 7. januara 2021. po ceni od 1,5 USD, sa datumom dospeća 21. novembra 2022. ako je cena izvršenja 20 USD (za 100 kg), za različite tržišne cene kukuruza: S =14, 18, 20, 21, 22, 28 USD.*

Rešenje. Kao u prethodnom zadatku, opcija se će biti realizovana kada je cena na tržištu manja od cene izvršenja. Tada je profit prodavca opcije

$$\pi = P - (K - S),$$

odnosno za $S = 14$ dobijamo

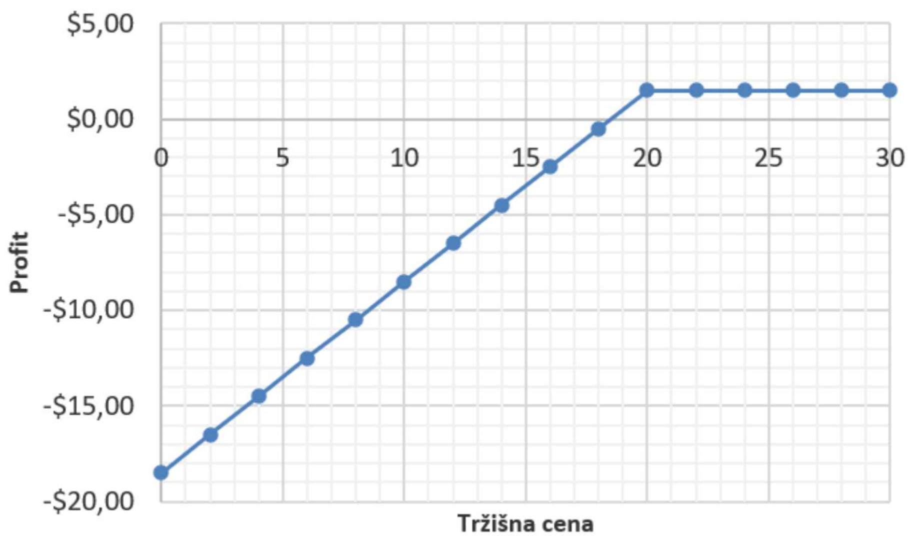
$$\pi = 1{,}5 - (20 - 14) = -4{,}5 \text{ USD}.$$

Ako je $S = 18$ prodavac opcije je u gubitku, tj.

$$\pi = 1{,}5 - (20 - 18) = -0{,}5 \text{ USD}.$$

Kada tržišna cena podloge nije manja od cene izvršenja, onda se opcija ne realizuje, a prodavac opcije ostvaruje dobit u visini premije. Dakle, za $S = 20$, $S = 21$, $S = 22$ i $S = 28$, dobit je $\pi = P = 1{,}5$ USD.

Na slici 5.4 je prikazano kretanje profita prodavca opcije u zavisnosti od cene kukuruza na tržištu.



Slika 5.4: Funkcija profita (prodavca) opcije na prodaju

Zadatak 5.5 *Ukoliko ste 7. avgusta 2020. kupili akciju neke kompanije po ceni od 19,25 USD i put opciju na akciju iste kompanije po ceni od 1,80 USD sa datumom dospeća 21. septembar 2021. i cenom izvršenja 20 USD, proceniti da li ćete realizovati opciju i odrediti ukupan profit (akciju prodajete, bez obzira na trenutnu vrednost), za tržišnu cenu akcija dana 21. septembra 2021. u visini od*

a) $S = 16$,

b) $S = 25$.

Rešenje. a) Profit od akcije je

$$\pi_1 = 16 - 19{,}25 = -3{,}25 \text{ USD}.$$

Kako je $S = 16 < 20 = K$, opcija će biti realizovana i profit vezan za opciju je onda

$$\pi_2 = (20 - 16) - 1{,}80 = 2{,}20 \text{ USD}.$$

Ukupan profit je onda

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = -3{,}25 + 2{,}20 = -1{,}05 \text{ USD}.$$

b) Sada je profit vezan za akciju

$$\pi_1 = 25 - 19{,}25 = 5{,}75 \text{ USD}.$$

Pošto je cena akcije na tržistu veća od cene izvršenja, put opcija se neće realizovati, pa je

$$\pi_2 = -P = -1{,}80 \text{ USD}.$$

Napokon,

$$\pi = 5{,}75 - 1{,}80 = 3{,}95 \text{ USD}.$$

Zadatak 5.6 *Ako možete da izaberete jednu od dve ponuđene mogućnosti:*

- *kupovina 10 akcija neke firme, koje možete kupiti po pojedinačnoj ceni od 20 USD;*
- *kupovina 10 call opcija na akcije iste firme, sa cenom izvršenja 20 USD i premijom 1,5 USD;*

naći profit koji se ostvaruju ovim ulaganjima pojedinačno, na dan dospeća opcije (kada ćete prodati i akcije), ako je cena jedne akcije na taj dan:

a) S =0 USD, *b) S =18 USD,*

c) S =20 USD, *d) S =21 USD,*

e) S =21,5 USD, *f) S =25 USD.*

Profite izraziti i u procentima u odnosu na uložena sredstva za kupovinu 10 akcija, odnosno 10 opcija.

