[1] Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

Бранимир Шешеља и Андреја Тепавчевић

Булове алгебре и функције

теорија и задаци

Треће издање

Нови Сад 2023

Универзитет у Новом Саду
Природно-математички факултет
Департман за математику и информатику

Назив: Булове алгебре и функције

Аутори: Др Бранимир Шешеља, редовни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, у пензији
Др Андреја Тепавчевић, редовни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду

Рецензенти: Др Јанез Ушан, редовни професор у пензији
Др Драган Машуловић, ванредни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду
Уредник: Др Зорана Лужанин, редовни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду

Издавач: Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику у Новом Саду

Одлуком Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Новом Саду од 18. Новембра 2005. године, одобрено је штампање и употреба овог уџбеника.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

512.563(075.8)(076)
517.547.5(075.8)(076)

ШЕШЕЉА, Бранимир, 1948-
Булове алгебре и функције [Elektronski izvor] : теорија и задаци / Бранимир Шешеља и Андреја Тепавчевић. - 3. изд. - Нови Сад : Природно-математички факултет, 2023

Начин приступа (URL): https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/seselja_tepavcevic_bulove_algebre_i_optimizacija.pdf. - Опис заснован на стању на дан 13.11.2023. - Насл. са насловног екрана. - Библиографија. - Регистар.

ISBN 978-86-7031-488-7

1. Тепавчевић, Андреја, 1964- [autor]
a) Булова алгебра b) Булове функције

COBISS.SR-ID 129896457

Sadržaj

Predgovor 3

Predgovor drugom dopunjenom izdanju 5

Uvodne definicije, terminologija i oznake 7

Glava 1. Mreže i Bulove algebre 11
1. Uređeni skup 11
2. Mreža 26
3. Modularna i distributivna mreža 47
4. Bulova mreža i Bulova algebra 59
5. Bulov prsten 99

Glava 2. Bulove funkcije. Minimizacija 107
1. Bulovi termi i term-funkcije 107
2. Operacije na skupu $\{0,1\}$ 119
3. Prekidačka i logička kola 129
4. Minimizacija Bulovih funkcija 143

Glava 3. Dodatak: Bulove funkcije, kodovi i statistička teorija informacija 189
1. Binarni blok-kodovi 189
2. Komunikacijski kanal; BSC 194
3. Dekodiranje; ispravljanje i otkrivanje grešaka 196

Indeks 207

Literatura 211

Predgovor

U ovoj knjizi izlažu se matematičke oblasti na kojima se zasniva razvoj i rad digitalnih sistema. To su Bulovi termi i funkcije, minimizacija i osnovni aspekti primene.

Bulove funkcije deo su algebarske teorije Bulovih algebri i ne mogu se detaljnije razmatrati izvan nje. Zato je ovde koncizno, ali detaljno izložena teorija uređenih skupova, mreža i Bulovih algebri. U taj kontekst smešteni su osnovni pojmovi, osobine i primene Bulovih terma i funkcija.

Prva glava može koristiti i kao celovit polazni tekst o mrežama i Bulovim algebrama, od osnovnih i posebnih svojstava (na pr. modularnost i distributivnost), do teorema reprezentacije. U drugoj glavi su osobine Bulovih terma, minimizacija i primene.

Po koncepciji, ovo je udžbenik sa zbirkom zadataka. Pored brojnih primera i ilustracija, zadaci omogućuju da se ova oblast razume i usvoji. Deo važnih svojstava mreža i Bulovih algebri takođe je dat u vidu rešenih zadataka. To se posebno odnosi na osobine koje nisu neophodne za primene Bulovih funkcija (na pr. na teoreme reprezentacije za distributivne mreže i Bulove algebre).

Od čitaoca se očekuje poznavanje osnova matematike i elemenata algebre - oblasti koji se predaju na kursevima prve godine studija matematike ili tehnike (videti na pr. knjigu [**19**]).

Knjiga je nastala na osnovu prvog dela kursa pod nazivom *Matematičke osnove informatike*, koji su više godina slušali studenti raznih smerova matematike i informatike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Osnovnu literaturu činile su knjige [**16**] i [**21**]. Deo o Bulovim algebrama, funkcijama i primenama oformljen je sada kao poseban predmet *Bulove algebre i optimizacija* i ovo je udžbenik za taj kurs.

Za formiranje odvojenih kurseva proisteklih iz *Matematičkih osnova informatike*, zaslužan je kolega E. Aichinger (TU Linz, Austria), sa kojim su autori vodili korisne razgovore.

Autori se zahvaljuju D. Mašuloviću, čije su primedbe doprinele poboljšanju teksta. J. Ušan učestvovao je u nastanku ove knjige od prvih ideja, kroz brojne razgovore sa autorima i oni su mu na tome zahvalni.

U Novom Sadu, oktobra 2005.

Autori

Predgovor drugom dopunjenom izdanju

Ovo izdanje sadrži novo poglavlje o binarnim blok–kodovima i njihovoj vezi sa Bulovim funkcijama. U kontekstu statističke teorije informacija, govori se o otkrivanju i ispravljanju grešaka u transmisiji putem binarnog simetričnog kanala (BSC). Namera autora je da se pokažu aktuelnost teorije Bulovih algebri i funkcija u savremenom računarstvu, kao i veze sa primenjenom statistikom.

U Novom Sadu, oktobra 2013.

Autori

Uvodne definicije, terminologija i oznake

U tekstu se koristi uglavnom standardna notacija za označavanje matematičkih pojmova.

Skupovi su označeni velikim slovima latinice, sa ili bez indeksa. Oznaka *praznog skupa* je $\emptyset$. Osnovni odnos kojim se porede skupovi je *inkluzija*:

$A \subseteq B$ ako i samo ako $x \in A$ povlači $x \in B$.

Skup svih podskupova skupa A, u oznaci $\mathcal{P}(A)$ je *partitivni skup* za A:

$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Unija, presek, razlika i *komplement*, kao uobičajene operacije na partitivnom skupu $\mathcal{P}(U)$ proizvoljnog skupa U, označavaju se redom sa $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i A'.

Ako je $A \cap B = \emptyset$, skupovi A i B su *disjunktni*.

Kolekcija nepraznih, u parovima disjunktnih podskupova iz A čija je unija A zove se *particija* skupa A.

Oznaka (a, b) odnosi se na *uređeni par* elemenata a i b; formalna definicija je

$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Polazeći od $a^1 := a$, dalje se za $n \in \mathbb{N}$, *uređena n-torka* elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definiše rekurzivno:

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) := ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

Ako su A i B neprazni skupovi, onda je

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ *direktan proizvod* skupova A i B.

Direktan proizvod nepraznih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definisan je sa

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$.

Posebno, ako je $A \neq \emptyset$, onda je

$A^0 = \{\emptyset\}$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^n = A \times A^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Svaki od gornjih proizvoda je prazan skup, ako je bar jedan od skupova koji učestvuju prazan.

Binarna relacija ρ na nepraznom skupu A je podskup iz A^2: $\rho \subseteq A^2$. Umesto $(x, y) \in \rho$, piše se i $x\rho y$. Binarna relacija se u nastavku zove *relacija*, jer druge relacije (n-arne, tj. podskupove iz A^n, za $n \in N$) osim binarnih, ovde ne koristimo.

Relacija ρ na A je *refleksivna* ako je $x\rho x$ za sve x iz A. ρ je *simetrična* ako za sve $x, y \in A$, iz $x\rho y$ sledi $y\rho x$. ρ je *tranzitivna* ako iz $x\rho y$ i $y\rho z$ sledi $x\rho z$, za sve $x, y, z \in A$.

Refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija ρ na A je *relacija ekvivalencije* (*rst-relacija*) na A.

Ako je ρ rst-relacija na A i za $a \in A$

$[a]_\rho = \{x \in A \mid a\rho x\}$, (*klasa ekvivalencije elementa* a),

onda se skup klasa ekvivalencije $\{[a]_\rho \mid a \in A\}$, u oznaci A/ρ, zove *količnički skup* po relaciji ρ. Klase ekvivalencije su u parovima disjunktne i njihova unija je A.

Funkcija (*preslikavanje*) f iz skupa A u neprazni skup B, u oznaci $f : A \to B$ je podskup iz $A \times B$, takav da se svaki elemenat iz A javlja tačno jednom kao prva komponenta u nekom paru iz f. A je *domen*, a B *ko-domen* funkcije f.

Ako je $f : A \to B$ funkcija, onda se $(x, y) \in f$ označava sa $y = f(x)$. Ako je $X \subseteq A$, onda je

$f(X) = \{y \in B \mid y = f(x),\ \text{za neko}\ x \in X\}$.

Svaka funkcija $f : A \to B$ indukuje relaciju ekvivalencije $\sim$ (*jezgro* funkcije f) na A:

$x \sim y$ ako i samo ako je $f(x) = f(y)$.

Injekcija, ili 1 - 1 preslikavanje je funkcija $f : A \to B$, za koju važi:

iz $x \neq y$ sledi $f(x) \neq f(y)$.

Ako za svako y iz B postoji x u A tako da je $y = f(x)$, onda je $f : A \to B$ *sirjekcija*, sirjektivno ili „na“ preslikavanje.

Injektivna i sirjektivna funkcija $f : A \to B$ zove se *bijekcija* iz A na B.

Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je $f^{-1} : B \to A$ funkcija definisana sa $f^{-1}(y) = x$ ako i samo ako je $f(x) = y$. Funkcija f^{-1} je *inverzna funkcija* za f koja je isto bijekcija.

Oznaka f^{-1} koristi se i u drugom značenju. Ako je $f : A \to B$ proizvoljna funkcija i $C \subseteq f(A)$, onda je $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$. To je *inverzna slika* skupa C. U tom kontekstu, ponekad se umesto $f^{-1}(\{c\})$, za $c \in f(A)$, piše $f^{-1}(c)$, pod uslovom da se u istom kontekstu ne koristi inverzna funkcija.

Funkcija $f : \{1, 2, \dots, n\} \to A$ zove se *reč* nad skupom A (ekvivalentno, reč je uređena n-torka elemenata iz A).

Neka su I i A proizvoljni skupovi. Funkcija $I \to \mathcal{P}(A)$ je *familija* podskupova iz A; I je *skup indeksa* (indeksni skup). Familija se označava sa $\{A_i, i \in I\}$. Familija je prazna, ako je je $I = \emptyset$. Kaže se da je A_i *i-ti član* familije. Specijalno, ako je $I = \mathbb{N}$, familija je skup $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ čiji elementi obrazuju niz podskupova iz A.

Broj elemenata (kardinalni broj) konačnog skupa A (jer se ovde većinom koriste konačni skupovi) označavamo sa $|A|$ ili sa $\mathsf{card}\,A$.

Ako je $f : A \to B$ funkcija i C neprazni podskup iz A, onda je funkcija $g : C \to B$ *restrikcija* funkcije f na skup C, ako je za sve $x \in C$ ispunjeno $g(x) = f(x)$.

Funkcija $f : A \to A$ na nepraznom skupu A je *unarna operacija* na A. Funkcija $* : A^2 \to A$ je *binarna operacija* na A. Umesto $*(x, y)$, piše se $x * y$.

Analogno, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, funkcija iz A^n u A je *n-arna operacija* na A.

Skupovi brojeva označeni su sa
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ - prirodni;
$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ - celi;
$\mathbb{Q}$ - racionalni brojevi, razlomci;
$\mathbb{R}$ - realni brojevi.

Neprazan skup G, zajedno sa binarnom operacijom $*$ na njemu, zove se *grupoid*, u oznaci $(G, *)$.

Grupoid je *komutativan* ako za sve $x, y \in G$ važi $x * y = y * x$.

Ako postoji $e \in G$ za koje je $x * e = e * x = x$, za svako $x \in G$, onda je e *neutralni* (jedinični) elemenat grupoida $(G, *)$. Neutralni elemenat, ako postoji, je jedinstven.

Asocijativni grupoid, tj. onaj na kome je ispunjen identitet $x * (y * z) = (x * y) * z$, za sve $x, y, z \in G$, zove se *polugrupa*. Polugrupa sa neutralnim elementom zove se *monoid*.

Polugrupa $(G, *)$ sa neutralnim elementom e u kojoj za svaki elemenat $x \in G$ postoji $x^{-1} \in G$ tako da je $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (x^{-1} je *inverzni* elemenat za x), zove se *grupa*. Ako je operacija $*$ komutativna, grupa je *Abelova*.

Grupoid $(H, \cdot)$ je *podgrupoid* grupoida $(G, *)$, ako je $H \subseteq G$, a operacija „$\cdot$" je restrikcija operacije „$*$" na skup H. Ako su pri tome još i G i H polugrupe (grupe), onda je H *potpolugrupa* (*podgrupa*) u G.

Neprazni skup P sa dve binarne operacije $\oplus$ i $\circ$, u oznaci $(P, \oplus, \circ)$, zove se *prsten*, ako je $(P, \oplus)$ Abelova grupa, $(P, \circ)$ polugrupa, a druga operacija $(\circ)$ distributivna je prema prvoj $(\oplus)$:

$x \circ (y \oplus z) = (x \circ y) \oplus (x \circ z)$ i $(x \oplus y) \circ z = (x \circ z) \oplus (y \circ z)$.

Prsten je *komutativan* ako je druga operacija komutativna, kaže se da je *sa jedinicom*, ako postoji neutralni elemenat za drugu operaciju. Prsten je *bez delitelja nule*, ako iz $x \circ y = 0$ sledi $x = 0$ ili $y = 0$, gde je 0 neutralni elemenat za prvu operaciju.

Komutativan prsten $(P, \oplus, \circ)$ sa jedinicom i bez delitelja nule, u kome je $(P \setminus \{0\}, \circ)$ grupa, zove se *polje*.

Abelova grupa $(V, +)$ je *vektorski prostor* nad poljem $(P, +, \cdot)$, ako je definisana funkcija iz $P \times V$ u V, označena sa „ $\cdot$ ", tako da je za $\alpha, \beta \in P$ i $a, b \in V$ ispunjeno:

(i) $\alpha \cdot (a + b) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b)$;
(ii) $(\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) + (\beta \cdot a)$;
(iii) $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$;
(iv) $1 \cdot a = a$, gde je 1 neutralni elemenat za drugu operaciju u polju P.

Četiri operacije označene su sa dva znaka, $+$ i $\cdot$, ali se iz konteksta (tj. prema objektima na koje se odnose) vidi o kojim operacijama je reč. Često se i proizvod $\alpha \cdot a$ označava sa αa.

Elementi $\alpha, \beta, \ldots$ polja P su *skalari*, a $a, b, c, \ldots$ iz V su *vektori*. Vektor $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ je *linearna kombinacija* vektora $a_1, \ldots, a_n$, gde su α_i proizvoljni skalari. Vektori $a_1, \ldots, a_n$ su *linearno nezavisni* ako važi: $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$ ako i samo ako je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, inače su *linearno zavisni* (tj. ako je njihova linearna kombinacija jednaka nuli i za neke skalare koji nisu svi nule). Skup $B \subseteq V$ linearno nezavisnih vektora je *baza* vektorskog prostora V, ako se svaki vektor iz V može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz B. Ako je B konačan skup, V je *konačno dimenzionalan*. Sve baze konačno dimenzionalnog vektorskog prostora imaju isti broj elemenata i taj broj je *dimenzija* vektorskog prostora.

Podskup V_1 vektorskog prostora V nad poljem P je njegov *potprostor* ako je i sam V_1 vektorski prostor nad P u odnosu na restrikcije operacija $+$ i $\cdot$ na V_1 i $P \times V_1$ redom.

Pokazuje se da je neprazni podskup V_1 iz V njegov potprostor ako je za $\alpha, \beta \in P$ i $a, b \in V_1$ ispunjeno $\alpha a + \beta b \in V_1$.

Ako je S neprazan skup i d je funkcija iz $S \times S$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ tako da je za sve $a, b, c \in S$ ispunjeno:

D_1: $d(a,b) \geqslant 0$;

D_2: $d(a,b) = 0$ ako i samo ako je $a = b$;

D_3: $d(a,b) = d(b,a)$;

D_4: $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$,

onda je uređeni par (S,d) *metrički prostor*, a d je *razdaljinska funkcija* u S, ili *rastojanje*.

Neka je V neprazan skup i X familija uređenih parova iz V (u kojoj može biti i jednakih parova). Tada je $G = (V, X)$ *graf*, elementi iz V su njegovi *čvorovi*, a uređeni parovi iz X su *grane*. Grana (a,b) povezuje čvorove a i b. Grana oblika (a,a) je *petlja*. Skup grana $(a_1,a_2), (a_2,a_3), \ldots, (a_{n-1},a_n)$ je *put* koji povezuje čvorove a_1 i a_n. Graf je *povezan* ako su svaka dva čvora povezana nekim putem. Graf može biti definisan i tako da su u X neuređeni parovi čvorova. Takav graf je neorijentisan, inače je orijentisan. Geometrijska reprezentacija grafa: čvorovi su tačke u ravni, grane su spojnice koje ih povezuju, sa nekim dogovorom o orijentaciji (strelicom na pr.).

GLAVA 1

Mreže i Bulove algebre

1. Uređeni skup

1.1. Definicija i primeri. Neprazan skup P je **uređen** ako je na njemu definisana refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija, dakle relacija poretka. Ta relacija obeležava se obično oznakom $\leqslant$ („manje ili jednako“), čak i ako se ne radi o uobičajenom poretku na nekom skupu brojeva. Uređeni skup[1] označava se kao par $(P, \leqslant)$.

Primer 1.1. Navodimo neke poznate uređene skupove.

a) Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva uređuje se kao $(\mathbb{N}, \leqslant)$, gde je

$$m \leqslant n \text{ ako i samo ako } m = n \text{ ili } (\exists p)(m + p = n),$$

i kao $(\mathbb{N}, \mid)$, pri čemu je $\mid$ relacija deljivosti:

$$m \mid n \text{ ako i samo ako } (\exists p)(m \cdot p = n).$$

b) Skup $\mathbb{Z}$ celih brojeva uređuje se kao $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, tako da je

$$x \leqslant y, \text{ ako i samo ako } x = y \text{ ili } (\exists z)(z \in \mathbb{N} \text{ i } x + z = y).$$

c) Uređeni skupovi su i $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ i $(\mathbb{R}, \leqslant)$, gde su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ redom skupovi racionalnih i realnih brojeva, a poredak je uobičajeni poredak za brojeve.

d) Ako je A neprazan skup, a $\mathcal{P}(A)$ njegov partitivni skup (skup svih podskupova iz A), onda je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ skup uređen inkluzijom (podsećamo: ako su X i Y podskupovi iz A, onda je

$$X \subseteq Y \text{ ako i samo ako } (\forall a \in A)(a \in X \Rightarrow a \in Y)). \qquad \square$$

Ako je $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$, kaže se da su x i y **uporedivi** s obzirom na relaciju $\leqslant$, inače su **neuporedivi**.

Poredak na P je **linearan** (**totalan**) ako su svaka dva elementa uporediva, tj. ako za sve $x, y \in P$ važi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$. U tom slučaju za skup P se kaže da je **linearno** ili **totalno** uređen ovom relacijom.

U primeru 1.1 svi poreci su linearni osim deljivosti $(\mid)$ na $\mathbb{N}$ i skupovne inkluzije $(\subseteq)$ na partitivnom skupu.

Uz pomoć poretka se definiše relacija $<$ („manje“) na istom skupu:

$$x < y \text{ ako i samo ako je } x \leqslant y \text{ i } x \neq y.$$

[1] Kaže se i da je P *parcijalno* uređen relacijom $\leqslant$, čime se ističe da poredak ne mora biti linearan (videti definiciju u nastavku).

Ova relacija je antisimetrična i tranzitivna, ali nije refleksivna.

1.2. Relacija pokrivanja; dijagram. Na uređenom skupu definiše se relacija pokrivanja, u oznaci $\prec$, koja se izvodi iz poretka na sledeći način.

Neka je $(P, \leqslant)$ uređeni skup i $x, y \in P$. Tada po definiciji

$$x \prec y \text{ ako i samo ako je } x < y \text{ i iz } x \leqslant z \leqslant y \text{ sledi } z = x \text{ ili } z = y;$$

ili ekvivalentno

$$x \prec y \text{ ako i samo ako } x < y \text{ i } \neg(\exists z)(x < z < y).$$

Kaže se da je x **pokriveno** sa y, ili da x **prethodi** y.

Nije teško uočiti da od tri osnovna svojstva relacije poretka, relacija pokrivanja ispunjava samo antisimetričnost (zadatak 1.3).

Primer 1.2. a) U $(\mathbb{N}, \leqslant)$ je ispunjeno:

$$m \prec n \text{ ako i samo ako je } n \text{ sledbenik broja } m \ (n = m + 1).$$

b) Uređeni skup $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ racionalnih brojeva nema parova koji su u relaciji pokrivanja.

c) U $(\mathbb{N}, \mid)$ važi:

$$m \prec n \text{ ako i samo ako je } n = m \cdot p, \text{ za neki prost broj } p.$$

d) U uređenom skupu $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ svih podskupova skupa A važi:

$$X \prec Y \text{ ako i samo ako je } Y = X \cup \{a\}, \text{ za neko } a \in A, a \notin X. \qquad \square$$

Konačni uređeni skupovi mogu se jednostavno predstavljati crtežima, posebnim dijagramima. Elementi skupa P crtaju se kao tačke u ravni. One se povezuju linijama (dužima) u skladu sa relacijom pokrivanja koju određuje dati poredak: ako je $x \prec y$, onda postoji linija od x ka y. Po dogovoru o usmerenju, x je ispod y na crtežu. Dobijena slika zove se **Hase** (Hasse) - **dijagram** ili samo **dijagram**[2].

Poredak se sa dijagrama „čita“ na prirodan način: $a \leqslant b$, ako je a povezan sa b linijama „od dole prema gore“ na crtežu.

Jasno je da se dijagramom predstavljaju pre svega konačni uređeni skupovi sa manjim brojem elemenata.

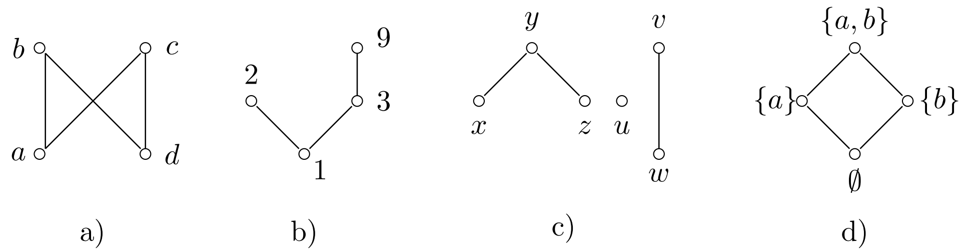
Primer 1.3. Na slici 1.1 predstavljeni su dijagrami nekih uređenih skupova.

Dijagram b) odgovara skupu $\{1, 2, 3, 9\}$ u odnosu na deljivost. Vidi se da je na pr. $1 \mid 9$, jer je 1 povezan linijama sa 9, od dole prema gore; elementi 2 i 9 su neuporedivi, jer nema takve povezanosti itd.

Primer d) odgovara partitivnom skupu dvočlanog skupa $\{a, b\}$ u odnosu na skupovnu inkluziju, $\subseteq$.

[2]Preciznije rečeno, Hase dijagram uređenog skupa P je usmereni graf, čiji su čvorovi elementi skupa P, a granama su povezani elementi u relaciji pokrivanja, određenom datim poretkom.

Za poredak pod a) dovoljno je analizirati dijagram: svaki od elemenata a i d je u relaciji sa oba preostala, b i c, a svaki je u relaciji sa sobom.



Slika 1.1

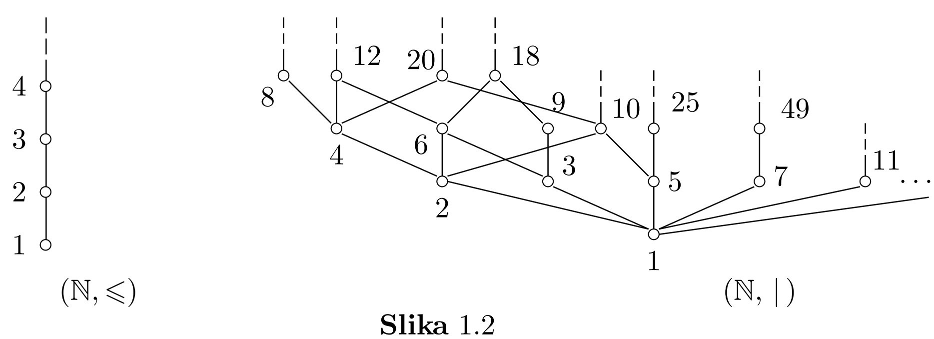
I u slučaju c) poredak se lako rekonstruiše iz dijagrama: x i z su u relaciji sa y, a w je u relaciji sa v; u nije uporediv ni sa jednim elementom (sem naravno sa samim sobom, što važi i za sve ostale elemente). $\square$

Sledeća lema opravdava način na koji se iz dijagrama određuje poredak.

Lema 1.4. *Za dva različita elementa a, b konačnog uređenog skupa $(P, \leqslant)$ važi $a \leqslant b$ ako i samo ako je $a \prec b$, ili je $a \prec c_1 \prec \cdots \prec c_n \prec b$, za neke $c_1, \ldots, c_n \in P$.*

Dokaz. Neka su a i b različiti i $a \leqslant b$. Ukoliko ne postoji treći elemenat c, takav da je $a \leqslant c \leqslant b$, onda je po definiciji relacije pokrivanja $a \prec b$. Ako postoji elemenat između njih, to znači da postoje $c_1, \ldots, c_n$, takvi da je $a < c_1 < \cdots < c_n < b$ i n je maksimalan broj elemenata sa tim svojstvom (P je konačan skup). Tada je $a \prec c_1 \prec \cdots \prec c_n \prec b$, jer u protivnom n ne bi bio maksimalan broj uporedivih elemenata između a i b. Obratno, ako je $a \prec b$ ili postoje $c_1, \ldots, c_n$ takvi da je $a \prec c_1 \prec \cdots \prec c_n \prec b$, onda je $a \leqslant b$ po definiciji relacije pokrivanja i na osnovu tranzitivnosti relacije poretka. $\blacksquare$

Dijagramom se mogu predstavljati i neki beskonačni uređeni skupovi, kao u sledećem primeru.



Slika 1.2

Primer 1.5. Na slici 1.2 su dijagrami dva poretka ($\leqslant$ i $|$) na skupu $\mathbb{N}$. Dijagrami samo delimično predstavljaju te skupove, ali se po potrebi mogu dopunjavati. $\square$

1.3. Uređeni podskup. Neprazan podskup Q skupa P uređenog relacijom $\leqslant$ i sam je uređen: novi poredak $\leqslant_Q$ definiše se sa:

$$(\forall x, y \in Q)(x \leqslant_Q y \longleftrightarrow x \leqslant y).$$

Nova relacija na Q je podskup poretka na P: $\leqslant_Q$ je $Q^2 \cap \leqslant$. Pošto se radi o restrikciji poretka $\leqslant$ na skup Q, indeks Q se izostavlja. Kaže se i da je poredak na Q **indukovan** poretkom iz P.

Primer 1.6. a) Jedan beskonačni uređeni podskup iz $(\mathbb{N}, |)$ je $(\mathbb{N}^*, |)$, pri čemu je $\mathbb{N}^*$ skup kvadratno slobodnih prirodnih brojeva. Po definiciji, broj n je **kvadratno slobodan** ako nije deljiv kvadratom nijednog prostog broja. Dakle,

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ ako i samo ako je } n = 1 \text{ ili } n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ \ldots \ \cdot p_k,$$

gde su $p_1, \ldots, p_k$ različiti prosti brojevi.

b) Kolekcija $\mathsf{Sub}\,\mathcal{G}$ podgrupa proizvoljne grupe $\mathcal{G}$ je u odnosu na inkluziju uređeni podskup kolekcije svih podskupova te grupe.

c) Ako je A neprazni skup, onda je $(\mathcal{P}^*(A), \subseteq)$ uređeni podskup partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$, gde je $\mathcal{P}^*(A)$ skup svih nepraznih podskupova iz A.

d) Skup $\mathcal{P}_0(A)$ konačnih podskupova skupa A, je uređeni podskup partitivnog skupa za A. Jasno, ako je A konačan skup, onda je $\mathcal{P}_0(A) = \mathcal{P}(A)$; za beskonačno A te kolekcije se razlikuju.

e) Skup $\mathcal{E}(A)$ svih relacija ekvivalencije na nepraznom skupu A je u odnosu na inkluziju uređeni podskup skupa $\mathcal{P}(A^2)$. □

Neki podskupovi datog uređenog skupa $(P, \leqslant)$ imaju posebna imena.

Linearno uređeni podskup iz P je **lanac**.

Suprotno, podskup A iz P koji sadrži samo neuporedive elemente zove se anti-lanac:

A je **anti-lanac** ako i samo ako za sve različite x, y iz A važi $x \not\leqslant y$ i $y \not\leqslant x$.

Podskup I iz P je **polu-ideal** ako za sve x, y iz P važi:

$$\text{iz } x \in I \text{ i } y \leqslant x, \text{ sledi } y \in I.$$

Slično, podskup F uređenog skupa P je njegov **polu-filter** ako za sve x, y iz P važi:

$$\text{iz } x \in F \text{ i } x \leqslant y, \text{ sledi } y \in F.$$

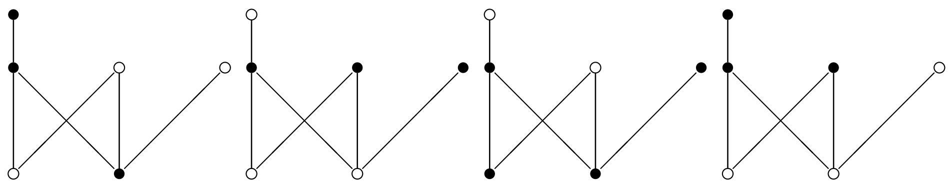
Primer 1.7. a) Svi stepeni nekog prirodnog broja n $(1, n, n^2, n^3, \ldots)$ obrazuju lanac u uređenom skupu $(\mathbb{N}, |)$.

U istom skupu, jedan anti-lanac čine svi prosti brojevi, a drugi na pr. brojevi između 20 i 30.

Jedan polu-ideal u $(\mathbb{N}, |)$ sastoji se od svih delitelja broja 10; opštije, polu-ideali su unije skupova delitelja nekih brojeva.

Najzad, jedan polu-filter u $\mathbb{N}$ obrazuju na primer svi brojevi deljivi ili sa 2 ili sa 3.

b) Na slici 1.3 predstavljeni su dijagrami jednog istog uređenog skupa, sa redom istaknutim po jednim lancem, anti-lancem, polu-idealom i polufiltrom. □



Slika 1.3

1.4. Funkcije između uređenih skupova. Dualnost. Ako su $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$ dva uređena skupa, onda je funkcija $f : P \to Q$ **izotona** (saglasna sa poretkom) ako za $x, y \in P$

$$\text{iz } x \leqslant y \text{ sledi } f(x) \leqslant f(y).$$

Injektivna funkcija f iz P u Q je **obostrano izotona**, ako zadovoljava uslov

$$x \leqslant y \longleftrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Bijektivna i obostrano izotona funkcija $f : P \to Q$ zove se **izomorfizam** između $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$.

Ako postoji (bar jedan) izomorfizam iz uređenog skupa P u uređeni skup Q, onda se kaže da su oni **izomorfni** i to se označava sa $(P, \leqslant) \cong (Q, \leqslant)$.

Izomorfizam uređenog skupa P na taj isti skup je **automorfizam**.

Slično kao i za poredak, kaže se da je funkcija $f : P \to Q$ *saglasna* sa relacijom pokrivanja ako za $x, y \in P$

$$\text{iz } x \prec y \text{ sledi } f(x) \prec f(y).$$

Lema 1.8. *Bijekcija f između dva konačna uređena skupa je izomorfizam ako i samo ako su f i njegovo inverzno preslikavanje saglasni sa relacijom pokrivanja.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f izomorfizam između $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$. Neka je u P $x \prec y$. Tada je $x < y$ i odatle $f(x) < f(y)$ (ne može biti $f(x) = f(y)$, jer je f injektivno preslikavanje). Ako postoji $z \in Q$ takvo da je $f(x) < z < f(y)$, onda je $z = f(u)$, za neko $u \in Q$, jer je f „na“. Po pretpostavci i zato što je f funkcija, $x < u < y$, što je u suprotnosti sa $x \prec y$. Zato je $f(x) \prec f(y)$. Implikacija u suprotnom smeru dokazuje se na sličan način, pa iz izomorfizma sledi

$$x \prec y \text{ ako i samo ako } f(x) \prec f(y).$$

Obratno, pretpostavimo da važi poslednja ekvivalencija, i neka je za $x, y \in P$, $x \leqslant y$. Tada postoje $z_1, \ldots, z_n \in P$, takvi da je $x \prec z_1 \prec \cdots \prec z_n \prec y$. Po gornjoj pretpostavci je i $f(x) \prec f(z_1) \prec \cdots \prec f(z_n) \prec f(y)$, pa odatle $f(x) \leqslant f(y)$. Ako je za $u, v \in Q$, ispunjeno $u \leqslant v$, s obzirom da je

f „na“, postoje x i y iz P, takvi da je $u = f(x), v = f(y)$. Sada se na isti način kao gore pokazuje da je $x \leqslant y$. f je dakle izomorfizam. ■

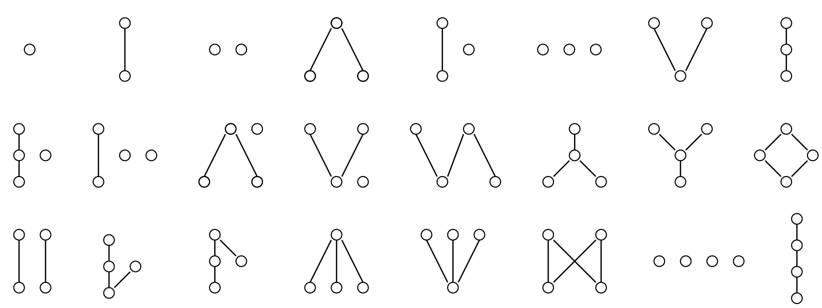
Za dva Hase-dijagrama, D_1 i D_2, kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijekcija f između njihovih čvorova koja je u oba smera saglasna sa relacijom pokrivanja: postoji spojnica od čvora x ka čvoru y u D_1 ako i samo ako postoji spojnica od $f(x)$ do $f(y)$ u D_2.

Tvrđenje 1.9. *Konačni uređeni skupovi su izomorfni ako i samo ako su izomorfni njihovi dijagrami.*

Dokaz. Ako su poseti $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$ izomorfni, onda su im po prethodnoj lemi dijagrami izomorfni, budući da je dijagram jednoznačno određen relacijom pokrivanja. Obratno, pretpostavimo da $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$ imaju izomorfne dijagrame. Za svaki od tih poseta postoji bijekcija sa odgovarajućim dijagramom, koja očuvava relaciju pokrivanja. Kako su dijagrami izomorfni, sledi da postoji izomorfizam i između poseta. ■

Prema poslednjem tvrđenju svaki dijagram reprezentuje klasu međusobno izomorfnih uređenih skupova. Kažemo da su ti uređeni skupovi jednaki *do na izomorfizam.*

Primer 1.10. Na slici 1.4 prikazani su dijagrami svih uređenih skupova sa najviše četiri elementa: 1 sa jednim elementom, 2 sa dva, 5 sa tri i 16 sa četiri elementa. □



Slika 1.4

Ako je $(P, \leqslant)$ uređeni skup, onda je **dualni poredak** $\geqslant$ na skupu P definisan sa

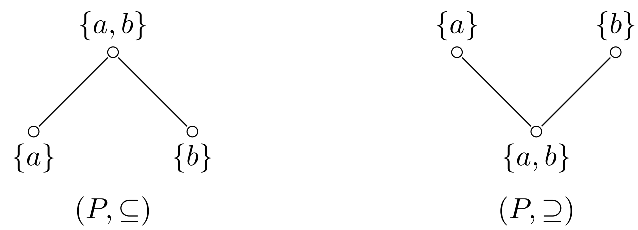
$$x \geqslant y \text{ ako i samo ako } y \leqslant x.$$

Dualni poredak je po definiciji inverzna relacija za poredak $\leqslant$ i to je isto refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na P (videti zadatak 1.6).

Primer 1.11. Poredak predstavljen jednim dijagramom sa slike 1.5 dualan je poretku koji je određen drugim dijagramom. □

Za svako tvrđenje koje se odnosi na relaciju poretka i uređene skupove postoji **dualno tvrđenje**. Ono se dobija zamenom u prvom tvrđenju svih pojavljivanja relacije $\leqslant$ dualnom relacijom $\geqslant$ i svih pojavljivanja relacije $\geqslant$ relacijom $\leqslant$.

Princip dualnosti za uređene skupove: *Ako neko tvrđenje važi za sve uređene skupove, onda za sve uređene skupove važi i dualno tvrđenje.*



Slika 1.5

Tačnost Principa dualnosti je skoro očigledna. Treba samo uočiti da se dokaz dualnog tvrđenja dobija iz dokaza početnog, prosto zamenom relacije poretka njoj dualnom.

1.5. Specijalni elementi. Neka je $(P,\leqslant)$ uređeni skup i $b \in P$. Kažemo da je b **minimalan** ako za sve x iz P važi:

$$\text{iz } x \leqslant b \text{ sledi } x = b\,.$$

Dualno, b je **maksimalan** ako za sve x iz P važi:

$$\text{iz } b \leqslant x \text{ sledi } b = x.$$

Elemenat b je **najmanji** u P, ako je ispunjeno:

$$(\forall x \in P)(b \leqslant x)\,.$$

Dualno, b je **najveći** u P, ako važi:

$$(\forall x \in P)(x \leqslant b)\,.$$

Očigledno, b je minimalan ako i samo ako je tačna formula:

$$\neg(\exists x \in P)(x < b)\,,$$

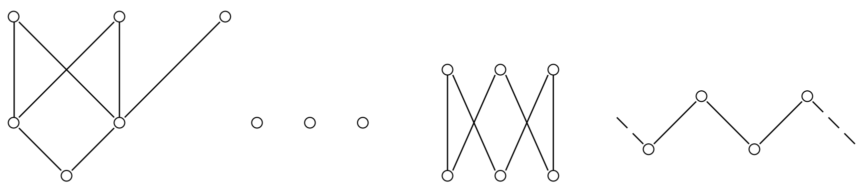
odnosno b je maksimalan ako i samo ako je ispunjeno:

$$\neg(\exists x \in P)(b < x)\,.$$

Najmanji elemenat je i minimalan, najveći maksimalan; obrat ne važi. Ako postoji, najmanji elemenat je jedinstven (zbog antisimetričnosti, jer bi svaki od dva takva elementa bio u relaciji $\leqslant$ sa onim drugim) i često se zove **nula** uređenog skupa (tako se i označava, 0). Slično, ako postoji najveći elemenat u uređenom skupu, on je jedinstven i zove se **jedinica**, u oznaci 1.

Za uređeni skup koji ima najmanji i najveći elemenat kaže se da je **ograničen**.

Primer 1.12. a) Uređeni skup prikazan dijagramom na slici 1.6 (i) ima najmanji i tri maksimalna elementa, na dijagramu (ii) svaki elemenat je i minimalan i maksimalan; uređeni skup (iii) ima tri minimalna i tri maksimalna elemenata, a (iv) je primer skupa sa beskonačno mnogo minimalnih i maksimalnih elemenata.



(i) (ii) (iii) (iv)

Slika 1.6

b) U $(\mathbb{N}, \leqslant)$ najmanji elemenat je broj 1, a u $(\mathbb{Z}^-, \leqslant)$ (negativni celi brojevi) najveći je -1. $(\mathbb{N}, \mid)$ ima najmanji elemenat, broj 1; najveći nema. Međutim, $(\mathbb{N}_0, \mid)$ (gde je $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) ima i najveći elemenat, broj 0, ako se definiše da za svaki prirodan broj n, $n \mid 0$.

c) Neka je A neprazan skup. Tada

$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ ima najmanji ($\emptyset$) i najveći (A) elemenat;

$(\mathcal{P}(A)^*, \subseteq)$ (neprazni podskupovi, primer 1.6 c), str. 14) nema najmanji, ali ima minimalne elemente - jednočlane podskupove skupa A;

ako je A beskonačan, $(\mathcal{P}_0(A), \subseteq)$ (konačni podskupovi, primer 1.6 d)) ima samo najmanji elemenat, prazan skup. □

Tvrđenje 1.13. *U konačnom uređenom skupu postoji bar jedan minimalan (maksimalan) elemenat.*

Dokaz. Dokazujemo postojanje minimalnog elementa. Neka je x proizvoljan elemenat konačnog uređenog skupa P. Ako je x minimalan, tvrđenje važi, u protivnom postoji $x_1 \in P$, takav da je $x_1 < x$. Nastavak ovog postupka vodi do minimalnog elementa, jer bi inače konačan skup P sadržao beskonačan podskup $\{x_1, x_2, \dots\}$.

Analogno se pokazuje da postoji maksimalan elemenat iznad x. ■

Beskonačni uređeni skupovi ne moraju imati minimalne i maksimalne elemente (takvih elemenata nema na pr. u $(\mathbb{Z}, \leqslant)$). Uslove pod kojima ti elementi postoje daje tzv. *Zornova lema* navedena dalje u ovom odeljku.

Ako uređeni skup P ima najmanji elemenat 0, onda je svaki elemenat kojim je on pokriven (ako takav postoji) atom:

$$a \text{ je } \textbf{atom} \longleftrightarrow 0 \prec a.$$

Dualno, ako u P postoji najveći elemenat 1, onda se analogno definiše koatom:

$$a \text{ je } \textbf{koatom} \longleftrightarrow a \prec 1.$$

PRIMER 1.14. a) U $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ atomi su jednočlani skupovi, a koatomi su skupovi $A \setminus \{x\}$, $x \in A$.

b) U $(\mathbb{N}, \leqslant)$ jedini atom je broj 2, a u $(\mathbb{N}, \mid)$ atomi su prosti brojevi.

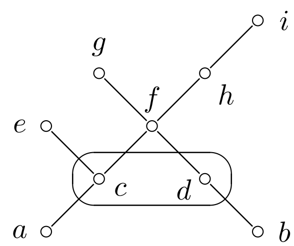
c) Uređeni skup $([0,1], \leqslant)$ (jedinični interval realne prave) nema atoma, iako ima najmanji elemenat. □

1.6. Infimum i supremum. Neka je Q neprazni podskup uređenog skupa P.

Donje ograničenje (donja međa) podskupa Q je svaki elemenat x iz P sa osobinom $x \leqslant b$, za sve $b \in Q$.

Slično, **gornje ograničenje** (gornja međa) skupa Q je svaki y iz P sa osobinom da je $b \leqslant y$, za sve $b \in Q$.

PRIMER 1.15. a) Gornja ograničenja za podskup $\{c, d\}$ uređenog skupa prikazanog dijagramom na slici 1.7, su f, g, h i i. Donjih ograničenja taj podskup nema.



Slika 1.7

b) Gornje ograničenje kolekcije podskupova u partitivnom skupu je svaki skup koji sadrži njihovu uniju, a donje ograničenje svaki skup sadržan u njihovom preseku.

c) U $(\mathbb{N}, \mid)$ gornja ograničenja postoje samo za konačne skupove prirodnih brojeva. Ako je M takav skup, onda je njegovo gornje ograničenje svaki zajednički sadržalac svih brojeva u skupu. Donja ograničenja postoje za sve neprazne podskupove iz $\mathbb{N}$, među kojima je uvek broj 1. □

Sada formulišemo uslove za postojanje maksimalnih elemenata u proizvoljnom uređenom skupu.

TVRĐENJE 1.16. *Ako u uređenom skupu $(P, \leqslant)$ svaki lanac ima gornje ograničenje, onda u P postoji bar jedan maksimalni elemenat.* ■

Ovaj stav zove se **Zornova Lema** (M. Zorn, 1935) i on se uzima kao aksiom u teoriji skupova (postoje brojna ekvivalentna tvrđenja - najpoznatije je *Aksiom izbora* (videti na pr. [**13**])).

Donja i gornja ograničenja nisu jednoznačno određeni elementi, a može se desiti i da ih nema (primer 1.15). Za skupove tih ograničenja uvodimo posebne oznake. Ako je P uređeni skup i $Q \subseteq P$, onda definišemo

$$\begin{aligned} Q^d &:= \{a \in P \mid a \leqslant b, \text{ za svako } b \in Q\}; \\ Q^g &:= \{a \in P \mid b \leqslant a, \text{ za svako } b \in Q\}. \end{aligned}$$

Dakle, Q^d je skup svih donjih, a Q^g svih gornjih ograničenja za podskup Q iz P. Primetimo da je Q^d polu-ideal, a Q^g polu-filter u P.

Najveći elemenat skupa Q^d (ako postoji) zove se **infimum** podskupa Q, u oznaci $\inf Q$.

Dualno, najmanji elemenat skupa Q^g (ako postoji) zove se **supremum** podskupa Q, u oznaci $\sup Q$.

Infimum i supremum su dakle redom najveće donje i najmanje gornje ograničenje datog podskupa; to se može formulisati kao što sledi.

Ako je $p \in P$, onda je $p = \inf Q$ ako i samo ako važi:

(i) za sve x iz Q je $p \leqslant x$ i

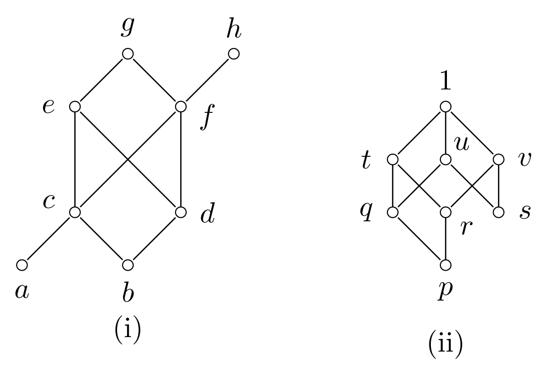
(ii) ako postoji y u P tako da je za sve x iz Q ispunjeno $y \leqslant x$, onda je $y \leqslant p$.

Slično, ako je $p \in P$, onda je $p = \sup Q$ ako i samo ako važi:

(i') za sve x iz Q je $x \leqslant p$ i

(ii') ako postoji y u P tako da je za sve x iz Q ispunjeno $x \leqslant y$, onda je $p \leqslant y$.

Za razliku od donjih i gornjih ograničenja, *infimum i supremum datog skupa su, ako postoje, jedinstveni*. Razlog je jedinstvenost najvećeg elementa u Q^d, odnosno najmanjeg u Q^g.



Slika 1.8

Primer 1.17. a) U uređenom skupu prikazanom na slici 1.8 (i) ispunjeno je $\{b, c, d\}^d = \{b\}$, pa je $\inf\{b, c, d\} = b$. Kako je $\{b, c, d\}^g = \{e, f, g, h\}$, a taj skup nema najmanji elemenat, supremum skupa $\{b, c, d\}$ ne postoji.

b) Skup $\{p, s\}$ nema ni infimum ni supremum u uređenom skupu predstavljenom na slici 1.8 (ii). Prvo zbog toga što je $\{p, s\}^d$ prazan skup, a drugo zato što $\{p, s\}^g$ nema najmanji elemenat (ima dva minimalna, u i v).

c) Infimum svake kolekcije podskupova u partitivnom skupu je njihov presek, a supremum njihova unija.

d) Infimum konačne kolekcije prirodnih brojeva u uređenom skupu $(\mathbb{N}, |\,)$ je njihov najveći zajednički delilac, a supremum najmanji zajednički sadržalac.

e) U uređenom skupu pozitivnih racionalnih brojeva podskup

$$\{x \mid x^2 \geqslant 2\}$$

nema infimum, dok ga u skupu pozitivnih realnih brojeva ima ($\sqrt{2}$). □

Napomenimo da svaki jednoelementni podskup uređenog skupa ima infimum i supremum: $\inf\{a\} = \sup\{a\} = a$.

O infimumu i supremum praznog skupa videti zadatke 1.9 i 1.10 u nastavku.

1.7. Dopune i zadaci.

ZADATAK 1.1. *Da li je deljivost na skupu $\mathbb{Z}$ celih brojeva relacija poretka?*

Rešenje.

Relacija „deli“, u oznaci $\mid$ se definiše sa

$$x \mid y \text{ ako postoji } z \in \mathbb{Z} \text{ tako da je } xz = y.$$

Ova relacija je refleksivna i tranzitivna, jer $x \mid x$ za svako x i iz $x \mid y$ i $y \mid z$ sledi da $x \mid z$. Međutim, ova relacija nije antisimetrična! Zaista, za suprotne brojeve, na primer 5 i -5, ispunjeno je $5 \mid -5$ i $-5 \mid 5$, a nije $5 = -5$. Dakle, relacija $\mid$ na skupu $\mathbb{Z}$ nije relacija poretka. □

ZADATAK 1.2. *Dokazati da je relacija $<$ (manje) antisimetrična i tranzitivna, a da nije refleksivna.*

Rešenje.

Neka je $\leqslant$ relacija poretka na skupu P. Relacija $<$ definiše se na P sa

$$x < y \text{ ako je } x \leqslant y \text{ i } x \neq y.$$

Iz $x < y$ i $y < x$ po ovoj definiciji sledi $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ i $x \neq y$. Relacija $\leqslant$ je antisimetrična, pa je $x = y$, što daje protivrečnost $x = y$ i $x \neq y$. Dakle iz $x < y$ i $y < x$ sledi kontradikcija, pa je taj iskaz netačan. Zaključujemo da je implikacija $x < y \wedge y < x \Rightarrow x = y$ uvek tačan iskaz, i $<$ je antisimetrična relacija.

Da bismo dokazali tranzitivnost, pretpostavimo da je $x < y$ i $y < z$. Dakle, $x \leqslant y$ i $x \neq y$ i $y \leqslant z$ i $y \neq z$, odakle $x \leqslant z$. Važi i $x \neq z$, jer bi iz $x = z$ sledilo $z < y$, što je prema gornjim razmatranjima nemoguće. Zato je $x < z$.

Da relacija $<$ nije refleksivna sledi direktno iz definicije. □

ZADATAK 1.3. *Dokazati da relacija pokrivanja $\prec$, izvedena iz poretka $\leqslant$ na uređenom skupu P, ima sledeće svojstvo:*

za sve $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in P$

ako $x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y_n$ *onda* $(*)$

$x \neq y_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$ *i* $x \not\prec y_i$, za $i = 2, 3, \dots, n$.

Rešenje.

Prvi deo se dokazuje indukcijom po i. Dokazuje se da je $x < y_i$ za sve $i = 1, \dots, n$, odakle po definiciji relacije $<$ sledi $x \neq y_i$. Iz $x \prec y_1$ sledi, po definiciji, $x < y_1$. Pretpostavimo da je $x < y_i$. Iz $y_i \prec y_{i+1}$ sledi $y_i < y_{i+1}$, odakle je, prema tranzitivnosti relacije $<$ (prethodni zadatak), $x < y_{i+1}$. Dakle $x < y_i$, pa je i $x \neq y_i$ za sve $i = 1, \dots, n$.

Kako je $x < y_1$ i $y_1 < y_i$ (za $i > 1$), (što sledi iz prethodno dokazanog dela), nije $x \prec y_i$. □

Zadatak 1.4. *Neka je na skupu P data binarna relacija koja ispunjava svojstvo $(*)$, navedeno u zadatku 1.3. Dokazati da se pomoću takve relacije može definisati poredak na P.*

Rešenje.

Neka je $\prec$ binarna relacija na P za koju je ispunjeno:

ako $x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y_n$, onda

$x \neq y_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$ i $x \not\prec y_i$, za $i = 2, 3, \dots, n$.

Definišemo relaciju $\leqslant$ na P sa:

$x \leqslant y$ ako je $x = y$ ili ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i niz $y_1, \dots, y_n$ elemenata iz P takvih da je $x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y_n$ i $y_n = y$.

Direktno iz definicije sledi da je relacija $\leqslant$ refleksivna.

Pretpostavimo da je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$. Pretpostavimo da nije $x = y$; tada postoje nizovi $y_1, \dots, y_n$ i $z_1, \dots, z_m$, takvi da je

$$x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y_n,\ y_n = y \ \text{ i } \ y \prec z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_m,\ z_m = x.$$

Dakle, postojao bi niz

$$x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y \prec z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec x,$$

što je nemoguće prema uslovu $(*)$. Sledi $x = y$ i relacija $\leqslant$ je antisimetrična.

Iz $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, ako je $x = y$ ili $y = z$ tranzitivnost sledi. Ako jednakosti ne važe, postoje $n, m \in \mathbb{N}$, i elementi $y_1, \dots, y_n$ i $z_1, \dots, z_m$ takvi da je

$$x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y_n,\ y_n = y \ \text{ i } y \prec z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_m,\ z_m = z.$$

Sledi da postoji niz

$$x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y \prec z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_m,$$

gde je $z_m = z$, pa je $x \leqslant z$ i relacija $\leqslant$ je tranzitivna. □

Zadatak 1.5. *Dokazati da u uređenom skupu $(P, \leqslant)$ iz $x \neq y$ sledi $x \nleqslant y$ ili $y \nleqslant x$.*

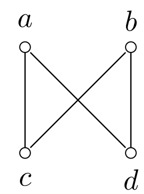
Rešenje.

Tvrđenje zadatka je tačno kontrapozicija antisimetričnosti relacije $\leqslant$: Iz $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ sledi $x = y$. □

ZADATAK 1.6. *Inverzna relacija relacije poretka na skupu P je poredak na istom skupu. Dokazati.*

Rešenje.

Inverzna relacija za relaciju poretka $\leqslant$ na skupu P je relacija $\geqslant$ definisana sa: $x \geqslant y$ ako i samo ako $y \leqslant x$. Direktno iz definicije sledi da je relacija $\geqslant$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. □



Slika 1.9

ZADATAK 1.7. *Po definiciji na str. 14, podskup F iz P je polu-filter ako za sve x, y iz F važi: iz $x \in F$ i $x \leqslant y$, sledi $y \in F$. Odrediti sve polu-filtre uređenog skupa na slici 1.9.*

Rešenje.

Polu-filtri ovog uređenog skupa su $\emptyset$, $\{a\}, \{b\}$, $\{a, b\}, \{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c, d\}$. □

ZADATAK 1.8. *Bijektivna funkcija $f : P \to Q$ između uređenih skupova $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$ je obostrano izotona ako i samo ako je ispunjeno: za sve $x, y \in Q$*

$$f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(y) \text{ ako i samo ako } x \leqslant y.$$

Dokazati.

Rešenje.

Prema definiciji, injektivna funkcija f iz P u Q je obostrano izotona, ako zadovoljava uslov

$$a \leqslant b \;\longleftrightarrow\; f(a) \leqslant f(b).$$

Pošto je funkcija f ovde bijektivna, postoji inverzna funkcija f^{-1} iz Q u P koja je takođe bijekcija i za sve $a, b \in P$ postoje jedinstveni elementi $x, y \in Q$, takvi da je $a = f^{-1}(x)$ i $b = f^{-1}(y)$. Tada je

$$x = f(f^{-1}(x)) = f(a) \;\text{ i }\; y = f(f^{-1}(y)) = f(b).$$

Tvrđenje zadatka je sada očigledno. □

ZADATAK 1.9. *Odrediti $\emptyset^d$ i $\emptyset^g$ u proizvoljnom uređenom skupu.*

Rešenje.

Prema definiciji skupa donjih ograničenja,

$$\emptyset^d := \{a \in P \mid a \leqslant b, \ \text{ za svako } \ b \in \emptyset\}.$$

Dakle,

$$x \in \emptyset^d \ \text{ ako i samo ako } \ (\forall b)(b \in \emptyset \Rightarrow x \leqslant b).$$

Iz činjenice da je $b \in \emptyset$ netačan iskaz za svako b, sledi da je gornja implikacija tačna za svako $x \in P$, tj. $\emptyset^d = P$. Na analogan način se utvrđuje da je $\emptyset^g = P$. □

Zadatak 1.10. *Odrediti infimum i supremum praznog skupa u proizvoljnom uređenom skupu.*

Rešenje.

Prema prethodnom zadatku, skup donjih i gornjih ograničenja praznog skupa je ceo skup P. Zato infimum praznog skupa postoji u P ako i samo ako u P postoji najveći elemenat, i taj infimum je jednak najvećem elementu. Analogno, supremum praznog skupa postoji ako i samo ako u P postoji najmanji elemenat, i supremum je jednak najmanjem elementu. □

Zadatak 1.11. *Ako je a elemenat uređenog skupa $(P, \leqslant)$, onda je skup*

$$\downarrow a := \{x \in P \mid x \leqslant a\}$$

***glavni ideal** generisan sa a. Dualno, skup*

$$\uparrow a := \{x \in P \mid a \leqslant x\}$$

*je **glavni filter** generisan sa a.*

Dokazati da glavni ideal i glavni filter ispunjavaju redom definicije polu-ideala, odnosno polu-filtra (str. 14).

Rešenje.

Neka je $\downarrow a$ glavni ideal u $(P, \leqslant)$ generisan sa a i $x \in \downarrow a$. Tada je $x \leqslant a$. Ako je $y \leqslant x$, onda je $y \leqslant a$, pa je i $y \in \downarrow a$. Dakle, $\downarrow a$ je polu-ideal.

Analogno se dokazuje da je glavni filter jedan polu-filter. □

Zadatak 1.12. ***Drvo** je uređeni skup $(P, \leqslant)$ sa najmanjim elementom, kod koga su svi glavni ideali lanci.*

Dokazati:

(a) U drvetu nijedan par neuporedivih elemenata nema supremum.

(b) U konačnom drvetu svaka dva elementa imaju infimum.

Rešenje.

(a) Neka je $(P, \leqslant)$ drvo i $x, y \in P$. Neka su x i y proizvoljni neuporedivi elementi iz P. Ako bi postojao supremum s za njih, tada bi glavni ideal generisan sa s sadržao elemente x i y koji su neuporedivi, pa uređeni skup P ne bi bio drvo.

(b) Neka je skup P konačan. Ako su x i y uporedivi, tada je infimum onaj od njih koji je manji. Ako nisu uporedivi, skup donjih ograničenja je neprazan, jer mu pripada bar najmanji element. Ako bi u skupu donjih ograničenja postojali neuporedivi elementi, to bi bilo u suprotnosti sa definicijom drveta. Zaista, tada bi glavni ideal generisan svakim od elemenata x, y, sadržao neuporedive elemente.

Dakle, skup donjih ograničenja je lanac i budući da je konačan, ima najveći elemenat; to je traženi infimum. $\square$

Zadatak 1.13. *Ako su B i C podskupovi uređenog skupa A, onda je:*

a) $B \subseteq B^{dg} \cap B^{gd}$;

b) Iz $B \subseteq C$ sledi $C^g \subseteq B^g$ i $C^d \subseteq B^d$;

c) $B^d = B^{dgd}$ i $B^g = B^{gdg}$.

Dokazati.

Rešenje.

Prema definicijama na str. 20,

$$\begin{aligned} B^d &= \{a \in A \mid a \leqslant b, \text{ za svako } b \in B\}; \\ B^g &:= \{a \in A \mid b \leqslant a, \text{ za svako } b \in B\}. \end{aligned}$$

Analogno se formulišu jednakosti za C^d i C^g. U skladu sa tim,

$$B^{dg} = (B^d)^g, \quad B^{gd} = (B^g)^d$$

i slično.

a) Neka $x \in B$. Tada je $x \leqslant y$ za sve $y \in B^g$. Sledi da $x \in B^{gd}$. Takođe je i $y \leqslant x$ za sve $y \in B^d$, pa je $x \in B^{dg}$. Dakle, $x \in B^{dg} \cap B^{gd}$, što je i trebalo dokazati.

b) Neka je $B \subseteq C$ i $x \in C^g$. Dakle, za sve $y \in C$, $y \leqslant x$. Iz $B \subseteq C$, sledi da je $y \leqslant x$ i za sve $y \in B$, pa i $x \in B^g$. Druga inkluzija se pokazuje dualno.

c) Iz dela pod a) sledi $B \subseteq B^{dg}$, pa je iz dela pod b), $B^{dgd} \subseteq B^d$.

Kad se deo pod a) primeni na B^d, dobija se $B^d \subseteq B^{dgd}$ odakle sledi tražena jednakost. Druga jednakost se pokazuje dualno. $\square$

Zadatak 1.14. *Dokazati da u proizvoljnom uređenom skupu (pod uslovom da naznačeni infimumi i supremumi postoje), za sve $x, y, z \in P$, važi:*

(a) $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$.

(b) $\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$.

Rešenje.

(a) Neka je $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = a$. Po definiciji supremuma je $x \leqslant a$ i $\sup\{y, z\} \leqslant a$, pa je i $y \leqslant a$ i $z \leqslant a$. Otuda je a jedno gornje ograničenje za elemente x, y i z. Pokazujemo da je a supremum za skup $\{x, y, z\}$. Neka je c gornje ograničenje za taj skup. Iz $x \leqslant c$, $y \leqslant c$ i $z \leqslant c$ sledi $\sup\{y, z\} \leqslant c$ (po pretpostavci, ovaj supremum postoji), i dalje $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} \leqslant c$, odnosno $a \leqslant c$. Dakle, supremum za skup $\{x, y, z\}$ postoji i to je upravo elemenat a, odnosno

$$\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{x, y, z\}.$$

Na analogan način se pokazuje da je

$$\sup\{\sup\{x, y\}, z\} = \sup\{x, y, z\},$$

pa je tražena jednakost ispunjena.

Zadatak pod (b) se dokazuje analogno. □

2. Mreža

2.1. Mreža kao uređeni skup. Poseban značaj među uređenim skupovima imaju oni čiji svi konačni podskupovi, ili još više, *svi* podskupovi, imaju infimum i supremum.

Mreža je uređeni skup $(L, \leqslant)$ u kome za svaka dva elementa a i b postoji $\inf\{a, b\}$ i $\sup\{a, b\}$.

Oznaka L potiče od engleske reči *lattice* [3].

Tvrđenje 1.18. *Ako je $(L, \leqslant)$ mreža, onda $\inf M$ i $\sup M$ postoje za svaki neprazni konačni podskup M skupa L.*

Dokaz. Indukcija po broju elemenata u M. Ako je $M = \{a\}$, onda je $\inf M = \sup M = a$; ako M ima dva elementa, onda infimum i supremum M postoje po pretpostavci. Neka je dalje je $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $p = \inf M$. Ako je $b \in L$, onda, budući da je L mreža, $\inf(M \cup \{b\}) = \inf\{p, b\}$, što se neposredno proverava. Po indukciji, svaki konačni podskup iz L tako ima infimum. Dokaz da postoje i supremumi je analogan. ■

Potpuna (**kompletna**) **mreža** je uređeni skup u kome svaki podskup ima infimum i supremum.

Dakle, u mreži svaki neprazni konačni podskup ima infimum i supremum, a u potpunoj mreži infimum i supremum postoje za sve podskupove, uključujući prazan skup i sam skup L. Infimum i supremum skupa L su redom najmanji (0) i najveći (1) elemenat; isto važi za prazan skup, samo obrnutim redom (zadatak 1.10). Mreža je **ograničena**, ako je ograničena kao uređeni skup, tj. ako poseduje najmanji elemenat, 0, i najveći, 1. Otuda je tačan stav koji sledi.

Tvrđenje 1.19. *Svaka potpuna mreža je ograničena (tj. ima najmanji i najveći elemenat).* ■

Prema tvrđenju 1.18 za konačne mreže važi sledeći stav.

[3] Ostali termini sa sličnim značenjem, kao *net*, *network*, *grid* i sl. odnose se na druge matematičke ili tehničke objekte.

POSLEDICA 1.20. *Svaka konačna mreža je potpuna i ograničena.* ■

PRIMER 1.21. a) Svi skupovi brojeva, od prirodnih do realnih, jesu mreže u odnosu na uobičajeni poredak $\leqslant$, jer u tim uređenim skupovima

$$\inf\{a,b\} = \min\{a,b\}, \quad \text{a} \quad \sup\{a,b\} = \max\{a,b\},$$

pa infimum i supremum za dvoelementni skup uvek postoje (videti i zadatak 1.20).

Uopšte, svaki lanac je iz istih razloga mreža.

U odnosu na potpunost, navedene mreže brojeva se razlikuju. Na primer, skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva u odnosu na uobičajeni poredak nije potpuna mreža, ali se lako kompletira dodavanjem najmanjeg, $-\infty$, i najvećeg elementa, ∞, s obzirom da se definiše $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ za sve x iz $\mathbb{R}$. Takvo upotpunjavanje ne daje rezultat u slučaju skupa $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva, jer i dalje skup $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ kao ni slični, analogno konstruisani skupovi, nema ni infimum ni supremum, a ima gornja i donja ograničenja.

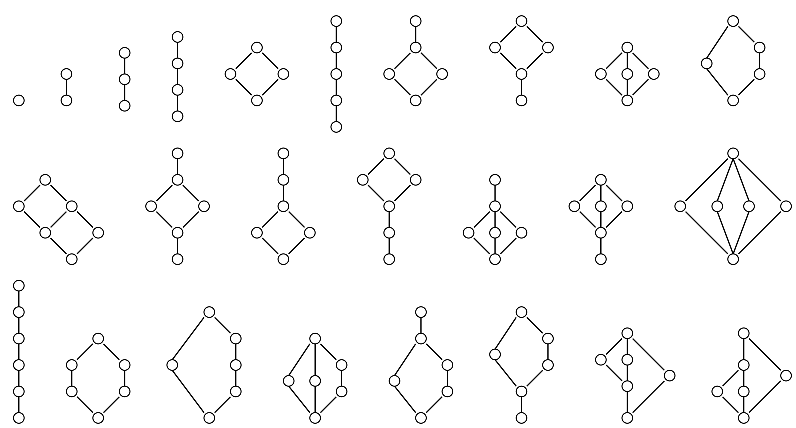
b) Partitivni skup nepraznog skupa je potpuna mreža u odnosu na inkluziju, jer je infimum svake kolekcije podskupova njen presek, a supremum unija.

c) Uređeni skup $(\mathbb{N}, |)$ je mreža, jer je

$$\inf\{x,y\} = \text{nzd}(x,y), \ \text{a} \ \sup\{x,y\} = \text{nzs}(x,y).$$

Ta mreža nije potpuna (dovoljno je samo utvrditi da nije ograničena).

d) Nijedno drvo (zad. 1.12) osim lanca nije mreža, jer ne postoje supremumi. □



Slika 1.10

Mreže su uređeni skupovi, pa se na njih prenose sva svojstva koja su već navedena. Zato dijagram do na izomorfizam određuje mrežu kao uređeni skup. Na slici 1.10 predstavljeni su dijagrami svih mreža sa najviše 6 elemenata.

U sledećem stavu formulisan je osnovni uslov pod kojim je uređeni skup mreža.

Teorema 1.22. *Uređeni skup u kome svaki podskup ima infimum je potpuna mreža.*

Dokaz. Treba dokazati da postoji supremum proizvoljnog podskupa Q iz L. Tvrdimo da je to infimum skupa svih gornjih ograničenja za Q. Zaista, Q^g postoji i neprazan je: u njemu je bar najveći elemenat mreže, kao infimum praznog skupa (zadatak 1.10). Dalje, $\inf Q^g$ je po definiciji infimuma najveće donje ograničenje za Q^g. Iz činjenice da je Q podskup skupa svih donjih ograničenja za Q^g, sledi da je $\inf Q^g$ najmanji od svih elemenata koji su gornja ograničenja za Q, odnosno $\inf Q^g$ je po definiciji $\sup Q$. ■

Analogno se dokazuje i dualno tvrđenje:

Teorema 1.23. *Uređeni skup u kome svaki podskup ima supremum je potpuna mreža.* ■

U uređenom skupu infimum i supremum su, ako postoje, jedinstveni. S druge strane, mreža je uređeni skup u kome infimum i supremum postoje za svaka dva elementa (tj. za svaki dvočlani podskup). Ovo je u stvari dokaz sledećeg tvrđenja.

Teorema 1.24. *U svakoj mreži $(L, \leqslant)$ mogu se definisati binarne operacije $\wedge$ i $\vee$,*[4] *na sledeći način:*

$$x \wedge y := \inf\{x, y\} \quad i \quad x \vee y := \sup\{x, y\}. \qquad ■$$

Na osnovu ovih definicija i tvrđenja, u nastavku koristimo oznaku $x \wedge y$ za infimum, a $x \vee y$ za supremum elemenata x i y (tj. odgovarajućeg dvočlanog skupa). Analogno, ako je M podskup mreže L, uvodimo oznake

$$\bigwedge M := \inf M \quad \text{i} \quad \bigvee M := \sup M.$$

S obzirom da skup M ne mora biti konačan, ove oznake u opštem slučaju ne označavaju operacije na mreži.

Teorema 1.25. *Operacije $\wedge$ i $\vee$ na proizvoljnoj mreži $(L, \leqslant)$ imaju sledeća svojstva:*

$$\begin{array}{ll} x \wedge y = y \wedge x & \\ x \vee y = y \vee x & (\textit{komutativnost}) \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z & \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & (\textit{asocijativnost}) \\ x \wedge (x \vee y) = x & \\ x \vee (x \wedge y) = x & (\textit{apsorpcija}). \end{array}$$

[4] Izgovaraju se redom „*i*“ i „*ili*“, terminima pozajmljenim iz iskazne logike; u srpskom jeziku ne postoje drugi (šire prihvaćeni) nazivi za te operacije.

Dokaz. Komutativnost sledi neposredno iz definicije infimuma i supremuma skupa (redosled elemenata nije svojstvo skupa). Asocijativnost je tačna, jer se obe strane svake jednakosti odnose na isti skup $\{x, y, z\}$ (videti zadatak 1.14). Za apsorpciju treba uočiti da je $x \leqslant x \vee y$, pa je na osnovu osobina infimuma i supremuma, $x \wedge (x \vee y) = x$ i slično za drugu jednakost (za detaljan dokaz pogledati zadatak 1.18). ∎

Jasno je da se infimum i supremum jednoelementnog skupa poklapaju sa tim jedinim elementom. Otuda i tačnost sledećeg tvrđenja.

TVRĐENJE 1.26. *U svakoj mreži je ispunjeno:*

$$\begin{array}{l} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{array} \quad \textit{(idempotentnost).}$$ ∎

O vezi između poretka ($\leqslant$) i operacija ($\wedge$ i $\vee$) na mreži govori sledeće tvrđenje. Dokaz sledi iz samih definicija.

TVRĐENJE 1.27. *U mreži je $x \leqslant y$ ekvivalentno sa svakom od jednakosti*

$$x \wedge y = x \quad \textit{i} \quad x \vee y = y.$$ ∎

U mreži sa najmanjim elementom mogu postojati atomi, elementi koji pokrivaju nulu (str. 18). Mreža je **atomarna** ako za svaki njen elemenat x različit od najmanjeg postoji atom a, takav da je $a \leqslant x$.

PRIMER 1.28. (i) Mreža $(\mathbb{N}, |)$ je atomarna, atomi su prosti brojevi.

(ii) Partitivni skup je atomarna mreža u kojoj su atomi jednočlani skupovi.

(iii) Svaka konačna mreža je atomarna. □

2.2. Mreža kao algebarska struktura. Uzimajući u obzir osobine binarnih operacija definisanih u prethodnom odeljku, definiše se mreža kao algebarska struktura.

Neka je L neprazni skup, a $\wedge$ i $\vee$ binarne operacije na njemu. Tada je uređena trojka $(L, \wedge, \vee)$ **mreža** (kaže se i mreža kao algebarska struktura, algebra), ako važe sledeći identiteti (aksiome):

$$\begin{array}{l} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{array} \quad (\textit{zakoni komutativnosti});$$

$$\begin{array}{l} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array} \quad (\textit{zakoni asocijativnosti});$$

$$\begin{array}{l} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{array} \quad (\textit{zakoni apsorpcije}).$$

Iz ove definicije odmah sledi: *svaki uređeni skup $(L, \leqslant)$ koji je mreža, istovremeno je mreža i kao algebarska struktura $(L, \wedge, \vee)$.* Zaista, binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ su u mreži $(L, \leqslant)$ redom infimum i supremum i gornje aksiome jesu njihove osobine (teorema 1.25).

U nastavku pokazujemo da je tačan i obratan stav: na mreži $(L, \wedge, \vee)$ može se definisati poredak $\leqslant$, tako da je uređeni skup $(L, \leqslant)$ mreža.

Prvo se za dokazuje stav analogan tvrđenju 1.26 za mreže kao uređene skupove.

LEMA 1.29. *Na mreži* $(L, \wedge, \vee)$ *ispunjeno je:*

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{array}\right. \quad (\textit{zakoni idempotentnosti}).$$

Dokaz. Na osnovu drugog zakona apsorpcije je

$$x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x \wedge x,$$

gde je y zamenjeno sa x. Ako se pak u prvom zakonu apsorpcije umesto y stavi $x \wedge x$, onda je

$$x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x.$$

Otuda, $x \wedge x = x$.

Drugi zakon idempotentnosti izvodi se analogno pomoću izraza $x \vee (x \wedge (x \vee x))$. ■

LEMA 1.30. *Ako je* $(L, \wedge, \vee)$ *mreža, onda je binarna relacija* $\leqslant$, *definisana sa*

(1) $\qquad x \leqslant y$ *ako i samo ako je* $x \wedge y = x$,

relacija poretka na L.

Dokaz. Refleksivnost relacije $\leqslant$ sledi iz zakona idempotentnosti $x \wedge x = x$ (lema 1.29). Ako je $x \leqslant y$ tj. $x \wedge y = x$ i $y \leqslant x$, odnosno $y \wedge x = y$, onda je $x = y$ zbog komutativnosti operacije $\wedge$. Relacija $\leqslant$ je dakle antisimetrična. Najzad, neka je $x \leqslant y$ tj. $x \wedge y = x$ i $y \leqslant z$ tj. $y \wedge z = y$. Tada je

$$x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x,$$

pa je $x \leqslant z$, odnosno $\leqslant$ je tranzitivna relacija. ■

LEMA 1.31. *U mreži* $(L, \wedge, \vee)$ *je* $x \leqslant y$ *ako i samo ako je* $x \vee y = y$.

Dokaz. Ako je $x \leqslant y$ tj. $x \wedge y = x$, onda je $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$, na osnovu drugog zakona apsorpcije. Obratno, ako je $x \vee y = y$, onda je na osnovu prvog zakona apsorpcije $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ tj. $x \leqslant y$. ■

LEMA 1.32. *U odnosu na poredak* $\leqslant$ *definisan sa* (1), *svaki dvočlani podskup* $\{x, y\}$ *mreže* $(L, \wedge, \vee)$ *ima infimum i supremum, pri čemu je:*

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y, \quad \sup\{x, y\} = x \vee y.$$

Dokaz. Elemenat $x \wedge y$ je donje ograničenje za skup $\{x, y\}$, jer je

$$(x \wedge y) \wedge x = (y \wedge x) \wedge x = y \wedge (x \wedge x) = y \wedge x,$$

dakle $x \wedge y \leqslant x$ i slično, $x \wedge y \leqslant y$. Taj elemenat je *najveće* donje ograničenje za x i y. Zaista, ako je i $z \leqslant x$, $z \leqslant y$, tj. $z \wedge x = z \wedge y = z$, onda je

$$z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z,$$

što znači da je $z \leqslant x \wedge y$. Dakle, $x \wedge y$ je infimum skupa $\{x, y\}$.

Dokaz da je $x \vee y$ supremum skupa $\{x, y\}$ izvodi se analogno, na osnovu leme 1.31. ■

Teorema 1.33. (a) *Svaka mreža* $(L, \wedge, \vee)$ *je istovremeno i mreža kao uređeni skup* $(L, \leqslant)$ *u odnosu na poredak definisan sa* (1).

b) Svaka mreža $(L, \leqslant)$ *jeste mreža i kao algebarska struktura* $(L, \wedge, \vee)$, *gde su operacije* $\wedge$ *i* $\vee$ *redom infimum i supremum.*

Dokaz. (a) Na osnovu lema 1.30 i 1.32.

(b) Na osnovu teoreme 1.25. ■

Tako je ustanovljena ekvivalentnost pojmova mreže kao uređenog skupa i mreže kao algebre. U nastavku teksta oznaka L odnosi se na mrežu kao algebru sa dve binarne operacije, koja je u odnosu na poredak (1) mreža kao uređeni skup.

Primer 1.34. Skupovi brojeva kao mreže sa dve binarne operacije su $(\mathbb{N}, \mathsf{min}, \mathsf{max})$, $(\mathbb{N},\ \mathrm{nzd},\ \mathrm{nzs})$, $(\mathbb{R}, \min, \max)$ i slično.

Operacije (infimum i supremum) koje se na partitivnom skupu $\mathcal{P}(A)$ proizvoljnog skupa A izvode iz poretka $\subseteq$ su redom presek i unija. Odgovarajuća mreža je $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$. □

Navodimo elementarna svojstva infimuma i supremuma koja se mogu izvesti bilo iz definicija infimuma i supremuma, bilo iz definicije poretka na mreži. Neka od tih svojstava su već upotrebljena u gornjim dokazima (videti i zadatke 1.21 i 1.22 na str. 40).

Tvrđenje 1.35. *Neka je* $(L, \wedge, \vee)$ *mreža i* $a, b, c, d \in L$. *Tada*

(i) $a \wedge b \leqslant a \leqslant a \vee b$;

(ii) *ako je* $a \leqslant b$ *i* $a \leqslant c$, *onda je* $a \leqslant b \wedge c$;

(iii) *ako je* $a \leqslant b$ *i* $c \leqslant b$, *onda je i* $a \vee c \leqslant b$;

(iv) *ako je* $a \leqslant c$ *i* $b \leqslant d$, *onda je* $a \wedge b \leqslant c \wedge d$ *i* $a \vee b \leqslant c \vee d$. ■

2.3. Termi. Identiteti. Princip dualnosti. Ovde definišemo pravilno konstruisane izraze, tzv. **mrežne terme** (u nastavku: terme), kojima se opisuju svojstva mreža:

- promenljive $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$ su termi;

- ako su A i B termi, onda su $(A \wedge B)$ i $(A \vee B)$ isto termi;

- termi su samo oni izrazi koji se obrazuju konačnim brojem primena prethodna dva pravila (uz dogovor o brisanju spoljnih zagrada).

Sa $t(x_1, \ldots, x_n)$ označava se tzv. n**-arni term**, u kome učestvuju neke od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

Primer 1.36. Termi su na primer

$$x \vee y,\ (x \wedge y) \vee z,\ (((x \wedge y) \wedge z) \vee u) \vee v$$

i slično. Navedeni termi su redom: binaran, ternaran i 4-aran (kaže se i: term čija je *arnost* četiri). □

S obzirom na asocijativnost (uz odgovarajući dogovor o brisanju zagrada), termima smatramo i izraze

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n, \text{ odnosno } x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n.$$

Svaki n-arni term određuje n-arnu funkciju (tzv. term funkciju) na datoj mreži. Ona se dobija prostom interpretacijom promenljivih elementima mreže, a oznaka $\wedge$ i $\vee$ odgovarajućim operacijama. Zato, ako je $t(x_1, \dots, x_n)$ n-arni term i $a_1, \dots, a_n$ elementi proizvoljne mreže L, onda je i $t(a_1, \dots, a_n)$ elemenat iz L koji je *vrednost* term funkcije za te konkretne elemente.

Mrežni identitet (u nastavku: identitet) je formula $s = t$, gde su s i t termi. Identitet je zadovoljen na mreži L, ako su jednake funkcije koje na toj mreži određuju termi s i t.

Primer 1.37. Aksiome su identiteti koji po definiciji važe na svakoj mreži.

Idempotentnost obeju operacija se takođe opisuje identitetima ($x \wedge x = x$ i $x \vee x = x$) koji važe na svakoj mreži.

Identitet $x \wedge y = x$ važi samo na jednoelementnoj mreži. □

Formula oblika $s \leqslant t$, gde su s i t termi, ekvivalentna je sa identitetom $s \wedge t = s$, u smislu da jedna od tih formula važi ako i samo ako važi druga. Zato se i zakoni koje opisuje nejednakost uvek mogu interpretirati pomoću identiteta.

Tvrđenje 1.38. *U svakoj mreži važe sledeće nejednakosti:*

a) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
b) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z)$ *(distributivne nejednakosti);*
c) $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leqslant ((x \wedge y) \vee z) \wedge x$. *(modularna nejednakost).*

Dokaz. a) Na osnovu tvrđenja 1.35 (i) je $x \leqslant x \vee y$, $x \leqslant x \vee z$, pa je na osnovu (ii) iz istog tvrđenja

$$x \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Slično, $y \wedge z \leqslant y \leqslant x \vee y$ i $y \wedge z \leqslant x \vee z$, pa je

$$y \wedge z \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Prema tvrđenju 1.35 (iii) sledi

$$x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Formalno istim postupkom dokazuju se i nejednakosti pod $b)$ i $c)$. ■

U nastavku razmatramo identitete:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{d_1}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \tag{d_2}$$

TVRĐENJE 1.39. *Identiteti* (d_1) *i* (d_2) *su ekvivalentni, tj. ako u mreži* L *važi jedan od njih, onda važi i drugi.*

Dokaz. Ako u mreži L važi (d_1), onda važi i (d_2), s obzirom da je

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= ((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z) \\ &= (x \vee x) \wedge (y \vee x) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \\ &= x \wedge (y \vee z),\end{aligned}$$

na osnovu odgovarajućih zakona apsorpcije, idempotentnosti i komutativnosti. Slično se dokazuje da iz (d_2) sledi (d_1). ■

Identiteti (d_1) i (d_2) zovu se **zakoni distributivnosti** i oni ne važe na svakoj mreži.

Ako se jednakost (d_1) dopuni uslovom $x \leqslant z$, dakle sa $x \wedge z = x$, dobija se tzv. **modularni zakon**:

$$\text{ako je } x \leqslant z, \text{ onda je } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z. \tag{m}$$

TVRĐENJE 1.40. *Modularni zakon* (m) *ekvivalentan je sa svakim od sledećih identiteta:*

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = ((x \wedge z) \vee y) \wedge z; \tag{m_1}$$

$$z \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \vee z) \wedge (y \vee z). \tag{m_2}$$

Dokaz. Ako na nekoj mreži važi (m), onda važi i (m_1), jer je $x \wedge z \leqslant z$. Obratno, ako važi uslov (m_1) i pretpostavi se da je $x \leqslant z$, tj. $x \wedge z = x$, onda se (m_1) svodi na jednakost $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, pa važi i uslov (m).

Na sličan način dokazuje se ekvivalentnost uslova (m) i (m_2). ■

Princip dualnosti formulisan je za poredak i njemu inverznu relaciju (str. 16). Ovde formulišemo analogno svojstvo za mreže kao algebarske strukture.

Za dati term t, **dualan term** t_d dobija se tako što se sva pojavljivanja operacije $\wedge$ zamene operacijom $\vee$ i obratno. Za dati identitet $s = t$, **dualni identitet** je formula $s_d = t_d$.

PRIMER 1.41.

term	dualni term
$x \vee x$	$x \wedge x$
$x \wedge (y \vee z)$	$x \vee (y \wedge z)$
$(x \vee y) \wedge (z \vee (u \wedge x))$	$(x \wedge y) \vee (z \wedge (u \vee x))$

identitet	dualni identitet
$x \vee x = x \wedge (y \vee x)$	$x \wedge x = x \vee (y \wedge x)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Sledi primer identiteta koji je **samodualan**:

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

Po definiciji, to je identitet koji se poklapa sa njemu dualnim identitetom. □

Princip dualnosti za mreže: *Dualan identitet tačnog identiteta je tačan.*

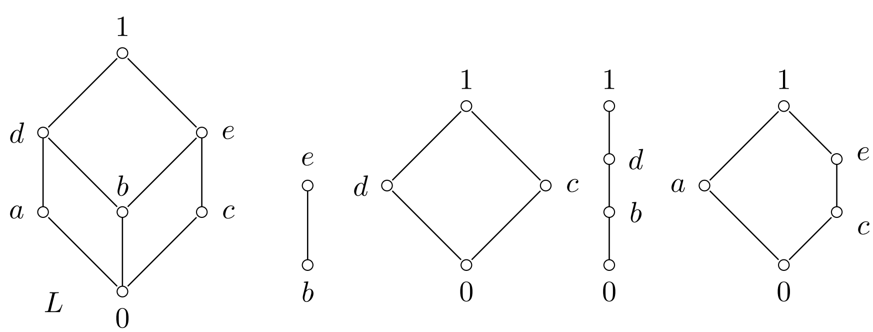
Ispravnost ovog principa sledi iz činjenice da su aksiome (komutativnost, asocijativnost i apsorpcija) identiteti, dati kao dualni parovi. Dokaz proizvoljnog identiteta prevodi se u dokaz dualnog prostom zamenom aksioma koje u dokazu učestvuju, odgovarajućim dualnim aksiomama. Zato nije potrebno dokazivati identitet za čiji je dualni identitet ustanovljena tačnost. Dovoljno je, na primer, dokazati samo jedan zakon idempotentnosti (lema 1.29); drugi je tada tačan na osnovu ovog principa.

2.4. Podmreža. Mreža $(L_1, \wedge, \vee)$ je **podmreža** mreže $(L, \wedge, \vee)$, ako je $L_1 \subseteq L$, a operacije na L_1 su restrikcije operacija iz L.

Primer 1.42. a) Skup $D(n)$ svih delitelja proizvoljnog prirodnog broja n je podmreža mreže $(\mathbb{N}, \text{nzd}, \text{ nzs})$, u odnosu na iste operacije (nzd i nzs).

b) Mreža normalnih podgrupa $\mathsf{Sub}_N\, G$ proizvoljne grupe G je podmreža mreže $\mathsf{Sub}\, G$ svih podgrupa te grupe. Operacije infimum i supremum u mreži podgrupa su redom skupovni presek i tzv. *zatvorenje* unije (za dve podgrupe to je najmanja podgrupa koja sadrži njihovu uniju), a normalnost podgrupa ostaje očuvana kada se primenjuju te operacije.

c) Na slici 1.11 predstavljena je jedna konačna mreža sa sedam elemenata i neke njene podmreže. □



Slika 1.11

Poredak se na podmreži poklapa sa poretkom na samoj mreži: ako su x i y iz podmreže L_1, onda je $x \leqslant y$ u L_1 ako i samo ako je $x \leqslant y$ u L. To sledi iz zatvorenosti podmreže za operacije. Obratno ne važi; uređeni podskup iz L može i sam biti mreža u odnosu na postojeći poredak, ali ne mora biti podmreža mreže L. Zato se pojam podmreže definiše isključivo za mrežu kao algebru $(L, \wedge, \vee)$, a ne za uređeni skup $(L, \leqslant)$.

PRIMER 1.43. U primeru 1.42 c) (slika 1.11), ako je $L_1 = \{0, a, d, e, 1\}$, onda $(L_1, \leqslant)$ jeste mreža u odnosu na poredak nasleđen iz L, ali nije podmreža mreže L: u L je $d \wedge e = b$, a u mreži L_1 je po definiciji infimuma $d \wedge e = 0$. □

Za uređene skupove definisani su pojmovi polu-ideala i polu-filtra (strana 14). Na mreži je pored tih, moguće posmatrati i uređene podskupove definisane u nastavku.

Ideal u mreži L je njen neprazni podskup I koji ispunjava uslove:

(i) iz $a, b \in I$ sledi $a \vee b \in I$;

(ii) iz $a \in I$ i $c \leqslant a$ sledi $c \in I$.

Glavni ideal u mreži L, generisan elementom $a \in L$ definiše isto kao analogni pojam kod uređenog skupa (str. 24):

$$\downarrow a = \{x \in L \mid x \leqslant a\}.$$

Filter u mreži L je njen neprazni podskup F koji ispunjava uslove:

(i') iz $a, b \in F$ sledi $a \wedge b \in F$;

(ii') iz $a \in F$ i $a \leqslant c$ sledi $c \in F$.

Glavni filter u mreži L, generisan elementom $a \in L$, definiše se na sledeći način:

$$\uparrow a = \{x \in L \mid a \leqslant x\}.$$

Ideal (filter) u mreži L je **pravi**, ako se ne poklapa sa L.

Nije teško pokazati da glavni ideal ispunjava uslove (i) i (ii), tj. da je to isto ideal. Analogno, glavni filter je istovremeno i filter prema uslovima (i') i (ii').

Ideali i filtri u mreži su njene podmreže. To se lako zaključuje iz samih definicija.

PRIMER 1.44. a) Skup $D(n)$ svih delitelja prirodnog broja n je glavni ideal u mreži $(\mathbb{N}, \mathrm{nzd}, \mathrm{nzs})$, generisan sa n, a skup $S(n)$ svih sadržalaca broja n je glavni filter u toj mreži.

b) Skup svih konačnih podskupova beskonačnog skupa A je ideal u mreži $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$. Skup svih **dokonačnih** podskupova (tj. onih čiji je komplement konačan) je filter u toj mreži. □

2.5. Homomorfizam i izomorfizam. Homomorfizam iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(M, \wedge, \vee)$ je funkcija f iz L u M koja je saglasna sa operacijama $\wedge$ i $\vee$: ako su x i y iz L, onda je

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad \text{i} \quad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y). \tag{2}$$

Ako je homomorfizam f bijekcija, on se zove **izomorfizam**. Ako umesto onih pod (2), važe jednakosti

$$f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y) \quad \text{i} \quad f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y), \tag{3}$$

onda se odgovarajući pojmovi definišu kao **dualni homomorfizam** i **dualni izomorfizam**.

TEOREMA 1.45. *Mreže* $(L, \wedge, \vee)$ *i* $(M, \wedge, \vee)$ *su izomorfne ako i samo ako su izomorfni odgovarajući uređeni skupovi* $(L, \leqslant)$ *i* $(M, \leqslant)$.

Dokaz. Po definiciji na str. 15, izomorfizam iz $(L, \leqslant)$ u $(M, \leqslant)$ je bijekcija f iz L u M koja zadovoljava uslov: za sve x, y iz L,

$$x \leqslant y \quad \text{ako i samo ako} \quad f(x) \leqslant f(y). \tag{4}$$

Neka je bijekcija $f : L \to M$ izomorfizam između $(L, \wedge, \vee)$ i $(M, \wedge, \vee)$. Tada je f izotona funkcija. Zaista, za x, y iz L i $x \leqslant y$ je $x = x \wedge y$, odnosno

$$f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),$$

tj. $f(x) \leqslant f(y)$.

Sa druge strane, ako je $f(x) \leqslant f(y)$, onda je, s obzirom da je f izomorfizam, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x)$, pa kako je f injekcija, sledi da je $x \wedge y = x$. Otuda, $x \leqslant y$, tj. važi uslov (4).

Obratno, neka je f izomorfizam iz $(L, \leqslant)$ u $(M, \leqslant)$ (tj. neka je f bijekcija koja zadovoljava uslov (4)). Tada je za x, y iz L ispunjeno $x \wedge y \leqslant x$ i $x \wedge y \leqslant y$, odakle $f(x \wedge y) \leqslant f(x)$ i $f(x \wedge y) \leqslant f(y)$. Zato je

$$f(x \wedge y) \leqslant f(x) \wedge f(y). \tag{5}$$

Sa druge strane, iz $f(x) \wedge f(y) \leqslant f(x)$ i $f(x) \wedge f(y) \leqslant f(y)$ je prema (4) (videti i zad. 1.8)

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) &\leqslant f^{-1}(f(x)) = x \ \text{ i} \\ f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) &\leqslant f^{-1}(f(y)) = y. \end{aligned}$$

Otuda $f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) \leqslant x \wedge y$, pa ponovo prema (4)

$$f(x) \wedge f(y) \leqslant f(x \wedge y). \tag{6}$$

Na osnovu (5) i (6), bijekcija f je saglasna sa operacijom $\wedge$.

Analogno se dokazuje saglasnost sa drugom operacijom ($\vee$), pa je f izomorfizam. ■

PRIMER 1.46. Skup $\mathbb{N}^*$ kvadratno slobodnih prirodnih brojeva (primer 1.6 a), str. 14) je mreža u odnosu na operacije nzd i nzs (podmreža mreže svih prirodnih brojeva u odnosu na iste operacije). Ta mreža izomorfna je sa mrežom $(\mathcal{P}_0(\mathbb{N}), \cap, \cup)$ svih konačnih podskupova iz $\mathbb{N}$. Zaista, po definiciji svaki broj m iz $\mathbb{N}^*$ ima reprezentaciju $m = p_{i_1} \cdot \cdots \cdot p_{i_k}$ pomoću različitih prostih brojeva, ili je to broj 1. Ako se prosti brojevi urede po veličini: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ itd., onda je traženi izomorfizam preslikavanje $f : \mathbb{N}^* \to \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$, takvo da je $f(p_{i_1} \cdot \cdots \cdot p_{i_k}) = \{i_1, \ldots, i_k\}$ i specijalno, $f(1) = \emptyset$. Treba samo uočiti da je f saglasno sa poretkom $|$, a f^{-1} sa $\subseteq$, pa izomorfizam važi na osnovu poslednje teoreme i zadatka 1.8. □

2.6. Dopune i zadaci.

Zadatak 1.15. *Uređeni skup sa najvećim elementom u kome svaki neprazni podskup ima infimum je potpuna mreža. Dokazati.*

Rešenje.