Rešenje. Ako ste kupili 10 akcija, uložili ste u tu kupovinu $U_a = 200$ USD, a ako ste kupili 10 opcija, to ste učinili po ceni od samo $U_o = 15$ USD.
Označimo sa π_a ostvareni profit na dan dospeća ako ste kupili samo akcije, a sa π_o ostvareni profit ako ste kupili samo opcije.

a) Ako je tržišna cena akcije $S = 0$ USD, onda se ostvaruje maksimalan gubitak na trgovanje akcijama, odnosno

$$\pi_a = 10(0 - 20) = -200 \text{ USD},$$

što je u odnosu na uloženi novac

$$\frac{\pi_a}{U_a} = \frac{-200}{200} = -100\%,$$

odnosno zabeležen je gubitak od 100% uloženog novca.
Kako je $S = 0 < 20$, opcije neće biti realizovane, pa je

$$\pi_o = 10(-1{,}5) = -15 \text{ USD},$$

odnosno

$$\frac{\pi_o}{U_o} = \frac{-15}{15} = -100\%.$$

Dakle, gubitak koji se ostvaruje ako je kupljeno 10 opcija je maksimalan, odnosno 100% od uloženog novca.
b) Za tržišnu cenu $S = 18$ USD, dobijamo da je

$$\pi_a = 10(18 - 20) = -20 \text{ USD},$$

tj.

$$\frac{\pi_a}{U_a} = \frac{-20}{200} = -10\%.$$

I u ovom slučaju, opcije se neće realizovati, pa se ostvaruje gubitak

$$\pi_o = 10(-1{,}5) = -15 \text{ USD},$$

koji je opet maksimalan, odnosno 100% od novca utrošenog za kupovinu 10 opcija.
c) Ako je cena akcije na tržištu ista kao i cena po kojoj su akcije kupljene, tada je

$$\pi_a = 10(20 - 20) = 0 \text{ USD}.$$

Kao i u prethodna dva slučaja, $\pi_o = -15$ USD.
d) Kada je tržisna cena veća od cene po kojoj su akcije kupljene, ostvaruje se dobit, pa je tako za $S = 21$

$$\pi_a = 10(21 - 20) = 10 \text{ USD}.$$

Dobit izražena u % (u odnosu na uložena sredstva) je

$$\frac{\pi_a}{U_a} = \frac{10}{200} = 5\%.$$

Kako je tržišna cena akcija veća od cene izvršenja, opcije će biti realizovane, pa je

$$\pi_o = 10(21 - 20 - 1{,}5) = -5 \text{ USD}.$$

Dakle, sa kupovinom opcija smo i pri ovoj ceni u gubitku, ali je on manji nego u prethodna tri slučaja. Izraženo u %, to je

$$\frac{\pi_o}{U_o} = \frac{-5}{15} = -33{,}33\%.$$

e) Ako je $S = 21{,}5$, onda je

$$\pi_a = 10(21{,}5 - 20) = 15 \text{ USD}.$$

Dakle, ostvaren je dobitak u visini od

$$\frac{\pi_a}{U_a} = \frac{15}{200} = 7{,}5\%$$

u odnosu na uloženi novac za koji je kupljeno 10 akcija.
U ovom slučaju će opcije biti realizovane i neće biti gubitka, a ni dobiti, odnosno

$$\pi_o = 10(21{,}5 - 20 - 1{,}5) = 0 \text{ USD}.$$

f) Kada je $S = 25$, onda je

$$\pi_a = 10(25 - 20) = 50 \text{ USD}.$$

Ostvarena dobit u % je

$$\frac{\pi_a}{U_a} = \frac{50}{200} = 25\%.$$

Opcije će i u ovom slučaju biti realizovane, pa je

$$\pi_o = 10(25 - 20 - 1{,}5) = 35 \text{ USD}.$$

Dakle, kupovinom opcija, za ovu cenu akcija na tržištu, ostvaruje se dobit u visini

$$\frac{\pi_o}{U_o} = \frac{35}{15} = 233{,}33\%$$

u odnosu na novac koji ste uložili da bi kupili ovih 10 opcija.