Dokaz direktno sledi iz Teoreme 1.22 na strani 28. Zaista, prema zadatku 1.10 (strana 24) infimum praznog skupa je najveći element u uređenom skupu, tako da svaki podskup ima infimum i spomenuta teorema može da se primeni. □

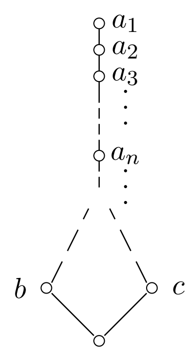
Zadatak 1.16. *Uređeni skup sa najvećim elementom u kome svaki konačan podskup ima infimum nije mreža u opštem slučaju. Obrazložiti (analizirati uređeni skup na slici 1.12).*

Rešenje.

Svaki konačni podskup uređenog skupa na slici 1.12 ima infimum. Zaista, ako taj podskup sadrži najmanji elemenat ili b i c zajedno, onda je najmanji elemenat infimum. Ako ne sadrži najmanji, ali sadrži samo b ili samo c, taj elemenat (b ili c) je infimum. Ako podskup ne sadrži ni najmanji elemenat ni b ni c, infimum je elemenat a_k, gde je k najveći od svih indeksa i za a_i koji pripadaju tom podskupu.

Ipak, uređeni skup $(P, \leqslant)$ sa slike nije mreža, zato što njegov podskup $\{b, c\}$ nema supremum. Skup gornjih ograničenja je $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$, a taj skup nema najmanji element u P. □

$(P, \leqslant)$



Slika 1.12

Zadatak 1.17. *Date su dve mreže* $(L_1, \leqslant_1)$ *i* $(L_2, \leqslant_2)$*. Na direktnom proizvodu skupova* L_1 *i* L_2*, u oznaci* $L_1 \times L_2$*, definiše se relacija* $\leqslant$ *na sledeći način:*

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \text{ ako je } x_1 \leqslant_1 y_1 \text{ i } x_2 \leqslant_2 y_2.$$

Dokazati da je $(L_1 \times L_2, \leqslant)$ *mreža. Dobijena mreža se zove* ***direktan proizvod*** *mreža* L_1 *i* L_2*.*

Rešenje.

Treba pokazati da je $\leqslant$ relacija poretka takva da za svaki dvoelementni podskup iz $L_1 \times L_2$ postoje infimum i supremum.

Ako su $x_1 \in L_1$ i $x_2 \in L_2$, tada iz $x_1 \leqslant_1 x_1$ i $x_2 \leqslant_2 x_2$ sledi $(x_1, x_2) \leqslant (x_1, x_2)$, pa je $\leqslant$ refleksivna relacija.

Iz $(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$ i $(y_1, y_2) \leqslant (x_1, x_2)$, sledi, po definiciji $x_1 \leqslant_1 y_1$, $y_1 \leqslant_1 x_1$, kao i $x_2 \leqslant_2 y_2$, $y_2 \leqslant_2 x_2$, odakle, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, pa je $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$; relacija je antisimetrična.

Tranzitivnost se pokazuje na sličan način, imajući u vidu tranzitivnost relacija $\leqslant_1$ i $\leqslant_2$.

Supremum za elemente (x_1, x_2) i (y_1, y_2) je $(\sup\{x_1, y_1\}, \sup\{x_2, y_2\})$, a infimum je $(\inf\{x_1, y_1\}, \inf\{x_2, y_2\})$, što sledi direktno iz definicije. □

Zadatak 1.18. *Dokazati da u svakoj mreži $(L, \leqslant)$ važe identiteti:*

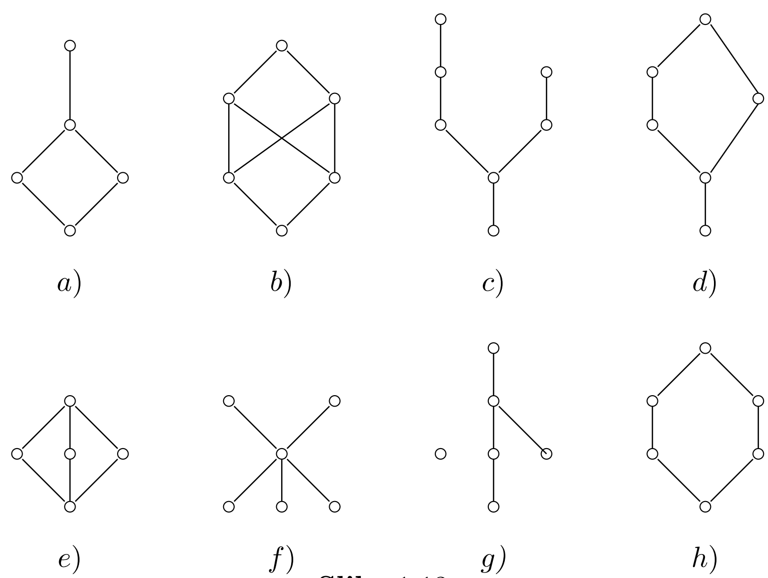
$$\begin{array}{l} x \wedge (y \vee x) = x \\ x \vee (y \wedge x) = x \end{array} \qquad (\textit{apsorpcija}).$$

Rešenje.

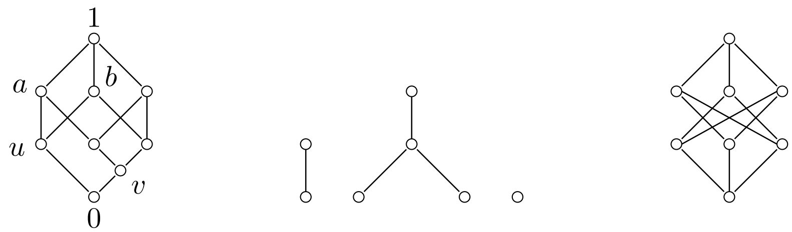
Neka je $x \wedge (y \vee x) = u$. $u = \inf\{x, \sup\{y, x\}\}$, pa je $u \leqslant x$ i $u \leqslant \sup\{y, x\}$, i za proizvoljno s, ako je $s \leqslant x$ i $s \leqslant \sup\{y, x\}$, važi da je $s \leqslant u$. Pošto je $x \leqslant x$ i $x \leqslant \sup\{y, x\}$ sledi $x \leqslant u$. Iz $u \leqslant x$ i $x \leqslant u$ sledi da je $x = u$, odnosno $x \wedge (y \vee x) = x$.

Drugi deo se dokazuje dualno. □

Zadatak 1.19. *Koji parcijalno uređeni skupovi, predstavljeni dijagramima na slikama 1.13 i 1.14, jesu mreže?*



Slika 1.13



i) *j*) *k*)

Slika 1.14

Rešenje.

Mreže su na dijagramima a), d), e), h) i k). Neposredno se proverava da u svakom od tih uređenih skupova postoje infimumi i supremumi dvočlanih podskupova.

Uređeni skupovi na dijagramima c), f), g) i j) nisu mreže jer imaju više maksimalnih elemenata. Dva maksimalna elementa nikada nemaju supremum, jer nemaju ni jedno zajedničko gornje ograničenje.

Uređeni skupovi na dijagramima b) i i) nisu mreže iako svaki skup ima gornja ograničenja, jer ne postoji u svim slučajevima najmanje. Tako u primeru i), elementi 1, a i b su gornja ograničenja za u i v, ali ne postoji supremum. □

Zadatak 1.20. *Pokazati da su sledeći parcijalno uređeni skupovi mreže:*

a) $(\mathbb{N}, \leqslant)$, *gde je* $\mathbb{N}$ *skup prirodnih brojeva, a relacija* $\leqslant$ *uobičajeni poredak:*

$$a \leqslant b \quad \textit{ako i samo ako} \quad a = b \quad \textit{ili} \quad (\exists c)(a + c = b);$$

b) $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $\mathbb{R}$ *je skup realnih brojeva, a* $\leqslant$ *uobičajeni poredak:*

$$a \leqslant b \quad \textit{ako i samo ako je} \quad b - a \quad \textit{nenegativan broj;}$$

c) $(\mathbb{C}, \leqslant)$, *gde je* $\mathbb{C}$ *skup kompleksnih brojeva, a relacija* $\leqslant$ *definisana na sledeći način : za* $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ *iz* $\mathbb{C}$*:*

$$z_1 \leqslant z_2 \quad \textit{ako i samo ako} \quad a_1 \leqslant a_2 \ \text{ i } \ b_1 \leqslant b_2;$$

Odrediti odgovarajuće mreže u algebarskom smislu.

Rešenje.

a) Relacija $\leqslant$ je poredak, pa treba pokazati postojanje infimuma i supremuma. To su, redom, minimum i maksimum, prema primeru 1.21 a) (str. 27). S obzirom da u $(\mathbb{N}, \leqslant)$ važi tačno jedno od sledeća tri svojstva:

$$a \leqslant b, \quad a = b, \quad a \geqslant b,$$

$\inf\{a, b\}$ uvek postoji i to je upravo $\min\{a, b\}$. Zaista, ako je na primer $a \leqslant b$, onda je $\min\{a, b\} = a$. Očigledno je tada $a \leqslant a$ i $a \leqslant b$ (tj. infimum je donje ograničenje za ta dva broja). Ako je još $c \leqslant a$ i $c \leqslant b$, onda je ispunjeno

$$c \leqslant a \wedge b = \min\{a, b\} = a$$

(tj. infimum je najveće donje ograničenje za a i b).

Slično je i za supremum, odnosno maksimum. Dakle, odgovarajuće operacije su

$$a \wedge b = \min\{a, b\} \text{ i } a \vee b = \max\{a, b\}.$$

b) Kao pod a).

c) $z_1 \wedge z_2 = \min\{a_1, a_2\} + i \min\{b_1, b_2\}$;
$z_1 \vee z_2 = \max\{a_1, a_2\} + i \max\{b_1, b_2\}$. □

Zadatak 1.21. *Dokazati da je u mreži $(L, \wedge, \vee)$ za sve x, y, z, t iz L ispunjeno:*

$$\textit{iz} \quad x \leqslant z \quad \textit{i} \quad y \leqslant t \quad \textit{sledi} \quad x \wedge y \leqslant z \wedge t \quad \textit{i} \quad x \vee y \leqslant z \vee t.$$

Rešenje.

$x \leqslant z$ ekvivalentno je sa $x \wedge z = x$, a $y \leqslant t$ sa $y \wedge t = y$, odakle sledi $x \wedge z \wedge y \wedge t = x \wedge y$, odnosno $x \wedge y \leqslant z \wedge t$.

Drugi deo dokazuje se analogno. □

Zadatak 1.22. *Dokazati da u mreži $(L, \wedge, \vee)$ za sve $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ važi:*

(i) *Iz $y \leqslant x_1, y \leqslant x_2, \ldots, y \leqslant x_n$ sledi $y \leqslant x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$.*

(ii) *Iz $x_1 \leqslant y, x_2 \leqslant y, \ldots, x_n \leqslant y$ sledi $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \leqslant y$.*

Rešenje.

(i) Dokazuje se indukcijom po n.

Za $n = 1$ tvrđenje očigledno važi.

Pretpostavimo da

$$\text{iz } \ y \leqslant x_1, y \leqslant x_2, \ldots, y \leqslant x_k \ \text{ sledi } \ y \leqslant x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k.$$

Za $n = k + 1$: po induktivnoj pretpostavci

$$\text{iz } \ y \leqslant x_1, y \leqslant x_2, \ldots, y \leqslant x_k, y \leqslant x_{k+1}, \quad \text{sledi} \quad y \leqslant x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k,$$

odnosno

$$y \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k = y \ \text{ i } \ y \wedge x_{k+1} = y,$$

odakle je

$$y \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k \wedge y \wedge x_{k+1} = y \wedge y.$$

Odatle se, korišćenjem komutativnih i idempotentnih zakona, dobija tvrđenje zadatka.

Može se uočiti da rešenje sledi i direktno iz činjenice da je $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ infimum za elemente $x_1, \ldots, x_n$. Pošto je y donje ograničenje za elemente $x_1, \ldots, x_n$, važi da je y manje od infimuma (najvećeg donjeg ograničenja).

(ii) Analogno. □

Zadatak 1.23. *Pokazati da sledeći zakoni važe na svakoj mreži:*

(i) *Iz $x \wedge y = x \vee y$ sledi $x = y$;*

(ii) *Iz* $x \wedge y \wedge z = x \vee y \vee z$ *sledi* $x = y = z$.

Rešenje.

(i) Iz $x \wedge y \leqslant x \leqslant x \vee y$ i $x \wedge y = x \vee y$, sledi $x \wedge y = x \vee y = x$. Slično se dobija $x \wedge y = x \vee y = y$, odakle je $x = y$.

Deo **(ii)** se slično dokazuje. □

Zadatak 1.24. *Pokazati da u svakoj mreži važi:*

(i) $((x \vee y) \wedge z) \vee x \leqslant (x \vee y) \wedge (z \vee x)$.

(ii) *Iz* $x \leqslant z$ *sledi* $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z$.

Rešenje.

(i) Iz $(x \vee y) \wedge z \leqslant x \vee y$ i $x \leqslant x \vee y$ i zadatka 1.22 (ii), sledi

$$((x \vee y) \wedge z) \vee x \leqslant x \vee y.$$

Dalje, iz $((x \vee y) \wedge z) \leqslant z$, sledi

$$((x \vee y) \wedge z) \vee x \leqslant z \vee x.$$

Najzad se pomoću zadatka 1.22 (i) dobija

$$((x \vee y) \wedge z) \vee x \leqslant (x \vee y) \wedge (z \vee x).$$

(ii) Iz $x \leqslant x \vee y$ i $x \leqslant z$ i zadatka 1.22 (i) sledi $x \leqslant (x \vee y) \wedge z$. Dalje, iz $y \wedge z \leqslant y \leqslant x \vee y$ i $y \wedge z \leqslant z$ i zadatka 1.22 (i) sledi $y \wedge z \leqslant (x \vee y) \wedge z$. Najzad, na osnovu zadatka 1.22 (ii) dobija se rešenje. □

U ovom zadatku i dalje, komutativnost, asocijativnost i ostale osnovne osobine operacija $\wedge$ i $\vee$ često podrazumevamo, ne navodimo ih eksplicitno u dokazu.

Zadatak 1.25. *Pokazati da sledeći zakoni važe u svakoj mreži:*

(i) $(x \wedge y) \vee (u \wedge v) \leqslant (x \vee u) \wedge (y \vee v)$;

(ii) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leqslant (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$;

(iii) $((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \wedge ((x \wedge y) \vee (y \wedge z)) = x \wedge y$.

Rešenje.

(ii) Iz $x \wedge y \leqslant x \leqslant x \vee y$, $\quad y \wedge z \leqslant y \leqslant x \vee y$ i $z \wedge x \leqslant x \leqslant x \vee y$, sledi na osnovu nejednakosti (ii) u zadatku 1.22:

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leqslant x \vee y.$$

Na sličan način pokaže se i

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) &\leqslant y \vee z;\\ (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) &\leqslant z \vee x,\end{aligned}$$

a iz tri poslednje nejednakosti, na osnovu nejednakosti (i) iz zadatka 1.22, sledi tražena nejednakost.

(iii) Iz $x \wedge y \leqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ i $x \wedge y \leqslant (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$, uz primenu zadatka 1.22 (i), dobija se

$$x \wedge y \leqslant ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \wedge ((x \wedge y) \vee (y \wedge z)). \tag{7}$$

Iz $x \wedge y \leqslant x$ i $x \wedge z \leqslant x$, sledi $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x$. Na sličan način je i $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \leqslant y$, pa je

$$((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \wedge ((x \wedge y) \vee (y \wedge z)) \leqslant x \wedge y. \tag{8}$$

Iz nejednakosti (7) i (8) sledi tražena jednakost.

Dokaz dela **(i)** je dualan dokazu za **(ii)**. □

Zadatak 1.26. *Dokazati da u mreži $(L, \wedge, \vee)$ za sve a, b, c iz L važi nejednakost:*

$$(a \wedge b \wedge (c \vee d)) \vee (c \wedge d) \leqslant c \vee (b \wedge (a \vee d)) \vee (a \wedge d).$$

Rešenje.

Iz $a \leqslant a \vee d$ sledi $a \wedge b \leqslant (a \vee d) \wedge b$, pa je

$$a \wedge b \wedge (c \vee d) \leqslant a \wedge b \leqslant (a \vee d) \wedge b.$$

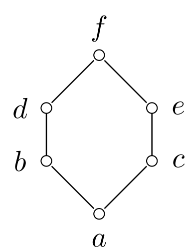
Iz prethodnog i iz $c \wedge d \leqslant c$ sledi

$$(a \wedge b \wedge (c \vee d)) \vee (c \wedge d) \leqslant (b \wedge (a \vee d)) \vee c,$$

pa je

$$(a \wedge b \wedge (c \vee d)) \vee (c \wedge d) \leqslant (b \wedge (a \vee d)) \vee c \vee (a \wedge d),$$

što je i trebalo pokazati. □



Slika 1.15

Zadatak 1.27. *Odrediti sve podmreže sa četiri i pet elemenata mreže prikazane na slici 1.15.*

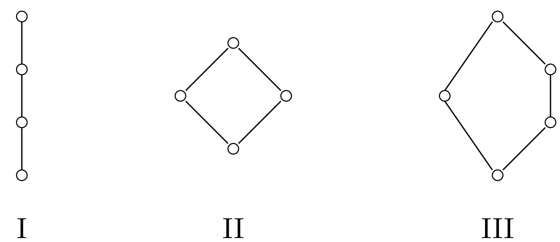
Rešenje.

Podmreže su:

- četvoroelementni lanci, određeni skupovima $\{a, b, d, f\}$ i $\{a, c, e, f\}$ (sl. 1.16, I);

- četvoroelementne mreže date sa $\{a, b, c, f\}$, $\{a, b, e, f\}$, $\{a, d, c, f\}$ i $\{a, d, e, f\}$ (dijagram II na sl. 1.16);

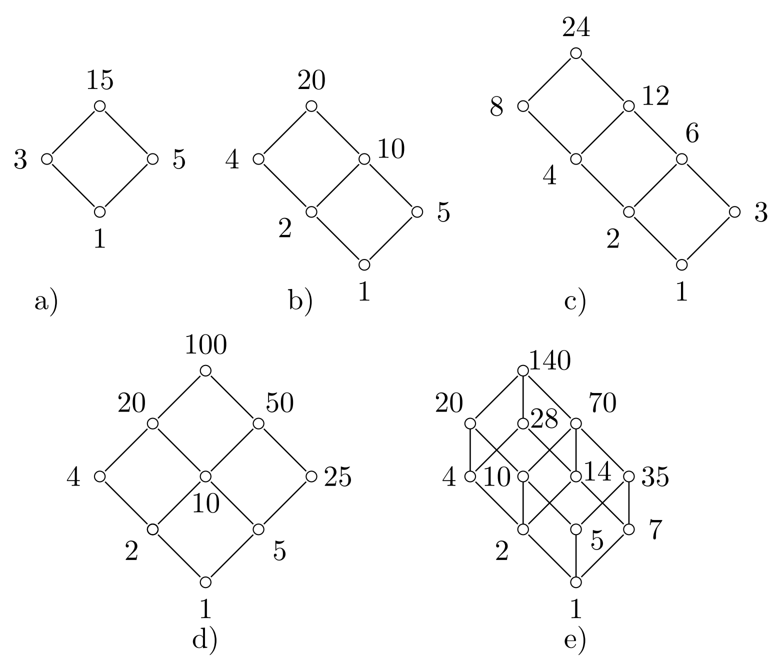
- petoelementne mreže određene sa $\{a, b, d, c, f\}$, $\{a, b, d, e, f\}$, $\{a, b, c, e, f\}$, $\{a, c, d, e, f\}$ (sl. 1.16, III). □



Slika 1.16

ZADATAK 1.28. *Pokazati da je skup delitelja broja*
a) 15; **b)** 20; **c)** 24; **d)** 100; **e)** 140,
podmreža mreže $(\mathbb{N}, |\,)$ *i nacrtati odgovarajuće dijagrame.*

Rešenje.



Slika 1.17

Skupovi delitelja obrazuju mreže, jer sadrže nzd i nzs za svaki par svojih elemenata. Tako dobijeni infimumi i supremumi su isti kao oni u mreži $(\mathbb{N}, |\,)$, pa su odgovarajući skupovi delitelja njene podmreže.

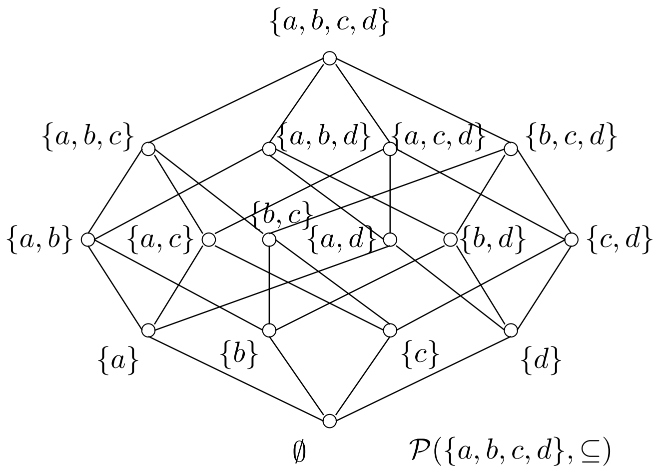
Dijagrami ovih mreža prikazani su na slici 1.17. □

Zadatak 1.29. *Odrediti podmrežu mreže* $(\mathbb{N}, |)$ *generisanu skupom*[5] $\{4, 6, 9\}$.

Rešenje.

Traži se najmanja podmreža iz $(\mathbb{N}, |)$ koja sadrži skup $\{4, 6, 9\}$. Može se pokazati da je to mreža čiji su elementi brojevi $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ i 36. Dijagram dobijene podmreže izomorfan je sa onim na slici 1.17 d). □

Napomena. U opštem slučaju, zadatak da se odredi najmanja podmreža iz $(\mathbb{N}, |)$ koja sadrži dati neprazan konačni podskup A_1 iz $\mathbb{N}$, rešava se na sledeći način. Odredi se skup A_2 čiji su elementi nzd i nzs za sve neprazne podskupove iz A_1. Analogno se od skupa A_2 konstruiše skup A_3 itd. Brojeva koji se tako dobijaju ima konačno mnogo, jer su svi manji od nzs A_1. Zato je za neko n ispunjeno $A_n = A_{n+1}$; tada je tražena podmreža $(A_n, |)$.



Slika 1.18

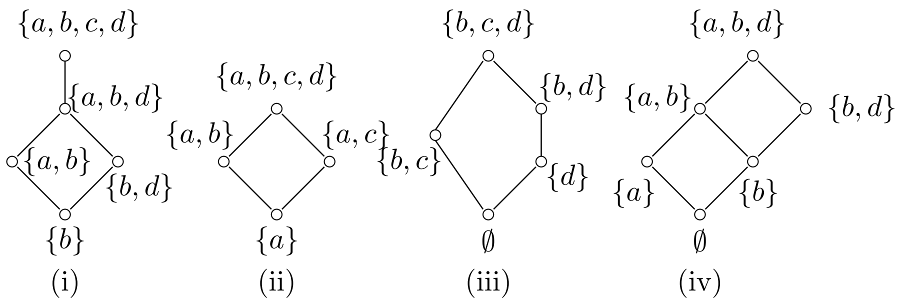
Zadatak 1.30. *Koje su od mreža na slici 1.19 podmreže u mreži partitivnog skupa* $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}, \cap, \cup)$ *(slika 1.18)? Koja je od njih generisana skupom* $\{\{a\}, \{b\}, \{b, d\}\}$?

Rešenje.

Podmreže su pod (i) i (iv). Ova poslednja generisana je skupom $\{\{a\}, \{b\}, \{b, d\}\}$.

Uređeni skup pod (ii) nije podmreža, iako je i sam mreža u odnosu na poredak. Zaista, supremum za elemente $\{a, b\}$ i $\{a, c\}$ ovde je jednak $\{a, b, c, d\}$, što je različito od unije tih elemenata (što je supremum u mreži $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}, \cap, \cup)$). Slično, ni (iii) nije podmreža, jer je ovde $\emptyset$ infimum elemenata $\{b, d\}$ i $\{b, c\}$ a to nije i presek tih elemenata. □

[5] Najmanja podmreža koja sadrži taj skup.



Slika 1.19

Zadatak 1.31. *Dokazati da je mreža lanac (tj. da je poredak u mreži totalan) ako i samo ako je svaki njen podskup podmreža.*

Rešenje.

Ako je mreža lanac tj. totalno uređena relacijom poretka, onda je svaki podskup zatvoren u odnosu na operacije, pa je dakle podmreža. Zaista, svaka dva elementa su uporediva, pa je veći od njih supremum, a manji infimum.

Obratno, ako je svaki podskup mreže njena podmreža, onda to važi i za proizvoljan dvoelementni podskup što znači da su svaka dva elementa uporediva. □

Zadatak 1.32. *Neka je G grupa. Parcijalno uređeni skup $(\mathsf{Sub}(G), \subseteq)$, gde je $\mathsf{Sub}(G)$ familija svih podgrupa grupe G, a $\subseteq$ skupovna inkluzija je mreža. Dokazati.*

Rešenje.

Presek svake familije podgrupa neke grupe je podgrupa, što je u odnosu na skupovnu inkluziju infimum u $\mathsf{Sub}(G)$. Najveći elemenat je G, pa je po zadatku 1.15 $(\mathsf{Sub}(G), \subseteq)$ mreža. □

Zadatak 1.33. *Neka je $(G, *)$ grupa data Kejlijevom tablicom:*

(a)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(b)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

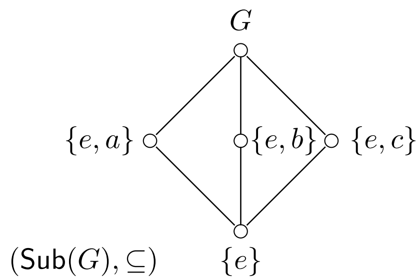
((a) Klajnova grupa ; (b) ciklička grupa reda 4.)

Odrediti mrežu $(\mathsf{Sub}(G), \subseteq)$, koju obrazuju sve podgrupe grupe G u odnosu na skupovnu inkluziju.

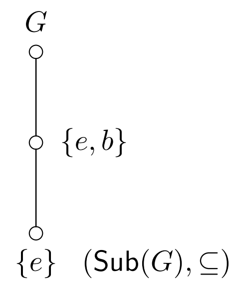
Rešenje.

(a) Podgrupe određuju skupovi: $\{e\}, \{e,a\}, \{e,b\}, \{e,c\}, G$ (slika 1.20 a)).

(b) Podgrupe određuju skupovi: $\{e\}, \{e,b\}, G$ (slika 1.20 b)). $\square$



a)



b)

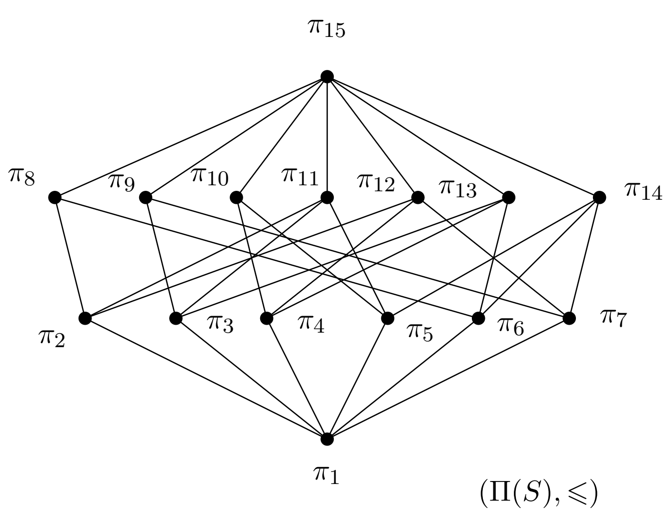
Slika 1.20

Zadatak 1.34. *Neka je $S = \{a,b,c,d\}$. Odrediti parcijalno uređeni skup $(\Pi(S), \leqslant)$, svih particija skupa S u odnosu na poredak $\leqslant$ definisan na sledeći način:*
Ako su π i ρ particije, onda je

$$\pi \leqslant \rho \quad \text{ako i samo ako je svaki blok iz } \pi \text{ podskup nekog bloka iz } \rho.$$

Pokazati da je $(\Pi(S), \leqslant)$ mreža.

Rešenje.



Slika 1.21

Particije su navedene u nastavku, a mreža particija $(\Pi(S), \leqslant)$ prikazana je dijagramom na slici 1.21.

$$\begin{array}{lllllll}
\pi_1 & = & \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}; & \quad & \pi_2 & = & \{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}; \\
\pi_3 & = & \{\{a,c\},\{b\},\{d\}\}; & & \pi_4 & = & \{\{a,d\},\{b\},\{c\}\}; \\
\pi_5 & = & \{\{b,c\},\{a\},\{d\}\}; & & \pi_6 & = & \{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}; \\
\pi_7 & = & \{\{a\},\{c\},\{b,d\}\}; & & \pi_8 & = & \{\{a,b\},\{c,d\}\}; \\
\pi_9 & = & \{\{a,c\},\{b,d\}\}; & & \pi_{10} & = & \{\{a,d\},\{b,c\}\}; \\
\pi_{11} & = & \{\{a,b,c\},\{d\}\}; & & \pi_{12} & = & \{\{a,b,d\},\{c\}\}; \\
\pi_{13} & = & \{\{a,c,d\},\{b\}\}; & & \pi_{14} & = & \{\{a\},\{b,c,d\}\}; \\
\pi_{15} & = & \{\{a,b,c,d\}\}. & & & &
\end{array}$$

□

3. Modularna i distributivna mreža

3.1. Modularna mreža. Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je **modularna** ako ispunjava modularni zakon (str. 33):

$$\text{iz } x \leqslant z \text{ sledi } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z. \qquad (m)$$

Prema tvrđenju 1.40 (str. 33), uslov (m) ekvivalentan je sa svakim od sledećih identiteta:

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = ((x \wedge z) \vee y) \wedge z; \qquad (m_1)$$

$$z \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \vee z) \wedge (y \vee z). \qquad (m_2)$$

Nije teško primetiti da su identiteti (m_1) i (m_2) (uzajamno) dualni. Otuda je tačan i sledeći stav.

TVRĐENJE 1.47. *U klasi modularnih mreža važi princip dualnosti.* ■

Osnovni primer od koga potiče i ime modularnih mreža odnosi se na osobinu mreže normalnih podgrupa (zapravo mreže podmodula) proizvoljne grupe (modula). Tvrđenje koje sledi dokazao je Dedekind 1900. god.[6]

TVRĐENJE 1.48. *Mreža normalnih podgrupa proizvoljne grupe je modularna.*

Dokaz. Videti zadatak 1.39.

PRIMER 1.49. a) Na slici 1.22 predstavljeni su dijagrami mreže $\mathsf{Sub}_N\, G$ svih normalnih podgrupa grupe oktaedra[7] (levo), kao i mreže $\mathsf{Sub}\, G$ svih podgrupa te grupe (desno). Prva od tih mreža je modularna, a druga nije.

b) Svaki lanac je modularna mreža; nije teško zaključiti da operacije min i max zadovoljavaju modularni zakon.

---

[6]Modularne mreže se zovu i *Dedekindove* mreže.

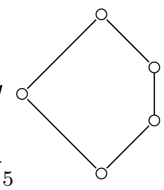
[7]To je nekomutativna grupa reda 8 sa dva generatora a i b, za koje važi: $a^4 = b^2 = e$ i $ba = a^3 b$ (e je neutralni elemenat).

$\mathsf{Sub}_N\, G$ $\mathsf{Sub}\, G$

Slika 1.22

□

3.2. Osnovni kriterijum modularnosti. Petoelementna mreža čiji je dijagram skiciran na slici 1.23 zove se **pentagon** i označava se sa $\mathbf{N}_5$.



$\mathbf{N}_5$ **Slika** 1.23

Pentagon nije modularna mreža, jer elementi x, y i z ne ispunjavaju modularnu jednakost (m). Ta mreža ima osnovnu ulogu u proveri modularnosti.

Teorema 1.50. *Mreža je modularna ako i samo ako ne sadrži* $\mathbf{N}_5$ *kao podmrežu.*

Dokaz. Ako mreža sadrži podmrežu pentagon, na osnovu gore navedenog ona nije modularna.

Obratno, pretpostavimo da mreža L nije modularna. To znači da u njoj postoje elementi a, b i c, takvi da je $a < c$ i da pri tome ne važi (m), tj. da je prema opštem svojstvu mreža (zad. 1.24, str. 41) $a \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge c$[8]. Pokazaćemo da tada u L postoji podmreža $\mathbf{N}_5$. Izdvojimo sledećih pet elemenata iz L:

$$b \wedge c, \quad x = a \vee (b \wedge c), \quad y = (a \vee b) \wedge c, \quad b \ \text{ i } \ a \vee b.$$

Njihov međusobni odnos u mreži L je kao na slici 1.24, tj. oni obrazuju podmrežu pentagon, što se u nastavku i dokazuje.

i) Pet navedenih elemenata su različiti.

Zaista, $b \wedge c < x$, jer bi u protivnom, da je $b \wedge c = a \vee (b \wedge c)$ bilo $a \leqslant b \wedge c$, odnosno $b \wedge c = a \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge c = b \wedge c$ (zbog $a \leqslant b \wedge c$ je $a \leqslant b$), što je kontradikcija. Analognim (dualnim) rezonovanjem se dokazuje da je $y < a \vee b$, a na sličan način i različitost za ostale parove elemenata.

(ii) Navedeni elementi obrazuju pentagon, tj. važi

$$b \wedge x = b \wedge y = b \wedge c \ \text{ i } \ b \vee x = b \vee y = a \vee b.$$

[8] Ako je $a = c$, onda po zakonu apsorpcije sledi $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$, pa za te elemente važi modularni zakon.

Zaista,

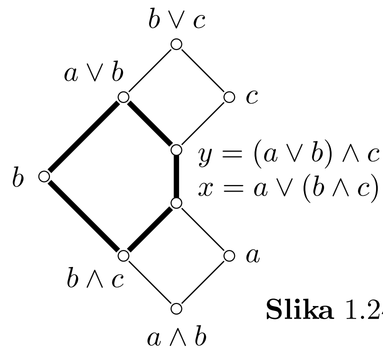
$$b \wedge y = b \wedge ((a \vee b) \wedge c) = b \wedge c \wedge (a \vee b) = b \wedge c,$$

a na osnovu toga je

$$b \wedge c = b \wedge y \geqslant b \wedge x = b \wedge (a \vee (b \wedge c)) \geqslant b \wedge c.$$

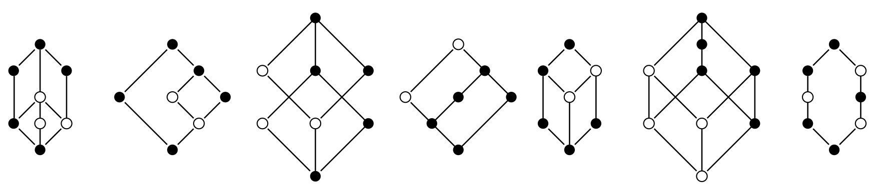
Odatle $b \wedge x = b \wedge c$.

Analognim rezonovanjem dokazuje se i da je $b \vee x = b \vee y = a \vee b$.



Slika 1.24

Na osnovu (i) i (ii), navedenih pet elemenata obrazuju podmrežu pentagon mreže L. ■



Slika 1.25

Primer 1.51. Na slici 1.25 su dijagrami nekoliko ne-modularnih mreža. Na svakoj je označena podmreža $\mathbf{N}_5$. □

3.3. Distributuvna mreža. Mreža L je **distributivna** ako u njoj važi bilo koji od identiteta:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad (d_1)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \qquad (d_2)$$

Kao što je pokazano na str. 32, svaki od gornjih identiteta implicira onaj drugi, pa u distributivnoj mreži važe oba. Zato je tačan i sledeći stav.

Tvrđenje 1.52. *U klasi distributivnih mreža važi princip dualnosti.* ■

Primer 1.53. a) Svaki lanac je distributivna mreža. Lako je proveriti da su operacije min i max obostrano distributivne, tj. da za njih važe distributivne jednakosti.

b) Partitivni skup nepraznog skupa je distributivna mreža u odnosu na presek i uniju.

c) $(\mathbb{N}, |)$ je distributivna mreža.
(videti i zadatke 1.47 i 1.45.) □

Iz definicija neposredno sledi da je *svaka distributivna mreža i modularna*. Zaista, ako je $x \leqslant z$, tj. $x \vee z = z$, onda iz (d_1) sledi $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Tvrđenje 1.54. *Mreža L je distributivna ako i samo ako u njoj važi*

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \qquad (d_3).$$

Napomena. Identitet (d_3) je samodualan, i naziva se **zakon medijane**. Ako se umesto $=$ stavi $\leqslant$, onda odgovarajuća formula važi u svakoj mreži (zadatak 1.25 (ii)).

Dokaz. Dokazujemo prvo da iz uslova (d_3) sledi modularnost mreže L. Ako je $x \leqslant z$, onda uslov (d_3) postaje $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z$, odnosno $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, pa je L modularna mreža. Ona je i distributivna. Da to dokažemo, označimo levu stranu identiteta (d_3) sa u, a desnu sa v. Sada je na osnovu apsorpcije

$$x \wedge v = x \wedge (y \vee z),$$

a iz $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leqslant x$, na osnovu modularnosti i apsorpcije sledi

$$\begin{aligned} x \wedge u &= x \wedge ((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)) \\ &= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Kako je $x \wedge u = x \wedge v$, sledi

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

tj. važi distributivni zakon.

Obratno, ako je L distributivna mreža, onda je

$$\begin{aligned} &(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \\ &= ((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z) \\ &= (x \wedge (y \vee z)) \vee (z \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\ &= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z), \end{aligned}$$

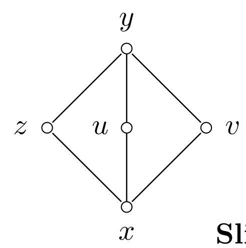
tj. važi identitet (d_3). ■

3.4. Pentagon i dijamant. Za proveru distributivnosti mreže postoji jednostavan kriterijum, slično kao i za modularnost. Mreža čiji je dijagram predstavljen na slici 1.26 zove se **dijamant** i označava se sa $\mathbf{M}_3$. Ta mreža je modularna, ali nije distributivna. Da bi se ovo poslednje utvrdilo, dovoljno je primeniti distributivni zakon na elemente z, u i v sa dijagrama.

Teorema 1.55. *Modularna mreža je distributivna ako i samo ako ne sadrži $\mathbf{M}_3$ kao podmrežu.*

Dokaz. Ako mreža L ima podmrežu $\mathbf{M}_3$, onda ona nije distributivna, jer nije distributivna ni ta njena podmreža.

$\mathbf{M}_3$



Slika 1.26

Obratno, pretpostavimo da je L modularna mreža koja nije distributivna. Na osnovu zadatka 1.25 (ii) (str. 41) i tvrđenja 1.54, tada u L postoje elementi a, b i c, tako da je ispunjeno

$$x = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) < (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = y.$$

Uvedimo oznake x, y, z, za elemente mreže L kao što sledi:

$$\begin{array}{rcl} z & := & x \vee (a \wedge y) \\ u & := & x \vee (b \wedge y) \\ u & := & x \vee (c \wedge y). \end{array}$$

Kako je $x < y$, zbog modularnosti mreže L ispunjeno je

$$\begin{array}{rcl} z & = & (x \vee a) \wedge y \\ u & = & (x \vee b) \wedge y \\ v & = & (x \vee c) \wedge y. \end{array}$$

Dokazujemo da elementi x, y, z, u i v obrazuju dijamant, tj. podmrežu $\mathbf{M}_3$ (slika 1.26).

a) Važi
$$\begin{array}{l} z \wedge u = z \wedge v = u \wedge v = x, \\ z \vee u = z \vee v = u \vee v = y. \end{array}$$

Zaista,
$$\begin{array}{rcl} z \wedge u & = & (x \vee (a \wedge y)) \wedge (x \vee (b \wedge y)) \\ & & \text{modularnost, } x \leqslant x \vee (b \wedge y) \\ & = & x \vee ((a \wedge y) \wedge ((x \vee b) \wedge y)) \\ & = & x \vee ((a \wedge y) \wedge (x \vee b)) \\ & = & x \vee ((a \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge (c \vee a)) \wedge \\ & & (b \vee (c \wedge a) \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge c))) \\ & = & x \vee (a \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (c \wedge a))) \\ & = & x \vee (a \wedge (b \vee (a \wedge c))) \\ & & \text{modularnost, } c \wedge a \leqslant a \\ & = & x \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge a) = x. \end{array}$$

Ostale navedene jednakosti dokazuju se slično, cikličkom zamenom promenljivih ili na osnovu principa dualnosti.

b) Svi navedeni elementi su različiti. Zaista, $x \neq y$ (zbog $x < y$), a jednakost bilo koja druga dva elementa ujednačava svih pet, što se lako proverava na osnovu dokazanog pod a).

Prema a) i b), L sadrži podmrežu dijamant. ■

TEOREMA 1.56. *Mreža je distributivna ako i samo ako ne sadrži podmreže pentagon i dijamant.*

Dokaz. Na osnovu teorema 1.50 i 1.55. ■

3.5. Dopune i zadaci.

ZADATAK 1.35. *Dokazati da je svaka mreža sa najviše* 4 *elementa distributivna.*

Rešenje.

Ako mreža ima 4 ili manje elemenata, tada očigledno ne sadrži kao podmrežu mreže pentagon ni dijamant, jer one sadrže 5 elemenata. Dakle, prema Teoremi 1.56 ta mreža je distributivna. □

ZADATAK 1.36. *Dokazati da je mreža modularna ako i samo ako za sve* x, y, z *iz* L *važi sledeći zakon:*

$$(z \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge y) = (z \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee y). \tag{9}$$

Rešenje.

Pretpostavimo da je mreža modularna. Iz $x \wedge y \leqslant x \vee y$ sledi

$$(x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)) = (z \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee y),$$

što je i trebalo pokazati.

Neka važi zakon (9), i neka je $y \leqslant x$. Tada je $x \wedge y = y$ i $x \vee y = x$, pa je

$$(z \wedge x) \vee y = (z \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge y) = (z \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee y) = (z \vee y) \wedge x,$$

odnosno mreža je modularna. □

ZADATAK 1.37. *Koje su od mreža na slici 1.27*

(i) *distributivne;*

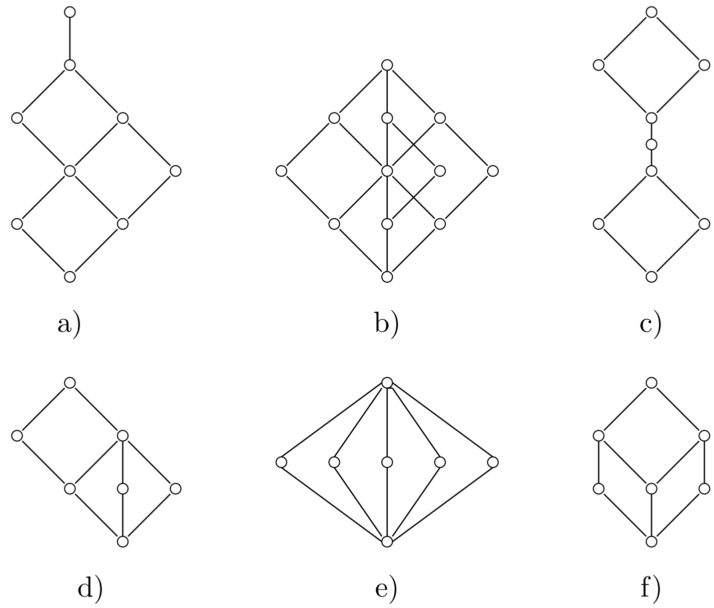
(ii) *modularne, ali ne i distributivne?*

Rešenje.

(i) a), c) ;

(ii) b), d), e).

Mreža pod f) nije modularna, jer ima podmrežu pentagon.



Slika 1.27

□

ZADATAK 1.38. *Koliko ima modularnih i koliko distributivnih do na izomorfizam različitih mreža sa* 6 *elemenata?*

Rešenje.

Ima ukupno 15 mreža sa 6 elemenata (videti sliku 1.10 na strani 27), od kojih je 8 modularnih, a od njih je 5 distributivnih. □

ZADATAK 1.39. *Dokazati da je mreža normalnih podgrupa* $\mathsf{Sub}_N\,\mathcal{G}$ *proizvoljne grupe* $\mathcal{G}$ *modularna.*

Rešenje.

U mreži $\mathsf{Sub}_N\,\mathcal{G}$ (u kojoj je poredak skupovna inkluzija), modularni zakon

$$H \subseteq M \;\rightarrow\; H \vee (K \wedge M) = (H \vee K) \wedge M$$

(gde su H, K i M normalne podgrupe) važi, ako je tačna sledeća implikacija:

$$H \subseteq M \;\rightarrow\; HK \cap M \subseteq H(K \cap M).$$

Zaista, obrnuta inkluzija uvek važi prema poznatoj mrežnoj nejednakosti (zadatak 1.24, strana 41), a $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ je supremum za H i K u mreži $\mathsf{Sub}_N\,\mathcal{G}$. Dakle, neka su H, K i M normalne podgrupe grupe $\mathcal{G}$ i neka je $H \subseteq M$. Ako je tada $x \in HK \cap M$, onda je $x = hk$ za neke $h \in H$, $k \in K$ i $x \in M$. Važi i $h \in M$, jer je $H \subseteq M$. S obzirom da je

$k = h^{-1}x \in M$, sledi da je $k \in K \cap M$, pa je $x \in H(K \cap M)$ i tražena inkluzija važi. $\square$

Zadatak 1.40. *Dokazati da je mreža L distributivna ako i samo ako za sve x, y, z iz L,*

$$\text{iz } x \wedge z = y \wedge z \text{ i } x \vee z = y \vee z \text{ sledi } x = y.$$

Rešenje.

Ako L nije distributivna, onda ne važi gornji uslov, jer on nije zadovoljen ni na jednoj od mreža $\mathbf{M}_3$ odnosno $\mathbf{N}_5$. Obratno, ako je mreža distributivna i važi $x \wedge z = y \wedge z$, $x \vee y = x \vee z$, onda je $x = x \wedge (x \vee z) = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z) = y \wedge (y \vee z) = y$. $\square$

Zadatak 1.41. *Dokazati da je svaki od sledećih uslova ekvivalentan sa distributivnošću u mreži:*

a) *iz* $(x \wedge y \leqslant z$ *i* $x \leqslant y \vee z)$ *sledi* $x \leqslant z$;
b) *iz* $(x \wedge z \leqslant y \wedge z$ *i* $x \vee z \leqslant y \vee z)$ *sledi* $x \leqslant y$;
c) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$;
d) $x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
e) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leqslant x \vee (y \wedge z)$;
f) $x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee z$;
g) $(x \vee y) \wedge (z \vee (x \wedge y)) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$.
h) $((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) = ((z \vee x) \wedge y) \vee (z \wedge x)$.