Zadatak 5.7 *Ako ste kupili jednu akciju nekog preduzeća po ceni od 57 USD i dve opcije na kupovinu akcija istog preduzeća od 62 USD sa premijom 2 USD pojedinačno, naći kolika treba da bude cena akcija na tržištu na dan dospeća tako da bi vaš profit bio 7 USD (akciju ćete tog dana prodati).*

Rešenje. Posmatrajmo prvo kupljenu akciju. Ako je tržišna cena akcije na dan prodaje S, onda je profit dobijen od prodaje te akcije

$$\pi_1 = S - 57.$$

Sada razmotrimo dva slučaja:
(i) Tržišna cena nije veća od cene izvršenja, tj. $S \leq 62$. Tada opcije neće biti realizovane, pa će profit dobijen od opcije biti

$$\pi_2 = 2(-2) = -4 \text{ USD}.$$

U ovom slučaju je ukupan profit

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = S - 57 - 4 = S - 61.$$

Kako je traženi profit $\pi = 7$, tržišna cena bi trebalo da bude $S = 61 + 7 = 68$ USD. Međutim, ovo rešenje ne ispunjava početni uslov.
(ii) Razmotrimo sada slučaj $S > 62$. Tada ćemo realizovati obe opcije, pa će profit koji dobijamo od njih biti

$$\pi_2 = 2(S - 62 - 2) = 2S - 128.$$

Sada je

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = (S - 57) + (2S - 128) = 3S - 185,$$

kako tražimo da je $\pi = 7$, to je $3S = 192$, odnosno $S = 64$ USD. Ovo jeste rešenje našeg problema.

Zadatak 5.8 *Ako ste kupili jednu akciju nekog preduzeća po ceni od 57 USD i dve opcije na prodaju akcija istog preduzeća od 62 USD sa premijom 2 USD pojedinačno, naći kolika treba da bude cena akcija na tržištu na dan dospeća tako da bi vaš profit bio 7 USD (akciju ćete tog dana prodati).*

Rešenje. Kao i u prethodnom zadatku, profit dobijen od prodaje akcije je

$$\pi_1 = S - 57.$$

Opet razmatramo dva slučaja:
(i) Tržišna cena je manja od cene izvršenja, tj. $S < 62$. U ovom slučaju će opcije biti realizovane, a profit vezan za ove dve opcije će biti

$$\pi_2 = 2(62 - S - 2) = 120 - 2S.$$

Sada je

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = (S - 57) + (120 - 2S) = 63 - S.$$

Iz $\pi = 7$ dobijamo da je $S = 56$ USD, a ova vrednost zadovoljava početni uslov.
(ii) Razmotrimo sada slučaj $S \geq 62$. Opcije neće biti realizovane, pa je

$$\pi_2 = -2 \cdot 2 = -4$$

i posledično

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = (S - 57) + (-4) = S - 61.$$

Profit π će biti jednak 7 USD, za $S = 68$ USD. Kako ova vrednost zadovoljava uslov ovog slučaja, dobili smo i drugo rešenje.

Glava 6

Ispitni zadaci

I kolokvijum
školska 2014/15.

1. Menica nominalne vrednosti 450.000 dinara dospeva na naplatu 25.1.2015. Na dan dospeća dužnik daje dve nove menice sa rokovima dospeća 15.8.2015. i 23.10.2015. pri čemu su nominalne vrednosti ovih menica jednake. Odrediti nominalnu vrednost menica, ako se dug u potpunosti isplaćuje novim menicama i obračunava godišnja kamatna stopa od 10%.

2. Od 1.1.2009. godine, u narednih 5 godina, krajem svakog meseca ste ulagali po 150 evra u banku koja polugodišnje kapitališe sa godišnjom kamatnom stopom od 5%. Potom novac oročavate do 25.3.2015. uz iste uslove i ugovoren obračun konformne kamatne stope. Koliki ste iznos imali na računu 25.3.2015?

3. Zajam od 500.000 dinara otplaćujete 6 godina dvomesečnim anuitetima tako da su anuiteti jednaki, uz 12% godišnje kamatne stope sa mesečnim kapitalisanjem. Posle 3 godine, vreme amortizacije se produžava za pola godine i kamatna stopa smanjuje na 11%, dok ostali uslovi ostaju nepromenjieni. Napravite plan amortizacije ovog kredita.

II kolokvijum
školska 2014/15.

1. Na raspolaganju 1.1.2015. imate 5.100 evra za ulaganje u jedan od dva ponuđena projekta. Prvi projekat na početku svakog sledećeg meseca donosi profit od 250 evra. Posle godinu dana (1.1.2016.), uz isti profit, prodajete i pravo na Vaš projekat za 6.500 evra. Drugi projekat dana 1.2.2015. donosi 210 evra profita, a potom svakog sledećeg meseca, sve do 1.6.2015. donosi 10% profita više nego prethodnog meseca. Posle toga, potražnja za tim proizvodom opada i svakog narednog meseca, profit opada za 5% u odnosu na prethodni mesec. Posle godinu dana (1.1.2016.), uz tekući profit, prodajete i pravo na Vaš projekat za 6.800 evra. U koji ćete projekat uložiti Vaš novac, ako Vam je kriterijum za evaluaciju sadašnja vrednost novčanog toka, a godišnja kamatna stopa je 12%, uz godišnje kapitalisanje?