Rešenje.

a) Ovaj uslov ne važi ni na jednoj od mreža $\mathbf{M}_3$ odnosno $\mathbf{N}_5$ za elemente x, y i z na slici 1.28. Dakle, ako mreža nije distributivna, traženi uslov nije ispunjen.

Slika 1.28

Obratno, pretpostavimo da je mreža distributivna i da je za sve x, y, z ispunjeno $x \wedge y \leqslant z$ i $x \leqslant y \vee z$. Tada je

$$x = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant z \vee (x \wedge z) = z,$$

tj. $x \leqslant z$.

b) Pogodnim izborom elemenata pokazuje se da ovaj uslov ne važi na pentagonu i dijamantu. Dalje, pretpostavimo da je mreža distributivna i da je $x \wedge z \leqslant y \wedge z$ i $x \vee z \leqslant y \vee z$. Odatle sledi

$$\begin{aligned} x = x \vee (x \wedge z) &\leqslant x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ &\leqslant (x \vee y) \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z) \\ &\leqslant y \vee (y \wedge z) = y. \end{aligned}$$

f) Pretpostavimo da je mreža distributivna. Tada je

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant (x \wedge y) \vee z.$$

Drugi pravac se dokazuje kontrapozicijom. Pretpostavimo da mreža nije distributivna. Tada ona sadrži bar jednu od podmreža $\mathbf{M}_3$ i $\mathbf{N}_5$. Za elemente na slici 1.28 označene sa x, y i z (i u pentagonu i u dijamantu) nejednakost pod f) ne važi. Zaista, na dijamantu je $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$ i $(x \wedge y) \vee z = 0 \vee z = z$, pa nejednakost ne važi. Slično, na pentagonu, $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$ i $(x \wedge y) \vee z = 0 \vee z = z$, pa ni ovde nejadnakost ne važi.

Deo c) sledi na osnovu tvrđenja iz zadataka 1.25 (ii) i tvrđenja 1.54, a d) i e) prema tvrđenju 1.38 (iz distributivnih nejednakosti). Delovi g) i h) se rešavaju slično kao zadatak 1.40 i delovi ovog zadatka pod a), b) i f) (videti i tvrđenje 1.54). □

Zadatak 1.42. *Dokazati da je svaki od sledećih uslova ekvivalentan sa modularnošću u mreži:*

a) *iz* $(x \wedge z = y \wedge z,\ x \vee z = y \vee z$ *i* $x \leqslant y)$ *sledi* $x = y$;

b) *iz* $x \leqslant y$ *sledi* $x \vee (z \wedge y) \geqslant (x \vee z) \wedge y$.

Rešenje.

Uputstvo za a): Slično kao zadatak 1.40.

Uputstvo za b): Sledi iz zadatka 1.24 (ii). □

Zadatak 1.43. *Dokazati da u modularnoj mreži važi sledeći identitet:*

$$(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (z \vee x)) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

Rešenje.

a) Iz $y \wedge (z \vee x) \leqslant y \vee z$ i $x \leqslant z \vee x$, na osnovu modularnog zakona, dobija se:

$$(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (z \vee x)) = (y \vee z) \wedge (x \vee (y \wedge (z \vee x))) = (y \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge (z \vee x).$$

□

Zadatak 1.44. *Dokazati da je svaki totalno uređeni skup distributivna mreža.*

Rešenje.

Totalno uređeni skup je mreža zato što su mu svaka dva elementa uporediva, pa postoje infimum i supremum. Pošto se ni u jednom totalno uređenom skupu pentagon i dijamant ne nalaze kao podmreže, ta mreža je distributivna. □

Zadatak 1.45. *Dokazati da je* $(\mathbb{N}, \mid)$ *distributivna mreža.*

Rešenje.

Odgovarajuće operacije su nzs i nzd, pa je za proizvoljne prirodne brojeve x, y i z potrebno dokazati jednakost

$$\mathrm{nzd}\{\mathrm{nzs}\{x,y\},\mathrm{nzs}\{x,z\}\} = \mathrm{nzs}\{x,\mathrm{nzd}\{y,z\}\}.$$

Neka je

$$\begin{aligned} x &= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}, \\ y &= p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}, \\ z &= p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}, \end{aligned}$$

($p_1, \ldots, p_n$ su svi prosti brojevi koji su činioci u x, y i z, pri čemu neki od izložilaca mogu biti nule).

Tada je:

$$\begin{aligned} &\mathrm{nzd}\{\mathrm{nzs}\{x,y\},\mathrm{nzs}\{x,z\}\} = \\ &\mathrm{nzd}\{p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}, p_1^{\max\{\alpha_1,\gamma_1\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n,\gamma_n\}}\} = \\ &p_1^{\min\{\max\{\alpha_1,\beta_1\},\max\{\alpha_1,\gamma_1\}\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min\{\max\{\alpha_n,\beta_n\},\max\{\alpha_n,\gamma_n\}\}} = \\ &p_1^{\max\{\alpha_1,\min\{\beta_1,\gamma_1\}\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n,\min\{\beta_n,\gamma_n\}\}} = \\ &\mathrm{nzs}\{x,\mathrm{nzd}\{y,z\}\}, \end{aligned}$$

s obzirom da za operacije max i min u $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant)$ važe distributivni zakoni prema zadatku 1.44, jer je $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant)$ totalno uređeni skup. □

Zadatak 1.46. *Dati primer distributivne mreže*

a) *bez najmanjeg i najvećeg elementa;*

b) *sa najmanjim, bez najvećeg elementa;*

c) *sa najvećim, bez najmanjeg elementa.*

Rešenje.

a) $(Z, \leqslant)$, gde je Z skup celih brojeva;

b) $(\mathbb{N}, \mid)$ (zadatak 1.45);

c) $((0,1], \leqslant)$ ($(0,1]$ je poluotvoreni interval skupa realnih brojeva, a $\leqslant$ je uobičajeni poredak). □

ZADATAK 1.47. *Partitivni skup nepraznog skupa je distributivna mreža u odnosu na presek i uniju. Dokazati.*

Rešenje. Sledi iz poznatih distributivnih zakona za skupove. □

ZADATAK 1.48. *Skup svih ideala proizvoljne mreže uređen inkluzijom je i sam mreža. Dokazati.*

Rešenje.

Neka je $(L, \wedge, \vee)$ mreža i $(\mathcal{I}(L), \subseteq)$ uređeni skup svih ideala na mreži L. Pošto je mreža L i sama ideal, a ostali ideali njeni podskupovi, ona je najveći elemenat u uređenom skupu $(\mathcal{I}(L), \subseteq)$.

Dalje, pokazuje se da je presek proizvoljne familije ideala iz $(\mathcal{I}(L), \subseteq)$ ideal. Neka je $\{I_i \mid I_i \in \mathcal{I}(L)\}$ familija ideala. Tada je i $\bigcap_i I_i$ takođe ideal. Zaista, ako $x \in \bigcap_i I_i$, tada $x \in I_i$ za svaki ideal iz familije, pa ako je $y \leq x$, onda i $y \in I_i$ za svaki ideal iz familije, pa $y \in \bigcap_i I_i$. Takođe, ako $x, y \in \bigcap_i I_i$, tada $x, y \in I_i$ za proizvoljni ideal I_i iz familije, pa $x \vee y \in I_i$ za sve i, i zato $x \vee y \in \bigcap_i I_i$.

Pošto je uređeni skup $(\mathcal{I}(L), \subseteq)$ zatvoren u odnosu na presek (infimum) i ima najveći elemenat, on je potpuna mreža prema zadatku 1.15. □

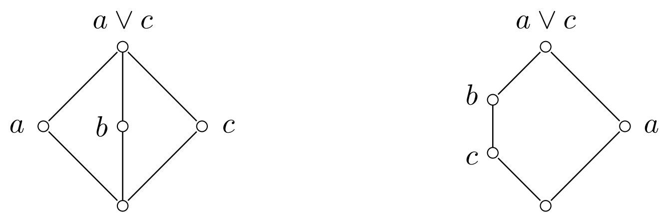
ZADATAK 1.49. *Dokazati da je mreža distributivna ako i samo ako je u mreži njenih ideala zadovoljena jednakost $I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$, gde su I i J proizvoljni ideali mreže.*

Rešenje.

Pretpostavimo da je mreža L distributivna. U prethodnom zadatku je pokazano da je skup svih ideala $(\mathcal{I}(L), \subseteq)$ mreže L kompletna mreža čiji je infimum presek. Treba pokazati da je supremum u toj mreži određen sa $I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$. Očigledno je da najmanji ideal koji sadrži I i J mora sadržati i svaki elemenat $i \vee j$ za $i \in I$ i $j \in J$. Dakle, dovoljno je da pokažemo da je skup $\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$ ideal. Neka je $x = i \vee j$ za $i \in I$ i $j \in J$ i $y \leqslant x$. Tada je $y = y \wedge (i \vee j) = (y \wedge i) \vee (y \wedge j)$. Kako $y \wedge i \in I$ i $y \wedge j \in J$, sledi $y \in I \vee J$. Dalje, neka $x, y \in I \vee J$. Tada $x = i_1 \vee j_1$ i $y = i_2 \vee j_2$ za $i_1, i_2 \in I$ i $j_1, j_2 \in J$. Sada $x \vee y = (i_1 \vee i_2) \vee (j_1 \vee j_2)$ i $i_1 \vee i_2 \in I$ i $j_1 \vee j_2 \in J$, tako da je $\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$ ideal u L, pa je to i najmanji ideal koji sadrži I i J.

Obrat dokazujemo kontrapozicijom. Pretpostavimo da mreža L nije distributivna. Pokazujemo da tada postoje ideali I i J takvi da $\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$ nije ideal. Prema teoremi 1.56 u mreži L postoje podmreže pentagon ili dijamant (na slici 1.29). Pokazujemo da za ideale definisane sa $I = \{x \mid x \leqslant a\}$ i $J = \{x \mid x \leqslant c\}$ supremum nije jednak $\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$. Na obe mreže na slici elementi su označeni na isti način, tako da je $I \vee J = \{x \mid x \leqslant a \vee c\}$. Očito je da $b \in I \vee J$, ali je tačno i da b nije jednak supremumu nekog elementa iz I i elementa iz J. Zaista, ako je $x \leqslant a$ i $y \leqslant c$, i ako bi bilo $x \vee y = b$, onda bi iz $x = x \wedge b \leqslant c \wedge b$, kao i zbog

$y = y \wedge b \leqslant c \wedge b$ sledilo $b = x \vee y \leqslant (a \wedge b) \vee (c \wedge b)$, što je u kontradikciji sa izborom elemenata. Dakle, jednakost $I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$ ne važi.



Slika 1.29

□

Ideal I u mreži L je **prost**, ako za $x, y \in L$, iz $x \wedge y \in I$ sledi $x \in I$ ili $y \in I$.

Zadatak 1.50. *Neka je I ideal, a F filter u distributivnoj mreži L i neka je $I \cap F = \emptyset$. Tada u L postoji prost ideal P, takav da je $I \subseteq P$ i $P \cap F = \emptyset$. Dokazati (u dokazu se koristi Zornova lema navedena na str. 19).*

Rešenje.

Pretpostavimo da je $\mathcal{I}$ kolekcija svih ideala koji se ne seku sa F, a sadrže (kao podskup) ideal I. Kolekcija $\mathcal{I}$ je neprazna i uređena je inkluzijom. Pokazujemo da u njoj svaki lanac ima gornje ograničenje. Uzmimo lanac $\mathcal{C}$ ideala u $\mathcal{I}$ i neka je $J = \bigcup \mathcal{C}$. J je isto ideal iz $\mathcal{I}$. Zaista, ako je $x, y \in J$, onda je $x, y \in X$ za neki ideal X iz C, jer je C lanac u odnosu na inkluziju. Tada je $x \vee y \in X$, odnosno $x \vee y \in J$. Ako je $x \in J$ i $y \leqslant x$, onda je iz istih razloga i $y \in J$, pa je J ideal. Po konstrukciji je $I \subseteq J$ i $J \cap F = \emptyset$, pa je J iz $\mathcal{I}$. Na osnovu toga, a prema Zornovoj lemi (str. 19), u $\mathcal{I}$ postoji maksimalni elemenat, ideal P. Još treba pokazati da je on prost. Ako P nije prost, onda postoje x i y koji nisu u P, a $x \wedge y$ jeste. Ideal $P \vee \downarrow x$ ($\vee$ je supremum u mreži ideala nad L) sadrži P, a kako je ovaj maksimalan među idealima koji ne seku F, sledi $(P \vee \downarrow x) \cap F \neq \emptyset$. Iz istog razloga je i $(P \vee \downarrow y) \cap F \neq \emptyset$. Budući da se supremum ideala distributivne mreže sastoji od supremuma elemenata (zadatak 1.49), sledi da postoje u i v u P, takvi da $u \vee x, v \vee y \in F$. F je filter, pa i $(u \vee x) \wedge (v \vee y) = p \in F$, a zbog distributivnosti je $p = (u \wedge v) \vee (u \wedge y) \vee (x \wedge v) \vee (x \wedge y)$. Svi ovi infimumi pripadaju P, pa je i p u P. Odatle je $P \cap F \neq \emptyset$ što je kontradikcija. Zaključujemo da je ideal P prost. □

Zadatak 1.51. *Ako su a i b različiti elementi distributivne mreže, onda u njoj postoji prost ideal koji sadrži tačno jedan od ta dva elementa.*

Rešenje.

Tačno jedna od jednakosti $\uparrow a \cap \downarrow b = \emptyset$, $\downarrow a \cap \uparrow b = \emptyset$ uvek važi, pa dokaz sledi na osnovu tvrđenja u zadatku 1.50. $\square$

ZADATAK 1.52. [Birkof, Ston] *Dokazati* ***Teoremu reprezentacije za distributivne mreže****: Svaka distributivna mreža izomorfna je sa podmrežom mreže partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$, za neki skup A.*

Rešenje.

Neka je A skup prostih ideala distributivne mreže L. Ti ideali postoje na osnovu tvrđenja u zadatku 1.50. Definišimo preslikavanje f iz L u $\mathcal{P}(A)$:

$$f(x) := \{P \in A \mid x \notin P\}.$$

Pokazujemo da je f injekcija saglasna sa operacijama u L.

(i) Funkcija f je injekcija, jer za različite x i y iz L, prema zadatku 1.51 postoje različiti prosti ideali koji ih sadrže. Zbog toga su različite i slike $f(x)$ i $f(y)$.

(ii) Saglasnost sa operacijom $\wedge$:

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= \{P \in A \mid x \wedge y \notin P\} \\ &= \{P \in A \mid x \notin P \text{ i } y \notin P\} \\ &= \{P \in A \mid x \notin P\} \cap \{P \in A \mid y \notin P\} \\ &= f(x) \cap f(y). \end{aligned}$$

Ovo važi zbog implikacije $x \wedge y \notin P$ povlači $x \notin P$ i $y \notin P$, jer je P ideal, kao i zbog obrata koji je tačan jer je P prost ideal.

(iii) Saglasnost sa $\vee$:

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= \{P \in A \mid x \vee y \notin P\} \\ &= \{P \in A \mid x \notin P \text{ ili } y \notin P\} \\ &= \{P \in A \mid x \notin P\} \cup \{P \in A \mid y \notin P\} \\ &= f(x) \cup f(y), \end{aligned}$$

sve važi po definiciji ideala. $\square$

4. Bulova mreža i Bulova algebra

4.1. Ograničena mreža. Komplementi. Prema definiciji na str. 26, mreža je ograničena ako ima najmanji i najveći elemenat, označene redom sa 0 (nula) i 1 (jedan). Neposredno iz definicija tih elemenata slede osobine navedene u nastavku.

TVRĐENJE 1.57. *U ograničenoj mreži je za sve x*

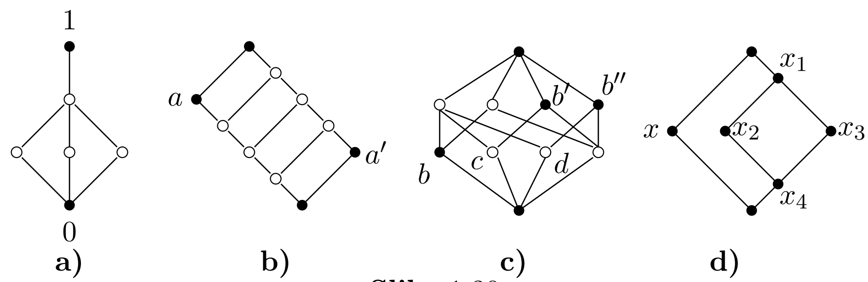
$$0 \vee x = x; \quad 1 \wedge x = x; \quad 0 \wedge x = 0 \quad i \quad 1 \vee x = 1. \qquad \blacksquare$$

Ako se mreža definiše kao algebra sa dve binarne opercije, onda se elementi 0 i 1 mogu definisati pomoću prve dve od gornjih jednakosti; druge dve jednakosti izvode se pomoću zakona apsorpcije.

U ograničenoj mreži L, x' je **komplement** elementa x ako je

$$x \wedge x' = 0 \ \text{ i } \ x \vee x' = 1.$$

Ako je x' komplement za x, onda je, na osnovu komutativnih zakona, i x komplement za x'. Neposredno iz tvrđenja 1.57 sledi da su 0 i 1 uzajamno komplementi. Postoje ograničene mreže u kojima osim 0 i 1 nema drugih elemenata sa komplementima (ograničeni lanci, na primer). Posebno, u jednoelementnoj mreži jedini elemenat je najmanji, najveći i sam sebi komplement. Postoje i mreže u kojima neki elementi imaju više od jednog komplementa.



Slika 1.30

Primer 1.58. Na slici 1.30 predstavljene su ograničene mreže kod kojih važi: a) nijedan elemenat nema komplement osim 0 i 1; b) osim najmanjeg i najvećeg, samo elemenat a ima komplement (a') i obratno; c) b ima dva komplementa (b' i b''), slično i elementi c i d; d) x ima četiri komplementa (x_1 - x_4), a za svaki od njih samo je x komplement. □

Mreža je **komplementirana** ako u njoj svaki elemenat ima komplement. Takva je mreža na slici 1.30 d). Mreža je **jednoznačno komplementirana** ako svaki njen elemenat ima tačno jedan komplement. Takav je na primer svaki partitivni skup, kao mreža u odnosu na inkluziju; komplement se poklapa sa skupovnim komplementom.

Tvrđenje 1.59. *Ako elemenat distributivne mreže ima komplement, onda je taj komplement jedinstven.*

Dokaz. Neka je L distributivna mreža, $x \in L$ i x', x'' dva njegova komplementa. To znači da je

$$x \wedge x' = x \wedge x'' = 0 \ \text{ i } \ x \vee x' = x \vee x'' = 1.$$

Odatle je, na osnovu distributivnog zakona,

$$\begin{aligned} x' &= x' \wedge 1 = x' \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') \\ &= (x'' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') = x'' \wedge (x \vee x') = x'' \wedge 1 = x''. \end{aligned}$$

■

Iz distributivnosti dakle sledi jedinstvenost komplemenata. Zato je tačno sledeće tvrđenje.

TVRĐENJE 1.60. *Distributivna komplementirana mreža je jednoznačno komplementirana.* ■

NAPOMENA. Obratno tvrđenje ne važi, tj. *iz jednoznačne komplementiranosti mreže ne sledi njena distributivnost.* Dilvort (R.P. Dilworth) je 1940. godine dokazao da je *svaka mreža (na pr. pentagon) izomorfna sa podmrežom neke jednoznačno komplementirane mreže.* Distributivnost tako nije posledica jednoznačne komplementiranosti.

4.2. Bulova mreža. Distributivna komplementirana mreža zove se **Bulova mreža**[9]. S obzirom da je komplementirana, Bulova mreža je ograničena (ima najmanji i najveći elemenat), a zbog distributivnosti je i jednoznačno komplementirana (tvrđenje 1.60).

PRIMER 1.61. a) Kao osnovni primer Bulove mreže uzima se partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ proizvoljnog skupa A, u odnosu na skupovne operacije presek i uniju, uređen inkluzijom. Komplement svakog elementa partitivnog skupa je njegov skupovni komplement. Mreža $\mathcal{P}(A)$ je konačna (ako je A konačan), ili neprebrojiva (ako je A beskonačan skup).

b) Dvoelementna mreža (lanac) je Bulova mreža. Nije teško pokazati da je, pored jednoelementne mreže, to jedini lanac koji je komplementirana mreža.

c) Podmreža mreže $(\mathbb{N}, |\,)$, koju čine svi delitelji broja 30 je Bulova mreža. Komplement elementa m te mreže je broj $30/m$.

Uopšte, *mreža $D(n)$ svih delitelja prirodnog broja n je Bulova (u odnosu na operacije nzd i nzs) ako i samo ako je n kvadratno slobodan* (tj. nije deljiv nijednim kvadratom prirodnog broja većeg od 1). Komplement broja m u toj mreži je broj n/m (videti zadatak 1.62).

d) Na skupu iskaznih formula $\mathcal{S}$ (definisanih rekurzivno u iskaznoj algebri, videti na pr. u knjizi [**19**]) konstruiše se Bulova mreža na sledeći način. Formira se količnički skup $\mathcal{S}/\sigma$ u odnosu na relaciju ekvivalencije σ na $\mathcal{S}$, definisanu na sledeći način:

$$A\,\sigma B \text{ ako i samo ako je } A \Leftrightarrow B \text{ tautologija}$$

(A i B su proizvoljne iskazne formule). Na S/σ definišu se dve binarne operacije: ako su $[A]$ i $[B]$ dve klase ekvivalencije σ predstavljene iskaznim formulama A i B, onda je

$$[A] \wedge [B] := [A \wedge B] \quad \text{i} \quad [A] \vee [B] = [A \vee B],$$

gde su $A \wedge B$ i $A \vee B$ iskazne formule, tj. sa $\wedge$ i $\vee$ su označene redom logičke operacije konjunkcija i disjunkcija. Operacije su dobro definisane: ako je $A_1 \in [A]$, $B_1 \in [B]$, onda je $A \Leftrightarrow A_1$ i $B \Leftrightarrow B_1$ (tj. odgovarajuće formule su tautologije), pa je zato $A \wedge B \Leftrightarrow A_1 \wedge B_1$, odakle

$$[A] \wedge [B] = [A \wedge B] = [A_1 \wedge B_1] = [A_1] \wedge [B_1]$$

[9]Po Džordžu Bulu (George Boole), engleskom matematičaru (1815-1864).

i analogno za drugu operaciju. Na sličan način se dalje proverava da je $(\mathcal{S}/\sigma, \wedge, \vee)$ Bulova mreža; $\wedge$ odgovara infimumu, $\vee$ supremumu, najmanji elemenat je klasa kontradikcija, $[p \wedge \neg p]$, najveći klasa tautologija, $[p \vee \neg p]$, a komplement klase $[A]$ je klasa $[\neg A]$ (detaljnije o ovoj Bulovoj mreži videti u rešenom zadatku 1.64 na str. 78). □

Slede neke osobine Bulovih mreža.

Tvrđenje 1.62. *U Bulovoj mreži važi:*
a) $(x')' = x$; *(involucija)*
b) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$;
c) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$. *(De Morganovi zakoni)*

Dokaz. *a*) Ovo sledi iz jedinstvenosti komplementa, jer su i x i $(x')'$ (odnosno x'') komplementi za x'. To sledi iz jednakosti

$$x \wedge x' = 0 \ \text{ i } \ x \vee x' = 1,$$

odnosno iz jednakosti

$$x' \wedge (x')' = 0 \ \text{ i } \ x' \vee (x')' = 1,$$

koje se iz prethodnih dobijaju kada se x zameni sa x'.

b) Pokazujemo prvo da je $x' \vee y'$ komplement za $x \wedge y$.

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') &= ((x \wedge y) \wedge x') \vee ((x \wedge y) \wedge y') \\ &= ((x \wedge x') \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge y')) \\ &= (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) \\ &= 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (x' \vee y') &= (x \vee (x' \vee y')) \wedge (y \vee (x' \vee y')) \\ &= ((x \vee x') \vee y') \wedge ((y \vee y') \vee x') \\ &= (1 \vee y') \wedge (1 \vee x') \\ &= 1 \wedge 1 = 1.\end{aligned}$$

Na osnovu jedinstvenosti komplementa zaključujemo da je

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'.$$

Deo pod *c*) se dokazuje slično kao *b*). ■

Tvrđenje 1.63. *Za Bulove mreže su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
a) $x \leqslant y$ *(tj.* $x \wedge y = x$*);*
b) $x \vee y = y$*;*
c) $x \wedge y' = 0$*;*
d) $x' \vee y = 1$.

Dokaz. Tvrđenja pod *a*) i *b*) su ekvivalentna u svakoj mreži.

a) $\Rightarrow$ *c*) :

$$x \wedge y' = x \wedge y \wedge y' = x \wedge 0 = 0.$$

$c) \Rightarrow a)$:

$$x \wedge y = (x \wedge y) \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x.$$

Ekvivalentnost jednakosti pod $b)$ i $d)$ dokazuje se analogno. ■

4.3. Bulova algebra. U Bulovoj mreži budući da je jednoznačno komplementirana, *za svaki* elemenat a postoji *tačno jedan* komplement a'. Naravno, postoje i najmanji, odnosno najveći elemenat, 0 i 1. Ako se to ima u vidu, može se definisati nova algebra, tako da se skup osnovnih operacija mreže ($\wedge$ i $\vee$) proširi komplementiranjem kao unarnom operacijom i dvema konstantama (nularnim operacijama), 0 i 1. Mrežne osobine komplementiranja i konstanti ugrade se u aksiome, kao što sledi.

Bulova algebra je uređena šestorka $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, gde je B neprazni skup, $\wedge$ i $\vee$ su binarne, $'$ je unarna operacija, a 0 i 1 su konstante, tako da važe sledeći identiteti:

b1: $x \wedge y = y \wedge x$
b2: $x \vee y = y \vee x$; (*komutativni zakoni*)
b3: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
b4: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (*distributivni zakoni*)
b5: $x \wedge 1 = x$
b6: $x \vee 0 = x$ (*osobine 0 i 1*)
b7: $x \wedge x' = 0$
b8: $x \vee x' = 1$ (*osobine komplementa*)
b9: $0 \neq 1$.

Iz aksioma neposredno proizlazi tvrđenje koje u jednom smeru povezuje Bulovu mrežu sa Bulovom algebrom.

TEOREMA 1.64. *Ako je $(L, \wedge, \vee)$ Bulova mreža sa bar dva elementa, onda je $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Bulova algebra u kojoj su $\wedge$ i $\vee$ binarne operacije iz mreže, 0 i 1 su redom najmanji i najveći elemenat iz L, a unarna operacija je pridruživanje elementu x njegovog komplementa x'.*

Dokaz. Kako je gore obrazloženo, na Bulovoj mreži se pored dve binarne, može definisati jedna unarna operacija kao i dve konstante i tada očigledno važe sve navedene aksiome (ako L ima bar dva elementa). ■

Obratno tvrđenje nije sasvim očigledno, jer se distributivne komplementirane mreže obično ne definišu gornjim aksiomama. U nastavku se pokazuje da i taj smer važi: algebre koje zadovoljavaju navedene aksiome samo su drugim jezikom opisane Bulove mreže.

Prvo što se može uočiti iz aksioma, jeste da su one date u dualnim parovima (osim poslednje aksiome, koja je samodualna[10]). Pri tome je dualno tvrđenje ono koje se iz datog tvrđenja dobija zamenom svih pojavljivanja jedne binarne operacije drugom i obratno i jedne konstante drugom i obratno. Iz ovoga je očigledno da u klasi Bulovih algebri, kao i kod mreža, važi sledeće pravilo.

Princip dualnosti za Bulove algebre: *Ako se neko tvrđenje može izvesti iz aksioma* b1 - b9*, onda se i odgovarajuće dualno tvrđenje može izvesti iz tih aksioma.*

Kao i kod mreža, dokaze dualnih tvrđenja zato izostavljamo (o dualnosti u Bulovim algebrama se preciznije govori u vezi sa Bulovim termima, na strani 107).

Tvrđenje 1.65. *U svakoj Bulovoj algebri važe sledeći identiteti:*
a) $x \wedge 0 = 0$;
b) $x \vee 1 = 1$;
c) $x \wedge (x \vee y) = x$;
d) $x \vee (x \wedge y) = x$; *(zakoni apsorpcije)*
e) $x \wedge x = x$;
f) $x \vee x = x$. *(zakoni idempotentnosti)*

Dokaz.
a) Na osnovu aksioma je

$$\begin{aligned} x \wedge 0 &= (x \wedge 0) \vee 0 = (x \wedge 0) \vee (x \wedge x') \\ &= x \wedge (0 \vee x') = x \wedge (x' \vee 0) = x \wedge x' = 0. \end{aligned}$$

b) Dualno delu pod a).
c) Na osnovu aksioma i tvrđenja pod a) je

$$x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x.$$

d) Dualno delu pod c).
e) Prema zakonu apsorpcije je

$$x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x \wedge x.$$

f) Dualno delu pod e). ■

Lema 1.66. *Ako je za neko t u Bulovoj algebri ispunjeno*

$$y \vee t = z \vee t \ \text{ i } \ y \vee t' = z \vee t',$$

onda je $y = z$.

[10] Ta aksioma obezbeđuje da elementi koji odgovaraju konstantama 0 i 1 budu različiti. Jednostavno se pokazuje da algebra koja zadovoljava aksiome b1 - b8 i b9': $0 = 1$ ima tačno jedan elemenat (videti zadatak 1.60).

Dokaz. Iz aksioma sledi

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 = y \vee (t \wedge t') = (y \vee t) \wedge (y \vee t') \\ &= (z \vee t) \wedge (z \vee t') = z \vee (t \wedge t') = z \vee 0 = z. \end{aligned}$$

■

TVRĐENJE 1.67. *U svakoj Bulovoj algebri važe identiteti:*
a) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
b) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. *(zakoni asocijativnosti)*

Dokaz. a) Primenjuje se prethodno dokazana lema i to tako što se y zameni izrazom $x \wedge (y \wedge z)$, z izrazom $(x \wedge y) \wedge z$, a t zameni promenljivom x; dobija se

$$\begin{aligned} (x \wedge (y \wedge z)) \vee x &= x \quad \text{i} \\ ((x \wedge y) \wedge z) \vee x &= ((x \wedge y) \vee x) \wedge (z \vee x) \\ &= x \wedge (z \vee x) = x. \end{aligned}$$

Iskorišćeni su i zakoni apsorpcije i distributivnosti.

Slično,

$$\begin{aligned} (x \wedge (y \wedge z)) \vee x' &= (x \vee x') \wedge ((y \wedge z) \vee x') \\ &= 1 \wedge ((y \wedge z) \vee x') \\ &= (y \wedge z) \vee x', \quad \text{i} \\ ((x \wedge y) \wedge z) \vee x' &= ((x \wedge y) \vee x') \wedge (z \vee x') \\ &= ((x \vee x') \wedge (y \vee x')) \wedge (z \vee x') \\ &= (1 \wedge (y \vee x')) \wedge (z \vee x') \\ &= (y \vee x') \wedge (z \vee x') = (y \wedge z) \vee x'. \end{aligned}$$

Dakle,

$$(x \wedge (y \wedge z)) \vee x = ((x \wedge y) \wedge z) \vee x \quad \text{i} \quad (x \wedge (y \wedge z)) \vee x' = ((x \wedge y) \wedge z) \vee x',$$

pa je na osnovu leme 1.66,

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

b) Dualno (koristi se tvrđenje dualno onom u lemi 1.66). ■

Sada se može dokazati i drugi smer veze između Bulovih mreža i Bulovih algebri.

TEOREMA 1.68. *Ako je* $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ *Bulova algebra, onda je* $(B, \wedge, \vee)$ *Bulova mreža u kojoj su 0 i 1 redom nulti i jedinični element, a komplement određuje unarna operacija* $'$.

Dokaz. $(B, \wedge, \vee)$ je mreža, jer su operacije komutativne (aksiome b1 i b2), asocijativne (tvrđenje 1.67) i važe zakoni apsorpcije (tvrđenje 1.65 c) i d)). Ta mreža je distributivna na osnovu aksioma b3 i b4. Najzad, postojanje nultog elementa, jediničnog i komplemenata obezbeđuju aksiome b5 - b8. ■

Dakle, postoji obostrana korespondencija između distributivnih komplementiranih (tj. Bulovih) mreža i Bulovih algebri. Zato se jednakošću $x \wedge y = x$ na Bulovim algebrama uvodi relacija poretka ($x \leqslant y$) i sve ono što se odnosi na mreže kao relacijske strukture važi i za Bulove algebre. Sa stanovišta algebarskih konstrukcija (podalgebri, homomorfnih slika, direktnih proizvoda) uputno je te strukture razmatrati u jeziku koji sadrži sve operacije (obe binarne, unarnu i konstante). Zato se u nastavku govori o Bulovim algebrama, a kada je to pogodno, koristi se poredak i ostale osobine Bulovih mreža. U tom smislu, kaže se da je Bulova algebra **atomarna**, ako je atomarna odgovarajuća Bulova mreža (str. 29). Ako u njoj ne postoje atomi, Bulova algebra je **bezatomska**. Slično, Bulova algebra je **potpuna** (kompletna), ako je potpuna kao mreža.

Primer 1.69. Bulovim mrežama iz primera 1.61 odgovaraju u jeziku sa dve binarne operacije, jednom unarnom i dve konstante, Bulove algebre navedene u nastavku.

a) Za $A \neq \emptyset$, Bulova algebra partitivnog skupa je $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup, ', \emptyset, A)$; ona je potpuna i atomarna, što sledi iz prirode skupovnih operacija.

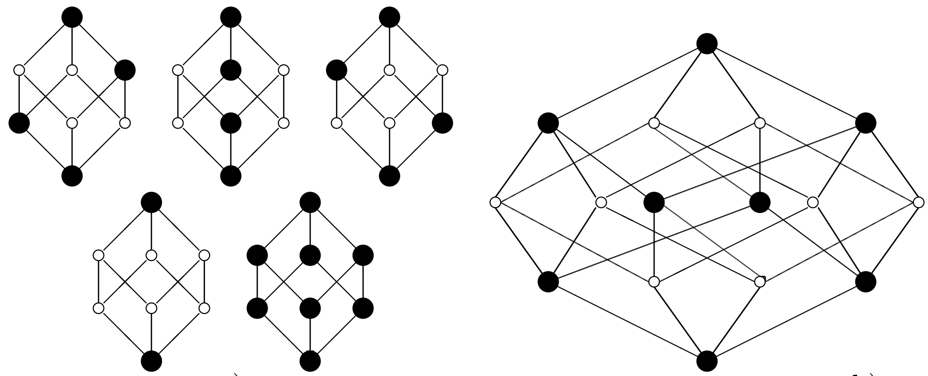
b) Ako je n kvadratno slobodan prirodni broj, onda je Bulova algebra svih njegovih delitelja (primer 1.61 c), str. 61) šestorka $(D(n),\ \mathrm{nzd}, \mathrm{nzs}, n/x, 1, n)$; budući da je konačna i ova Bulova algebra je potpuna i atomarna.

c) Bulova algebra iskaznih formula je $(\mathcal{S}/\sigma, \sqcap, \sqcup, ', 0, 1)$, gde su operacije definisane kao u primeru 1.61 d) (0 je klasa kontradikcija, a 1 klasa tautologija). Ova algebra nema atoma, bezatomska je (videti zadatke 1.64 i 1.77).

d) Navodimo i jednu atomarnu Bulovu algebru, koja je prebrojiva i nije potpuna. Nju obrazuju svi konačni i dokonačni (čiji je komplement konačan) podskupovi skupa $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva, u odnosu na skupovne operacije presek, uniju, komplement i uobičajene konstante $\emptyset$ i $\mathbb{N}$ (videti i primer 1.44 b), str. 35). Lako se može zaključiti da to jeste Bulova algebra i da su joj atomi jednočlani skupovi (kao i u $\mathcal{P}(A)$). Prebrojivost ove algebre je skupovno svojstvo same kolekcije. □

4.4. Podalgebre. Razlika između Bulove algebre i Bulove mreže dolazi do izražaja kod pojmova podalgebre i podmreže. Podmreža Bulove mreže može ali ne mora i sama biti Bulova mreža. Čak i kad su obe (mreža i njena podmreža) Bulove, to ne znači ni da imaju iste nulte i jedinične elemente, niti da se unarne operacije poklapaju na podmreži.

Bulova podalgebra $\mathcal{B}_1$ Bulove algebre $\mathcal{B}$ je Bulova algebra definisana na nepraznom podskupu B_1 skupa B (nosača algebre $\mathcal{B}$), a operacije su restrikcije na B_1 odgovarajućih operacija iz $\mathcal{B}$. To znači da je nosač Bulove podalgebre neprazni podskup date Bulove algebre zatvoren za operacije, uključujući i nularne tj. konstante 0 i 1: one moraju biti iste za obe algebre.



a) b)

Slika 1.31

PRIMER 1.70. a) Svaka dvoelementna podmreža Bulove mreže je i sama Bulova mreža. Među tim podmrežama samo je jedna podalgebra odgovarajuće Bulove algebre; to je ona koju čine konstante 0 i 1.

b) Sve podalgebre Bulove algebre $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ predstavljene su dijagramima na slici 1.31 a) (zatamnjeni kružići).

Na istoj slici (1.31 b)) je i dijagram Bulove algebre $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$ na kome je naznačena jedna njena osmoelementna podalgebra.

c) Bulova algebra konačnih i dokonačnih podskupova skupa $\mathbb{N}$ (primer 1.69) je podalgebra Bulove algebre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. □

Da bi neprazni podskup Bulove algebre predstavljao njenu podalgebru, on po definiciji mora biti zatvoren u odnosu na sve tri operacije i sadržati obe konstante. Zatvorenost se može obezbediti i sa manje uslova, kao što sledi.

TVRĐENJE 1.71. *Neprazan podskup Bulove algebre je njena podalgebra ako je zatvoren u odnosu na unarnu i bilo koju od dve binarne operacije.*

Dokaz. Pretpostavimo da je B_1 neprazni podskup Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ i da je zatvoren u odnosu na operacije $\wedge$ i $'$. Tada je B_1 zatvoren i u odnosu na $\vee$, jer je prema De Morganovom zakonu, $x \vee y = (x' \wedge y')'$. Konstante 0 i 1 pripadaju B_1, jer je taj skup neprazan pa sadrži neki elemenat x, a uz njega po pretpostavci i x', odakle $x \wedge x' = 0 \in B_1$ i $0' = 1 \in B_1$.

Analogan je dokaz i za drugu pretpostavku, da je B_1 zatvoren u odnosu na $\vee$ i $'$. ■

Presek proizvoljnog nepraznog skupa podalgebri date Bulove algebre je isto podalgebra (zadatak 1.91). Sledi da je i presek svih podalgebri Bulove algebre $\mathcal{B}$ koje sadrže njen podskup C, zatvoren za operacije iz $\mathcal{B}$. To je dakle podalgebra date Bulove algebre, kaže se da je **generisana** skupom C. Ona je najmanja podalgebra koja sadrži C. Elementi skupa C su **generatori** dobijene podalgebre.

PRIMER 1.72. a) U svakoj Bulovoj algebri se podalgebra generisana praznim skupom sastoji iz konstanti 0 i 1 (videti i zadatak 1.91).

b) Podalgebra Bulove algebre $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$, generisana kolekcijom $\{\{a\}, \{b\}, \{c,d\}\}$ je

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c,d\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

i ona odgovara slici 1.31 b), sa pogodno označenim elementima. $\square$

Iz definicije Bulove podalgebre sledi da je ona podmreža odgovarajuće Bulove mreže. Ali potpunost Bulove algebre (mreže) i potpunost njene podalgebre nisu ni u kakvoj vezi, tj. svaka od njih može biti potpuna, a da druga ne bude. A i ako su obe potpune, beskonačni infimumi i supremumi se ne moraju poklapati. Zato se **potpuna podalgebra** potpune Bulove algebre $\mathcal{B}$ definiše kao njena Bulova podalgebra $\mathcal{C}$, takva da infimum i supremum (u $\mathcal{B}$) proizvoljnog podskupa iz $\mathcal{C}$ pripadaju $\mathcal{C}$.

PRIMER 1.73. a) Bulova algebra konačnih i dokonačnih podskupova prebrojivog skupa (primer 1.70 c)) nije potpuna, a podalgebra je potpune Bulove algebre odgovarajućeg partitivnog skupa.

b) Neka je $\mathcal{B}$ kolekcija svih konačnih podskupova X iz $\mathbb{N}$ i svih skupova oblika $\mathbb{N}_0 \setminus X$ (gde je X neki konačan podskup iz $\mathbb{N}$). $\mathcal{B}$ je podalgebra Bulove algebre $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$, jer su operacije u obe algebre iste tj. skupovne. Proizvoljan supremum u $\mathcal{B}$ ne poklapa se uvek sa supremumom u $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. Zaista, ako je $A = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, onda je supremum tog skupa u $\mathcal{B}$ ceo skup $\mathbb{N}_0$, a supremum istog skupa u $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ je $\mathbb{N}$.

c) Svaka konačna podalgebra Bulove algebre je njena potpuna podalgebra.

d) U Bulovoj algebri $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, podalgebra generisana proizvoljnom particijom skupa atoma (tj. skupa $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \dots\}$) je potpuna podalgebra. $\square$

4.5. Izomorfizam. Predstavljanje konačnih Bulovih algebri. Funkcija f iz Bulove algebre $\mathcal{B}$ u Bulovu algebru $\mathcal{C}$ je **homomorfizam** ako je saglasna sa svim operacijama:

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y); \\ f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y); \\ f(x') &= (f(x))'; \\ f(0) &= 0; \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

(Operacije u obe algebre označene su istim simbolima.)

Homomorfizam iz Bulove algebre $\mathcal{B}$ na Bulovu algebru $\mathcal{C}$ koji je bijekcija jeste **izomorfizam**. Na osnovu De Morganovih zakona, neposredno se dokazuje sledeći stav (videti i zadatak 1.81).

TVRĐENJE 1.74. *Bijekcija f iz Bulove algebre $\mathcal{B}$ u Bulovu algebru $\mathcal{C}$ je izomorfizam ako i samo ako je za sve x, y iz B*

$$f(x') = (f(x))' \quad i \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y). \qquad \blacksquare$$

Važi i dualno tvrđenje; za izomorfizam Bulovih algebri dovoljno je postojanje bijekcije saglasne sa operacijama $'$ i $\vee$.

U nastavku se dokazuje da su konačne Bulove algebre izomorfne sa Bulovim algebrama partitivnih skupova (to važi i za neke beskonačne Bulove algebre; videti zadatke nakon ovog odeljka). Ako su A i B izomorfne algebre, onda to označavamo sa $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

LEMA 1.75. *Svaka konačna Bulova algebra je atomarna.*

Dokaz. Neka je x proizvoljan elemenat konačne Bulove algebre $\mathcal{B}$ koji nije nula. Treba pokazati da ispod njega (u odnosu na poredak) postoji atom. Ukoliko je sam x atom, dokaz je završen, a ako nije, postoji x_1, tako da je $x_1 \neq 0$ i $x_1 \leqslant x$. Elemenat x_1 može biti atom, i tada je tvrđenje tačno; u suprotnom, postoji ispod njega elemenat x_2 koji nije nula. Na ovaj način se u konačnom broju koraka dolazi do atoma, jer bi u protivnom $\mathcal{B}$ bila beskonačna Bulova algebra. $\blacksquare$

Još jedno svojstvo Bulovih algebri (dato u sledećoj lemi) koristi se u nastavku.

LEMA 1.76. *Ako je a atom u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ i $x \in B$, onda važi tačno jedna od nejednakosti $a \leqslant x$, $a \leqslant x'$.*

Dokaz. Iz aksioma sledi

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee x') = (a \wedge x) \vee (a \wedge x').$$

Kako je a atom, elementi određeni izrazima $a \wedge x$ i $a \wedge x'$ pripadaju skupu $\{0, a\}$, pa je bar jedan od njih baš a, na pr. $a \wedge x = a$, odnosno $a \leqslant x$. Tada $a \nleqslant x'$, jer bi u protivnom bilo $a \leqslant x \wedge x' = 0$, što je kontradikcija. $\blacksquare$

TEOREMA 1.77. *Konačna Bulova algebra $\mathcal{B}$ izomorfna je sa Bulovom algebrom $\mathcal{P}(A)$, gde je A skup atoma u $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Neka je A skup atoma u konačnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B}$. Uočimo funkciju $f : B \to \mathcal{P}(A)$, definisanu tako da je za $x \in B$

$$f(x) := \{a \in A \mid a \leqslant x\}.$$

Dokazujemo da je f izomorfizam, tj. da je to bijekcija, koja je prema tvrđenju 1.74 saglasna sa unarnom operacijom ($'$) i binarnom ($\wedge$).

1) *f je injekcija:*

Neka je $x \neq y$ i (recimo) $x \nleqslant y$ (videti zadatak 1.5 na str. 22): Odatle, prema tvrđenju 1.63 *c*) (str. 62), $x \wedge y' \neq 0$, pa postoji atom a takav da je $a \leqslant x \wedge y'$. Odatle $a \leqslant x$, pa $a \in f(x)$; slično, $a \leqslant y'$, pa $a \in f(y')$ i zato $a \notin f(y)$ (jer bi iz $a \leqslant y'$ i $a \leqslant y$ sledilo $a \leqslant y \wedge y' = 0$, što ne može). Zato je $f(x) \neq f(y)$.

2) *f je sirjekcija:*

Neka je $X = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}(A)$ i $x = a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Dokazujemo da je $f(x) = X$. Zaista, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $a_i \leqslant x$, pa je $X \subseteq f(x)$. Sa druge strane, ako je $a \in f(x)$, onda je $a \leqslant x$, tj. $a \leqslant a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Zato je

$$a = a \wedge x = a \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee \cdots \vee (a \wedge a_n).$$

Sledi da je za neko i, $a = a_i$, jer bi u protivnom bilo $a = 0$, s obzirom da su i $a, a_1, \ldots, a_n$ atomi. Sledi $f(x) \subseteq X$, pa važi $f(x) = X$.

3) *f je saglasno sa operacijom $\wedge$:*

Ako $a \in f(x \wedge y)$, onda važi $a \leqslant x \wedge y$, odakle $a \leqslant x$ i $a \leqslant y$ tj. $a \in f(x)$ i $a \in f(y)$. Sledi

$$f(x \wedge y) \subseteq f(x) \cap f(y). \tag{10}$$

S druge strane, ako $a \in f(x) \cap f(y)$, onda $a \leqslant x$ i $a \leqslant y$ tj. $a \leqslant x \wedge y$ i $a \in f(x \wedge y)$. Dakle,

$$f(x) \cap f(y) \subseteq f(x \wedge y). \tag{11}$$

Iz (10) i (11) sledi konačno

$$f(x) \cap f(y) = f(x \wedge y).$$

4) *f je saglasno sa unarnom operacijom $'$:*

Neka je $a \in f(x')$ tj. $a \leqslant x'$. Tada $a \nleqslant x$ (prema lemi 1.76) odnosno $a \notin f(x)$; to znači da $a \in \overline{f(x)}$, odnosno $f(x') \subseteq \overline{f(x)}$ (sa desne strane je skupovni komplement). Ako je $a \in \overline{f(x)}$, onda $a \notin f(x)$, tj. $a \nleqslant x$ i zato (prema lemi 1.76) $a \leqslant x'$ tj. $a \in f(x')$. Otuda $\overline{f(x)} \subseteq f(x')$ i najzad $f(x') = \overline{(f(x))}$.

Na osnovu 1) - 4), f je izomorfizam. ■

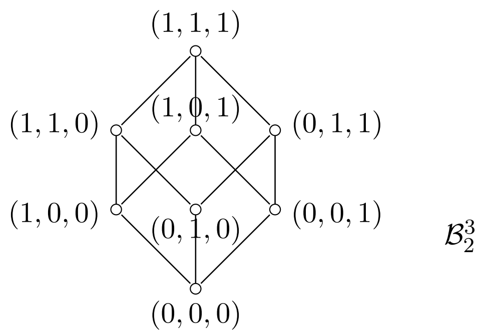
Partitivni skupovi se tako mogu smatrati glavnim predstavnicima konačnih Bulovih algebri. Kao što je poznato, skup sa n elemenata ima 2^n podskupova. Zato neposredno iz poslednje teoreme slede naredna dva tvrđenja.

POSLEDICA 1.78. *Svaka konačna Bulova algebra ima 2^n elemenata, gde je n broj njenih atoma.* ■

POSLEDICA 1.79. *Ma koje dve konačne Bulove algebre sa istim brojem elemenata su izomorfne.* ■

I neke beskonačne Bulove algebre reprezentuju se partitivnim skupovima (zadatak 1.99), ali ne sve; dovoljno je primetiti da je na pr. Bulova algebra klasa iskaznih formula (primer 1.69 c), str. 66) prebrojiva, a nijedan partitivni skup nije prebrojiv.

U opštem slučaju, *svaka Bulova algebra izomorfna je sa podalgebrom neke Bulove algebre partitivnog skupa* (tzv. Stonova teorema reprezentacije, zadatak 1.100).



Slika 1.32

Konačne Bulove algebre mogu se reprezentovati na još jedan način. Polazi se od dvoelementne Bulove algebre definisane na skupu $\{0, 1\}$. Ona se označava sa $\mathcal{B}_2$ (po broju elemenata to je najmanja Bulova algebra, s obzirom da aksiom $0 \neq 1$ isključuje algebru sa jednim elementom). Kao i kod mreža (a i drugih algebarskih struktura), direktan stepen $\mathcal{B}_2^n$ te algebre je isto Bulova algebra, u kojoj je skupovni deo $\{0, 1\}^n$ (tj. skup svih uređenih n-torki elemenata 0 i 1), a operacije se izvode po koordinatama (zadaci 1.17 i 1.88); kao primer, algebra $\mathcal{B}_2^3$ predstavljena je dijagramom na slici 1.32.

Na osnovu navedenog, predstavnici konačnih Bulovih algebri su i stepeni $\mathcal{B}_2^n$ dvoelementne algebre, kao sto sledi.

Teorema 1.80. *Za Bulovu algebru $\mathcal{P}(A)$, gde je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, važi:*

$$\mathcal{P}(A) \cong \mathcal{B}_2^n.$$

Dokaz. Pokazujemo da je traženi izomorfizam funkcija $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{B}_2^n$ koja svakom podskupu X iz A pridružuje njegovu karakterističnu funkciju:

$$f(X) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \text{ gde je } \alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{ako } a_i \in X \\ 0, & \text{ako } a_i \notin X. \end{cases}$$

(*i*) *f je sirjekcija.* Ako $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n$ i $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \cdots = \alpha_{i_k} = 1$, a ostale komponente su nule, onda je po gornjoj definiciji za $X = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, $f(X) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

(*ii*) *f je injekcija.* Ako su X i Y podskupovi iz A i $X \neq Y$, onda postoji bar jedan a_i iz A koji je u X, a nije u Y (ili obratno). Tada je $f(X) \neq f(Y)$, jer se te dve n-torke razlikuju bar u i-toj komponenti.

(*iii*) *f je saglasno sa operacijom $\wedge$, tj. sa skupovnim presekom.* Za $X, Y \subseteq A$, neka je $X \cap Y = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$. Tada n-torka $f(X \cap Y)$ ima jedinice tačno na mestima $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$. Neposredno se zaključuje da i $f(X) \wedge f(Y)$ ima jedinice na istim mestima.

(iv) Slično kao pod (iii), dokazuje se da važi $f(\overline{X}) = f(x)'$.

Na osnovu (i) - (iv), f je izomorfizam. ■

Poslednje tvrđenje sledi i iz činjenice da je direktan stepen Bulove algebre i sam Bulova algebra sa 2^n elemenata, pa se mogu primeniti posledice 1.78 i 1.79. U gornjem dokazu je, međutim, neposredno opisana funkcija koja ostvaruje traženi izomorfizam.

Budući da je svaka konačna Bulova algebra izomorfna sa skupovnom oblika $\mathcal{P}(A)$ (teorema 1.77) iz poslednjeg tvrđenja neposredno se zaključuje da važi sledeće.

POSLEDICA 1.81. *Svaka konačna Bulova algebra izomorfna je sa direktnim stepenom dvoelementne Bulove algebre.* ■

4.6. Dopune i zadaci.

ZADATAK 1.53. *Neka je L komplementirana mreža u kojoj iz $a \wedge x = 0$ sledi $x \leqslant a'$ za svaki komplement a' elementa a. Dokazati da je L mreža sa jedinstvenim komplementima, kao i da iz $a \leqslant b$ sledi $b' \leqslant a'$.*

Rešenje.

Neka su a' i a'' komplementi elementa a. Iz $a \wedge a' = 0$ sledi $a' \leqslant a''$ (jer je a'' komplement elementa a), a iz $a \wedge a'' = 0$ sledi $a'' \leqslant a'$, odakle je $a' = a''$. Dakle, L je mreža sa jedinstvenim komplementima.

Ako je $a \leqslant b$, odnosno $a \wedge b = a$, onda je

$$a \wedge b' = (a \wedge b) \wedge b' = a \wedge (b \wedge b') = a \wedge 0 = 0,$$

pa odatle, iz uslova zadatka sledi $b' \leqslant a'$. □

ZADATAK 1.54. *Data je distributivna mreža sa najmanjim i najvećim elementom* (0 *i* 1)*. Pokazati da elementi te mreže koji imaju komplemente obrazuju podmrežu. Pokazati da je ta podmreža Bulova mreža.*

Rešenje.

Neka su x i y elementi sa komplementima, i ti komplementi redom x' i y'. Tada i element $x \wedge y$ ima komplement, element $x' \vee y'$, jer je

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = 0 \vee 0 = 0,$$

a takođe i

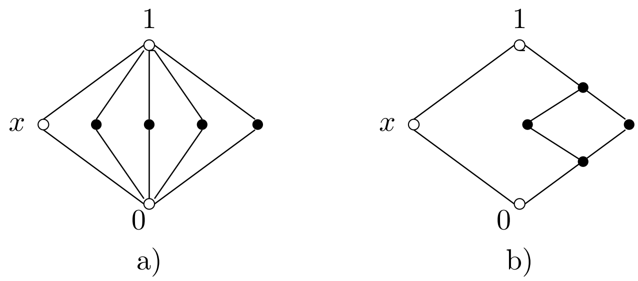
$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = 1 \wedge 1 = 1.$$

Komplement elementa $x \vee y$ je $x' \wedge y'$, što se slično pokazuje. Znači, skup elemenata te mreže sa komplementima je zatvoren u odnosu na mrežne operacije, pa obrazuje podmrežu. Ona je distributivna, kao podmreža distributivne mreže; sledi da je i Bulova. □

ZADATAK 1.55. *Navesti primer mreže u kojoj neki elemenat ima tačno četiri komplementa.*

Rešenje.

U oba primera na slici 1.33 elemenat x ima 4 komplementa. □



Slika 1.33

ZADATAK 1.56. *Dokazati da u Bulovoj mreži:*
a) iz $x \wedge y \leqslant z$ sledi $y \leqslant x' \vee z$;
b) iz $x \leqslant y' \vee z$ sledi $x \wedge y \leqslant z$.

Rešenje.

a) Ako je $x \wedge y \leqslant z$, onda je

$$y = 1 \wedge y = (x \vee x') \wedge y = (x' \wedge y) \vee (x \wedge y) \leqslant x' \vee z.$$

b) Ako je $x \leqslant y' \vee z$, onda je

$$x \wedge y \leqslant (y' \vee z) \wedge y = (y' \wedge y) \vee (z \wedge y) = z \wedge y \leqslant z.$$ □

ZADATAK 1.57. *Dokazati da u Bulovoj mreži važi:*

$$b \leqslant c \quad \textit{ako i samo ako za svako } a,\ a \wedge c = 0 \ \textit{ implicira } \ a \wedge b = 0.$$

Rešenje.

Ako je $b \leqslant c$ i $a \wedge c = 0$, onda je

$$a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge c) \wedge b = 0 \wedge b = 0.$$

Obratno, pošto je $c' \wedge c = 0$, iz implikacije u zadatku sledi $c' \wedge b = 0$.
Ako je $c' \wedge b = 0$, onda je

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (c \vee c') = (b \wedge c) \vee (b \wedge c') = (b \wedge c) \vee 0 = b \wedge c,$$

odnosno, $b \leqslant c$. □

ZADATAK 1.58. *U proizvoljnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, za sve x, y, z iz B važe sledeća tvrđenja:*

a) *Ako je $x \vee y = 1$ i $x \wedge y = 0$, onda je $y = x'$.*

b) $(x')' = x$; *(involucija)*

c) **(i)** $(x \wedge y)' = x' \vee y'$;
(ii) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$; *(De Morganovi zakoni)*

d) **(i)** $0' = 1$;

(ii) $1' = 0$;

e) **(i)** $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$;

(ii) $x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$;

f) **(i)** $x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(ii) $x \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. *(modularnost)*

Rešenje.

a) Neka je $x \vee y = 1$ i $x \wedge y = 0$. Tada je

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 = y \vee (x \wedge x') = (y \vee x) \wedge (y \vee x') \\ &= (x \vee y) \wedge (y \vee x') = 1 \wedge (y \vee x') = (x \vee x') \wedge (y \vee x') \\ &= (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) = x' \vee (x \wedge y) = x' \vee 0 = x', \end{aligned}$$

na osnovu pretpostavki i aksioma b6, b7, b4, b2, b8, b2, b4, i b6.

b)

$$\begin{aligned} (x')' &= (x')' \wedge 1 = (x')' \wedge (x \vee x') = ((x')' \wedge x) \vee ((x')' \wedge x') \\ &= ((x')' \wedge x) \vee 0 = ((x')' \wedge x) \vee (x' \wedge x) = ((x')' \vee x') \wedge x \\ &= 1 \wedge x = x, \end{aligned}$$

na osnovu aksioma b5, b8, b3, b7, b7, b3, b8, b5, uz podrazumevanje aksioma b1 i b2.

c) **(i)** Primenjuje se već dokazano tvrđenje a), gde se umesto x stavi izraz $x \wedge y$, a umesto y izraz $x' \vee y'$. Budući da je

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \vee (x' \vee y') &= (x \vee (x' \vee y')) \wedge (y \vee (x' \vee y')) \\ &= ((x \vee x') \vee y') \wedge ((y \vee y') \vee x') \\ &= (1 \vee y') \wedge (1 \vee x') = 1 \wedge 1 = 1, \quad \text{i} \\ (x \wedge y) \wedge (x' \vee y') &= ((x \wedge y) \wedge x') \vee ((x \wedge y) \wedge y') \\ &= ((x \wedge x') \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge y')) \\ &= (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0, \end{aligned}$$

na osnovu aksioma b3, b4, b6 i b5, kao i tvrđenja 1.65 (a) i (b), i 1.67 (a) i (b), s obzirom na tvrđenje ovog zadatka pod a), dobije se konačno

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'.$$

d) **(i)** $0' = 0' \vee 0 = 1$, na osnovu aksioma b6 i b8.

e) **(i)** Redom prema aksiomama b3, b7 i b6 je

$$x \wedge (x' \vee y) = (x \wedge x') \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y.$$

f) **(i)** Na osnovu aksiome b3, kao i tvrđenja 1.67 i 1.65 imamo

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee (x \wedge z)) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge (x \wedge z)) \\ &= (x \wedge y) \vee ((x \wedge x) \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Sva tvrđenja pod (ii) dualna su tvrđenjima pod (i). □

ZADATAK 1.59. *Dokazati da aksiome b1 - b9 za Bulove algebre nisu nezavisne.*

Rešenje.

Aksioma b6 je posledica preostalih aksioma (isto važi i za aksiomu b5), zato što je

$$\begin{aligned}
x \vee 0 &= x \vee (x \wedge x') = (x \vee x) \wedge (x \vee x') = (x \vee x) \wedge 1 = x \vee x \\
&= (x \wedge 1) \vee (x \wedge 1) = x \wedge (1 \vee 1) = x \wedge ((1 \vee 1) \wedge 1) \\
&= x \wedge ((1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1')) = x \wedge (1 \vee (1 \wedge 1')) = x \wedge (1 \vee (1' \wedge 1)) \\
&= x \wedge (1 \vee 1') = x \wedge 1 = x.
\end{aligned}$$

Primenjene su, redom, aksiome: b7, b4, b8, b5, b5, b3, b5, b7, b4, b1, b5, b8 i b5. □

NAPOMENA. Može se pokazati da su skupovi aksioma b1 - b4 i b6 - b9, kao i b1 - b5 i b7 - b9 nezavisni i da je nemoguće dokazati neku drugu aksiomu (osim aksioma b5 i b6) preko preostalih 8 aksioma.

ZADATAK 1.60. *Dokazati da algebra koja zadovoljava aksiome b1 - b8 i umesto aksiome b9 aksiomu*

$$b9': \quad 0 = 1,$$

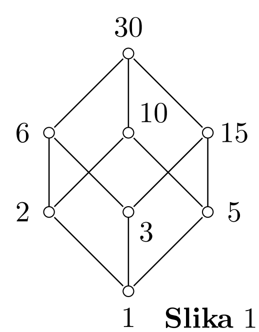
ima tačno jedan elemenat.

Rešenje.

Neka su x i y proizvoljni elementi takve algebre. Tada je

$$x = x \wedge 1 = x \wedge 0 = 0 = y \wedge 0 = y \wedge 1 = y.$$

Dakle, $x = y$, odnosno algebra ima tačno jedan elemenat, konstantu 0. □



Slika 1.34

ZADATAK 1.61. *Pokazati da je* $(B, \wedge, \vee, ', 1, 30)$ *Bulova algebra, gde je* B *skup svih delitelja broja* 30, $x \wedge y = nzd\{x, y\}$, $x \vee y = nzs\{x, y\}$, $x' = 30/x$, *a nulti i jedinični elemenat su redom brojevi* 1 *i* 30.

Šta znači $a \leqslant b$ u ovoj algebri?

Rešenje.

Operacije su očito dobro definisane, a aksiome se neposredno proveravaju. Na primer,

b1: $x \wedge y = y \wedge x$ je isto što i $\mathrm{nzd}\{x, y\} = \mathrm{nzd}\{y, x\}$, (tačno),

b8: $x \vee x' = 1$ znači da je $\mathrm{nzs}\{x, 30/x\} = 30$, što je takođe tačno, itd.

Hase-dijagram ove algebre prikazan je na slici 1.34, a poredak $a \leqslant b$ znači $a \wedge b = a$ tj. $\mathrm{nzd}\{a, b\} = a$, odnosno a je u relaciji sa b ako i samo ako $a \mid b$ (a deli b). □

Zadatak 1.62. *Neka je n prirodan broj i B skup svih delitelja broja n, a za a, b iz B,*

$$a \wedge b = nzd\{a, b\}; \quad a \vee b = nzs\{a, b\}; \quad a' = n/a.$$

*Tada je $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 1, n)$ Bulova algebra ako i samo ako je n **kvadratno slobodan** (nije deljiv nijednim kvadratom prirodnog broja većeg od jedan). Dokazati!*

Rešenje.

Ako n nije kvadratno slobodan, onda neka je $n = p \cdot q^2$, gde su p i q iz $\mathbb{N}$. Tada aksioma b8 za Bulove algebre nije ispunjena. Zaista, elemenat q iz B nema komplement:

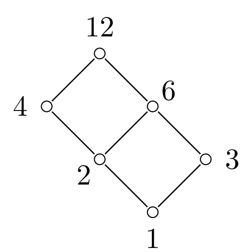
$$n/q = p \cdot q \;\text{ i }\; \mathrm{nzs}\{q, n/q\} = p \cdot q \neq n.$$

Dakle, B nije Bulova algebra.

Obratno, ako je n kvadratno slobodan, onda su zadovoljene sve aksiome za Bulove algebre. Zaista, b1 - b6, kao i b9 važe i inače za nzd i nzs (videti i zad. 1.45), a za preostale dve je:

b7: $\mathrm{nzd}\{a, n/a\} = \mathrm{nzd}\{a, a \wedge b/a\}$, gde je $a \wedge b = n$, i $\mathrm{nzd}\{a, b\} = 1$ (uzajamno prosti brojevi). Odatle je $\mathrm{nzd}\{a, n/a\} = 1$.

Slično, $\mathrm{nzs}\{a, n/a\} = \mathrm{nzs}\{a, b\} = n$, pa b8 važi. □



Slika 1.35

Napomena. Za svako $n \in \mathbb{N}$ se na osnovu ovog zadatka može posmatrati algebra $(B, \wedge, \vee, 1, n)$ (oznake kao gore), pa dakle i poredak $x \leqslant y$ ako i samo ako $x \wedge y = x$. Tada je na primer, Hase-dijagram takve algebre (u stvari mreže) sa istaknutim elementima, konstantama 1 i n, za $n = 12$ predstavljen na slici 1.35 (videti i zadatak 1.28).

ZADATAK 1.63. *Dokazati da je skup svih funkcija* $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \neq 1$ *Bulova algebra, gde se operacije definišu na sledeći način: Ako su* f *i* g *funkcije iz* $\{0,1\}^n$ *u* $\{0,1\}$, *tada je za* $\alpha \in \{0,1\}^n$

$$\begin{aligned}
(f \wedge g)(\alpha) &:= f(\alpha) \wedge g(\alpha), \\
(f \vee g)(\alpha) &:= f(\alpha) \vee g(\alpha), \\
f'(\alpha) &:= (f(\alpha))', \\
\mathcal{O}(\alpha) &:= 0, \\
\mathcal{I}(\alpha) &:= 1.
\end{aligned}$$

(Sa desne strane jednakosti su operacije na dvoelementnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B}_2$, *a* $\mathcal{O}$ *i* $\mathcal{I}$ *su, kao što se vidi, konstantne funkcije.)*

Da li se na opisani način dobijaju (do na izomorfizam) sve konačne Bulove algebre?

Navesti elemente ove algebre za $n \in \{1,2\}$.

Rešenje.

Prvi deo dokazuje se proverom aksioma budući da se operacije definišu uz pomoć odgovarajućih na $\mathcal{B}_2$.

Odgovor na drugi deo je odrečan. Kao što se vidi u nastavku, za $n = 1$ odgovarajuća Bulova algebra ima četiri, a za $n = 2$ šesnaest elemenata[11]. Dakle, na primer Bulova algebra sa osam elemenata ne može se predstaviti na ovaj način.

Za $n = 1$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \right\}.$

Za $n = 2$:

$$\begin{aligned}
B = \Big\{ &\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

[11]Za proizvoljno n takva Bulova algebra ima 2^{2^n} elemenata.

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\left.\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$
□

Zadatak 1.64. *Neka je S skup iskaznih formula i neka je $\sim$ binarna relacija na S definisana sa*

$$A \sim B \quad \text{ako i samo ako je formula } A \Leftrightarrow B \text{ tautologija.}$$

Dokazati:

a) *$\sim$ je relacija ekvivalencije na S;*

b) *Ako je $S/\!\sim = \{[A]_\sim \mid A \in S\}$ skup klasa ekvivalencije, onda je struktura $\mathcal{S} = (S/\!\sim, \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1)$ Bulova algebra, gde su operacije definisane na sledeći način:*

$$\begin{aligned} [A]_\sim \wedge [B]_\sim &:= [A \wedge B]_\sim; \\ [A]_\sim \vee [B]_\sim &:= [A \vee B]_\sim; \\ \overline{[A]_\sim} &:= [\neg A]_\sim; \\ 0 &:= [A \wedge \neg A]_\sim; \\ 1 &:= [A \vee \neg A]_\sim. \end{aligned}$$

(Sa desne strane su $\wedge, \vee, \neg$ redom operacijski znaci za konjunkciju, disjunkciju i negaciju koji učestvuju u izgradnji iskaznih formula).

Rešenje.

(Videti i primer 1.61 d), str. 61.)

a) Neposredna posledica osobina refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti logičke ekvivalencije „$\Leftrightarrow$“ ($A \sim A$ ako i samo ako je $A \Leftrightarrow A$ tautologija, što je uvek zadovoljeno, itd.).

b) Operacije su dobro definisane, tj. ne zavise od izbora predstavnika klasa. Zaista, ako je $A_1 \in [A]_\sim$, $B_1 \in [B]_\sim$, onda je $A_1 \Leftrightarrow A$ i $B_1 \Leftrightarrow B$, pa je i $A_1 \wedge B_1 \Leftrightarrow A \wedge B$ tj. $[A_1]_\sim \wedge [B_1]_\sim = [A_1 \wedge B_1]_\sim = [A \wedge B]_\sim = [A]_\sim \wedge [B]_\sim$.

Slično je i za ostale operacije.

Aksiome za Bulovu algebru proveravaju se direktno.

Na primer, b3:

$$[A]_\sim \wedge ([B]_\sim \vee [C]_\sim) =$$

(po definiciji za $\wedge$ i $\vee$)

$$= [A \wedge (B \vee C)]_\sim =$$

(zbog tautologije $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$)

$$= [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]_\sim =$$

(po definiciji operacija)

$$= ([A]_\sim \wedge [B]_\sim) \vee ([A]_\sim \wedge [C]_\sim)$$

i slično za ostale aksiome. □

ZADATAK 1.65. *Dokazati da u svakoj Bulovoj algebri za proizvoljan elemenat x važe nejednakosti:*

$$x \leqslant 1 \quad i \quad 0 \leqslant x.$$

Rešenje.

Prva nejednakost sledi direktno iz definicije relacije $\leqslant$ i aksiome b5 za Bulove algebre:

$$x \leqslant 1 \quad \text{ako i samo ako} \quad x \wedge 1 = x.$$

Druga nejednakost dokazuje se slično. □

ZADATAK 1.66. *Ako je $\leqslant$ poredak na Bulovoj algebri, onda važi:*

$$\text{iz } x_1 \leqslant y \text{ i } x_2 \leqslant y \text{ sledi } x_1 \vee x_2 \leqslant y.$$

Dokazati.

Rešenje.

Sledi iz osobina mreže i činjenice da je Bulova algebra istovremeno i Bulova mreža. □

ZADATAK 1.67. *Dokazati da u svakoj Bulovoj algebri važi:*
(i) $x \leqslant y'$ *ako i samo ako* $x \wedge y = 0$;
(ii) $y' \leqslant x$ *ako i samo ako* $x \vee y = 1$.

Rešenje.

(i) $x \leqslant y'$ je ekvivalentno sa $x \wedge y' = x$ odakle sledi

$$x \wedge y = (x \wedge y') \wedge y = 0.$$

S druge strane, iz $x \wedge y = 0$ sledi

$$x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = 0 \vee (x \wedge y') = x \wedge y'.$$

(ii) Dualno. □

ZADATAK 1.68. *Dokazati da je u Bulovoj algebri $x \leqslant y$ ekvivalentno sa $y' \leqslant x'$.*

Rešenje.

$x \leqslant y$ je ekvivalentno sa $x \wedge y = x$, što je dalje ekvivalentno sa $(x \wedge y)' = x'$ što je ekvivalentno (na osnovu De Morganovih zakona) sa $x' \vee y' = x'$, što je ekvivalentno sa $y' \leqslant x'$. □

ZADATAK 1.69. *Opisati poredak na Bulovoj algebri*
a) $\mathcal{P}(A)$;
b) *delitelja broja n (kvadratno slobodnog (zadatak 1.62));*
c) $\mathcal{B}_2^n$;

d) *svih funkcija* $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ *(zadatak 1.63);*

e) *klasa iskaznih formula* $\mathcal{S}$, *(zadatak 1.64).*

Rešenje.

a) Poredak je skupovna inkluzija ($\subseteq$);

b) $p \leqslant q$ ako i samo ako p deli q ($p \mid q$);

c) $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leqslant (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ako i samo ako $\alpha_i \leqslant \beta_i,\ i \in \{1, \dots, n\}$;

d) $f \leqslant g$ ako i samo ako za svako $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, važi $f(\alpha_i) \leqslant g(\alpha_i)$, za sve $i \in \{1, \dots, n\}$;

e) $[A]_\sim \leqslant [B]_\sim$ ako i samo ako $[A]_\sim \wedge [B]_\sim = [A]_\sim$ ako i samo ako $[A \wedge B]_\sim = [A]_\sim$ ako i samo ako je $A \wedge B \Leftrightarrow A$ tautologija ako i samo ako je $A \Rightarrow B$ tautologija. $\square$

Zadatak 1.70. *Pokazati da je skup svih binarnih relacija na nekom skupu Bulova algebra u odnosu na odgovarajuće skupovne operacije. Odrediti takvu Bulovu algebru na skupu* $S = \{a, b\}$.

Koliko ima elemenata takva Bulova algebra, ako je $|S| = n \in \mathbb{N}$?

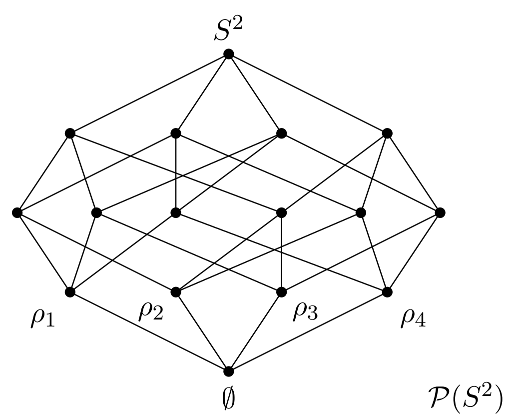
Rešenje.

Sve binarne relacije na skupu S (kao podskupovi iz S^2) čine skupovnu Bulovu algebru $(\mathcal{P}(S^2), \cap, \cup, ', \emptyset, S^2)$.

Za $S = \{a, b\}$ je $S^2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$.

Otuda, $\rho_0 = \emptyset$, $\rho_1 = \{(a,a)\}$, $\rho_2 = \{(a,b)\}$, $\rho_3 = \{(b,a)\}$, $\rho_4 = \{(b,b)\}$, $\rho_5 = \{(a,a),(b,b)\}$, $\dots$, $\rho_{15} = S^2$ (Hase dijagram skiciran je na slici 1.36).

Broj elemenata takve Bulove algebre za $|S| = n$ iznosi $|\mathcal{P}(S^2)| = 2^{n^2}$. $\square$



Slika 1.36

Zadatak 1.71. *Naći sve podalgebre Bulove algebre delitelja broja* 42.

Rešenje.

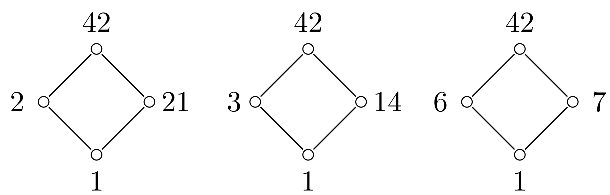
42 je kvadratno slobodan broj, pa prema zadatku 1.62, skup delitelja $B = \{1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42\}$ obrazuje Bulovu algebru.

Treba odrediti sve podskupove skupa B, koji su zatvoreni u odnosu na nzd i nzs, u odnosu na operaciju $42/n$, i koji sadrže brojeve 1 i 42. To su:

$A_1 = \{1, 42\}$; $A_2 = \{1, 2, 21, 42\}$; $A_3 = \{1, 3, 14, 42\}$;

$A_4 = \{1, 6, 7, 42\}$; $A_5 = B$.

Zaista, svaki skup koji sadrži 2, 3, ili 7, mora da sadrži komplemente (redom) 21, 14, 6, a svi sadrže 1 i 42 (na slici 1.37 skicirane su četvoroelementne podalgebre). □



Slika 1.37

Zadatak 1.72. *Ako je $X \subset Y$ $(X \neq \emptyset)$, da li je Bulova algebra $\mathcal{P}(X)$ podalgebra Bulove algebre $\mathcal{P}(Y)$?*

Rešenje.

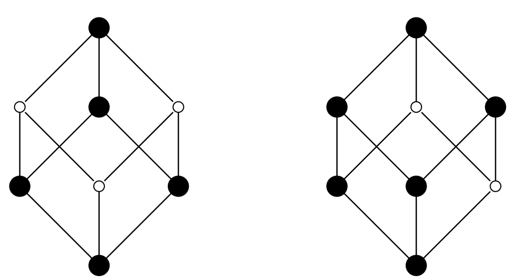
Nije. Nemaju isti jedinični elemenat, a ni unarna operacija (komplementiranje) nije ista. □

Zadatak 1.73. *Ako podskup Bulove algebre $\mathcal{B}$ sadrži konstante 0 i 1 i zatvoren je u odnosu na obe binarne operacije, da li je on uvek podalgebra iz $\mathcal{B}$?*

Rešenje.

Ne mora biti; analizirati primere sa slike 1.38, imajući u vidu komplementiranje.

□



Slika 1.38

Zadatak 1.74. *Neka su a i b elementi Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, {}', 0, 1)$ i neka je $a < b$. Dokazati da je $([a, b], \circ, \cup, {}^{-}, a, b)$ takođe Bulova algebra, gde je*

$$[a, b] = \{x \in B \mid a \leqslant x \leqslant b\} \quad \textit{(interval)}$$

i za x, y iz $[a, b]$, operacije su definisane na sledeći način:

$$x \circ y := x \wedge y; \quad x \cup y := x \vee y; \quad \bar{x} := (a \vee x') \wedge b.$$

Konstante (najmanji i najveći elemenat) su redom a i b.

Da li je ovo podalgebra iz $\mathcal{B}$?

Rešenje.

Da bismo pokazali da $[a, b]$ obrazuje Bulovu algebru, prvo proveravamo da li smo zaista dobili operacije na $[a, b]$.

Za x, y iz $[a, b]$, elementi $x \circ y$ i $x \cup y$ pripadaju $[a, b]$, s obzirom da su to infimum i supremum za x i y. Binarne operacije su dakle restrikcije odgovarajućih iz $\mathcal{B}$ pa su ispunjene aksiome b1 - b4.

Sada proveravamo da li je $^{-}$ operacija na $[a, b]$. Za $x \in [a, b]$,

$$a \wedge \bar{x} = a \wedge (a \vee x') \wedge b = a \wedge b = a$$

(prema zakonu apsorpcije i kako je $a \leqslant b$), pa je $a \leqslant \bar{x}$.

Pored toga,

$$\bar{x} = (a \vee x') \wedge b \leqslant b, \quad \text{tj.} \quad a \leqslant \bar{x} \leqslant b, \quad \text{odnosno} \quad \bar{x} \in [a, b].$$

Sada proveravamo da li važe aksiome Bulove algebre. Za aksiome b1-b4 smo već utvrdili da važe.

Dalje, za $x \in [a, b]$ važe aksiome b7 i b8 :

$$\begin{aligned} x \circ \bar{x} &= x \wedge (a \vee x') \wedge b = x \wedge (a \vee x') \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge x') = x \wedge a = a. \\ x \cup \bar{x} &= x \vee ((a \vee x') \wedge b) = x \vee (a \wedge b) \vee (x' \wedge b) \\ &= x \vee (x' \wedge b) = (x \wedge b) \vee (x' \wedge b) = (x \vee x') \wedge b \\ &= 1 \wedge b = b. \end{aligned}$$

Najzad, za $x \in [a, b]$

$x \cup a = x$ (aksioma b6), i $x \circ b = x$ (aksioma b5).

Interval dakle obrazuje Bulovu algebru.

Ako je $a \neq 0$ i $b \neq 1$ (tj. $[a, b] \neq B$), interval nije podalgebra iz $\mathcal{B}$, što je očito s obzirom na definiciju unarne operacije i konstanti. $\square$

Zadatak 1.75. *Neka je ρ proizvoljna simetrična relacija na skupu $A \neq \emptyset$. Za $X \subseteq A$ kažemo da je* ***zasićen*** *(s obzirom na ρ), ako*

(12) $$\text{iz} \quad x \in X \quad \text{i} \quad x \rho y \quad \text{sledi} \quad y \in X.$$

Dokazati da je skup $\mathcal{S}$ zasićenih podskupova iz A Bulova algebra u odnosu na skupovne operacije. Da li je to podalgebra iz $\mathcal{P}(A)$?

Rešenje.

Neka su X i Y iz $\mathcal{S}$. Tada važi: $x \in X \cap Y$ ako i samo ako $x \in X$ i $x \in Y$. Ako je pri tome $x \rho y$, onda je $y \in X$ i $y \in Y$ pa je $y \in X \cap Y$.

Slično je i za uniju. Za komplement važi: ako $x \in \bar{X}$ i $x\rho y$ onda $x \notin X$ (po definiciji komplementa). Ako se uzme kontrapozicija za (12) (uz zamenu x za y), dobija se

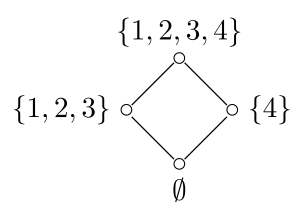
$$x \notin X \text{ povlači nije } y\rho x \text{ ili } y \notin X.$$

Budući da jeste $y\rho x$ (simetričnost za ρ), važi $y \notin X$, tj $y \in \bar{X}$. Dakle, $\bar{X} \in \mathcal{S}$.

$\emptyset \in \mathcal{S}$ jer za prazan skup (12) trivijalno važi.

Najzad, za svako $x \in A$ je očito $y \in A$, pa $A \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ jeste podalgebra iz $\mathcal{P}(A)$. □



Slika 1.39

Zadatak 1.76. *Odrediti jednu relaciju ρ uz pomoć koje se konstrukcijom iz prethodnog zadatka dobija Bulova algebra na slici 1.39, pri čemu je skup $A = \{1,2,3,4\}$.*

Rešenje.

Jedno rešenje je $\rho = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$.

Napomena. ρ „lepi“ parove elemenata tj. pravi podalgebru u kojoj su neki parovi uvek zajedno u podskupu. □

Zadatak 1.77. *Dokazati da je Bulova algebra klasa iskaznih formula $\mathcal{S}$ (zad. 1.64)* ***bezatomska*** *(tj. da ne sadrži nijedan atom).*

Rešenje.

Pretpostavi se da je $[A]_\sim$ atom u $\mathcal{S}$. Tada je $[A]_\sim \neq 0$, pa A nije kontradikcija (nema konstantno istinitosnu vrednost $\perp$ za sve vrednosti promenljivih koje u njoj učestvuju). Tada ni iskazna formula $x \wedge A$ nije kontradikcija, ako je x promenljiva koja se ne pojavljuje u formuli A. Znači, $0 < [x \wedge A]_\sim$. Kako formula $x \wedge A \Rightarrow A$ jeste tautologija, a $x \wedge A \Leftrightarrow A$ to nije, sledi

$$0 < [x \wedge A]_\sim < [A]_\sim,$$

s obzirom na poredak u ovoj Bulovoj algebri (zadatak 1.69 e)), pa $[A]_\sim$ ne može biti atom. □

Zadatak 1.78. *Neprazan podskup B_1 Bulove algebre $\mathcal{B}$ je njena podalgebra ako je zatvoren u odnosu na:*

T1 obe binarne operacije;

T2 unarnu operaciju, i binarnu operaciju $g(x, y) = x \vee y'$.

Od ta dva tvrđenja jedno je tačno, a drugo ne. Dokazati ono koje je tačno.

Rešenje.

T1 nije tačno (videti zadatak 1.73), a T2 jeste. Ako $x, y \in B_1$, tada i $y' \in B_1$, zato što je B_1 zatvoreno u odnosu na unarnu operaciju. Dalje, iz $x, y' \in B_1$ i zatvorenosti u odnosu na operaciju g sledi $g(x, y') \in B_1$, a $g(x, y') = x \vee (y')' = x \vee y$. Dakle, iz $x, y \in B_1$ sledi i $x \vee y \in B_1$, pa je B_1 zatvoreno i u odnosu na jednu binarnu operaciju. Prema tvrđenju 1.71, B_1 je podalgebra. □

Zadatak 1.79. *Dokazati da svaka konačna Bulova algebra sa k atoma ima tačno $\Pi(k)$ različitih podalgebri, gde je $\Pi(k)$ broj svih particija na skupu njenih atoma.*

Rešenje.

Svaka konačna Bulova algebra je izomorfna sa nekom skupovnom algebrom, što sledi iz teoreme 1.77, a izomorfne Bulove algebre imaju isti broj podalgebri. Dakle, posmatra se Bulova algebra $\mathcal{P}(A)$, $|A| = k$, kao predstavnik onih sa 2^k elemenata (tj. konačnih Bulovih algebri sa k atoma). Atomi svake pojedinačne podalgebre iz $\mathcal{P}(A)$ obrazuju particiju skupa A. (Zaista, njihova unija je A, a svaka dva su disjunktna). Svaka podalgebra jednoznačno je određena svojim atomima, što se jednostavno proverava. Budući da svaka particija π atoma određuje podalgebru obrazovanu kao partitivni skup nad π, podalgebri ima tačno koliko i particija.

Napomena. Broj particija $\Pi(n)$ skupa od n elemenata zadovoljava rekurzivnu formulu:

$$\Pi(n+1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Pi(i).$$

□

Zadatak 1.80. *Neka je f bijekcija Bulove algebre $\mathcal{B}$ na Bulovu algebru $\mathcal{B}_1$. Da bi f bio izomorfizam potrebno je i dovoljno da za sve x, y iz B važi:*

$$x \leqslant y \quad \text{ako i samo ako} \quad f(x) \leqslant f(y). \tag{13}$$

Dokazati.

Rešenje.

Ovde se dokaz izvodi u celini, iako bi mogao da se skrati uz korišćenje sličnog tvrđenja za mreže (teorema 1.45 na str. 36). U dokazu se operacije na obe Bulove algebre označavaju na isti način.

Pretpostavimo da važi uslov (13).

Iz $x \wedge y \leqslant x$ i $x \wedge y \leqslant y$, prema (13) je

$$f(x \wedge y) \leqslant f(x) \;\text{ i }\; ; f(x \wedge y) \leqslant f(y).$$

Ako $b \in B_1$ tako da je $b \leqslant f(x)$ i $b \leqslant f(y)$, onda je za $a = f^{-1}(b)$ (prema (13)) $a \leqslant x$ i $a \leqslant y$, odnosno $a \leqslant x \wedge y$. Sledi

$$\begin{aligned} &b = f(a) \leqslant f(x \wedge y), \quad \text{pa je} \\ &f(x \wedge y) = \inf(f(x), f(y)) \quad \text{tj.} \\ &f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y). \end{aligned}$$

Slično se pokazuje i da je

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y).$$

Kako je $0 \leqslant x$ za sve $x \in B$, očito je $f(0) \leqslant f(x)$, tj.

$$f(0) = 0 \ \text{ i slično } f(1) = 1.$$

Najzad, $x \wedge x' = 0$ i $x \vee x' = 1$ povlači

$$f(x) \wedge f(x') = 0 \quad \text{odnosno} \quad f(x) \vee f(x') = 1 \quad \text{tj. } f(x') = (f(x))'.$$

Obratno, neka je f izomorfizam i neka je za x, y iz B $x \leqslant y$. Tada je $x \wedge y = x$, odnosno

$$f(x \wedge y) = f(x), \ f(x) \wedge f(y) = f(x), \ \text{tj.} \ f(x) \leqslant f(y).$$

Ako je $f(x) \leqslant f(y)$, onda je

$$f(x) \wedge f(y) = f(x), \quad \text{odnosno} \quad f(x \wedge y) = f(x).$$

f je bijekcija i otuda

$$x \wedge y = x, \quad \text{tj.} \quad x \leqslant y. \qquad \square$$

Zadatak 1.81. *Neka su* $\mathcal{A}_1 = (A_1, \wedge_1, \vee_1, {}'_1, 0_1, 1_1)$ *i* $\mathcal{A}_2 = (A_2, \wedge_2, \vee_2, {}'_2, 0_2, 1_2)$ *Bulove algebre i* f *funkcija iz* A_1 *u* A_2.

f je homomorfizam ako i samo ako za sve x, y iz A_1 važe jednakosti:

$$f(x \wedge_1 y) = f(x) \wedge_2 f(y) \tag{14}$$

$$f(x^{'_1}) = (f(x))^{'_2}. \tag{15}$$

(Slično tvrđenje važi i ako se umesto prve stavi druga binarna operacija, i dokaz je dualan.)

Rešenje.

Jasno je da homomorfizam ima svojstva iskazana formulama (14) i (15).

Obratno, pretpostavimo da važe formule (14) i (15). Tada je:

$$\begin{aligned} f(x \vee_1 y) &= f((x^{'_1} \wedge_1 y^{'_1})^{'_1}) = (f(x^{'_1} \wedge_1 y^{'_1}))^{'_2} \\ &= (f(x^{'_1}) \wedge_2 f(y^{'_1}))^{'_2} = ((f(x))^{'_2} \wedge_2 (f(y))^{'_2})^{'_2} \\ &= f(x) \vee_2 f(y). \\ f(0_1) &= f(x \wedge_1 x^{'_1}) = f(x) \wedge_2 (f(x))^{'_2} = 0_2. \\ f(1_1) &= f(0_1^{'_1}) = (f(0_1))^{'_2} = 0_2^{'_2} = 1_2. \end{aligned}$$

Funkcija f je dakle homomorfizam. $\square$

Zadatak 1.82. *Neka je* $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Dokazati da je i* $\mathcal{B}_d = (B, \vee, \wedge, ', 1, 0)$ *Bulova algebra (dualna Bulova algebra algebre* $\mathcal{B}$*), kao i da su one izomorfne.*

Rešenje.

Ovo je posledica principa dualnosti. Dokazuje se jednostavnom zamenom svake aksiome odgovarajućim parom (1 sa 2 i obratno, 3 sa 4 i obratno, itd.).

Izomorfizam je preslikavanje $f : B \longrightarrow B$, takvo da je $f(x) = x'$.

Zaista, f je $1-1$ i „*na*“, a zbog De Morganovih zakona i svojstva unarne operacije $'$, ispunjeno je sledeće:

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= (x \wedge y)' = x' \vee y' = f(x) \vee f(y), \\ f(x') &= (x')' = (f(x))'. \end{aligned}$$

Ovo je prema zadatku 1.81 dovoljno da f bude izomorfizam. □

Zadatak 1.83. *Pokazati da izomorfizam kod Bulovih algebri preslikava atome u atome.*

Rešenje.

Neka je $f : B \longrightarrow B_1$ izomorfizam iz $\mathcal{B}$ na $\mathcal{B}_1$ i neka je a atom u $\mathcal{B}$. Neka je dalje $y \in B_1$ i $y \leqslant f(a)$. Tada je $f^{-1}(y) \leqslant a$ (videti zadatak 1.80) i zato $f^{-1}(y) = 0$ ili $f^{-1}(y) = a$. Očito, $y = 0$ (u $\mathcal{B}_1$) ili $y = f(a)$ pa je $f(a)$ atom u $\mathcal{B}_1$. □

Zadatak 1.84. *Kolekcija svih konačnih i* ***dokonačnih*** *(tj. onih čiji je komplement konačan) podskupova skupa prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$*, je u odnosu na uobičajene skupovne operacije Bulova algebra. Dokazati.*

Da li je takva Bulova algebra izomorfna nekoj skupovnoj, koja je oblika $\mathcal{P}(X)$*?*

Rešenje.

Proverava se da je kolekcija svih konačnih i dokonačnih podskupova zatvorena u odnosu na skupovne operacije. Na primer, ako su A i B dokonačni skupovi, tada je njihov presek dokonačan jer je $(A \cap B)' = A' \cup B'$; A' i B' su konačni, pa je i njihova unija konačan skup. Komplement konačnog skupa je dokonačan i obratno. Dakle, dobija se podalgebra Bulove algebre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

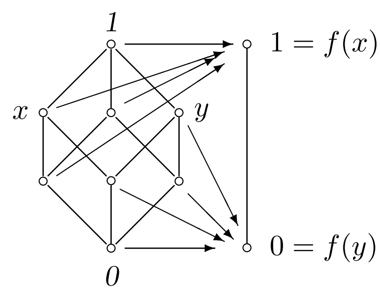
Uputstvo za drugi deo. Ova Bulova algebra nije izomorfna partitivnom skupu $\mathcal{P}(X)$ ni za jedan skup X. Treba samo uočiti da je kardinalni broj spomenute kolekcije podskupova isti onaj koji ima i $\mathbb{N}$, tj. ta kolekcija je prebrojiva, što nije karakteristika nijednog partitivnog skupa (ako je skup konačan, takav je i partitivni skup, a ako je skup beskonačan, njegov partitivni skup je neprebrojiv). □

Zadatak 1.85. *Ako je f homomorfizam iz Bulove algebre $\mathcal{B}$ u Bulovu algebru $\mathcal{B}'$, onda važi implikacija:*

(16) $$\text{ako je} \quad x \leqslant y \quad \text{onda je i} \quad f(x) \leqslant f(y),$$

tj., homomorfizam Bulovih algebri je izotona funkcija (str. 15). Dokazati.

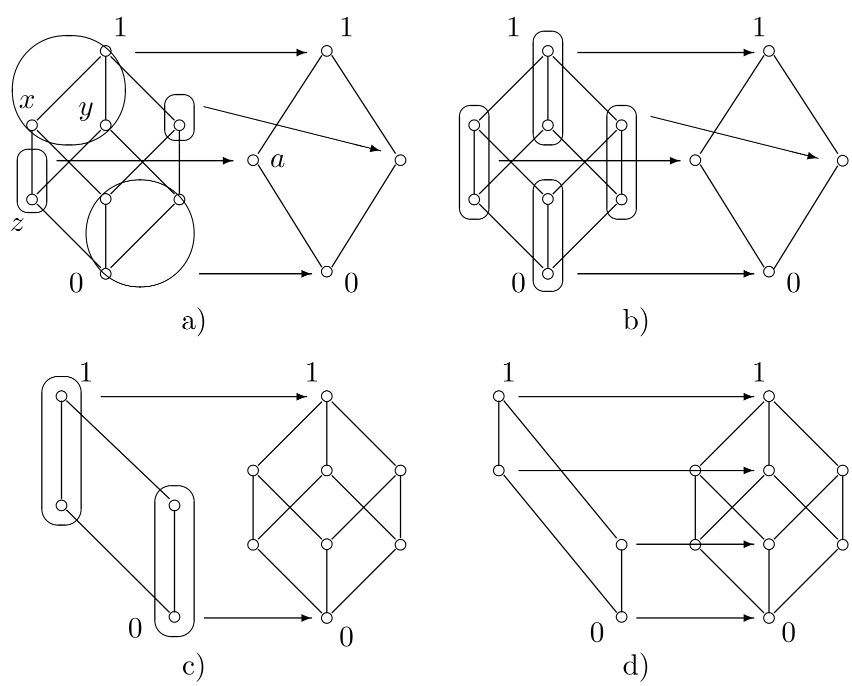
Da li u uslovu (16) umesto implikacije može da stoji ekvivalencija (kao u zadatku 1.80)?