2. Dužnik ima obavezu da 12.5.2016. vrati dug u iznosu od 500.000 dinara. Na tržištu dana 12.5.2014. nude se tri vrste obveznica:

   - obveznica A koja ima godišnje kupone, nominalnu vrednost 2.500 dinara, kamatnu stopu 5%, datum dospeća 12.5.2016. godine;
   - obveznica B koja ima nominalnu vrednost 1.000 dinara, sa nula kuponima i datumom dospeća 12.5.2017. godine;
   - obveznica C koja ima godišnje kupone, nominalnu vrednost 3.000 dinara, kamatnu stopu 8%, datum dospeća 12.5.2017. godine.

   a) Naći prodajne cene i srednja vremena za sve tri obveznice.

   b) Konstruisati portfolio u cilju zaštite od rizika promene kamatnih stopa koji će omogućiti vraćanje duga na vreme, ako je prinos do dospeća 10%.

3. Ako je funkcija cene nekog proizvoda oblika $P(Q) = Q^2 + 20Q + 1$, funkcija marginalnih troškova je $MC(Q) = 4Q^2 + 3$, a fiksni troškovi su 200:

   a) naći rentabilan nivo prozvodnje,

   b) naći optimalan nivo proizvodnje.

I kolokvijum
školska 2015/16.

1. Računar je dana 1.1.2016. koštao 52.000 dinara, a potom je prvo pojeftinio za 10%, da bi u dva navrata poskupeo za 4% i 6%, redom. Po toj poslednjoj ceni ste dana 15.5.2016. kupili računar tako što ste 20% platili u gotovom, a na ime preostale sume ste izdali dve menice sa rokovima dospeća 8.8.2016. i 1.11.2016, a čije su nominalne vrednosti u odnosu 2:3, redom. Izračunati njihove nominalne vrednosti, ako je kamatna stopa 10%.

2. Dana 15.7.2012. ste uložili u banku 5.300 evra, uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 5%, kvartalno kapitalisanje i kombinaciju proste i složene kamate. Takođe, počev od 1.1.2014. pa tokom cele 2014. ste na kraju svakog meseca ulagali po 170 evra u istu banku, uz iste uslove. Dana 1.1.2015. sav novac iz banke ste podigli i uplatili kao učešće u kreditu za kupovinu automobila. Kredit je odobren na 7 godina, uz otplatu jednakim tromesečnim ratama od 250 evra. Banka na ovaj kredit obračunava 18% nominalne kamatne stope na godišnjem nivou i mesečno kapitališe. Naći cenu automobila.

3. Zajam od 6.000 evra se otplaćuje 5 godina jednakim dvomesečnim otplatama uz 10% nominalne godišnje kamatne stope sa godišnjim kapitalisanjem. Nakon dve godine, godišnja kamatna stopa je pala na 9%, a ostali uslovi su ostali nepromenjeni. Nakon tri godine od početka otplate kredita, u narednoj rati otplaćujete ceo dug prevremeno. Napraviti plan amortizacije.

II kolokvijum
školska 2015/16.

1. Kupac želi da kupi auto u vrednosti od 14.500 evra. Dve banke nude kredite za kupovinu kola:

   I) Prva banka nudi kredit na 3 godine uz učešće od 10%, koji se otplaćuje jednakim mesečnim anuitetima uz 7,10% godišnje kamatne stope, uz kvartalno kapitalisanje;

   II) Druga banka nudi kredit na 3 godine uz učešće od 40%, koji se otplaćuje jednakim mesečnim otplatama uz 7,15% godišnje kamatne stope, uz kvartalno kapitalisanje.

   Proceniti koji je kredit povoljniji na osnovu sadašnje vrednosti novčanih tokova, ako je preovlađujuća nominalna godišnja kamatna stopa 7%, uz kvartalno kapitalisanje.

2. Odrediti graničnu vrednost srednjeg vremena obveznice kada rok dospeća teži beskonačno velikom broju.

3. Date su funkcije prosečnih troškova i cene:

$$\begin{aligned} AC(Q) &= 3Q + 22 + \frac{c}{Q}, \\ P(Q) &= -Q^3 + 25Q^2 + 8Q + 3Q. \end{aligned}$$

   Ako se zna da su fiksni troškovi 1100, odrediti rentabilan i optimalan nivo proizvodnje.

I kolokvijum
školska 2016/17.

1. Na ime duga od 200.000 dinara, dana 15.2.2017. poveriocu plaćate 50.000 dinara i izdajete dve menice, sa datumima dospeća 18.6.2017. i 21.12.2017. Nominalna vrednost druge menice je, pri tome, za 10% manja od nominalne vrednosti prve menice. Kolike su nominalne vrednosti tih menica, ako se obračunava kamatna stopa u visini od 15% na godišnjem nivou?

2. Dana 12.5.2014. u banku ste uložili 6.000 evra, uz godišnju kamatnu stopu od 5%, kvartalno kapitalisanje i uz obračun konformne kamatne stope. Dana 1.1.2017. podigli ste sav novac sa računa i uplatili ga kao učešće u kreditu, za kupovinu automobila čija je cena 12.800 evra. Prodavac računa 15% nominalnu godišnju kamatnu stopu, mesečno kapitališe i daje vam kredit jednakim mesečnim anuitetima na 4 godine. Izračunati iznos tog anuiteta.
   Ako ste propustili da uplatite prve 3 rate, a onda se odlučili da u narednoj isplatite ceo dug, izračunati tu 4. uplatu.

3. Zajam od 6.000 evra se otplaćuje 5 godina jednakim dvomesečnim otplatama uz 12% nominalne godišnje kamatne stope sa godišnjim kapitalisanjem. Nakon dve godine, godišnja kamatna stopa je pala na 10%, a ostali uslovi su ostali nepromenjeni. Nakon tri godine od početka otplate kredita, u narednoj rati otplaćujete ceo dug prevremeno. Napraviti plan amortizacije.

II kolokvijum
školska 2016/17.

1. Na raspolaganju 1.1.2017. imate 6.500 evra za ulaganje u jedan od dva ponuđena projekta. Prvi projekat na početku sledećeg meseca donosi profit od 350 evra, a potom početkom svakog narednog meseca, zaključno sa 1.1.2018. taj profit se uvećava za 9% u odnosu na profit u prethodnom mesecu. Drugi projekat dana 1.2.2017. donosi 360 evra profita, a potom na početku svakog sledećeg meseca, sve do 1.1.2018. donosi za 42 evra više nego prethodnog meseca. U koji ćete projekat uložiti Vaš novac, ako Vam je kriterijum za evaluaciju interna stopa prinosa?

2. Dužnik ima obavezu da 12.5.2019. vrati dug u iznosu od 1.000.000 dinara. Na tržištu dana 12.9.2017. nude se dve vrste obveznica:

   - obveznica A koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 3.200 dinara, kamatnu stopu 8%, datum dospeća 12.5.2018. godine;
   - obveznica B koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 1.500 dinara, kamatnu stopu 9% i datum dospeća 12.5.2020. godine;

   Konstruisati portfolio u cilju zaštite od rizika promene kamatnih stopa koji će omogućiti vraćanje duga na vreme, ako je prinos do dospeća 10%.

3. Date su funkcija prosečnih troškova i ukupnih prihoda:

$$AC(Q) = 2Q^2 + 14Q + \frac{c}{Q},$$
$$TR(Q) = Q^3 - 50Q^2 + 600Q,$$

   gde je c konstanta. Ako se zna da su fiksni troškovi 5, odrediti rentabilan i optimalan nivo proizvodnje.

I kolokvijum
školska 2017/18.

1. Dana 1.4.2018. ste posedovali dve menice takve da je tada eskontovana vrednost druge menice za 10% bila veća od eskontovane vrednosti prve menice. Kamatna stopa na prvu menicu je 8%, a na drugu 7%. Ako obe menice dospevaju 18.11.2018. i zbir njihovih nominalnih vrednosti je 45.000 dinara, naći pojedinačne nominalne vrednosti ovih dveju menica.

2. Dana 12.1.2015. ste uložili 4.500 evra u banku, uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 6%. Banka kvartalno kapitališe, uz obračun konformne kamate. Dana 1.1.2018. ste podigli novac iz banke i njime uplatili učešće u kreditu za kupovinu automobila. Ako je kredit odobren na 5 godina, uz dvomesečne rate od 420 evra, mesečno kapitalisanje i uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 15%, naći cenu tog automobila.

3. Zajam od 5.000 evra se otplaćuje dve godine jednakim dvomesečnim anuitetima uz 10% nominalne godišnje kamatne stope i polugodišnjim kapitalisanjem. Nakon prve godine (od naredne rate) kredit se otplaćuje jednakim dvomesečnim otplatama uz 8% nominalne godišnje kamatne stope i polugodišnjim kapitalisanjem. Napraviti plan amortizacije.

II kolokvijum
školska 2017/18.