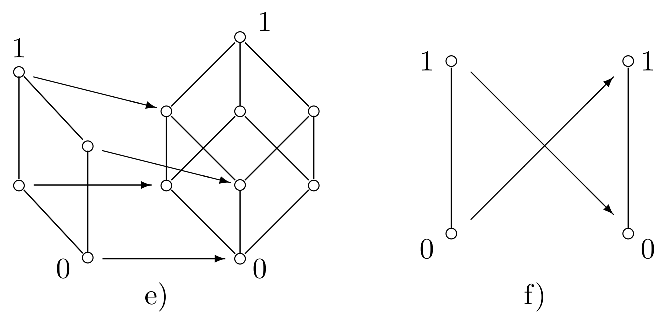
***Slika** 1.40*

Rešenje.

Rešava se slično kao zadatak 1.80. Međutim, iz činjenice da je f homomorfizam ne sledi i obrnuta implikacija u formuli (16). Kontra-primer dat je na slici 1.40; zaista, $f(y) < f(x)$, ali x i y su neuporedivi. $\square$



Slika 1.41



Slika 1.42

Zadatak 1.86. *Koja su od preslikavanja na slickama 1.41 i 1.42 homomorfizmi Bulovih algebri? Obrazložiti!*

Rešenje.

Homomorfizmi su pod b), c) i d). Preslikavanje pod a) nije homomorfizam zato što za označene elemente x i y važi

$$f(x \wedge y) = f(z) = a \neq 1 = f(x) \wedge f(y).$$

Preslikavanja pod e) i f) nisu Bulovi homomorfizmi, jer $f(1) \neq 1$ u oba slučaja. □

Zadatak 1.87. *Ako je h homomorfizam Bulove algebre $\mathcal{B}$ u Bulovu algebru $\mathcal{B}'$ onda je*

a) *$h(B)$ podalgebra iz $\mathcal{B}'$, gde je*[12]

$$h(B) = \{x \in B' \mid x = h(a), \text{ za neko } a \in B\};$$

b) *$h^{-1}(C)$ je podalgebra iz $\mathcal{B}$, gde je $\mathcal{C}$ podalgebra iz $\mathcal{B}'$, a*

$$h^{-1}(C) = \{x \in B \mid h(x) \in C\}.$$

Rešenje.

Za operacije na algebri i njenoj podalgebri ovde koristimo iste oznake.

a) Neka $x, y \in h(B)$, tada je $x = h(a)$ i $y = h(b)$ za neke a, b iz B. Odatle,

$$x \wedge y = h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) \in h(B).$$

Slično,

$$x' = (h(a))' = h(a') \in h(B).$$

$h(\mathcal{B})$ je dakle podalgebra iz $\mathcal{B}'$.

b) Neka $a, b \in h^{-1}(C)$. Tada je

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b) \in C,$$

jer je $\mathcal{C}$ podalgebra iz $\mathcal{B}'$. Otuda $a \wedge b \in h^{-1}(C)$.

---

[12]Kao što je uobičajeno, sa B je označen nosač (univerzum), skup na kome je definisana algebra $\mathcal{B}$; slično, C je nosač algebre $\mathcal{C}$ itd.

Slično,

$$h(a') = (h(a))' \in C, \quad \text{pa i} \quad a' \in h^{-1}(C). \qquad \square$$

Zadatak 1.88. *Ako su* $\mathcal{B}_1 = (B_1, \wedge_1, \vee_1, {}', 0_1, 1_1)$ *i* $\mathcal{B}_2 = (B_2, \wedge_2, \vee_2, {}", 0_2, 1_2)$ *Bulove algebre, dokazati da je* $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = (B_1 \times B_2, \wedge, \vee, {}^*, 0, 1)$ *Bulova algebra, gde su nove operacije definisane preko operacija na* $\mathcal{B}_1$ *i* $\mathcal{B}_2$*, po koordinatama:*

$$\begin{aligned} (x, y) \wedge (z, t) &= (x \wedge_1 z, y \wedge_2 t) \\ (x, y) \vee (z, t) &= (x \vee_1 z, y \vee_2 t) \end{aligned}$$

i to su binarne operacije, a

$$(x, y)^* = (x', y"), \quad 0 = (0_1, 0_2), \quad 1 = (1_1, 1_2)$$

su redom unarna operacija i konstante.

Dobijena struktura je ***direktan proizvod Bulovih algebri****.*

Rešenje.

Očigledno je da se ovom konstrukcijom dobija algebarska struktura sa dve binarne operacije, jednom unarnom i sa dve konstante. Potrebno je još proveriti aksiome za Bulove algebre.

Primer provere da važi aksioma b5:

$$(x, y) \vee 1 = (x, y) \vee (1_1, 1_2) = (x \vee_1 1_1, y \vee_2 1_2) = (x, y),$$

na osnovu aksiome b5 u Bulovim algebrama $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$.

Slično se proveravaju ostale aksiome. $\square$

Analogno konstrukciji iz prethodnog zadatka, može se definisati **direktan proizvod** n Bulovih algebri, za $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 1.89. *Dokazati da se u direktnom proizvodu* $\Pi_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ *Bulovih algebri* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ *može definisati poredak na sledeći način:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ ako i samo ako je } \quad x_i \leqslant y_i$$

za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ *(gde je ova poslednja relacija* $\leqslant$ *uobičajeni poredak u* $\mathcal{A}_i$*).*

Rešenje.

Direktan proizvod n Bulovih algebri je isto Bulova algebra (dokaz je analogan onom za dve algebre u prethodnom zadatku). U nastavku se određuje poredak na njoj.

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant (y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
&\longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&\longleftrightarrow (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&\longleftrightarrow x_1 \wedge y_1 = x_1, \;\; x_2 \wedge y_2 = x_2, \ldots, x_n \wedge y_n = x_n\\
&\longleftrightarrow x_1 \leqslant y_1, \;\; x_2 \leqslant y_2, \ldots, x_n \leqslant y_n.
\end{aligned}$$

□

ZADATAK 1.90. *Neka je $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ proizvoljna familija Bulovih algebri. Pod* ***direktnim proizvodom*** *$\mathcal{A} = \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ podrazumeva se skup svih preslikavanja*

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i,$$

tako da je za svako $i \in I, f(i) \in A_i$. Operacije na $\mathcal{A}$ definišu se po koordinatama: za svako $i \in I$

$$\begin{aligned}
(f \wedge g)(i) &:= f(i) \wedge g(i);\\
(f \vee g)(i) &:= f(i) \vee g(i);\\
f'(i) &:= (f(i))';\\
\mathcal{O}(i) &:= 0_i;\\
\mathcal{J}(i) &:= 1_i;
\end{aligned}$$

0_i i 1_i su konstante u $\mathcal{A}_i$ ($\mathcal{O}$ i $\mathcal{J}$ su konstante u $\mathcal{A}$, a unarna i binarne operacije su isto označene).

Dokazati da je $\mathcal{A}$ u odnosu na ovako definisane operacije jedna Bulova algebra.

Rešenje.

Proverava se da važe aksiome b1 - b9.

Neka $f, g \in A$. Tada

$$(f \wedge g)(i) = f(i) \wedge g(i) = g(i) \wedge f(i) = (g \wedge f)(i),$$

jer važi komutativnost u Bulovoj algebri $\mathcal{A}_i$, a $f(i)$ i $g(i)$ su iz $\mathcal{A}_i$, pa u $\mathcal{A}$ važi aksioma b1.

Na sličan način proveravaju se i ostale aksiome. □

ZADATAK 1.91. *Dokazati da je presek proizvoljne neprazne familije podalgebri date Bulove algebra takođe njena podalgebra.*

Rešenje. Neka je $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ proizvoljna neprazna familija podalgebri neke Bulove algebre $\mathcal{B}$. Neka je $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ presek univerzuma (nosača) tih algebri. Pokazujemo da je presek zatvoren za operacije iz Bulove algebre $\mathcal{B}$. Neka $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Tada za svako $i \in I$ važi $x, y \in A_i$. Dakle, $x \wedge y \in A_i$ i $x \vee y \in A_i$, za svako $i \in I$, zato što je A_i podalgebra. Sledi $x \wedge y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ i $x \vee y \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Slično se pokazuje i da komplement svakog elementa pripada preseku, jer pripada svakoj pojedinačnoj podalgebri. To važi i za konstante 0 i 1. Dakle, presek je zatvoren u odnosu na sve operacije, pa je on i podalgebra od $\mathcal{B}$. $\square$

Zadatak 1.92. *Pokazati da je presek svih podalgebri Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ koje sadrže kao podskup neki skup $A \subseteq B$, podalgebra iz $\mathcal{B}$.*

Za takvu podalgebru kaže se da je ***generisana*** *sa A, i ona se označava sa $[A]$. Elementi skupa A, ukoliko je ovaj neprazan, su* ***generatori*** *Bulove (pod)algebre $[A]$.*

Rešenje.

U prethodnom zadatku je pokazano da presek proizvoljne neprazne familije podalgebri Bulovih algebri i sam čini podalgebru. Dakle, ovo je specijalan slučaj tog zadatka (videti i zadatak 1.94 u nastavku). $\square$

Zadatak 1.93. *Pokazati da se Bulova algebra $\mathcal{P}(\{0,1\}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, može generisati sa n elemenata. (tj. pomoću n-člane familije skupova).*

Rešenje.

Posmatrajmo skup $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{P}(\{0,1\}^n)$, gde je za $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$A_i = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_k \in \{0,1\}\}$$

(A_i je skup svih n-torki kojima je i-ta koordinata 1).

Za proizvoljnu n-torku $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$ je

$$\alpha = {A_1}^{\alpha_1} \cap \cdots \cap {A_n}^{\alpha_n}, \tag{17}$$

gde je za $i \in \{1, \ldots, n\}$

$${A_i}^{\alpha_i} = \begin{cases} A_i, & \text{za } \alpha_i = 1 \\ \bar{A}_i, & \text{za } \alpha_i = 0 \end{cases}$$

($\bar{A}_i$ je skupovni komplement za A_i u $\mathcal{P}(\{0,1\}^n)$).

Zaista, svi elementi skupa ${A_1}^{\alpha_1}$ imaju prvu koordinatu α_1, svi elementi skupa ${A_2}^{\alpha_2}$ imaju drugu koordinatu α_2, ... i tako dalje, ${A_n}^{\alpha_n}$ ima n-tu koordinatu α_n.

Dakle njihov presek je skup koji se sastoji od elementa $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Svaki elemenat iz $\mathcal{P}(\{0,1\}^n)$ je unija uređenih n-torki, tj. može se (pomoću (17)) generisati elementima skupa A:

Ako je $C = \{\beta^1, \ldots, \beta^m\} \subseteq \{0,1\}^n$, pri čemu je

$$\beta^1 = (\beta_1^1, \ldots, \beta_n^1), \ldots, \beta^m = (\beta_1^m, \ldots, \beta_n^m),$$

onda je očito

$$C = ({A_1}^{\beta_1^1} \cap \cdots \cap {A_n}^{\beta_n^1}) \cup \cdots \cup ({A_1}^{\beta_1^m} \cap \cdots \cap {A_n}^{\beta_n^m}).$$

Ilustracija rešenja za $n = 3$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}; \\ A_2 &= \{(0,1,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}; \\ A_3 &= \{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}. \end{aligned}$$

Ako je na pr. $\alpha = (1,0,1)$, onda je

$$\alpha = {A_1}^{\alpha_1} \cap {A_2}^{\alpha_2} \cap {A_3}^{\alpha_3} = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3,$$

zbog
${A_1}^{\alpha_1} = A_1$ (jer je $\alpha_1 = 1$),
${A_2}^{\alpha_2} = \bar{A}_2 = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ (jer je $\alpha_2 = 0$),
${A_3}^{\alpha_3} = A_3$ (jer je $\alpha_3 = 1$).
Slično, $\beta = (1,1,1) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.
Sada je na pr. $\{\alpha,\beta\} = \{(1,0,1),(1,1,1)\} \in \mathcal{P}(\{0,1\}^3)$,
$\{\alpha,\beta\} = \{\alpha\} \cup \{\beta\} = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_3$. $\square$

Zadatak 1.94. *Koju podalgebru Bulove algebre generiše prazan skup $\emptyset$?*

Rešenje.
Presek svih podalgebri koje sadrže $\emptyset$ kao podskup je dvoelementna Bulova algebra $\mathcal{B}_2$, koju dakle generiše prazan skup. $\square$

Zadatak 1.95. *Dokazati da se Bulova algebra sa 4 elementa može generisati jednočlanim skupom.*

Rešenje.
Neka je x jedan od dva atoma Bulove algebre sa 4 elementa. Najmanja podalgebra koja sadrži $\{x\}$ mora sadržati i x', kao i 0 i 1. Dakle, Bulova algebra sa 4 elementa je generisana tim jednočlanim skupom. $\square$

Zadatak 1.96. *Dokazati da u potpunoj Bulovoj algebri $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ važe beskonačni De Morganovi zakoni:*
za svako $A \subseteq B$,

$$\left(\bigvee_{x\in A} x\right)' = \bigwedge_{x\in A} x'; \tag{18}$$

$$\left(\bigwedge_{x\in A} x\right)' = \bigvee_{x\in A} x'. \tag{19}$$

Rešenje.
Potpunost Bulove algebre obezbeđuje postojanje proizvoljnih infimuma i supremuma.

Iz $x \leqslant \bigvee_{x\in A} x$ za svako $x \in A$, kao i na osnovu zadatka 1.68, dobija se $\left(\bigvee_{x\in A} x\right)' \leqslant x'$ za svako $x \in A$. Odatle je

$$\left(\bigvee_{x\in A} x\right)' \leqslant \bigwedge_{x\in A} x'.$$

Sa druge strane je $\bigwedge_{x\in A} x' \leqslant x'$ za svako $x \in A$. Odavde, na osnovu zadatka 1.68, $x \leqslant \left(\bigwedge_{x\in A} x'\right)'$ za svako $x \in A$ i zatim $\bigvee_{x\in A} x \leqslant \left(\bigwedge_{x\in A} x'\right)'$. Ponovo prema zadatku 1.68 dobija se

$$\left(\bigvee_{x\in A} x\right)' \geqslant \bigwedge_{x\in A} x'.$$

Tako je dokazana jednakost (18), a drugi De Morganov zakon dokazuje se dualnim postupkom. □

Zadatak 1.97. *Dokazati da u potpunoj Bulovoj algebri* $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ *važe zakoni:*

za svako $A \subseteq B$,

$$a \vee \bigvee_{x\in A} x = \bigvee_{x\in A} (a \vee x); \tag{20}$$

$$a \wedge \bigwedge_{x\in A} x = \bigwedge_{x\in A} (a \wedge x). \tag{21}$$

Rešenje.

Izrazi navedeni u ovim jednakostima imaju smisla jer se po pretpostavci oni odnose na potpunu Bulovu algebru.

Da bi se dokazala jednakost (20), pokazuje se da je $a \vee \bigvee_{x\in A} x$ supremum za skup $\{a \vee x \mid x \in A\}$. Očigledno, to je gornje ograničenje ovog skupa, jer je veće od svakog od elemenata $a \vee x$. Pretpostavimo da je b drugo gornje ograničenje, tj. da je $a \vee x \leqslant b$ za svako x. Odatle $a \leqslant b$ i $x \leqslant b$ za svako $x \in A$ pa zato imamo

$$\bigvee_{x\in A} x \leqslant b.$$

Dalje je

$$a \vee \bigvee_{x\in A} x \leqslant b,$$

pa je elemenat $a \vee \bigvee_{x\in A} x$ najmanje donje ograničenje, dakle supremum za skup $\{a \vee x \mid x \in A\}$, što je i trebalo dokazati.

Zakon (21) se dokazuje dualnim postupkom. □

Zadatak 1.98. *Dokazati da u potpunoj Bulovoj algebri* $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ *važe beskonačni distributivni zakoni:*

za svako $A \subseteq B$,

$$a \wedge \bigvee_{x \in A} x = \bigvee_{x \in A} (a \wedge x); \tag{22}$$

$$a \vee \bigwedge_{x \in A} x = \bigwedge_{x \in A} (a \vee x). \tag{23}$$

Rešenje.

Kao i u prethodna dva zadatka, potpunost Bulove algebre obezbeđuje postojanje traženih infimuma i supremuma.

Dokaz zakona (22):

Iz $a \wedge x \leqslant a \wedge \bigvee_{x \in A} x$, za sve $x \in A$, sledi

$$a \wedge \bigvee_{x \in A} x \geqslant \bigvee_{x \in A} (a \wedge x).$$

Sa druge strane, primetimo da je

$$\bigvee_{x \in A} x \leqslant \bigvee_{x \in A} (a' \vee x) = \bigvee_{x \in A} (1 \wedge (a' \vee x)) =$$

$$\bigvee_{x \in A} ((a' \vee a) \wedge (a' \vee x)) = \bigvee_{x \in A} (a' \vee (a \wedge x)) =$$

$$a' \vee \bigvee_{x \in A} (a \wedge x)$$

(poslednja jednakost sledi na osnovu zadatka 1.97). Prema zadatku 1.56, iz

$$\bigvee_{x \in A} x \leqslant a' \vee \bigvee_{x \in A} (a \wedge x)$$

dobijamo

$$a \wedge \bigvee_{x \in A} x \leqslant \bigvee_{x \in A} (a \wedge x),$$

pa važi jednakost.

Zakon (23) dokazuje se dualnim postupkom. □

Zadatak 1.99. *Dokazati da je svaka potpuna i atomarna Bulova algebra izomorfna sa partitivnim skupom kolekcije njenih atoma.*

Rešenje. Neka je A skup atoma Bulove algebre B. Traženi izmorfizam je funkcija f iz B u $\mathcal{P}(A)$ definisana (isto kao u dokazu analogne teoreme za konačne Bulove algebre - teorema 1.77 na str. 69) na sledeći način: za $x \in B$

$$f(x) := \{a \in A \mid a \leqslant x\}.$$

Ovo funkcija je dobro definisana, pošto je Bulova algebra atomarna, pa za svako $x \neq 0$ postoji atom a takav da je $a \leqslant x$.

Treba dokazati da je f izomorfizam, tj. (prema tvrđenju 1.74) da je to bijekcija, koja je saglasna sa unarnom operacijom ($'$) i binarnom ($\wedge$).

Dokaz da je funkcija f injekcija, kao i da je saglasna sa unarnom i binarnom operacijom je identičan dokazu teoreme 1.77.

Jedina razlika je u dokazu da je f sirjekcija, koji se daje u nastavku.

Neka je $X \in \mathcal{P}(A)$ i $b = \bigvee_{x \in X} x$. Dokazujemo da je $f(b) = X$. Zaista, za sve $x \in X$ je $x \leqslant b$, pa je $X \subseteq f(b)$. Sa druge strane, ako je $a \in f(b)$, onda je $a \leqslant b$, tj. $a \leqslant \bigvee_{x \in X} x$. Zato je

$$a = a \wedge b = a \wedge \bigvee_{x \in X} x = \bigvee_{x \in X} (a \wedge x),$$

(beskonačna distributivnost u potpunim Bulovom algebrama - zadatak 1.98). Sledi da je za neko $x \in X$ ispunjeno $a = x$, jer bi u protivnom bilo $a = 0$, s obzirom da su i svi elementi $x \in X$ atomi. Sledi $f(b) \subseteq X$, pa najzad važi $f(b) = X$. □

Zadatak 1.100. (***Stonova teorema reprezentacije za Bulove algebre***) *Dokazati da je svaka Bulova algebra izomorfna sa podalgebrom Bulove algebre partitivnog skupa.*

Rešenje. U zadatku 1.52 (str. 59) je pokazano da je svaka distributivna mreža izomorfna podmreži partitivnog skupa. Taj izomorfizam je definisan kao potapanje f iz distributivne mreže u $\mathcal{P}(A)$, gde je A skup prostih ideala te mreže. Pošto je Bulova algebra i sama distributivna mreža može se iskoristiti isto preslikavanje kao u zadatku 1.52:

$$f(x) = \{P \in A \mid x \notin P\}.$$

Ono je injektivno i saglasno sa binarnim operacijama. Još je potrebno dokazati samo da je f saglasno sa komplementiranjem, pa se, prema zadatku 1.81, dobija homomorfizam Bulovih algebri.

$$f(x') = \{P \in A \mid x' \notin P\} = \{P \in A \mid x \in P\} = \overline{\{P \in A \mid x \notin P\}} = \overline{f(x)}.$$

f je dakle injektivni homomorfizam, tj. potapanje date Bulove algebre u partitivni skup kolekcije svih njenih prostih ideala. □

Zadatak 1.101. ***Filter*** *i* ***ideal*** *u Bulovoj algebri su filter i ideal u odgovarajućoj Bulovoj mreži (videti stranu 35). Ako je F filter u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$, onda je $I_F = \{x \in B \mid x' \in F\}$ ideal (dualni za filter F) i obratno, za svaki ideal I u $\mathcal{B}$, $F_I = \{x' \in B \mid x \in I\}$ je filter (dualan idealu I). Dokazati.*

Rešenje. U dokazu se koristi tvrđenje

$$x \leqslant y \quad \text{ako i samo ako} \quad y' \leqslant x',$$

dokazano u zadatku 1.68.

Neka je $x \in I_F$, i po definiciji $x = z'$ za neko $z \in F$. Važi i $x' = z$. Neka je elemenat y takav da $y \leqslant x$. Iz pomenutog tvrđenja sledi $z = x' \leqslant y'$, pa po uslovu da je F filter, sledi $y' \in F$. Dakle, $y \in I_F$.

Dalje, neka $x, y \in I_F$. Tada je $x = z'$ i $y = t'$ za elemente $z, t \in F$. Pošto je F filter sledi $z \wedge t \in F$, pa i $(z \wedge t)' = z' \vee t' \in I_F$, što je trebalo pokazati.

Drugi deo zadatka se dokazuje dualno. □

Zadatak 1.102. *Neka je b proizvoljni ne-nula elemenat Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$. Dokazati:*

a) $\downarrow b := \{x \in B \mid x \leqslant b\}$ *je ideal u $\mathcal{B}$ (glavni ideal generisan sa b);*

b) $\mathcal{A} = (\downarrow b, \wedge, \vee, \ ^*, 0, b)$ *je Bulova algebra, gde je za svako $a \in \downarrow b$, $a^* := b \wedge a'$.*

c) *Preslikavanje $x \mapsto x \wedge b$ je homomorfizam iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{A}$.*

Rešenje.

Delovi pod **a)** i **b)** se dokazuju direktno po definiciji ideala odnosno Bulove algebre.

c) f jeste funkcija, ko-domen joj je po konstrukciji $\downarrow b$ (za svako $x \in B$, $x \wedge b \in \downarrow b$). Dalje je

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= (x \wedge y) \wedge b = (x \wedge b) \wedge (y \wedge b) = f(x) \wedge f(y) \\ f(x') &= x' \wedge b = (x' \wedge b) \vee 0 = (x' \wedge b) \vee (b' \wedge b) = (x' \vee b') \wedge b \\ &= (x \wedge b)' \wedge b = b \wedge (f(x))' = (f(x))^*. \end{aligned}$$

Funkcija f je dakle saglasna sa operacijama $\wedge$ i $'$, pa je prema zadatku 1.81 to homomorfizam. □

Zadatak 1.103. *Ako je F filter, a I njemu dualni ideal u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ (videti zadatak 1.101), onda je $F \cup I$ (skupovna unija) u odnosu na restrikcije operacija iz $\mathcal{B}$, njena podalgebra. Dokazati.*

Rešenje.

Ako su x i y iz $F \cup I$, onda je

$$x, y \in F \quad \text{ili} \quad x, y \in I \quad \text{ili} \quad x \in F,\ y \in I.$$

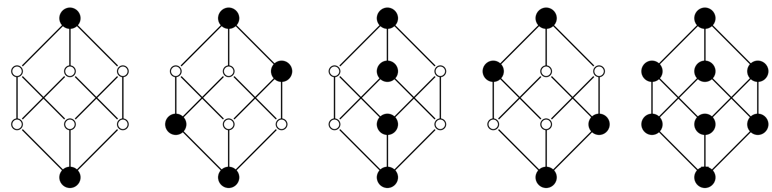
Filtri i ideali su neprazni podskupovi iz B, pa ni unija $F \cup I$ nije prazan skup. Budući da je $x \wedge y \leqslant x$ i $x \wedge y \leqslant y$, kao i $x \vee y \geqslant x$ i $x \vee y \geqslant y$, u svakom od navedenih slučajeva primena binarne operacije ne izvodi iz unije (treba samo razmotriti definicije filtra, odnosno ideala). Za $x \in F \cup I$ je $x \in F$ ili $x \in I$, pa po definiciji dualnog filtra (ideala) $x' \in I$ ili $x' \in F$. 0 je uvek u I, a 1 u F. □

Zadatak 1.104. ***Ultrafilter** u Bulovoj algebri je filter različit od same Bulove algebre koji nije sadržan ni u jednom drugom pravom filtru, a **maksimalni ideal** je pojam dualan ultrafiltru (ideal i filter Bulove algebre su definisani u zadatku 1.101).*

Odrediti sve podalgebre, filtre, ideale, ultrafiltre, maksimalne ideale u Bulovoj algebri sa 8 elemenata.

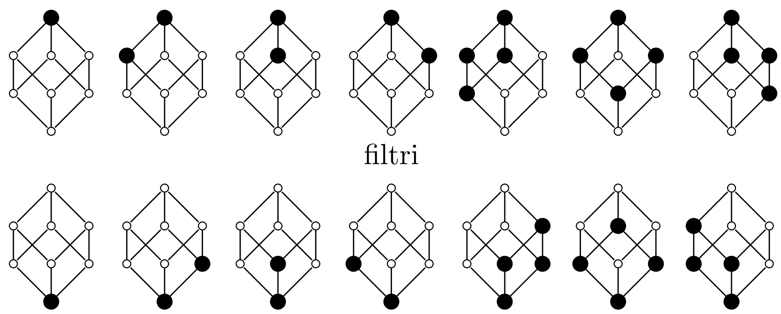
Rešenje.

Podalgebre su prikazane dijagramima na slici 1.43.



Slika 1.43

Na slici 1.44 predstavljeni su filtri i ideali ove Bulove algebre (tu treba ubrojati i celu Bulovu algebru, koja je isto jedan filter, odnosno ideal). Ultrafiltri, odnosno maksimalni ideali prikazani su, redom, kao poslednja tri u svakoj vrsti.



Slika 1.44 □

Zadatak 1.105. *Bulova algebra $\mathcal{B}$ je* ***slobodna*** *ako postoji skup A koji je generiše i ima osobinu da se svaka funkcija iz A u proizvoljnu Bulovu algebru $\mathcal{B}_1$ može proširiti do homomorfizma iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}_1$. Elementi skupa A su* ***slobodni generatori*** *ove Bulove algebre.*

Dokazati da je Bulova algebra $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\{0,1\}^n)$ (videti zadatak 1.93) slobodna Bulova algebra sa n generatora.

(Na osnovu ovog tvrđenja može se pokazati da proizvoljna slobodna Bulova algebra sa n slobodnih generatora ima (kao i ova) 2^{2^n} elemenata.)

Rešenje.

Da bismo ustanovili da je $\mathcal{B}$ slobodna Bulova algebra generisana skupom $\{A_1, \ldots, A_n\}$ iz zadatka 1.93, preslikajmo generatore $A_1, \ldots, A_n$ proizvoljnom funkcijom f redom u elemente $x_1, \ldots, x_n$ proizvoljne Bulove algebre $\mathcal{D}$. Pokazujemo da se f može proširiti do homomorfizma $h : B \to D$.

Neka je h definisano na sledeći način:[13]

[13] U ovom zadatku komplement se obeležava sa $^-$.

Za $C = \{\beta^1, \dots, \beta^m\} \subseteq \{0,1\}^n$, pri čemu je

$$\beta^1 = (\beta_1^1, \dots \beta_n^1), \dots, \beta^m = (\beta_1^m, \dots, \beta_n^m) \quad \text{i}$$

$$x^\alpha = \begin{cases} x & \text{za } \alpha = 1 \\ \bar{x} & \text{za } \alpha = 0 \end{cases}$$

definišemo

$$h(C) = ({x_1}^{\beta_1^1} \wedge \dots \wedge {x_n}^{\beta_n^1}) \vee \dots \vee ({x_1}^{\beta_1^m} \wedge \dots \wedge {x_n}^{\beta_n^m}).$$

Može se proveriti da je restrikcija h na $\{A_1, \dots, A_n\}$ funkcija f: $h(A_i) = x_i$; slično, $h(\bar{A}_i) = \bar{x}_i$, tj. $h({A_i}^{\alpha_i}) = {x_i}^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

h je homomorfizam:

Ako je $C' = \{\beta^{1'}, \dots, \beta^{r'}\}$, gde je

$$\beta^{1'} = (\beta_1^{1'}, \dots, \beta_n^{1'}), \dots, \beta^{r'} = (\beta_1^{r'}, \dots, \beta_n^{r'}),$$

onda je prema zadatku 1.93

$$\begin{aligned} h(C \cup C') &= h(({A_1}^{\beta_1^1} \cap \dots \cap {A_n}^{\beta_n^1}) \cup \dots \cup ({A_1}^{\beta_1^m} \cap \dots \cap {A_n}^{\beta_n^m}) \cup \dots \\ &\quad \cup ({A_1}^{\beta_1^{1'}} \cap \dots \cap {A_n}^{\beta_n^{1'}}) \cup \dots \cup ({A_1}^{\beta_1^{r'}} \cap \dots \cap {A_n}^{\beta_n^{r'}})) \\ &= ({x_1}^{\beta_1^1} \wedge \dots \wedge {x_n}^{\beta_n^1}) \vee \dots \vee ({x_1}^{\beta_1^m} \wedge \dots \wedge {x_n}^{\beta_n^m}) \vee \dots \\ &\quad \vee ({x_1}^{\beta_1^{1'}} \wedge \dots \wedge {x_n}^{\beta_n^{1'}}) \vee \dots \vee ({x_1}^{\beta_1^{r'}} \wedge \dots \wedge {x_n}^{\beta_n^{r'}})) \\ &= h(C) \vee h(C'), \quad \text{kao i} \end{aligned}$$

$$h(\bar{C}) = h(\{0,1\}^n \setminus C) = h(\{b^1, \dots, b^p\}).$$

Ovde su $b^1, \dots, b^p$ iz $\{0,1\}^n$ i pri tome je svaki od tih elemenata različit od $\beta^1, \dots, \beta^m$ tj. od svake n-torke u C razlikuje se bar na jednoj koordinati. Zato, ako je: $b^1 = (b_1^1, \dots b_n^1)$,..., $b^p = (b_1^p, \dots, b_n^p)$, važi:

$$h(\bar{C}) = ({x_1}^{b_1^1} \wedge \dots \wedge {x_n}^{b_n^1}) \vee \dots \vee ({x_1}^{b_1^p} \wedge \dots \wedge {x_n}^{b_n^p}).$$

S obzirom na spomenute razlike u koordinatama, $h(C) \wedge h(\bar{C}) = 0$ (svaka konjunkcija u $h(C)$ razlikuje se bar za jedno $i \in \{1, \dots, n\}$ od svake u $h(\bar{C})$, pa je zato i njihova konjunkcija nula).

Slično, $h(C) \vee h(\bar{C}) = 1$, budući da se sa leve strane nalaze sve različite konjunkcije u kojima učestvuju $x_1, \dots, x_n$.

Dakle, $h(\bar{C}) = \overline{h(C)}$.

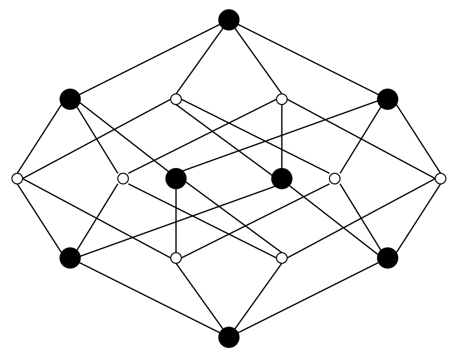
Na osnovu zadatka 1.81, h je homomorfizam, a $\mathcal{B}$ slobodna Bulova algebra. □

Zadatak 1.106. *Da li je svaka podalgebra slobodne Bulove algebre i sama slobodna?*

Rešenje.

Kako je napomenuto u prethodnom zadatku, slobodna Bulova algebra ima 2^{2^n} elemenata. Ona dakle moze imati podalgebru sa 2^k elemenata, gde

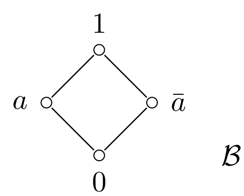
k nije stepen broja 2. Zato podalgebra slobodne Bulove algebre ne mora biti slobodna. Na primer, slobodna Bulova algebra sa 16 elemenata ima podalgebru sa 8 elemenata (slika 1.45) koja nije slobodna.



Slika 1.45 □

Zadatak 1.107. *Dokazati da je četvoroelementna Bulova algebra slobodna Bulova algebra sa jednim slobodnim generatorom.*

Rešenje.



Slika 1.46

Pokazaćemo da slobodan generator može biti bilo koji od dva elementa iz $\mathcal{B}$, različita od 0 i 1 (slika 1.46). Odista, neka je a jedan od njih. Ako sada $\{a\}$ preslikamo u neku Bulovu algebru $\mathcal{B}_1$ funkcijom f, onda je preslikavanje $h : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$, takvo da je $h(1) = 1$, $h(0) = 0$, $h(a) = f(a)$, $h(\bar{a}) = \overline{f(a)}$, traženi homomorfizam koji proširuje f (na pr. $h(a \wedge \bar{a}) = h(0) = 0$, ali i $h(a) \wedge h(\bar{a}) = f(a) \wedge \overline{f(a)} = 0$, itd.). □

5. Bulov prsten

Bulova mreža se u algebarskom smislu interpretira kao Bulova algebra. Sledi još jedan način da se opiše ista struktura, uz pomoć prstena sa posebnim svojstvima[14].

Prsten $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ je **Bulov** ako na njemu važi identitet $x^2 = x$ (sa x^2 je označen izraz $x \cdot x$).

Slede osnovna svojstva Bulovih prstena.

[14]Osnovno o prstenima videti na pr. u knjizi [**19**].

Tvrđenje 1.82. *U svakom Bulovom prstenu važi:*
(a) $x + x = 0$;
(b) $x = -x$;
(c) $x \cdot y = y \cdot x$.

Dokaz.
(a) Po definiciji je

$$\begin{aligned} x + x &= (x + x) \cdot (x + x) \\ &= x^2 + x^2 + x^2 + x^2 \;=\; x + x + x + x, \end{aligned}$$

pa je $x + x = 0$ zbog svojstva skraćivanja u aditivnoj grupi prstena.
(b) Neposredno na osnovu (a), jer je inverzni elemenat u grupi jedinstven.
(c) Slično kao u (a),

$$\begin{aligned} x + y &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= x^2 + (x \cdot y) + (y \cdot x) + y^2 \;=\; (x + y) + (x \cdot y) + (y \cdot x), \end{aligned}$$

odakle $(x \cdot y) + (y \cdot x) = 0$, pa je prema ($b$) $x \cdot y = y \cdot x$. ■

Definišimo sada na proizvoljnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ binarnu operaciju $+$ na sledeći način:

$$x + y := (x \wedge y') \vee (x' \wedge y).$$

Ova operacija zove se **simetrična razlika**, jer se u Bulovoj algebri partitivnog skupa svodi na tu skupovnu konstrukciju.

Teorema 1.83. *Ako je $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Bulova algebra, onda je $R_{\mathcal{B}} = (B, +, \cdot)$ Bulov prsten sa jedinicom, gde je $+$ simetrična razlika, $x \cdot y := x \wedge y$, a neutralni elemenat za $+$ je 0 iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz. $(B, +)$ je Abelova grupa. Zaista, $+$ je komutativna operacija, jer važi:

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = (y \wedge x') \vee (y' \wedge x) = y + x.$$

Operacija $+$ je asocijativna:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + ((y' \wedge z) \vee (y \wedge z')) \\ &= (x \wedge (y \vee z') \wedge (y' \vee z)) \vee ((x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z')) \\ &= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z). \end{aligned}$$

Na sličan način dobija se i

$$(x + y) + z = (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z),$$

pa važi

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Neutralni elemenat je 0:

$$x + 0 = (x \wedge 0') \vee (x' \wedge 0) = x \wedge 1 = x,$$

a inverzni za x je sam taj elemenat:

$$x + x = 0.$$

Druga operacija, $\cdot$ je asocijativna, jer se poklapa sa operacijom $\wedge$; ta operacija je i distributivna prema $+$:

$$x \cdot (y + z) = x \wedge ((y \wedge z') \vee (y' \wedge z)) = (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z).$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} (x \cdot y) + (x \cdot z) &= ((x \wedge y) \wedge (x' \vee z')) \vee ((x' \vee y') \wedge (x \wedge z)) \\ &= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z), \end{aligned}$$

pa distributivnost važi sleva. Pošto je $\wedge$ komutativna operacija, važi i desna distributivnost.

$R_{\mathcal{B}}$ je tako prsten; on je Bulov, jer važi:

$$x^2 = x \cdot x = x \wedge x = x.$$

Jedinica Bulove algebre je neutralni elemenat za drugu operaciju, jer je

$$x \cdot 1 = x \wedge 1 = x.$$

Tvrđenje je dokazano. ■

U nastavku se pokazuje da uz pogodno definisane operacije Bulov prsten sa jedinicom može da se interpretira kao Bulova algebra.

Teorema 1.84. *Neka je* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot\,)$ *Bulov prsten sa jedinicom. Tada je* $\mathcal{B}_R = (R, \wedge, \vee, {}', 0, 1)$ *Bulova algebra, gde je*

$$\begin{aligned} x \wedge y &:= x \cdot y, \\ x \vee y &:= x + y + (x \cdot y), \\ x' &:= x + 1, \end{aligned}$$

a 0 *i* 1 *su redom neutralni elementi za prvu i drugu operaciju u prstenu.*

Dokaz. Treba pokazati da važe aksiome za Bulove algebre.

b1: Na osnovu tvrđenja 1.82 (c) imamo

$$x \wedge y = x \cdot y = y \cdot x = y \wedge x.$$

b2: Po definiciji operacije $\vee$ je

$$x \vee y = x + y + (x \cdot y) = y + x + (y \cdot x) = y \vee x.$$

b3: Po definicijama operacija je

$$x \wedge (y \vee z) = x \cdot (y + z + (y \cdot z)) = (x \cdot y) + (x \cdot z) + (x \cdot y \cdot z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

b4: Slično kao u prethodnom slučaju

$$x \vee (y \wedge z) = x + (y \cdot z) + (x \cdot y \cdot z),$$

a sa druge strane je

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= (x + y + (x \cdot y)) \cdot (x + z + (x \cdot z)) \\ &= x^2 + (x \cdot z) + (x^2 \cdot z) + (y \cdot x) + (y \cdot z) \\ &\quad +(x \cdot y \cdot z) + (x^2 \cdot y) + (x \cdot y \cdot z) + (x^2 \cdot y \cdot z) \\ &= x + (x \cdot z) + (x \cdot z) + (x \cdot y) + (y \cdot z) \\ &\quad +(x \cdot y \cdot z) + (x \cdot y) + (x \cdot y \cdot z) + (x \cdot y \cdot z) \\ &= x + (y \cdot z) + (x \cdot y \cdot z),\end{aligned}$$

na osnovu tvrđenja 1.82 (a) i (c). Zato je

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

b5: U svakom prstenu je ispunjeno $x \cdot 0 = 0$, pa imamo

$$x \vee 0 = x + 0 + (x \cdot 0) = x.$$

b6: Po definiciji je

$$x \wedge 1 = x \cdot 1 = x.$$

b7: Kao i u prethodnom slučaju, imamo

$$x \wedge x' = x \cdot (x + 1) = x^2 + x = x + x = 0.$$

b8: Ponovo po definiciji operacija

$$x \vee x' = x + x' + (x \cdot x') = x + (x + 1) + (x \cdot (x + 1)) = 1 + x^2 + x = 1.$$

b9: $0 \neq 1$ po pretpostavci teoreme (jer su u prstenu sa jedinicom 0 i 1 različiti elementi). ■

Jednostavno se proverava da uzastopna primena konstrukcija iz teorema 1.83 i 1.84 daje polaznu strukturu. Simbolično, u nizu

Bulova algebra $\mathcal{B} \longrightarrow$ Bulov prsten $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \longrightarrow$ Bulova algebra $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_{\mathcal{B}}}$,
ispunjeno je $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}$.

Slično, u konstrukciji

Bulov prsten $\mathcal{R} \longrightarrow$ Bulova algebra $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \longrightarrow$ Bulov prsten $\mathcal{R}_{\mathcal{B}_{\mathcal{R}}}$,
važi $\mathcal{R}_{\mathcal{B}_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$.

5.1. Dopune i zadaci.

Zadatak 1.108. *Proveriti da je struktura* $(R, \oplus, \cdot)$ *Bulov prsten sa jedinicom, ako je* $R = \{0, p, q, 1\}$, *a operacije su date tablicama:*

$\oplus$	0	p	q	1
0	0	p	q	1
p	p	0	1	q
q	q	1	0	p
1	1	q	p	0

$\cdot$	0	p	q	1
0	0	0	0	0
p	0	p	0	p
q	0	0	q	q
1	0	p	q	1

Rešenje.

Uputstvo. Tablica prve operacije ($\oplus$) određuje skup R kao Abelovu grupu[15]: komutativnost je očita, asocijativnost se neposredno proverava, neutralni elemenat je 0, a svaki elemenat je sebi suprotan.

Druga operacija je očigledno komutativna; ona je i asocijativna (proverava se direktno računanjem odgovarajućih proizvoda), neutralni elemenat je 1. Kao i asocijativnost, distributivnost druge operacije prema prvoj se proverava iz tablica. Ova struktura je dakle komutativan prsten sa jedinicom. Da je on Bulov, sledi iz činjenice da je svaki elemenat idempotentan (u odnosu na množenje). $\square$

Zadatak 1.109. *Dokazati da je* $(\mathbf{2}^X, +, \cdot\,)$ *Bulov prsten, gde je* $\mathbf{2}^X$ *kolekcija svih funkcija iz proizvoljnog nepraznog skupa* X *u skup* $\{0,1\} = \mathbf{2}$*, a operacije, kao i neutralni elementi i inverzni su definisani po komponentama, kao što sledi.*

Za $f, g \in \mathbf{2}^X$, $x \in X$*:*

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x)+g(x);\\
(f\cdot g)(x) &:= f(x)\cdot g(x);\\
-f(x) &:= f(x);\\
O(x) &:= 0;\\
I(x) &:= 1.
\end{aligned}$$

Sa desne strane su operacije u dvoelementnom Bulovom prstenu:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Rešenje.

$(\mathbf{2}^X, +\,)$ je Abelova grupa. Zaista, komutativnost i asocijativnost operacije $+$ preuzimaju se po koordinatama iz dvoelementnog Bulovog prstena. Iz istog razloga funkcija O je neutralni elemenat a svaka funkcija je sama sebi inverzna.

Slično rezonovanje odnosi se na asocijativnost druge operacije, na njen jedinični elemenat i zakone distributivnosti. $\square$

Zadatak 1.110. *Dokazati da svi idempotentni elementi proizvoljnog komutativnog prstena* $(R, +, \cdot\,)$ *sa jedinicom obrazuju Bulov prsten u odnosu na sabiranje definisano sa*

$$x \oplus y := x + y - 2xy$$

i restrikciju množenja iz R*.*

Da li je to potprsten u R*?*

---

[15]To je Klajnova grupa, videti na pr. [**19**].

Koji Bulov prsten se na taj način dobija iz prstena $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *celih brojeva?*

Rešenje.

Elemenat x prstena je idempotentan, ako je ispunjeno $x \cdot x = x$ (koristimo i uobičajeno označavanje $x^2 = x$, a samu oznaku operacije množenja izostavljamo). Označimo sa I_R skup svih idempotentnih elemenata iz R. Taj skup nije prazan, jer su u njemu bar 0 i 1 (neutralni elementi za obe operacije u prstenu sa jedinicom). Operacija $\oplus$ je dobro definisana, tj. za svaka dva elementa $x, y \in I_R$ postoji jedinstven elemenat $x \oplus y \in I_R$. Zaista, ako su x i y idempotentni, onda je

$$\begin{aligned}
(x \oplus y)(x \oplus y) &= (x + y - 2xy)(x + y - 2xy) \\
&= x^2 + xy - 2x^2y + xy + y^2 - 2xy^2 - \\
&\quad\; 2x^2y - 2xy^2 + 4x^2y^2 \\
&= x + xy - 2xy + xy + y - 2xy - 2xy - 2xy + 4xy \\
&= x + y - 2xy = x \oplus y,
\end{aligned}$$

na osnovu komutativnosti množenja i idempotentnosti elemenata x i y. Dakle, i zbir $x \oplus y$ je idempotentan, pa je operacija dobro definisana na skupu I_R.

Skup idempotentnih elemenata zatvoren je za množenje: ako su x i y iz I_R, onda je

$$xy \cdot xy = x^2y^2 = xy.$$

Ovim je provereno da je $(I_R, \oplus, \cdot)$ struktura sa dve binarne operacije.

Dalje se proverava da je $(I_R, \oplus, \cdot)$ prsten i to Bulov.

Po konstrukciji je operacija $\oplus$ komutativna; asocijativnost se neposredno proverava na osnovu definicije te operacije; neutralni elemenat u odnosu na sabiranje je 0:

$$x \oplus 0 = x + 0 - 2x \cdot 0 = x.$$

Inverzni za x je on sam:

$$x \oplus x = x + x - 2x = 0.$$

Može se jednostavno proveriti distributivnost, a kako je množenje isto u oba prstena, ono je asocijativno i komutativno i ima neutralni elemenat, 1.

$(I_R, \oplus, \cdot)$ je na osnovu gornjeg prsten, a da je on Bulov, sledi iz činjenice da su svi elementi idempotentni.