1. Za dva novčana toka $(x_0, x_1, ..., x_m)$ i $(y_0, y_1, ..., y_m)$ kažemo da se ukrštaju ako važi $x_0 > y_0$ i
$$\sum_{i=0}^{m} x_i < \sum_{i=0}^{m} y_i.$$
Neka su $A_x(c)$ i $A_y(c)$ sadašnje vrednosti dva neto novčana toka koji se ukrštaju. Tada postoji vrednost $d > 0$ da je $A_x(d) = A_y(d)$.

2. Date su dve obveznice sa godišnjim kuponima:

	Obveznica	
Isplate krajem	A	B
1. godine	90	80+1000
2. godine	90+2700	0
3. godine	0	0

Ako se zna da je prinos za obe obveznice jednak 15%, naći prodajne cene, srednja vremena i konveksnost za ove obveznice.

3. Ako ste kupili dve akcije nekog preduzeća po ceni od 58 USD i dve opcije na kupovinu akcija istog preduzeća od 61 USD sa premijom 4 USD pojedinačno, naći kolika treba da bude cena akcija na tržištu na dan dospeća tako da bi vaš profit bio 8 USD (akcije ćete tog dana prodati).

4. Date su funkcija marginalnih troškova i cene:
$$MC(Q) = 3Q^2 + 7Q, \qquad P = -Q + 80$$
i poznato je da su fiksni troškovi 30. Odrediti rentabilan i optimalni nivo proizvodnje.

I kolokvijum
školska 2018/19.

1. Dana 25.1.2019. kupili ste dve menice sa datumima dospeća 15.5.2019. i 20.12.2019. Ako ste ih ukupno platili 450.000 dinara, a odnos nominalnih vrednosti prve i druge menice je 3:5, naći koliko vas je koštala kupovina prve i druge menice, pojedinačno. Godišnja kamatna stopa je 15%.

2. Dana 12.1.2016. ste uložili 7.500 evra u banku, uz godišnju kamatnu stopu od 8%. Banka kvartalno kapitališe, uz obračun konformne kamate. Dana 1.1.2019. ste podigli novac iz banke i njime uplatili učešće u kreditu za kupovinu automobila. Ako je kredit odobren na 5 godina, uz dvomesečne rate od 280 evra, mesečno kapitalisanje i uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 15%, naći cenu tog automobila.

3. Zajam od 5.000 evra se otplaćuje dve godine jednakim dvomesečnim anuitetima uz 10% nominalne godišnje kamatne stope i polugodišnjim kapitalisanjem. Nakon prve godine (od naredne rate) kamatna stopa pada na 9%, a vreme amortizacije se produžava za pola godine, dok ostali uslovi ostaju isti. Napraviti plan amortizacije.

II kolokvijum
školska 2018/19.

1. Na raspolaganju 1.1.2018. imate 4.200 evra za ulaganje u jedan od dva ponuđena projekta. Prvi projekat na početku prvog meseca (odnosno 1.2.2018.) donosi profit od 190 evra. Očekuje se da se profit svaki mesec uvećava za 1%, a da ćete posle godinu dana (1.1.2019.), uz isti profit, prodati i pravo na Vaš projekat za 3.800 evra. Drugi projekat dana 1.2.2018. donosi 150 evra profita, a potom svakog sledećeg meseca, sve do 1.6.2018. očekuje se 12% profita više nego prethodnog meseca. Posle toga, očekujete pad potražnje za tim proizvodom i pad profita svakog meseca za 2% u odnosu na prethodni mesec. Posle godinu dana (1.1.2019.), očekujete da ćete uz tekući profit, prodati i pravo na Vaš projekat za 3.600 evra. U koji ćete projekat uložiti Vaš novac, ako Vam je kriterijum za evaluaciju sadašnja vrednost novčanog toka, a godišnja kamatna stopa je 14%, uz godišnje kapitalisanje?

2. Dužnik ima obavezu da 12.5.2020. vrati dug u iznosu od 500.000 dinara. Na tržištu dana 12.5.2018. nude se dve vrste obveznica:
   - obveznica A koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 2.800 dinara, kamatnu stopu 10%, datum dospeća 12.5.2019. godine;
   - obveznica B koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 3.200 dinara, kamatnu stopu 12%, datum dospeća 12.5.2021. godine;

   a) Naći prodajne cene i srednja vremena za obe obveznice.

   b) Konstruisati portfolio u cilju zaštite od rizika promene kamatnih stopa koji će omogućiti vraćanje duga na vreme, ako je prinos do dospeća 11%.

3. Ako ste kupili tri akcije nekog preduzeća po ceni od 59 USD i jednu opciju na kupovinu akcija istog preduzeća od 61 USD sa premijom 3 USD pojedinačno, naći kolika treba da bude cena akcija na tržištu na dan dospeća tako da bi vaš profit bio 9 USD (akcije ćete tog dana prodati).