Ovaj prsten nije potprsten u R, jer sabiranje u njemu nije restrikcija sabiranja iz R.

U prstenu celih brojeva jedini idempotentni elementi su 0 i 1, pa se u tom slučaju dobija dvoelementni prsten (naveden tablicama u zadatku 1.109). □

ZADATAK 1.111. *Sastaviti tablice operacija za Bulov prsten koji odgovara Bulovoj algebri delitelja broja* 30.

Rešenje.

Operacije su u ovom slučaju date jednakostima:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \text{nzs}\{\text{nzd}\{x, 30/y\}, \text{nzd}\{30/x, y\}\} \quad \text{i} \\ x \cdot y &= \text{nzd}\{x, y\}. \end{aligned}$$

Uz pomoć tih formula, računaju se vrednosti i popunjavaju tablice, kao što sledi.

$\oplus$	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	2	3	5	6	10	15	30
2	2	1	6	10	3	5	30	15
3	3	6	1	15	2	30	5	10
5	5	10	15	1	30	2	3	6
6	6	3	2	30	1	15	10	5
10	10	5	30	2	15	1	6	3
15	15	30	5	3	10	6	1	2
30	30	15	10	6	5	3	2	1

$\cdot$	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	2	1	2
3	1	1	3	1	3	1	3	3
5	1	1	1	5	1	5	5	5
6	1	2	3	1	6	2	3	6
10	1	2	1	5	2	10	5	10
15	1	1	3	5	3	5	15	15
30	1	2	3	5	6	10	15	30

□

ZADATAK 1.112. *Na skupu* $I = \{\top, \bot\}$ *simbola istinitosnih vrednosti iskazne algebre definisane su operacije date tablicama (redom ekvivalencija i disjunkcija):*

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

Dokazati da je $(I, \Leftrightarrow, \vee)$ *Bulov prsten.*

Rešenje.

Uputstvo. Aksiome se direktno proveravaju iz tablica. Treba zapaziti da je nula ovog prstena $\top$, a jedinica $\bot$. □

GLAVA 2

Bulove funkcije. Minimizacija

1. Bulovi termi i term-funkcije

1.1. Bulovi termi. Disjunktivne forme. Ovde navodimo definicije pravilnih izraza u jeziku Bulovih algebri, koji, pored oznaka mrežnih operacija ($\wedge$, $\vee$), sadrže oznake za unarnu operaciju komplementiranja ($'$) i za konstante (0 i 1).

Bulovi termi definišu se rekurzivno:

1. promenjive $x, y, z, \ldots$ i konstante $0, 1$ su Bulovi termi;

2. ako su A i B Bulovi termi, onda su to i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ i (A');

3. Bulovi termi obrazuju se konačnim brojem primena prethodna dva pravila.

Slično kao kod mrežnih terma, usvaja se pravilo o brisanju spoljnih zagrada.

n-arni Bulov term je Bulov term $f(x_1, \ldots, x_n)$ u kome učestvuju neke od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

Primer 2.1. Bulovi termi su na primer:

$$x' \wedge (y \vee z')', \;\; (x \vee (y \wedge x'))' \vee z, \;\; 1 \wedge x', \;\; ((u' \vee v)' \wedge (u' \wedge v')) \vee v.$$

Prva dva terma su ternarni, treći je unaran, a četvrti binaran. □

Kako je već navedeno na strani 64, jedno svojstvo Bulovih algebri je dualnost koju sada precizno obrazlažemo u okviru jezika ovih struktura. **Dualni term** datog Bulovog terma f dobija se tako što se u f sva pojavljivanja operacije $\wedge$ zamene oznakom druge binarne operacije, $\vee$ i obratno, a sva pojavljivanja konstante 1 drugom konstantom, 0, i obratno. Za dati identitet, kao formulu $f = g$, gde su f i g Bulovi termi, **dualni identitet** je formula $f_d = g_d$, gde su f_d i g_d redom dualni termi za f i g.

Princip dualnosti za Bulove algebre (naveden na str. 64) sada se može formulisati slično kao za mreže:

Dualni identitet tačnog identiteta je tačan.

Svi do sada navedeni izrazi (u okviru aksioma i tvrđenja) jesu Bulovi termi u smislu gornje definicije. Ovde spadaju i svi mrežni termi. Po dogovoru, a s obzirom na asocijativne zakone, Bulovim termima smatramo i izraze

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}, \qquad x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n},$$

gde su $x_1, \dots, x_n$ različite promenljive, $\alpha_i \in \{0,1\}$, a

$$x^\alpha := \begin{cases} x & \text{za} \quad \alpha = 1 \\ x' & \text{za} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

S obzirom na analogiju sa iskaznim formulama, gornji izrazi zovu se i (redom) **elementarna konjunkcija**, odnosno **elementarna disjunkcija**. Ako se posmatraju promenljive $x_1, \dots, x_n$, onda je elemenatarna konjunkcija **kanonska** u odnosu na navedene promenljive, ako u njoj sve one učestvuju. Analogno se definiše **kanonska** elementarna disjunkcija u odnosu na date promenljive.

Bulov term oblika $k_1 \vee \cdots \vee k_m$, gde su k_i elementarne konjunkcije zove se (u skladu sa spomenutom analogijom sa iskaznim formulama) **disjunktivna forma**, skraćeno DF. Kada se DF vezuje uz neki skup promenljivih, onda je ona **kanonska**, skraćeno KDF, ako su sve elementarne konjunkcije koje u njoj učestvuju kanonske.

Primer 2.2. Termi x, $x \wedge z'$, $x \wedge y \wedge u' \wedge v'$ su elementarne konjunkcije, a x, $x \vee y'$, $x' \vee y \vee z'$ elementarne disjunkcije. U odnosu na promenljive x, y, z elementarne konjukcije $x \wedge y \wedge z$, $x \wedge y' \wedge z'$ su kanonske; u odnosu na iste promenljive, term $x' \vee y' \vee z$ je jedna kanonska elementarna disjunkcija.

Primeri DF su $(x \wedge y') \vee z$, $\quad (x' \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z')$.

U odnosu na promenljive x, y, KDF je na pr. $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$, a u odnosu na x, y, z, jedna KDF je

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z') \qquad \square$$

Termi koji se definišu dualno DF i KDF su redom **konjunktivna forma** i **kanonska konjunktivna forma**; oznake su KF i KKF (videti i zadatak 2.5).

Dva Bulova terma u i v su **ekvivalentna** ako se identitet $u = v$ može izvesti iz aksioma za Bulove algebre.

U nastavku pokazujemo da za svaki Bulov term postoji ekvivalentan term koji je KDF (tj, svaki se Bulov term može transformisati u KDF).

Lema 2.3. *a) Za svaki Bulov term f postoji ekvivalentan, u kome se unarna operacija odnosi na pojedinačne promenljive.*

b) Svakom Bulovom termu f u kome se unarna operacija odnosi na pojedinačne promenljive odgovara ekvivalentan term koji je DF.

c) Svaka DF *$f(x_1, \dots, x_n)$ ekvivalentna je nekoj* KDF *u odnosu na promenljive $x_1, \dots, x_n$.*

Dokaz. a) Indukcija po broju m operacijskih znakova u f. Ako je $m = 0$ ili $m = 1$, tvrđenje važi. Ako ono važi za sve terme sa manje od m operacijskih znakova, a u termu f ih ima m, onda $f = g \wedge h$ ili $f = g \vee h$ ili $f = g'$. U prvom i drugom slučaju tvrđenje važi za f jer važi za g i h. U trećem slučaju na osnovu De Morganovih zakona i jednakosti, f je ponovo ekvivalentan sa termom za koji tvrđenje važi.

b) Indukcija po broju operacijskih znakova, slično kao u *a*). U dokazu se primenjuje distributivni zakon $u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (u \wedge w)$, gde su u, v, w termi.

c) Svaka elementarna konjunkcija u, kojoj u datoj DF nedostaje promenljiva x_i, ekvivalentna je sa termom $(u \wedge x_i) \vee (u \wedge x_i')$ (slično je kada nedostaje više promenljivih). ■

POSLEDICA 2.4. *Za svaki Bulov term $t(x_1, \ldots, x_n)$ postoji ekvivalentan term f koji je* KDF *u odnosu na promenljive $x_1, \ldots, x_n$.*

Dokaz. Neposredno na osnovu leme 2.3. ■

Lema 2.3 pruža postupak za konstrukciju KDF ekvivalentne datom Bulovom termu: primenjuju se redom De Morganovi zakoni, distributivnost i dopuna promenljivih. U svakom koraku koriste se, ako je potrebno, zakoni $t'' = t$ i idempotentnost binarnih operacija.

PRIMER 2.5. Ako je

$$f(x, y, z) = (x \vee y')' \vee z',$$

onda se odgovarajuća KDF konstruiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&(x \vee y')' \vee z' = \\
&(x' \wedge y) \vee z' = \\
&(x' \wedge y \wedge (z \vee z')) \vee (z' \wedge (x \vee x') \wedge (y \vee y')) = \\
&(x' \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (z' \wedge x \wedge y) \vee (z' \wedge x \wedge y') \vee \\
&(z' \wedge x' \wedge y) \vee (z' \wedge x' \wedge y') = \\
&(x' \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z').
\end{aligned}$$

Poslednji term je KDF i sređen je pomoću asocijativnih i komutativnih zakona. □

KDF su često (kao u gornjem primeru) primetno složenije od ekvivalentnih Bulovih terma, a razlog zbog koga se one i pored toga razmatraju, navodi se u nastavku.

1.2. Term-funkcije. Svaki Bulov term $f(x_1, \ldots, x_n)$ određuje na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ **term funkciju** $B^n \to B$, koja se zove i **Bulova funkcija**, $f_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$: promenljive se zamene vrednostima iz date Bulove algebre $\mathcal{B}$, pa se primene operacije koje u $\mathcal{B}$ odgovaraju znacima $\wedge, \vee$ i $'$. Za dvoelementnu Bulovu algebru $\mathcal{B}_2$ važi i obratno.

TEOREMA 2.6. *Neka je $\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ funkcija na $\mathcal{B}_2$. Tada postoji Bulov term $g(x_1, \ldots, x_n)$, takav da se odgovarajuća term funkcija $f_{\mathcal{B}_2}$ poklapa sa φ.*

Dokaz. Uočimo Bulov term

$$g(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n}(\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\wedge x_1^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge x_n^{\alpha_n}),\tag{1}$$

gde je (budući da je $\alpha\in\{0,1\}$) $x^0=x'$, a $x^1=x$.

Bulov term $g(x_1,\dots,x_n)$, definisan jednakošću (1) je sažeto zapisan supremum od 2^n terma.

Na primer za $n=2$, formula (1) u razvijenom obliku je

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2) &= (\varphi(0,0)\wedge x_1'\wedge x_2')\vee(\varphi(0,1)\wedge x_1'\wedge x_2)\vee\\ &\ (\varphi(1,0)\wedge x_1\wedge x_2')\vee(\varphi(1,1)\wedge x_1\wedge x_2). \end{aligned}$$

Vrednosti $\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ su iz skupa $\{0,1\}$.

Dokazujemo da je term funkcija $g_{\mathcal{B}_2}$ (određena termom (1)) jednaka sa funkcijom φ.

Obe funkcije, φ i $g_{\mathcal{B}_2}$, preslikavaju $\{0,1\}^n$ u $\{0,1\}$. One su jednake ako za istu n-torku elemenata 0 i 1 određuju istu vrednost (0 ili 1).

Neka je $x_1=\beta_1,\dots,x_n=\beta_n$, gde su $\beta_1,\dots,\beta_n$ iz $\{0,1\}$. Odgovarajuća vrednost funkcije φ je $\varphi(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\{0,1\}$. Kako je po definiciji $x^\alpha=1$ ako i samo ako je $x=\alpha$ ($0^0=1^1=1$, a $0^1=1^0=0$), vrednost term funkcije $g_{\mathcal{B}_2}$ za navedene vrednosti promenljivih je

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{B}_2}(\beta_1,\dots,\beta_n) &= \varphi(\beta_1\dots,\beta_n)\wedge\beta_1^{\beta_1}\wedge\dots\wedge\beta_n^{\beta_n}\\ &= \varphi(\beta_1,\dots,\beta_n)\wedge 1\wedge\cdots\wedge 1=\varphi(\beta_1,\dots,\beta_n), \end{aligned}$$

jer se u svim ostalim elementarnim konjunkcijama bar jednom javlja razlika u osnovi i eksponentu stepena, pa je ta konjunkcija jednaka nuli.

Upravo dokazana jednakost

$$g_{\mathcal{B}_2}(\beta_1,\dots,\beta_n)=\varphi(\beta_1,\dots,\beta_n)$$

ispunjena je za svaku n-torku iz skupa $\{0,1\}$. Sledi da su funkcije $g_{\mathcal{B}_2}$ i φ jednake i tvrđenje je dokazano. ■

Term g definisan sa (1) sadrži pored promenljivih, i konstante 0 i 1. Zato to nije KDF, iako podseća na takav izraz. U nastavku se pokazuje kako se term g jednostavno transformiše u ekvivalentan, koji je u obliku kanonske disjunktivne forme.

TEOREMA 2.7. *Neka je $\varphi:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ funkcija na $\mathcal{B}_2$, koja nije nula-funkcija*[1] *i g njoj odgovarajući term definisan sa (1). Tada je g ekvivalentan sa KDF*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1}(x_1^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge x_n^{\alpha_n}),\tag{2}$$

[1]**Nula-funkcija** po definiciji ima vrednost 0 za sve nizove vrednosti promenljivih.

Dokaz. Kako je već napomenuto, u termu g definisanom sa (1), vrednosti $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ su iz skupa $\{0, 1\}$. Kanonska disjuktivna forma f je supremum tačno onih terma oblika $x_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}$ iz g, uz koje stoji vrednost 1 (postoji bar jedan takav term jer polazno preslikavanje φ po pretpostavci nije nula-funkcija). Iz te činjenice i iz identiteta

$$0 \wedge x = 0, 1 \wedge x = x \text{ i } 0 \vee x = x,$$

sledi ekvivalentnost terma g i f. ■

Slučaj kada je φ nula-funkcija posebno se razmatra. Za takvu funkciju ne postoji term oblika (2), ali joj odgovara term (1) ili (ako ne uključujemo konstante) na pr. term $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \wedge x_1'$.

Tvrđenje 2.7 daje algoritam za konstrukciju KDF koja odgovara proizvoljnoj Bulovoj funkciji $\varphi : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. Algoritam je opisan u narednom primeru.

Primer 2.8. Funkcija $\varphi : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$ data je priloženom tablicom. Na osnovu teoreme 2.7, elementarne konjunkcije u odgovarajućem Bulovom termu $f(x, y, z)$ odnose se na tačno one nizove vrednosti u tablici za koje funkcija φ ima vrednost 1.

Nije teško proveriti da se term funkcija $f_{\mathcal{B}_2}$ poklapa sa φ.

x	y	z	$\varphi(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z).$$

□

U nastavku se dokazuje (teorema 2.11) da su identiteti koji se mogu izvesti iz aksioma za Bulove algebre tačno oni koji važe na dvoelementnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B}_2$. Prvo se navodi svojstvo koje je već spomenuto u dokazu teoreme 2.6.

Lema 2.9. *Neka su date promenljive $x_1, \ldots, x_n$. Za dati niz vrednosti tih promenljivih u $\mathcal{B}_2$, tačno jedna kanonska elementarna konjunkcija u odnosu na njih ima vrednost* 1.

Dokaz. Ako je dat niz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ vrednosti promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ i ako je kao i obično $x^1 := x$, a $x^0 := x'$, onda samo konjunkcija $\alpha_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_n^{\alpha_n}$ ima vrednost 1 i nijedna druga. ■

POSLEDICA 2.10. *Neka je $F_{\mathcal{B}_2}$ term funkcija za* KDF $F(x_1,\ldots,x_n)$. *Tada je za dati niz* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \{0,1\}$

$$F_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1 \text{ ako i samo ako je } f_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1,$$

za tačno jednu elementarnu konjunkciju f iz F. ∎

TEOREMA 2.11. *Ako su u i v Bulovi termi, onda je identitet $u=v$ zadovoljen na svim Bulovim algebrama ako i samo ako taj identitet važi na dvoelementnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B}_2$.*

Dokaz. Ako je $u=v$ identitet koji važi na svakoj Bulovoj algebri, onda je jasno da je on zadovoljen i na $\mathcal{B}_2$.

Sa druge strane, za svaki identitet $u=v$ postoje KDF f i g u odnosu na uniju promenljivih iz terma u i v, koje su redom ekvivalentne sa u odnosno v. Ako je sada identitet $u=v$ zadovoljen na $\mathcal{B}_2$, to znači da su odgovarajuće term funkcije $f_{\mathcal{B}_2}$ i $g_{\mathcal{B}_2}$ jednake. One dakle, prema teoremi 2.7, određuju istu KDF. Prema posledici 2.10, postoji samo jedna KDF nad fiksiranim skupom promenljivih čija se term funkcija poklapa sa datom funkcijom na $\mathcal{B}_2$. Dakle, $f=g$, odnosno identitet $u=v$ važi na proizvoljnoj Bulovoj algebri. ∎

NAPOMENA. Poslednje tvrđenje daje odgovor za tzv. *problem reči* za Bulove algebre. Postoji efektivan postupak (algoritam) za proveru da li je proizvoljni identitet $u=v$ tačan na svakoj Bulovoj algebri: treba taj identitet proveriti na $\mathcal{B}_2$, na primer tablicom odgovarajućih term funkcija.

Na osnovu teoreme 2.11 i posledice 2.4 na str. 109, zaključujemo da je tačna i sledeća veza između identiteta i jednakosti term funkcija na Bulovim algebrama.

TEOREMA 2.12. *Bulovi termi u i v su ekvivalentni (tj. jednakost $u=v$ se može izvesti iz aksioma za Bulove algebre) ako i samo ako su odgovarajuće term funkcije jednake nad proizvoljnom Bulovom algebrom.* ∎

1.3. Dopune i zadaci.

ZADATAK 2.1. *Dokazati da je svaki Bulov term $f(x)$ ekvivalentan sa termom*

(a) $(f(0)\vee x)\wedge(f(1)\vee x')$;

(b) $(f(0)\wedge x')\vee(f(1)\wedge x)$.

Rešenje.

(a) Dva Bulova terma su ekvivalentna, ako se jedan može izvesti iz drugog korišćenjem aksioma za Bulove algebre.

U ovom zadatku dokaz se sprovodi indukcijom po broju n operacijskih simbola $\wedge$, $\vee$ i $'$ u $f(x)$.

Ako je $n = 0$, onda je $f(x) = x$, $f(x) = 0$ ili $f(x) = 1$. Ako je $f(x) = x$ onda je $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$, pa je

$$f(x) = (0 \vee x) \wedge (1 \vee x') = x \wedge 1 = x.$$

Ostali slučajevi se slično proveravaju.

Neka je tvrđenje tačno za sve Bulove terme koji imaju manje od n operacijskih simbola. Tada je ispunjen jedan od sledeća tri slučaja:

$$1. f(x) = (g(x))'; \quad 2. f(x) = g(x) \wedge h(x); \quad 3. f(x) = g(x) \vee h(x).$$

U sva tri slučaja $g(x)$ i $h(x)$ imaju manje od n operacijskih simbola, pa je za njih tvrđenje tačno po induktivnoj pretpostavci.

U slučaju 1:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (g(x))' = ((g(0) \vee x) \wedge (g(1) \vee x'))' \\
&= (g(0) \vee x)' \vee (g(1) \vee x')' \\
&= ((g(0))' \wedge x') \vee ((g(1))' \wedge x) \\
&= (f(0) \wedge x') \vee (f(1) \wedge x) \\
&= (f(0) \vee f(1)) \wedge (f(0) \vee x) \wedge (x' \vee f(1)) \wedge (x' \vee x) \\
&= (f(0) \vee f(1) \vee (x \wedge x')) \wedge (f(0) \vee x) \wedge (f(1) \vee x') \wedge 1 \\
&= (f(0) \vee f(1) \vee x) \wedge (f(0) \vee f(1) \vee x') \wedge (f(0) \vee x) \wedge (f(1) \vee x') \\
&= (f(0) \vee x) \wedge (f(1) \vee x'),
\end{aligned}$$

po zakonu apsorpcije.

U slučaju 2:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \wedge h(x) \\
&= (g(0) \vee x) \wedge (g(1) \vee x') \wedge (h(0) \vee x) \wedge (h(1) \vee x') \\
&= ((g(0) \wedge h(0)) \vee x) \wedge ((g(1) \wedge h(1)) \vee x') \\
&= (f(0) \vee x) \wedge (f(1) \vee x').
\end{aligned}$$

U slučaju 3:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \vee h(x) \\
&= ((g(0) \vee x) \wedge (g(1) \vee x')) \vee ((h(0) \vee x) \wedge (h(1) \vee x')) \\
&= (g(0) \vee h(0) \vee x \vee x) \wedge (g(1) \vee x' \vee h(0) \vee x) \wedge \\
&\quad\; (g(0) \vee x \vee h(1) \vee x') \wedge (g(1) \vee x' \vee h(1) \vee x') \\
&= (g(0) \vee h(0) \vee x) \wedge (g(1) \vee h(1) \vee x') \\
&= (f(0) \vee x) \wedge (f(1) \wedge x').
\end{aligned}$$

b) Dualno rešenju dela pod a). □

Zadatak 2.2. *Dati Bulov term $f(x)$ (koji može sadržavati i druge promenljive osim x) napisati u obliku*

$$(f(0) \wedge x') \vee (f(1) \wedge x)$$

(prema zadatku 2.1 (b)), ako je

a) $f(x) = x \vee (1 \wedge x)'$;

b) $f(x) = ((x \wedge y) \vee z)'$;

c) $f(x) = x' \vee y$;

d) $f(x) = (x \vee (x \wedge x)')'$.

Rešenje.

a) $f(0) = 0 \vee (1 \wedge 0)' = 0 \vee 1 = 1; \quad f(1) = 1 \vee (1 \wedge 1)' = 1 \vee 0 = 1.$

$$f(x) = (1 \wedge x) \vee (1 \wedge x') = x \vee x'.$$

b) $f(0) = ((0 \wedge y) \vee z)' = z'; \quad f(1) = ((1 \wedge y) \vee z)' = (y \vee z)'.$

$$f(x) = (z' \wedge x') \vee ((y \vee z)' \wedge x).$$

c) $f(0) = 0' \vee y = 1; \quad f(1) = 1' \vee y = y;$

$$f(x) = (1 \wedge x') \vee (y \wedge x) = x' \vee (y \wedge x).$$

d) $f(0) = (0 \vee (0 \wedge 0)')' = 0; \quad f(1) = (1 \vee (1 \wedge 1)')' = 0;$

$$f(x) = (0 \wedge x) \vee (0 \wedge x') = 0.$$

□

ZADATAK 2.3. *Dokazati da je svaki Bulov term $f(x_1, \ldots, x_n)$ ekvivalentan sa termom*

$$\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} (f_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}),$$

gde je sa $f_{\mathcal{B}_2}$ označena term funkcija koja odgovara termu f.

Rešenje.

Za dokaz se koristi konstrukcija u teoremi 2.6. U teoremi 2.6 je dokazano da je term funkcija $f_{\mathcal{B}_2}$ jednaka funkciji koja odgovara termu

$$\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} (f_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}).$$

Ako su term funkcije jednake u Bulovim algebrama, odgovarajući termi su ekvivalentni, prema teoremi 2.12 (str. 112). □

ZADATAK 2.4. *Dokazati da je svaki Bulov term $f(x_1, \ldots, x_n)$ ekvivalentan sa termom*

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} (f_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee x_1^{(\alpha_1)'} \vee \cdots \vee x_n^{(\alpha_n)'}),$$

gde je sa $f_{\mathcal{B}_2}$ označena term funkcija koja odgovara termu f.

Rešenje.

Prema zadatku 2.3 važi da je: $f(x_1,\dots,x_n) = (f(x_1,\dots,x_n))'' =$

$$= \left(\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} ((f_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1,\dots,\alpha_n))' \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}) \right)' =$$

$$= \bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} (f_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \vee (x_1^{\alpha_1})' \vee \cdots \vee (x_n^{\alpha_n})') =$$

$$= \bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} (f_{\mathcal{B}_2}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \vee x_1^{(\alpha_1)'} \vee \cdots \vee x_n^{(\alpha_n)'}),$$

primenom De Morganovih zakona, i s obzirom da je $(x^\alpha)' = x^{\alpha'}$ (što sledi iz definicije za x^α na strani 108). □

Zadatak 2.5. *Dokazati da je svaki Bulov term $f(x_1,\dots,x_n)$ čija term funkcija nije identički jednaka jedinici ekvivalentan sa*

$$\bigwedge_{f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0} (x_1^{(\alpha_1)'} \vee \cdots \vee x_n^{(\alpha_n)'}). \tag{3}$$

Rešenje.

Sledi direktno iz zadatka 2.4 (videti i teoreme 2.6 i 2.7). Dobijeni term se naziva **kanonska konjunktivna forma** (skraćeno KKF). □

Zadatak 2.6. *Neka je data funkcija na $\mathcal{B}_2$, $\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Dokazati da ta Bulova funkcija odgovara termu*

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} (\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \vee x_1^{(\alpha_1)'} \vee \cdots \vee x_n^{(\alpha_n)'}), \tag{4}$$

gde je, kao i ranije, $x^0 = x'$, a $x^1 = x$.

Rešenje.

Funkcija φ i ona koja odgovara termu (4) su jednake ako imaju istu vrednost za proizvoljnu n-torku $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ iz $\{0,1\}^n$. Tražena vrednost za funkciju φ je $\varphi(\beta_1,\dots,\beta_n)$, a lako se može utvrditi da je vrednost date term funkcije ista. Zaista, ako je bar jedna vrednost u disjunkciji $x_1^{(\alpha_1)'} \vee \cdots \vee x_n^{(\alpha_n)'}$ jednaka 1, i cela ta disjunkcija je jednaka 1. Jedina disjunkcija koja je jednaka 0 je dobijena u slučaju kada je $\beta_i^{(\alpha_i)'} = 0$ za svako i, a to je ispunjeno kada je $\beta_i \neq (\alpha_i)'$, odnosno $\beta_i = \alpha_i$ za svako $i = 1,\dots,n$. Dakle, jedina disjunkcija koja nije 1 je $\varphi(\beta_1,\dots,\beta_n) \vee 0 \vee \cdots \vee 0$, pa je vrednost ove term funkcije takođe $\varphi(\beta_1,\dots,\beta_n)$. □

Zadatak 2.7. *Konjunkcija svih kanonskih elementarnih disjunkcija u odnosu na promenljive $x_1,\dots,x_n$ je ekvivalentna termu* 0.

Rešenje.

Dokazuje se indukcijom po n.

$n = 1:$ $x_1 \wedge x_1' = 0$ (aksioma b7 za Bulove algebre).

$n = k:$ Po indukcijskoj pretpostavci je

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_{2^k} = 0,$$

gde su $C_1, \ldots, C_{2^k}$ kanonske elementarne disjunkcije.

$n = k+1:$ Ako su ovde elementarne disjunkcije označene sa $K_1, \ldots, K_{2^{k+1}}$, imamo

$$\begin{aligned}&K_1 \wedge K_2 \wedge \cdots \wedge K_{2^{k+1}} = \\ &\quad (x_{k+1} \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_{2^k})) \wedge ((x_{k+1})' \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_{2^k})),\end{aligned}$$

jer svaka disjunkcija K_i sadrži x_{k+1} ili $(x_{k+1})'$.

Po indukcijskoj pretpostavci dobija se

$$K_1 \wedge K_2 \wedge \cdots \wedge K_{2^{k+1}} = (x_{k+1} \vee 0) \wedge ((x_{k+1})' \vee 0) = x_{k+1} \wedge (x_{k+1})' = 0.$$

□

ZADATAK 2.8. *Disjunkcija svih kanonskih elementarnih konjunkcija za promenljive* $x_1, \ldots, x_n$ *je* 1.

Rešenje.

Dualno tvrđenju iz prethodnog zadatka. □

ZADATAK 2.9. *Transformisati u KDF i KKF u odnosu na promenljive* x, y, z *term*

$$(x \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge z.$$

Rešenje.

Kakonska disjunktivna forma:

$$\begin{aligned}&(x \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge z = \\ &\quad = ((x \wedge (x' \vee y)) \vee (y' \wedge (x' \vee y))) \wedge z \\ &\quad = ((x \wedge x') \vee (x \wedge y) \vee (y' \wedge x') \vee (y' \wedge y)) \wedge z \\ &\quad = ((x \wedge y) \vee (y' \wedge x')) \wedge z \\ &\quad = (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z).\end{aligned}$$

Kanonska konjunktivna forma:

$$\begin{aligned}&(x \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge z = \\ &\quad = (x \vee y' \vee (z \wedge z')) \wedge (x' \vee y \vee (z \wedge z')) \wedge (z \vee (x \wedge x') \vee (y \wedge y')) \\ &\quad = (x \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z') \\ &\qquad \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y' \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y' \vee z) \\ &\quad = (x \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z') \\ &\qquad \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y' \vee z).\end{aligned}$$

□

ZADATAK 2.10. *Dokazati da je*

$$(x' \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \wedge y') = x' \vee y'.$$

Rešenje.

Uputstvo. Transformisati term sa desne strane u KDF u odnosu na promenljive x i y. □

Zadatak 2.11. *Transformisati u KDF:*

a) $(a \wedge b \wedge d) \vee (a' \wedge b \wedge c')$ *u odnosu na promenljive* a, b, c *i* d*;*

b) $a' \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c)$ *u odnosu na promenljive* a, b *i* c*.*

Rešenje.

a) $(a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c' \wedge d) \vee (a' \wedge b \wedge c' \wedge d) \vee (a' \wedge b \wedge c' \wedge d')$;

b) $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c')$. □

Zadatak 2.12. *Napisati Bulov term* $(x \wedge (y' \vee z)) \vee z'$ *u KDF i u KKF u odnosu na promenljive* x, y *i* z*.*

Rešenje.

KDF: $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z')$;

KKF: $(x \vee y' \vee z') \wedge (x \vee y \vee z')$. □

Zadatak 2.13. *Odrediti KDF i KKF za funkcije date tablicama:*

a)

x	y	z	$f_1(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

b)

x	y	z	$f_2(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Rešenje.

a) KDF: $f_1(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z)$;

KKF: $f_1(x, y, z) = (x \vee y \vee z') \wedge (x \vee y' \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y' \vee z) \wedge (x' \vee y' \vee z')$.

b) KDF: $f_2(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$;

KKF: $f_2(x, y, z) = (x \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z')$.

□

ZADATAK 2.14. *Dokazati da na proizvoljnoj Bulovoj algebri ima tačno 2^{2^n} različitih Bulovih funkcija sa n promenljivih.*

Rešenje.

Različitih Bulovih funkcija sa n promenljivih ima koliko i različitih terma u obliku KDF sa n promenljivih. Kanonskih elementarnih konjunkcija u odnosu na n promenljivih ima 2^n (svaka promenljiva može biti negirana ili ne), a u KDF svaka od tih konjunkcija može se pojaviti ili ne, pa različitih KDF sa n promenljivih ima 2^{2^n}.

Ovo se može dokazati i direktno, bez pozivanja na Bulove terme: Skup $\{0,1\}^n$ ima 2^n elemenata, pa ukupan broj funkcija iz $\{0,1\}^n$ u $\{0,1\}$ iznosi 2^{2^n} (videti i teoremu 2.13 u nastavku, na str. 119). □

ZADATAK 2.15. *Koliko ima različitih n-arnih operacija na Bulovoj algebri sa m elemenata, $m \in \mathbb{N}$?*

Rešenje.

Na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$, n-arne operacije su preslikavanja $B^n \to B$, a pošto je u ovom slučaju $|B| = m$, broj takvih preslikavanja iznosi ukupno m^{m^n} (to je broj raspreda m elemenata na m^n mesta). Budući da konačna Bulova algebra ima 2^k elemenata, tih operacija ima $2^{k(2^k)^n}$, gde je k broj atoma date Bulove algebre. □

ZADATAK 2.16. *Pokazati da je skup svih Bulovih funkcija sa n promenljivih definisanih na proizvoljnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ ($\neq \mathcal{B}_2$), pravi podskup skupa svih n-arnih operacija na $\mathcal{B}$.*

Rešenje.

Uputstvo. Rešenje direktno sledi iz prethodna dva zadatka. □

ZADATAK 2.17. *Data je Bulova algebra $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup, \bar{}, \emptyset, S)$, gde je $S = \{a, b\}$. Koliko ima binarnih operacija na $\mathcal{P}(S)$ koje nisu i Bulove funkcije sa dve promenljive? Navesti neke od njih.*

Rešenje.

Binarnih operacija na $\mathcal{P}(S)$ ima $4^{4^2} = 4^{16}$, a broj Bulovih funkcija sa dve promenljive je $2^{2^2} = 16$. Budući da je svaka Bulova funkcija sa dve promenljive i binarna operacija, sledi da operacija koje nisu i Bulove funkcije

$$4^{16} - 16 = 4294967280.$$

Binarne operacije koje nisu i Bulove funkcije su, između ostalih, one koje uređenim parovima iz skupa $\{\emptyset, \{a, b\}\}$ pridružuju kao sliku skup $\{a\}$ ili skup $\{b\}$. Zaista, sve Bulove funkcije sa dve promenljive, kada se odgovarajući Bulovi termi (KDF) formulišu terminima ove skupovne Bulove algebre, imaju oblik

$$f(x, y) = (k_1 \cap x \cap y) \cup (k_2 \cap \bar{x} \cap y) \cup (k_3 \cap x \cap \bar{y}) \cup (k_4 \cap \bar{x} \cap \bar{y}),$$

gde $k_1, \dots, k_4 \in \{\emptyset, \{a,b\}\}$ (ovo je KDF interpretirana na jeziku date skupovne Bulove algebre; umesto 0 i 1, ovde su konstante označene redom sa $\emptyset$ i $\{a,b\}$).

Sada za bilo koju binarnu operaciju za koju je ispunjeno $f(\emptyset,\emptyset) = \{a\}$, zamenjivanjem $x = \emptyset$ i $y = \emptyset$ u term koji odgovara Bulovoj funkciji, dobija se

$$f(\emptyset,\emptyset) = (k_1 \cap \emptyset \cap \emptyset) \cup (k_2 \cap \emptyset \cap \{a,b\}) \cup (k_3 \cap \{a,b\} \cap \emptyset) \cup (k_4 \cap \{a,b\} \cap \{a,b\}) = k_4,$$

tj. dobija se $k_4 = \{a\}$, što je u kontradikciji sa $k_i \in \{\emptyset, \{a,b\}\}$.

Do rešenja se može doći i direktno: dvoelementna Bulova podalgebra koja sadrži najmanji i najveći elemenat polazne algebre, zatvorena je u odnosu na operacije, pa tako $f(\emptyset,\emptyset)$ može biti isključivo jedan od elemenata skupa $\{\emptyset, \{a,b\}\}$. □

2. Operacije na skupu $\{0,1\}$

2.1. Funkcionalno potpuni skupovi (sistemi). Baze. U tabelama koje slede navedene su sve unarne i binarne operacije na skupu $\{0,1\}$, nosaču Bulove algebre $\mathcal{B}_2$.

x	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Teorema 2.13. *Broj različitih n-arnih operacija na skupu $\{0,1\}$ je 2^{2^n}.*

Dokaz. Broj različitih nizova nula i jedinica koje se raspoređuju na mesta n promenljivih je 2^n. Broj mogućih rasporeda elemenata 0 i 1 na tih 2^n mesta je zato 2^{2^n}. ■

Prema teoremi 2.6, sve operacije na skupu $\{0,1\}$ su Bulove, tj. za svaku takvu operaciju postoji odgovarajući Bulov term.

Od ukupno 20 funkcija sa jednom i dve promenljive navedenih u gornjim tablicama, neke se koriste češće od drugih, pa imaju i posebna imena i oznake. Ti nazivi i oznake delom potiču iz logike, kao imena pojedinih funkcija u iskaznoj algebri. Tako je g_3 negacija ili komplement ($'$), f_2 konjunkcija ($\wedge$), f_8 disjunkcija ($\vee$), f_{12} i f_{14} su redom implikacije $y \Rightarrow x$ i $x \Rightarrow y$, f_{10} je ekvivalencija ($\Leftrightarrow$), a f_9 i f_{15} se zovu redom Lukasijevičeva (oznaka $\downarrow$) i Šeferova (oznaka $|$)) funkcija.

Na osnovu teoreme 2.7, sve n-arne operacije na skupu $\{0,1\}$, za svako n, mogu se izraziti (putem superpozicije) uz pomoć g_3, f_2 i f_8. Zaista tim funkcijama odgovaraju redom simboli $'$, $\wedge$ i $\vee$ u KDF. Ima i drugih funkcija iz gornje dve tablice koje omogućuju predstavljanje svih operacija na dvoelementnom skupu.

U nastavku se u superpozicijama ovih 20 funkcija $(g_1,\dots,g_4,f_1,\dots,f_{16})$ koriste spomenute oznake. Na primer, umesto $f_{14}(g_3(x),y)$, koristimo izraz $x' \Rightarrow y$, umesto $f_{15}(f_{15}(x,x),f_{15}(y,y))$ pišemo $(x \mid x) \mid (y \mid y)$ i slično.

Po definiciji, **funkcionalno kompletan** (**potpun**) **skup** (**sistem**) **operacija** na $\{0,1\}$ sastoji se iz operacija kojima se mogu izraziti sve ostale. Prema gornjem, $\{g_3,f_2,f_8\}$ je jedan takav skup. Ako se iz funkcionalno potpunog skupa $\mathcal{F}$ ne može ukloniti nijedna operacija a da on ostane funkcionalno potpun, tada se $\mathcal{F}$ naziva **baza** za operacije na $\{0,1\}$. Ovde govorimo o bazama koje čine funkcije sa jednom i dve promenljive (ali se uz pomć njih reprezentuju funkcije sa proizvoljnim brojem promenljivih).

Na osnovu De Morganovih zakona, jedna od dve binarne operacije iz skupa $\{g_3,f_2,f_8\}$ može se ukloniti, tako da preostali skup ostane potpun. Zato su $\{g_3,f_2\}$ i $\{g_3,f_8\}$ takođe funkcionalno potpuni sistemi operacija. Oni su i baze, jer se daljim uklanjanjem operacija gubi svojstvo potpunosti (zadatak 2.22).

Postoje i jednoelementne baze; čine ih Lukasijevičeva operacija f_9 i Šeferova f_{15}.

Zaista, pomoću uobičajenih oznaka $x \downarrow y$ za Lukasijevičevu operaciju $f_9(x,y)$ i $x \mid y$ za Šeferovu f_{15}, formulišu se jednakosti

$$\begin{aligned} x' &= x \downarrow x \qquad & x \wedge y &= (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\\ x' &= x \mid x \qquad & x \vee y &= (x \mid x) \mid (y \mid y) \end{aligned}$$

čija se tačnost lako proverava na osnovu tablica. S obzirom da su $\{', \wedge\}$ i $\{', \vee\}$ baze, iz gornjih jednakosti sledi da su $\{\downarrow\}$ i $\{\mid\}$ (tj. $\{f_9\}$ i $\{f_{15}\}$) isto baze funkcija na skupu $\{0,1\}$.

x	y	f_9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

x	y	f_{15}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Može se pokazati da ni jedna od četiri unarne funkcije g_1 - g_4 na skupu $\{0,1\}$ ne može biti jedini član neke baze (zadatak 2.23). U nastavku se pokazuje da su među funkcijama dve promenljive jedine jednoelementne baze dve gore navedene.

TVRĐENJE 2.14. *Među funkcijama $f_1 - f_{16}$ Lukasijevičeva i Šeferova su jedine jednoelementne baze operacija na skupu $\{0,1\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{f\}$ baza, gde je $f \in \{f_1,\dots,f_{16}\}$. Tada je $f(1,1)=0$, jer bi u slučaju $f(1,1)=1$, svaka superpozicija ove funkcija imala vrednost 1 za par $(1,1)$, pa ne bi bilo moguće izraziti negaciju. Iz istog razloga mora biti $f(0,0)=1$.

Preostale su još vrednosti $f(1,0)$ i $f(0,1)$. Ako su obe 0, f je Lukasijevičeva operacija, a ako su obe 1 Šeferova. I poslednje dve mogućnosti:

a) Ako je $f(1,0)=1$, a $f(0,1)=0$, onda je $f(x,y)=y'$. Direktno se proverava da se uz pomoć te funkcije dobijaju samo one koje se opisuju termima x, x', y i y'. U ovom slučaju $\{f\}$ nije baza.

b) Slično je i za $f(1,0)=0$, a $f(0,1)=1$, jer je tada $f(x,y)=x'$, pa $\{f\}$ ponovo nije baza. ■

Napomena. Može se pokazati ([**8**]) da u skupu od 20 funkcija sa jednom i dve promenljive, pored dve jednočlane, ima tačno 34 dvočlane i 10 tročlanih baza.

2.2. Polje GF(2). U tablicama koje slede, funkcije f_7 i f_2 predstavljene su kao operacije na skupu $\{0,1\}$ i označene su redom sa „$\oplus$“ i „ $\cdot$ “. Ove operacije ne obrazuju potpun sistem (zadatak 2.21), ali je na poseban način moguće uz pomoć njih predstaviti sve operacije na skupu $\{0,1\}$.

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Primetimo da je druga operacija („$\cdot$“) ranije u tekstu označena sa „$\wedge$“. Ovde se naglašava njena interpretacija kao množenje jednocifrenih binarnih brojeva.

Razmotrimo prvo skup $\{0,1\}$ zajedno sa spomenute dve binarne operacije, kao algebarsku strukturu.

Teorema 2.15. *Struktura* $(\{0,1\},\oplus,\cdot)$ *je polje.*

Dokaz. Neposrednom proverom može se utvrditi da je za sve $x,y,z\in\{0,1\}$ ispunjeno

$$x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z,$$

tj. da je operacija $\oplus$ asocijativna. Tačno je i

$$x\oplus 0=0\oplus x=x,$$

pa je 0 neutralni elemenat za $\oplus$, a zbog

$$x\oplus x=0,$$

svaki elemenat je sam sebi inverzni. Zato je skup $\{0,1\}$ grupa u odnosu na $\oplus$. Ta grupa je Abelova, jer važi

$$x\oplus y=y\oplus x.$$

Izostavljanjem nule tablica druge operacije svodi se na $1\cdot 1=1$, pa je skup $\{0,1\}$ bez nule trivijalno Abelova grupa.

Dalje se direktno proverava distributivnost druge prema prvoj operaciji:

$$\begin{aligned} x \cdot (y \oplus z) &= (x \cdot y) \oplus (x \cdot z) \\ (x \oplus y) \cdot z &= (x \cdot z) \oplus (y \cdot z) \end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano. ■

Ovu dvoelementnu algebarsku strukturu već smo sreli. To je u stvari Bulov prsten (odeljak 5 prethodne glave) sa dva elementa. Operacije u tom prstenu su upravo ovde navedene $\oplus$ i $\cdot$. Operacija $\oplus$ zove se *alternativa*, *ekskluzivna disjunkcija* (u logici), ili *simetrična razlika* (videti i odgovarajući Bulov term na str. 100, gde je ta operacija označena sa $+$). Druga operacija (množenje u prstenu) odgovara konjunkciji. Ovde se označava tačkom, a u pojedinim izrazima može biti izostavljena: na pr. umesto $(x \cdot y) \oplus 1$, pišemo $xy \oplus 1$, po analogiji sa operacijama u polju realnih brojeva.

Iz poslednjeg tvrđenja sledi da je ovaj prsten polje.

Polje $(\{0,1\}, \oplus, \cdot)$ označava se sa $\mathsf{GF}(2)$ (na engleskom, početna slova reči ***G****alois* ***F****ield* - *„polje Galua“*[2]).

Konstrukcija polinoma proizvoljnog stepena nad ovim poljem pojednostavljena je jednakostima

$$x \oplus x = 0 \quad \text{i} \quad x^2 = x \cdot x = x,$$

kao i distributivnim zakonima. Kako nema stepena većeg od 1, niti drugih koeficijenata sem 0 i 1, polinom

$$a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_1 x \oplus a_0$$

se svodi na opšti oblik

$$g(x) = (a \cdot x) \oplus b, \quad a, b \in \{0,1\}.$$

Slično, opšti oblik polinoma sa dve promenljive (proizvoljnog stepena) ima oblik

$$f(x,y) = (a \cdot x \cdot y) \oplus (b \cdot x) \oplus (c \cdot y) \oplus d, \quad a, b, c, d \in \{0,1\}.$$

Variranjem koeficijenata utvrđuje se da ima četiri različita polinoma sa jednom promenljivom:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (0 \cdot x) \oplus 0 = 0 \\ g_2(x) &= (1 \cdot x) \oplus 0 = x \\ g_3(x) &= (1 \cdot x) \oplus 1 = x \oplus 1 \\ g_4(x) &= (0 \cdot x) \oplus 1 = 1. \end{aligned}$$

Funkcije koje odgovaraju ovim polinomima su one iz prve tablice na strani 119.

[2] E. Galois, francuski matematičar, 1811-1832.

Slično, postoji 16 različitih polinoma sa dve promenljive (4 koeficijenta is skupa $\{0,1\}$). Na primer,

$$f(x,y) = (x \cdot y) \oplus x \oplus y$$

je polinom koji odgovara disjunkciji. Ovaj polinom i polinom $g_3 = x \oplus 1$ formiraju jednu bazu, opisanu u prethodnom odeljku. To pokazuje da se sve operacije na skupu $\{0,1\}$ mogu izraziti preko polinoma nad poljem $\mathsf{GF}(2)$, odnosno pomoću operacija $\oplus$ i $\cdot$ i konstante 1 (dakle, ne *samo* superpozicijom dve operacije iz polja; zato skup $\{\oplus, \cdot\}$ nije potpun sistem).

Funkcije koje odgovaraju gore spomenutim polinoma sa dve promenljive su one iz druge tablice na strani 119.

Primer 2.16. Kao što svaki polinom sa dve promenljive određuje jednu od 16 binarnih operacija na skupu $\{0,1\}$, tako se može i obratno, odrediti polinom koji odgovara nekoj od tih operacija. Ovde se određuje polinom koji odgovara ekvivalenciji, f_{10}.

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= (a \cdot 0 \cdot 0) \oplus (b \cdot 0) \oplus (c \cdot 0) \oplus d = 1\\
f(0,1) &= (a \cdot 0 \cdot 1) \oplus (b \cdot 0) \oplus (c \cdot 1) \oplus d = 0\\
f(1,0) &= (a \cdot 1 \cdot 0) \oplus (b \cdot 1) \oplus (c \cdot 0) \oplus d = 0\\
f(1,1) &= (a \cdot 1 \cdot 1) \oplus (b \cdot 1) \oplus (c \cdot 1) \oplus d = 1.
\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
&& d &= 1\\
c \oplus d = 0 &\quad \text{tj.} & c &= 1\\
b \oplus d = 0 &\quad \text{tj.} & b &= 1\\
a \oplus b \oplus c \oplus d = 1, &\quad \text{tj.} & a &= 0,
\end{aligned}$$

pa se dobija polinom

$$f(x,y) = x \oplus y \oplus 1.$$ □

2.3. Dopune i zadaci.

Zadatak 2.18. *Sve Bulove funkcije nad $\mathcal{B}_2$ mogu se superpozicijom izraziti preko negacije, konjunkcije i disjunkcije.*

Rešenje.