4. Ako je funkcija cene nekog proizvoda oblika $P(Q) = Q^2 + 60Q + 12$, funkcija marginalnih troškova je $MC(Q) = 7Q^2 + 3$, a fiksni troškovi su 470:

   a) naći rentabilan nivo prozvodnje,

   b) naći optimalan nivo proizvodnje.

I kolokvijum
školska 2019/20.

1. Dužnik se dogovorio sa poveriocem da dug koji treba da plati 20.5.2020. u iznosu od 4.000 evra isplati sa tri menice koje dospevaju 30.8.2020, 18.11.2020. i 25.12.2020. Prva i druga menica imaju iste nominalne vrednosti, dok je nominalna vrednost treće menice za 23% veća od nominalnih vrednosti prvih dveju menica. Odrediti nominalne iznose menica, ako je važeća kamatna stopa 9,5%.

2. Dana 1.1.2017. ste počeli da iznajmljujete stan, čija je stanarina bila 190 evra. Zakupac vam je uvek početkom meseca uplaćivao stanarinu za tekući mesec i vi ste taj novac istog dana uplaćivali u banku, gde ste štedeli. Banka vam je obračunavala nominalnu kamatnu stopu od 6,5% na godišnjem nivou, uz kvartalno kapitalisanje. Stan ste iznajmljivali naredne dve godine, sve do 1.1.2019. kada ste sve što ste uštedeli do toga vremena oročili do 25.2.2020, uz iste uslove i kombinaciju proste i složene kamate. Nakon isteka tog perioda, ušteđeni novac ste uplatili kao učešće u kreditu za kupovinu automobila, koji košta 15.300 evra. Banka vam je odobrila kredit na 7 godina, uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 22%, mesečno kapitalisanje i jednake tromesečne rate. Koliko iznosi jedna vaša rata?

3. Da biste opremili stan uzeli ste potrošački kredit u visini od 7.500 evra na 6 godina, uz godišnju kamatnu stopu od 9%, jednake mesečne otplate i kvartalno kapitalisanje. Posle tri godine i 3 kvartala kamatna stopa je podignuta na 9,4%, a vi ste se odlučili tada da kredit nadalje otplaćujete jednakim mesečnim anuitetima. Napraviti plan amortizacije. Kolika vam je plata bila neophodna (da bi vam dozvolili da otplaćujete kredit) na početku oplate kredita, a kolika nakon tri godine i 9 meseci, ako je dozvoljeno da vaš lični dohodak opteretite najviše do 33%? Koliko ste ukupno kamate platili?

II kolokvijum
školska 2019/20.

1. Dužnik ima obavezu da 12.5.2020. vrati dug u iznosu od 2.000.000 dinara. Na tržištu dana 12.5.2018. nude se dve vrste obveznica:

   - obveznica AA koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 6.400 dinara, kamatnu stopu 8,4%, datum dospeća 12.5.2019. godine;
   - obveznica AB koja ima polugodišnje kupone, nominalnu vrednost 3.000 dinara, kamatnu stopu 9,5% i datum dospeća 12.5.2021. godine.

   Konstruisati portfolio u cilju zaštite od rizika promene kamatnih stopa koji će omogućiti vraćanje duga na vreme, ako je prinos do dospeća 11%.

2. Na raspolaganju 1.1.2020. imate 7.000 evra za ulaganje u jedan od dva ponuđena projekta. Prvi projekat na početku sledećeg meseca donosi profit od 470 evra, a potom početkom svakog narednog meseca, zaključno sa 1.1.2021. taj profit se uvećava za 8.2% u odnosu na profit u prethodnom mesecu, ali Vas država oporezuje sa 4% poreske stope ukoliko Vaš profit prelazi 530 evra mesečno. Drugi projekat dana 1.2.2020. donosi 420 evra profita, a potom na početku svakog sledećeg meseca, sve do 1.1.2021. donosi za 55 evra više nego prethodnog meseca (kod ovog projekta država ne oporezuje). U koji ćete projekat uložiti Vaš novac, ako Vam je kriterijum za evaluaciju interna stopa prinosa?

3. Posmatrajmo investitora koji se nada da će cena akcije koja trenutno košta 69 evra, značajno da se promeni u naredna 3 meseca. Investitor kupuje jednu call i jednu put opciju na tu akciju, sa rokom dospeća 3 meseca za obe opcije i sa strajk cenom za obe opcije od 70 evra. Neka je premija za call opciju 4, a za put opciju 3 evra. Za koje vrednosti akcija će investitor imati profit? Nacrtati grafik funkcije profita ovog investitora u zavisnosti od cene akcije u trenutku dospeća.

4. Date su funkcija marginalnih troškova i ukupnih prihoda:

   $$MC(Q) = 4Q + 25,$$

   $$TR(Q) = -Q^4 + 23Q^3 + 8Q^2 + 3Q.$$

   Ako se zna da su fiksni troškovi 820, odrediti rentabilan i optimalan nivo proizvodnje.

I kolokvijum
školska 2020/21.

1. Menica nominalne vrednosti 150.000 dinara dospeva 17.4.2021. Na dan dospeća dužnik izdaje, na ime duga, dve nove menice sa rokovima dospeća 13.11.2021. i 18.12.2021, pri čemu je nominalna vrednost druge menice za 20.000 dinara veća od nominalne vrednosti prve. Odrediti nominalne vrednosti ovih menica ako se dug u potpunosti isplaćuje novim menicama i računa nominalna godišnja kamatna stopa 10%.

2. Dana 1.1.2019. ste počeli da iznajmljujete stan sa mesečnom stanarinom od 170 evra, i na početku svakog meseca ste ovaj iznos uplaćivali u banku naredne dve godine. Takođe, 17.5.2017. oročili ste 5.500 evra sve do 1.1.2021. Banka obračunava na sve ovo 4% nominalnu godišnju kamatnu stopu uz kvartalno kapitalisanje i obračun komforne kamatne stope. Dana 1.1.2021. celokupan ušteđeni iznos upaćujete kao učešće za kupovinu automobila vrednog 17.360 evra. Ostatak iznosa uzimate na kredit koji otplaćujete 7 godina sa tromesečnim jednakim anuitetima, uz 12% godišnje kamatne stope i kvartalno kapitalisanje. Koliki je iznos rate koju otplaćujete?

3. Kredit od 450.000 dinara se otplaćuje 6 godina dvomesečnim anuitetima tako da su anuiteti jednaki uz 10% nominalne godišnje kamatne stope i mesečnim kapitalisanjem. Nakon dve godine, otplata kredita se nastavlja sa jednakim otplatama (ostali uslovi se ne menjaju). Napraviti plan amortizacije ovog kredita.

II kolokvijum
školska 2020/21.

1. Dana 1.1.2021. ste uložili u neki projekat 12.000 evra. Na početku svakog narednog meseca očekujete konstantne prihode u visini od 950 evra, dok očekujete da će se rashodi smanjivati svakog meseca za 3% u odnosu na prethodni mesec. Ako su dana 1.2.2021. rashodi bili 520 evra, a projekat će trajati tri godine (zaključno sa 1.1.2024.), naći internu stopu prinosa ovog novčanog toka.

2. Date su dve obveznice sa godišnjim kuponima:

	Obveznica	
Isplate krajem	A	B
1. godine	95	80
2. godine	95+2100	80
3. godine	0	80+1500

   a) Ako se zna da je obveznica A prodata po ceni od 1.985 USD i da je prinos do dospeća za sve tri obveznice jednak, naći prodajne cene sve tri obveznice.

   b) Ako na kraju druge godine treba da vratite dug od 40.000 USD, konstruisati portfolio tako da dug bude podmiren.

3. Ako ste kupili dve akcije nekog preduzeća po ceni od 59 USD i jednu opciju na prodaju akcija istog preduzeća od 63 USD sa premijom 4 USD pojedinačno, naći kolika treba da bude cena akcija na tržištu na dan dospeća tako da bi vaš profit bio 13 USD (akcije ćete tog dana prodati).

4. Ako je funkcija marginalnih troškova linearna funkcija, fiksni troškovi iznose 100, a funkcija tražnje je $Q = 400 - P$, odrediti:

   a) funkciju profita tako da je profit jednak nuli na nivou proizvodnje od 150 i od 350 jedinica proizvoda,

   b) optimalan nivo proizvodnje.

Literatura

[1] A. Adams, P. Booth, D. Bowie, D. Freeth: *Investment Mathematics*, John Wiley & Sons, West Sussex, 2003.

[2] T. Bradley: *Essential Mathematics for Economics and Business*, John Wiley & Sons, West Sussex, 2013.

[3] R. DeFusco, D. McLeavey, J. Pinto, D. Runkle, M. Anson: *Quantitative Investment Analysis*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.

[4] Lj. Gajić, A. Pavlović, S. Rapajić: *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz poslovne matematike*, Novi Sad: PMF, Departman za matematiku i informatiku, 2003.

[5] D. Higham: *An introduction to financial option valuation*, Cambridge University Press, 2004.

[6] N. Krejić: *Predavanja iz Finansijske matematike 1*, skripta.

[7] D. Luenberger: *Investment Science*, Oxford University Press, New York, 1998.

[8] I. Radeka: *Finansijska matematika I*, PMF, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2005.

[9] F. Reilly, K. Brown: *Investment Analysis and Portfolio Management*, Thomson South-Western, 2006.

[10] R.J. Wilders: *Financial Mathematics for Actuarial Science*, Taylor & Francis Group, 2020.