Sledi iz teorema 2.6 i 2.7 na stranama 109 i 110. Zaista, svaka Bulova funkcija (osim one koja je identički jednaka nuli) je jednaka funkciji koja odgovara termu u obliku KDF, a term u KDF ima samo negaciju, konjunkciju i disjunkciju kao operacijske znakove. Ako je funkcija identički jednaka nuli, ona odgovara termu $x \wedge x'$. □

Zadatak 2.19. *Sve Bulove funkcije nad $\mathcal{B}_2$ mogu se izraziti preko*

a) *negacije i konjunkcije;*

b) *negacije i disjunkcije;*

c) *negacije i implikacije.*

Rešenje.

a) Sledi iz formule (5) pošto se disjunkcija može superpozicijom izraziti preko negacije i konjunkcije (na osnovu De Morganovog zakona):

$$x \vee y = (x' \wedge y')'. \tag{5}$$

b) Sledi iz drugog De Morganovog zakona: $x \wedge y = (x' \vee y')'$.

c) Sledi iz činjenice da se konjunkcija i disjunkcija mogu izraziti superpozicijom preko negacije i implikacije koristeći formule

$$x \wedge y = (x \Rightarrow y')' \ \text{ i } \ x \vee y = x' \Rightarrow y. \qquad \square$$

Zadatak 2.20. *Napisati izraz $x \wedge y'$ u bazi*

a) $\{\,|\,\}$; **b)** $\{\downarrow\}$.

Rešenje.

a) $p \wedge q = (p \mid q) \mid (p \mid q)$,
$p' = p \mid p$.

Sledi

$$x \wedge y' = x \wedge (y \mid y) = (x \mid (y \mid y)) \mid (x \mid (y \mid y)).$$

b) $p \wedge q = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$,
$p' = p \downarrow p$.

Dobija se

$$x \wedge y' = x \wedge (y \downarrow y) = (x \downarrow x) \downarrow ((y \downarrow y) \downarrow (y \downarrow y)). \qquad \square$$

Zadatak 2.21. *Pokazati da funkcije f_2 i f_7 ne obrazuju funkcionalno potpun sistem.*

Rešenje.

Funkcija f_2 se obeležava još i sa $\wedge$ ili $\cdot$ i to je konjunkcija, a funkcija f_7 sa $\oplus$ i to je alternativa ili isključna disjunkcija. Te dve operacije ne obrazuju funkcionalno potpun sistem, jer za njih važi $0 \wedge 0 = 0$ i $0 \oplus 0 = 0$. Zato za svaku funkciju f dve promenljive koja se dobija superpozicijom navedenih funkcija važi $f(0,0) = 0$. Dakle, bilo koja funkcija f za koju je ispunjeno $f(0,0) = 1$ (takva je na primer implikacija, $\Rightarrow$) ne može superpozicijom da se izrazi preko f_2 i f_7, pa ove funkcije ne obrazuju funkcionalno potpun sistem. $\square$

Zadatak 2.22. *Dokazati da se nijedna od operacija u skupovima $\{g_3, f_2\}$ i $\{g_3, f_8\}$ (funkcije su iz tablica na str. 119) ne može ukloniti, a da preostali jednoelementni skup čini bazu.*

Rešenje.

Prema teoremi 2.14, jedine jednoelementne baze su Lukasijevičeva operacija f_9 i Šeferova f_{15}. Dakle, $\{f_2\}$ i $\{f_8\}$ nisu baze. $\{g_3\}$ (negacija) takođe nije baza, jer iz $(x')' = x$ sledi da se superpozicijom isključivo negacije mogu dobiti samo funkcije predstavljene izrazima x' i x. □

ZADATAK 2.23. *Dokazati da ne postoji jednočlana baza sa funkcijom jedne promenljive.*

Rešenje.

Ako je za funkciju g jedne promenljive ispunjeno $g(0) = 0$ ili $g(1) = 1$, onda se njenom suprepozicijom ne može predstaviti funkcija koja preslikava 0 u 1 i obratno. Dakle, jedini eventualni kandidat za bazu bila bi negacija, a ona to nije prema prethodnom zadatku. □

ZADATAK 2.24. *Pokazati da* $\{\Rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow\}$ *nije funkcionalno kompletan sistem (pa prema tome nijedan podskup tog skupa takođe nije funkcionalno potpun).*

Rešenje.

Pošto je $1 \Rightarrow 1 = 1$, $1 \vee 1 = 1$, $1 \wedge 1 = 1$, i $1 \Leftrightarrow 1 = 1$, svaka superpozicija operacija iz skupa $\{\Rightarrow, \wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$ primenjena na elemenat 1 uvek daje 1, pa se negacija ne može predstaviti preko tog sistema. □

ZADATAK 2.25. *Pokazati da*

a) $\{\,', \Leftrightarrow\}$ *i*

b) $\{\,', \oplus\}$

nisu funkcionalno kompletni sistemi (baze).

Rešenje.

a) Pokazuje se da svaka funkcija sa bar dve promenljive sačinjena superpozicijom operacija $'$ i $\Leftrightarrow$ dobija paran broj puta vrednost 1 (za različite vrednosti promenljivih). Dokaz se izvodi indukcijom po broju veznika $'$ i $\Leftrightarrow$.

Za $k = 1$ tvrđenje očito važi. Pretpostavi se da ovo tvrdjenje važi za svako $k < n$, i pokazuje se da ono važi za n. Ako tvrđenje važi za neku formulu A, očigledno je da važi i za A'. Ako važi za neke formule A i B sa manje od n veznika $'$ i $\Leftrightarrow$, tada važi i za $A \Leftrightarrow B$. Ako je t broj Bulovih promenljivih, onda je $p = 2^t$ broj različitih vrednosti promenljivih. Neka je j broj mogućnosti za koje A ima vrednost 1, a k broj mogućnosti za koje B ima vrednost 1. $A \Leftrightarrow B$ ima vrednost 1 ako i samo ako A i B imaju oba vrednost 1 (m slučajeva), ili A i B imaju oba vrednost 0 (s slučajeva). Sada je $j + k - m = p - s$ odakle $j + k - p = m - s$. Pošto su j, k i p parni brojevi sledi da je $m - s$ paran broj, tj. m i s su iste parnosti. Odatle je i $m + s$ paran broj, a to je broj slučajeva u kojima $A \Leftrightarrow B$ ima vrednost 1.

b) Pošto je $x \Leftrightarrow y = (x \oplus y)'$, kad bi $\{\,', \oplus\}$ bio funkcionalno kompletan sistem, bio bi to i $\{\,', \Leftrightarrow\}$, što nije slučaj (dokazano pod a)). □

ZADATAK 2.26. *Dokazati da se konjunkcija ne može prikazati samo superpozicijom implikacije.*

Rešenje.

Dokazuje se indukcijom po broju implikacija u toj formuli.

Za $k = 1$, $x \wedge y$ je različito od $x \Rightarrow y$, $y \Rightarrow x$ i $x \Rightarrow x$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule dobijene superpozicijom manje od n implikacija, tj. da $x \wedge y$ nije ekvivalentno sa takvom formulom. Neka je A formula sa tačno n implikacija. Ona je oblika $B \Rightarrow C$, gde su B i C formule sa manje od n implikacija, pa za njih važi indukcijska pretpostavka. Pretpostavimo da je A formula koja određuje funkciju - konjunkciju. Tada je $A(1,1) = 1$, $A(1,0) = 0$, $A(0,1) = 0$ i $A(0,0) = 0$. Pošto je A oblika $B \Rightarrow C$, sledi da je $B(1,1) = 1$ i $C(1,1) = 1$ (uvek, jer se B i C sastoje samo od implikacija), i $B(1,0) = 1$, $C(1,0) = 0$, $B(0,1) = 1$, $C(0,1) = 0$, $B(0,0) = 1$ i $C(0,0) = 0$. Može se uočiti da formula C određuje konjunkciju, što nije moguće po induktivnoj pretpostavci. Znači da ni A ne određuje konjunkciju, pa je tvrđenje dokazano. □

ZADATAK 2.27. *Dokazati da se ekvivalencija ne može izraziti superpozicijom samo implikacije.*

Rešenje.

Pokazuje se slično kao u prethodnom zadatku, a koristi se i tvrđenje iz prethodnog zadatka - da se konjunkcija ne može prikazati superpozicijom samo implikacije. □

ZADATAK 2.28. *Dokazati da se disjunkcija može dobiti superpozicijom implikacije.*

Rešenje.

Sledi iz činjenice da je disjunkcija $x \vee y$ ekvivalentna sa izrazom

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow y. \qquad \square$$

ZADATAK 2.29. *Sledećom tablicom definisane su binarne operacije & i $*$ na skupu $\{0,1\}$:*

x	y	$x\&y$	$x*y$
1	1	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	0	1

Da li je $\{\&, *\}$ funkcionalno kompletan sistem?

Rešenje.

Nije! Može se primetiti da je $x\&y = y$, a $x * y = x'$. Neka je $F(x,y)$ proizvoljni izraz sastavljen od operacija & i $*$. Indukcijom po broju operacijskih simbola u izrazu može se dokazati da je:

$$F(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ili} \\ x', & \text{ili} \\ y, & \text{ili} \\ y', & . \end{cases}$$

Za $n = 1$ mogući izrazi su $x\&y$, $y\&x$, $x * y$ i $y * x$, koji su redom jednaki y, x, x', y'.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki izraz sa manje od n operacijskih simbola. Neka je $F(x,y)$ izraz sa n operacijskih simbola. Tada su moguća dva slučaja:

$$a)\ F(x,y) = G(x,y)\&H(x,y) \quad \text{ili} \quad b)\ F(x,y) = G(x,y) * H(x,y),$$

gde su $G(x,y)$ i $H(x,y)$ izrazi sa manje od n operacijskih simbola, pa za njih važi induktivna pretpostavka. Zato je:

$$G(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ili} \\ x', & \text{ili} \\ y, & \text{ili} \\ y', & \end{cases}$$

i

$$H(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ili} \\ x', & \text{ili} \\ y, & \text{ili} \\ y', & . \end{cases}$$

U oba slučaja a) i b), ispitivanjem svih kombinacija dobija se da su moguće samo te četiri mogućnosti i za $F(x,y)$.

Sledi da $\{\&, *\}$ nije funkcionalno kompletan sistem, jer se preko tih operacija ne mogu izraziti sve Bulove funkcije nad $\mathcal{B}_2$ (na primer konjunkcija, disjunkcija, itd.). □

Zadatak 2.30. *Ako je $x \oplus y = z$, onda je*

a) $x \oplus z = y$;

b) $y \oplus z = x$;

c) $x \oplus y \oplus z = 0$. *Dokazati.*

Rešenje.

Pošto je $x \oplus x = 0$ (jer je $1 \oplus 1 = 0$ i $0 \oplus 0 = 0$) dodavanjem y ($\oplus$) levoj i desnoj strani jednakosti $x \oplus y = z$ dobija se $x = y \oplus z$, na osnovu komutativnih i asocijativnih zakona. Dodavanjem z levoj i desnoj strani poslednje jednakosti dobije se jednakost pod a), a dodavanjem z početnoj jednakosti dobija se jednakost pod c). □

ZADATAK 2.31. *Dokazati:*
a) $x \oplus y = (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$;
b) $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y')$.

Rešenje.
Uputstvo. Razviti funkciju $x \oplus y$ u KDF i KKF. □

ZADATAK 2.32. *Napisati polinome nad $GF(2)$ koji odgovaraju funkcijama datim sledećim tablicama:*

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1

Rešenje.
Opšti oblik polinoma sa dve promenljive nad $GF(2)$ je

$$f_1(x, y) = axy \oplus bx \oplus cy \oplus d.$$

U nastavku se određuju koeficijenti a, b, c i d prema datoj funkciji u tablici.

$$\begin{aligned} f_1(1,1) &= a \oplus b \oplus c \oplus d = 0 \\ f_1(1,0) &= b \oplus d = 1 \\ f_1(0,1) &= c \oplus d = 1 \\ f_1(0,0) &= d = 1. \end{aligned}$$

Sledi $d = 1$. Iz $c \oplus d = 1$ sledi $c = 0$. Iz $b \oplus d = 1$ sledi $b = 0$. Iz $a \oplus b \oplus c \oplus d = 0$, sledi $a = 1$, pa je traženi polinom:

$$f_1(x, y) = xy \oplus 1.$$

Na sličan način određuju se drugi traženi polinomi u zadatku:

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= xy \oplus y \oplus 1; \\ f_3(x, y) &= xy \oplus y; \\ f_4(x, y) &= x \oplus 1. \end{aligned}$$

□

ZADATAK 2.33. *Pokazati da $\{0,1\}^n$ nije polje u odnosu na operacije $\oplus$ i $\cdot$ (tim redom), ako se te operacije definišu kao istoimene, po koordinatama.*

Rešenje.
Uputstvo. Struktura $(\{0,1\}^n \oplus, \cdot)$ je komutativan prsten sa jedinicom $((1, \ldots, 1))$ i to se lako proverava. Nula tog prstena je $(0, \ldots, 0)$. Uočimo sledeći proizvod:

$$(1, 0, 0, \ldots, 0) \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) = (0, 0, 0, \ldots, 0).$$

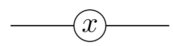
Sledi da postoje delitelji nule, pa $(\{0,1\}^n, \oplus, \cdot)$ ne može biti polje.[3] $\square$

3. Prekidačka i logička kola

3.1. Serijsko paralelna kola. Ovde se opisuje jedna interpretacija Bulovih funkcija na $\mathcal{B}_2$ kao strujnih kola (ili kola nekog drugog protoka). U ovoj interpretaciji smatramo da **Bulova promenljiva** x uzima vrednosti iz skupa $\{0,1\}$.

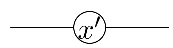
Prekidač - dvopozicioni relej je objekat u kolu koji propušta ili ne propušta (struju).

Bulovu promenljivu x interpretiramo kao prekidač u kolu i predstavljamo na sledeći način:



Po dogovoru, protok u kolu je sleva na desno, a prekidač propušta ako promenljiva x koja mu odgovara dobije vrednost 1, a ne propušta za vrednost promenljive 0.

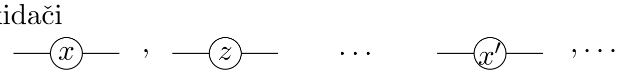
U skladu sa definicijom unarne operacije u Bulovoj algebri, prekidač



propušta ako i samo ako prekidač koji odgovara promenljivoj x ne propušta i obratno.

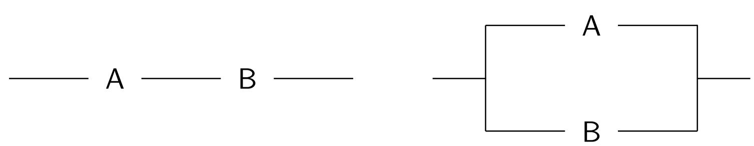
Više prekidača povezanih provodnicima (linijama na crtežu) smatramo za **serijsko-paralelno prekidačko kolo**, u nastavku kraće **kolo**, i to definišemo rekurzivno na sledeći način:

a) Prekidači



su kola.

b) Ako su A i B kola, onda su to i njihova serijska i paralelna veza, prikazane redom na sledeći način:



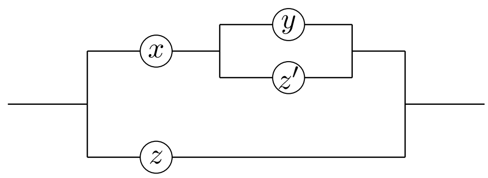
c) Kola se konstruišu samo uz pomoć konačnog broja primena pravila a) i b).

Ovako definisanim serijsko paralelnim kolima odgovaraju funkcije nad $\mathcal{B}_2$, kojima prema teoremi 2.6 (str. 109) odgovaraju Bulovi termi. Prekidači odgovaraju promenljivima (sa negacijskim znakom ili bez njega), a serijska i paralelna veza redom konjunkciji i disjunkciji. Prekidači propuštaju ili ne, u zavisnosti od vrednosti promenljivih (1 ili 0); kroz kolo prolazi struja

[3] U polju nema delitelja nule. Odista, iz $x \cdot y = 0$ posle množenja sa x^{-1} (ako je $x \neq 0$, x^{-1} postoji) dobija se $y = 0$, a posle množenja zdesna sa y^{-1} dobije se $x = 0$.

ako i samo ako za dati niz vrednosti promenljivih iz skupa $\{0, 1\}$ vrednost odgovarajuće term-funkcije iznosi 1.

PRIMER 2.17. Kolo na slici 2.1 odgovara termu $(x \wedge (y \vee z')) \vee z$.



Slika 2.1

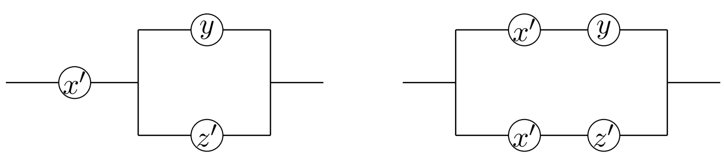
Analizom kola uočava se da ono ne propušta struju ako i samo ako prekidači koji odgovaraju promenljivima x i z ne propuštaju, nezavisno od toga da li prekidač koji odgovara y propušta ili ne. □

Ne mogu se svi Bulovi termi interpretirati kolima: unarna operacija (negacija) sme da stoji samo uz promenljivu, ne može biti negiran ceo term ili neki njegov deo. Ovo ne umanjuje opštost, jer se De Morganovim zakonima sve negacije mogu dovesti do pojedinačnih pojavljivanja promenljivih, a da odgovarajuće funkcije budu ekvivalentne.

PRIMER 2.18. Termu $(x \vee (y' \wedge z))'$ ne odgovara nijedno kolo, ali se na osnovu jednakosti

$$(x \vee (y' \wedge z))' = x' \wedge (y \vee z') = (x' \wedge y) \vee (x' \wedge z')$$

mogu konstruisati kola kojima se interpretiraju dva poslednja terma, odnosno term-funkcija koja je ista za sva tri terma (slika 2.2).



Slika 2.2 □

U realizaciji Bulovih terma kao prekidačkih kola, teži se pojednostavljivanju, tj. smanjivanju broja prekidača. Za dato kolo konstruiše se drugo, njemu ekvivalentno, sa manjim brojem prekidača. Pri tome su dva kola **ekvivalentna** ako važi: struja protiče kroz jedno ako i samo ako za iste položaje isto označenih prekidača protiče kroz drugo kolo. Ekvivalentnim kolima odgovaraju termi koji su jednaki kao funkcije nad $\mathcal{B}_2$. (Prema teoremi 2.12 (str. 112) jednakost takvih terma može se izvesti iz aksioma za Bulove algebre.) Na primer, kola na slici 2.2 su ekvivalentna, jer odgovaraju istoj term-funkciji, ali je prvo jednostavnije, jer ima manji broj prekidača.

PRIMER 2.19. Sistem etažnih prekidača za svetlo je primer prekidačkog kola. Prekidač na svakoj etaži (spratu) ima dva položaja koji menjaju stanje svetla u celom objektu: ako je svetlo ugašeno, promena položaja prekidača pali osvetljenje i obratno. Ako se osvetljenje (1 - svetli, 0 - ne svetli) izrazi kao funkcija položaja prekidača (1 i 0), onda sistemu od tri prekidača (tri etaže) odgovara funkcija predstavljena tablicom. Po dogovoru usvajamo da u položaju $(0, 0, 0)$ svetlo isključeno, pa su time određene ostale vrednosti funkcije.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

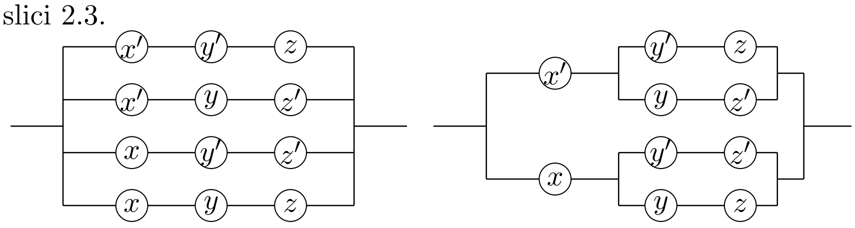
Bulov term koji odgovara ovoj funkciji jeste DF

$$F(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Term se može pojednostaviti primenom distributivnog zakona, pa se dobija

$$F(x, y, z) = (x' \wedge ((y' \wedge z) \vee (y \wedge z'))) \vee (x \wedge ((y' \wedge z') \vee (y \wedge z))).$$

Ekvivalentna kola koja redom odgovaraju ovim termima predstavljena su na slici 2.3.



Slika 2.3 □

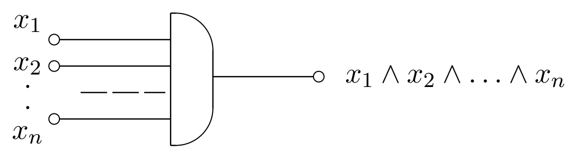
Sistematski postupci za pojednostavljivanje Bulovih terma izlažu se u odeljku 4 ove glave.

3.2. Logička kola. U osnovi digitalne tehnologije leži primena funkcija na dvoelementnom skupu. Koriste se objekti sa više ulaza koji vrednosti funkcija realizuju na izlazima. Svaki ulaz raspolaže sa dva stanja (na pr. ima - nema struje) i u zavisnosti od funkcije koja se realizuje, i izlaz je u jednom od dva stanja. Funkcije o kojima je reč su prema prethodnim izlaganjima term-funkcije na Bulovoj algebri $\mathcal{B}_2$. Princip rada objekata koji se koriste u ovoj realizaciji opisan je u nastavku.

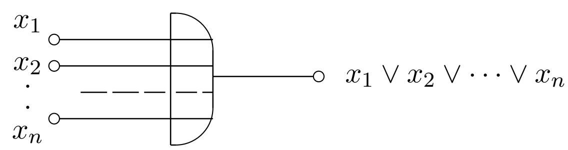
I-sklop je objekat u kolu (struje) sa dva ili više ulaza koji na izlazu realizuje konjunkciju. To znači da na izlazu ima struje ako i samo ako struje ima na svim ulazima. Shematski prikaz dat je na slici 2.4.

ILI-sklop je objekat sa dva ili više ulaza koji na izlazu realizuje disjunkciju. Predstavlja se kao na slici 2.5.

Na izlazu ima struje ako i samo ako struje ima na bar jednom ulazu.

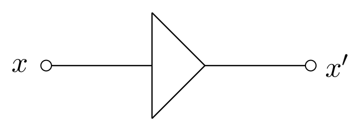


Slika 2.4



Slika 2.5

Invertor je objekat u kolu struje sa jednim ulazom i jednim izlazom, tako da je stanje na izlazu različito od onog na ulazu, tj. realizuje se negacija: na izlazu ima struje ako i samo ako je nema na ulazu. Shematski prikaz: slika 2.6.

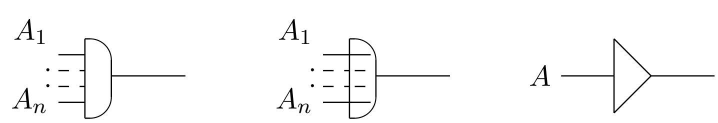


Slika 2.6

Definicija **logičkog kola**:

a) sklopovi (I, ILI i invertor) su logička kola;

b) Ako su A, A_1, A_2,…, A_n logička kola, onda su to i objekti povezani sklopovima kao na slici 2.7.



Slika 2.7

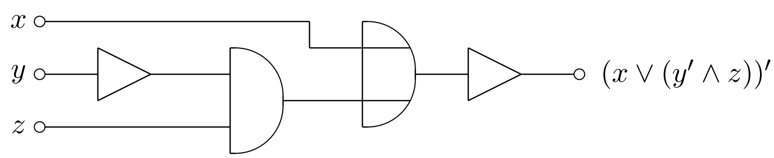
c) logička kola konstruišu se samo u konačnom broju koraka pravilima a) i b).

Interpretacija Bulovog terma logičkim kolom slična je kao kod prekidačkog kola. Promenljive odgovaraju ulazima, operacijski znaci logičkim sklopovima. Na izlazu ima struje ako i samo ako za date vrednosti ulaza odgovarajuća funkcija nad $\mathcal{B}_2$ ima vrednost 1.

Primer 2.20. Bulov term $(x \vee (y' \wedge z))'$ realizuje se logičkim kolom prikazanim na slici 2.8.

Ekvivalentna logička kola su ona koja realizuju jednake Bulove terme (tj. one koji imaju iste term-funkcije).

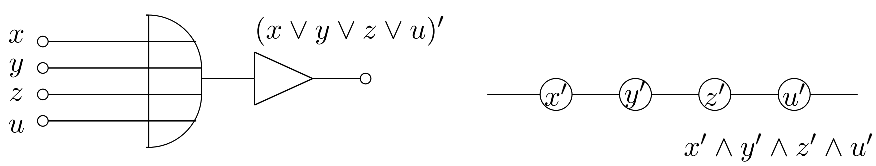
Kod prekidačkih kola realizuju se pojavljivanja promenljivih (one odgovaraju prekidačima), a kod logičkih kola oznake operacija, kao sklopovi. Zato se radi pojednostavljivanja logičkih kola traže Bulovi termi sa manjim brojem operacijskih znakova. Ograničenja na neki oblik terma, kao što je to slučaj sa prekidačkim kolima, nema za logička kola. Drugim rečima, svakom Bulovom termu odgovara logičko kolo.



Slika 2.8

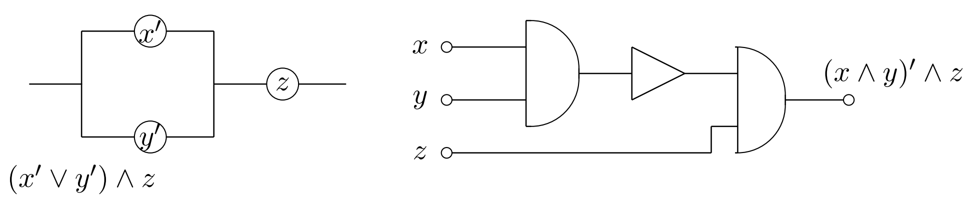
□

Primer 2.21. a) Za realizaciju terma $(x \vee y \vee z \vee u)'$ potrebna su dva logička sklopa; da bi se taj term realizovao prekidačkim kolom treba ga transformisati na oblik $x' \wedge y' \wedge z' \wedge u'$ u kome učestvuje četiri prekidača (slika 2.9).



Slika 2.9

b) Da bi se term $(x' \vee y') \wedge z$ realizovao kao prekidačko kolo, potrebno je tri prekidača, a u odgovarajućem logičkom kolu učestvuje četiri sklopa. Kada se taj term transformiše na oblik $(x \wedge y)' \wedge z$, realizuje se pomoću tri sklopa (slika 2.10).



Slika 2.10

□

3.3. Polusabirač i sabirač. Računanje sa brojevima u pozicionom binarnom sistemu realizuje se pomoću logičkih kola kao što je opisano u nastavku.

U priloženoj tabeli dato je sabiranje po modulu dva (alternativa) i ostatak - prenos u pozicionom sabiranju (konjunkcija).

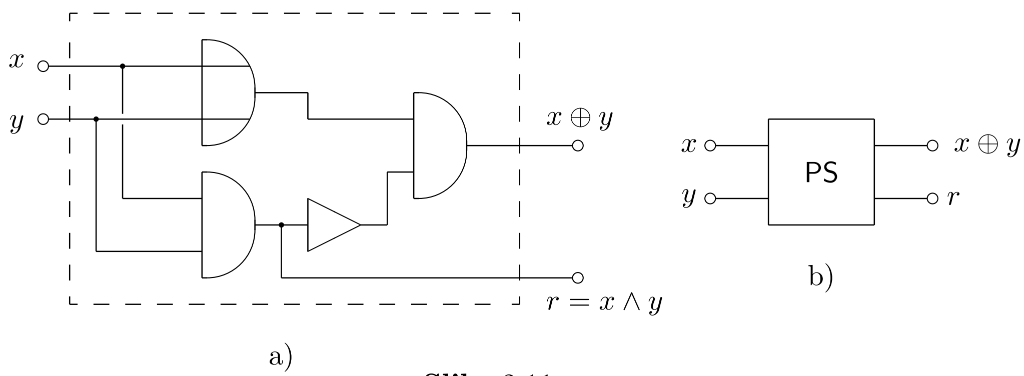
S obzirom da je

$$x \oplus y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)' \quad \text{i} \quad r = x \wedge y,$$

odgovarajuće logičko kolo kombinovano je iz dva, tj. ima dva izlaza (slika 2.11 a)).

x	y	$x \oplus y$	r
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Ovo kolo zove se **polusabirač** i skicira se shematski kao na slici 2.11 b) (*polu*-sabirač, jer ne može da uračuna eventualni ostatak od prethodnog sabiranja - prenos u pozicionom sistemu).



Slika 2.11

Složeniji sklop je onaj koji sabira tri jednocifrena binarna broja, pa tako može da sabere dva broja (x, y), uračuna prenos (z) i na izlazu da zbir ($x \oplus y \oplus z$) i novi prenos (R) (videti tablicu).

Odgovarajuće logičko kolo realizuje se kao zbir $x \oplus (y \oplus z)$, a ostatak R, koji je dat u nastavku, određuje se iz tablice kao kanonska disjunktivna forma (a zatim pojednostavi).

$$\begin{aligned} R &= (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z) \\ &= ((x \wedge y) \wedge (z \vee z')) \vee (z \wedge ((x' \wedge y) \vee (x \wedge y'))) \\ &= (x \wedge y) \vee (z \wedge ((x' \wedge y) \vee (x \wedge y'))). \end{aligned}$$

S obzirom da je

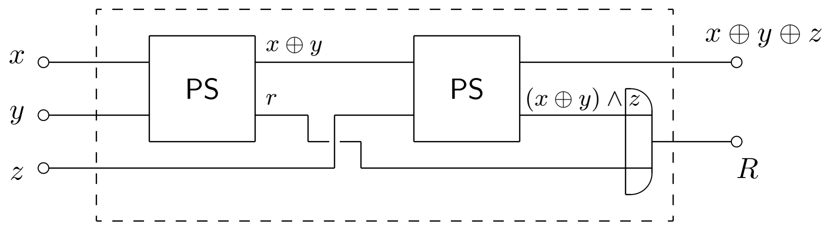
$$(x' \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \oplus y \quad \text{i} \quad x \wedge y = r,$$

gde je r ostatak - prenos, dobija se

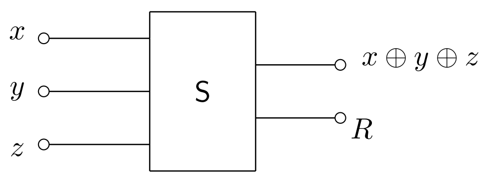
$$R = r \vee (z \wedge (x \oplus y)).$$

Tako se dolazi do logičkog kola prikazanog na slici 2.12. Taj sklop se zove **sabirač** i skicira se kao na slici 2.13.

x	y	z	$x \oplus y \oplus z$	R
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

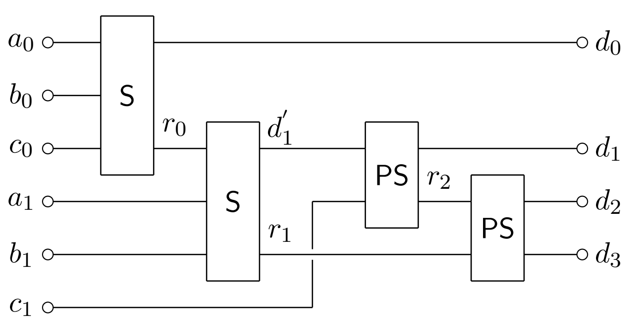


Slika 2.12



Slika 2.13

Polusabirač i sabirač (slike 2.11 b) i 2.13) koriste se kao osnovni sklopovi za konstruisanje složenijih logičkih kola.



Slika 2.14

Primer 2.22. Konstruišemo logičko kolo za sabiranje tri dvocifrena binarna broja u binarnoj notaciji. Pozicioni zapis tih brojeva u položaju za sabiranje je

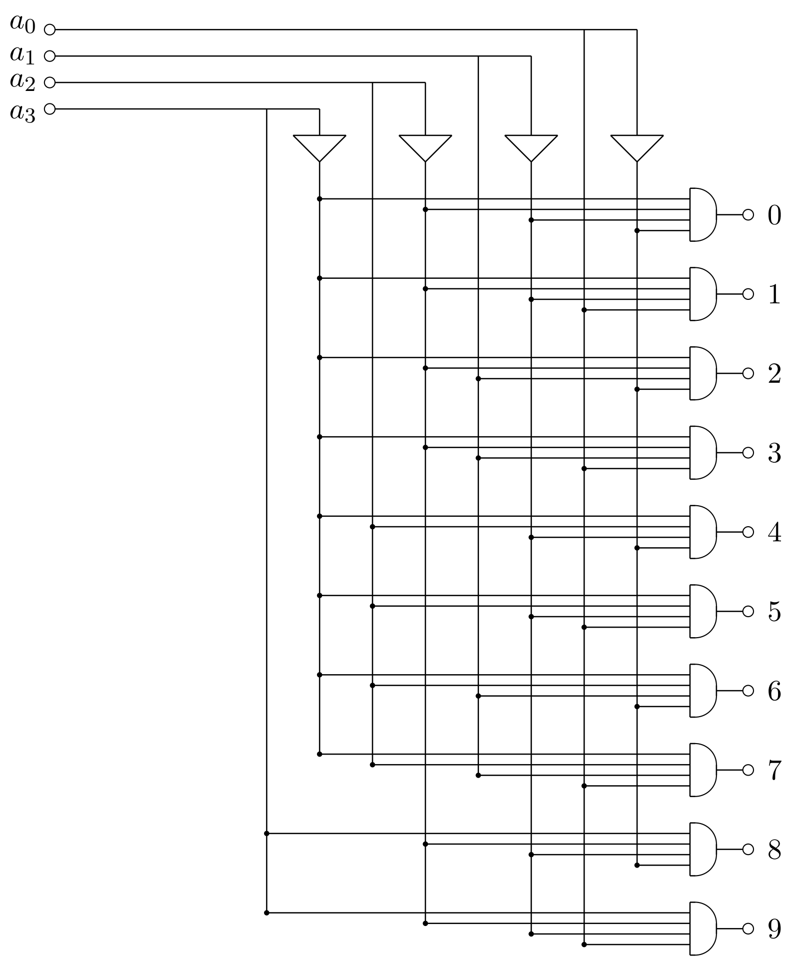
$$\begin{array}{cccc} & & a_1 & a_0 \\ & & b_1 & b_0 \\ & \oplus & c_1 & c_0 \\ \hline d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \end{array} \qquad \text{(na primer} \quad \begin{array}{cccc} & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & \oplus & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \text{)}.$$

(Četiri cifre predviđene su zbog najvećeg zbira, 9, tj. 1001.)

Algoritam za sabiranje je sledeći:

$$\begin{array}{rcll} a_0 \oplus b_0 \oplus c_0 & = & d_0 & \qquad (\text{prenos } r_0) \\ r_0 \oplus a_1 \oplus b_1 & = & d_1' & \qquad (\text{prenos } r_1) \\ d_1' \oplus c_1 & = & d_1 & \qquad (\text{prenos } r_2) \\ r_1 \oplus r_2 & = & d_2 & \qquad (\text{prenos } d_3) \end{array}$$

Sve to u obliku logičkog kola izgleda kao na slici 2.14. □



Slika 2.15

PRIMER 2.23. Sledi primer logičkog kola koje ilustruje konverziju binarno - decimalno (binaran kod u računaru, decimalno predstavljeni brojevi na displeju). Ovo logičko kolo ima četiri ulaza za proizvoljan binarno predstavljen broj $a_3a_2a_1a_0$ od nula do devet, tj. za izraze $0000, 0001, \ldots, 1001$. Postoji deset izlaza, svaki odgovara jednom od tih brojeva u decimalnom zapisu $(0, 1, \ldots, 9)$. Analizom kola može se ustanoviti da svakom od spomenutih binarnih brojeva na ulazu, odgovara (u smislu „ima struje“) tačno jedan izlaz - dekadna cifra (slika 2.15). □

3.4. Dopune i zadaci.

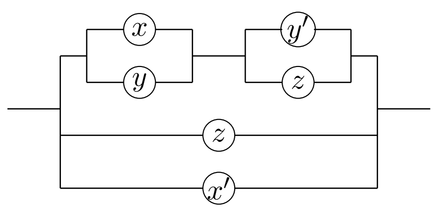
ZADATAK 2.34. *Konstruisati serijsko-paralelna kola koja odgovaraju Bulovim termima:*

a) $((x \vee y) \wedge (y' \vee z)) \vee (x' \vee z)$;

b) $(x \wedge y' \wedge (z \vee y)) \vee (x' \wedge (y \vee z))$.

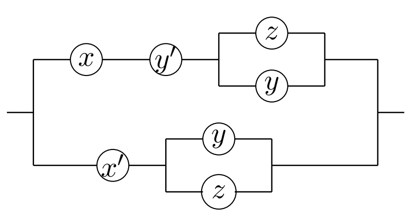
Rešenje.

a) Videti sliku 2.16.



Slika 2.16

b) Videti sliku 2.17.



Slika 2.17

□

ZADATAK 2.35. *Skicirati logičko kolo koje odgovara Bulovoj funkciji datoj termom:*

$$(x' \wedge y) \vee (y' \wedge z) \vee (z' \wedge x).$$

Rešenje.

Videti sliku 2.18. □

Zadatak 2.36. *Skicirati logičko kolo koje realizuje sabiranje dva četvorocifrena binarna broja.*

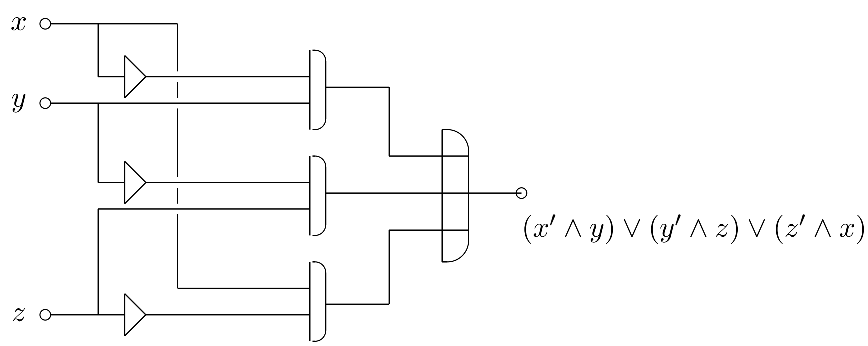
Rešenje.

Neka je pozicioni zapis tih brojeva u položaju za sabiranje:

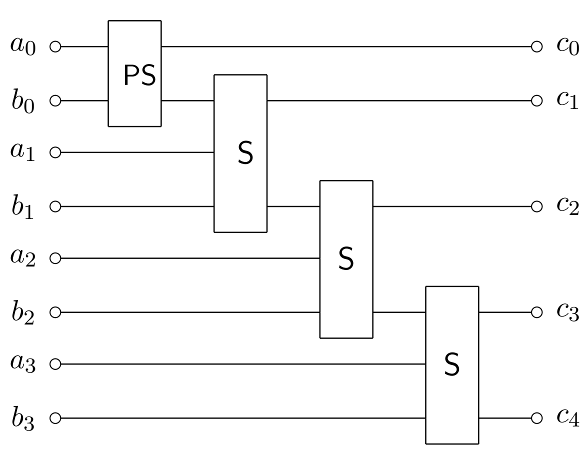
$$\begin{array}{ccccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ + & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \end{array}$$

Tada je:
$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \oplus b_0 && \text{(prenos } r_0\text{);} \\ c_1 &= a_1 \oplus b_1 \oplus r_0 && \text{(prenos } r_1\text{);} \\ c_2 &= a_2 \oplus b_2 \oplus r_1 && \text{(prenos } r_2\text{);} \\ c_3 &= a_3 \oplus b_3 \oplus r_2 && \text{(prenos } r_3\text{);} \\ c_4 &= r_3, \end{aligned}$$

pa logičko kolo izgleda kao na slici 2.19. □



Slika 2.18



Slika 2.19

ZADATAK 2.37. *Konstruisati logičko kolo koje realizuje množenje dva dvocifrena binarna broja.*

Rešenje.

U pozicionom zapisu[4] je

$$\overline{a_1a_0} \cdot \overline{b_1b_0} = \overline{c_3c_2c_1c_0}.$$

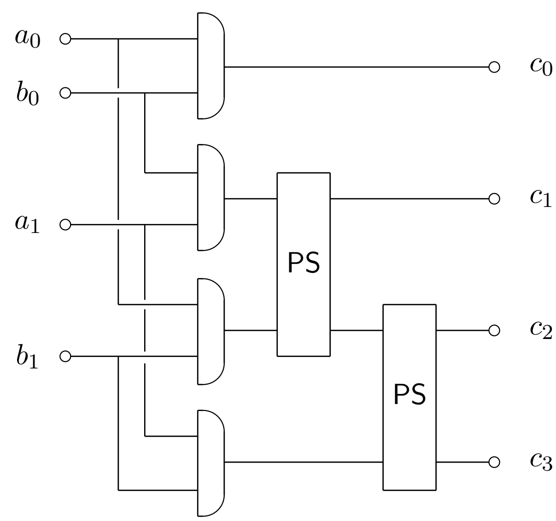
Sledi

$$(10a_1 + a_0) \cdot (10b_1 + b_0) = 100 \cdot a_1 \cdot b_1 + 10 \cdot (a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1) + a_0 \cdot b_0,$$

odakle je:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \cdot b_0; \\ c_1 &= a_1 \cdot b_0 \oplus a_0 \cdot b_1 \quad (\text{prenos } r_1)\ ; \\ c_2 &= a_1 \cdot b_1 \oplus r_1 \qquad (\text{prenos } r_2)\ ; \\ c_3 &= r_2, \end{aligned}$$

pa logičko kolo izgleda kao na slici 2.20.



Slika 2.20

□

ZADATAK 2.38. *Konstruisati logičko kolo koje realizuje sabiranje četiri jednocifrena binarna broja.*

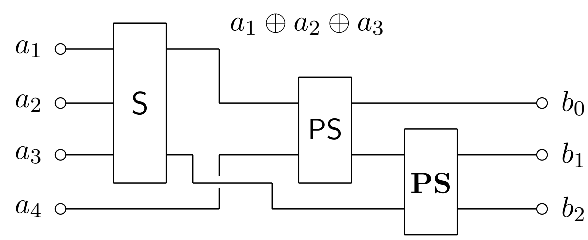
Rešenje.

Ako su $a_1, \ldots, a_4$ jednocifreni binarni brojevi, onda je

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \overline{b_2b_1b_0} \quad (\text{u pozicionom zapisu}).$$

[4]Ovde i dalje pozicioni zapis označen je nadvučeno.

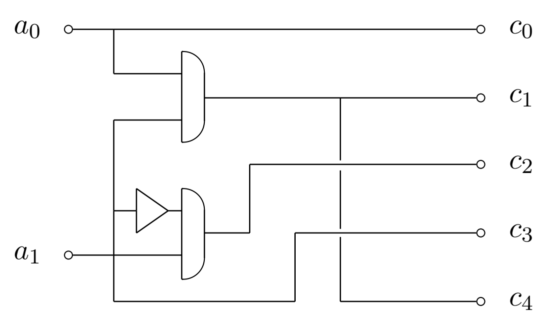
Uzimajući u obzir mogući prenos, skicira se logičko kolo kao na slici 2.21.
□



Slika 2.21

Zadatak 2.39. *Skicirati logičko kolo za određivanje trećeg stepena dvocifrenog binarnog broja.*

Rešenje.



Slika 2.22

Najveći broj koji može da se dobije na izlazu ovog kola je $11^3 = 11011$, pa moramo predvideti pet cifara na izlazu.

$$(\overline{a_1 a_0})^3 = \overline{c_4 c_3 c_2 c_1 c_0} \quad \text{(pozicioni zapis)}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
&(10 \cdot a_1 + a_0) \cdot (10 \cdot a_1 + a_0) \cdot (10 \cdot a_1 + a_0) \\
&\quad = 1000 \cdot a_1^3 + 100 \cdot (a_1^2 \cdot a_0 + a_1^2 \cdot a_0 + a_1^2 \cdot a_0) + \\
&\qquad 10 \cdot (a_1 \cdot a_0^2 + a_1 \cdot a_0^2 + a_1 \cdot a_0^2) + a_0^3 \\
&\quad = 1000 \cdot a_1 + 100 \cdot (a_1 \cdot a_0 + a_1 \cdot a_0 + a_1 \cdot a_0) + \\
&\qquad 10 \cdot (a_1 \cdot a_0 + a_1 \cdot a_0 + a_1 \cdot a_0) + a_0
\end{aligned}$$

(zbog idempotentnih zakona). Odatle je:

$c_0 = a_0$;

$c_1 = a_1 \cdot a_0 \oplus a_1 \cdot a_0 \oplus a_1 \cdot a_0 = a_1 \cdot a_0$;

$r_1 = a_1 \cdot a_0$ (zbog $x \oplus x = 0$ ovde se uvek dobija $a_1 \cdot a_0$, a i prenos je $a_1 \cdot a_0$);

$c_2 = a_1 \cdot a_0 \oplus a_1 \cdot a_0 \oplus a_1 \cdot a_0 \oplus r_1 = 0;$
$r_2 = 0;$
$r' = a_1 \cdot a_0$ (drugi prenos);
$c_3 = a_1$
$c_4 = r' = a_1 \cdot a_0.$

Odgovarajuće logičko kolo dato je na slici 2.22. □

ZADATAK 2.40. *Pokazati da logička kola na slikama 2.23 i 2.24 realizuju na izlazu istu Bulovu funkciju.*

Rešenje.

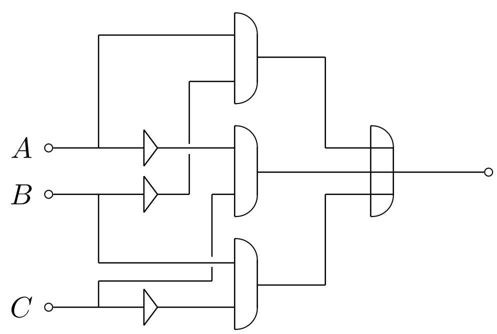
Logičko kolo na slici 2.23 realizuje funkciju datu termom

$$f_1(A,B,C) = (A \wedge B') \vee (A' \wedge C) \vee (B \wedge C'),$$

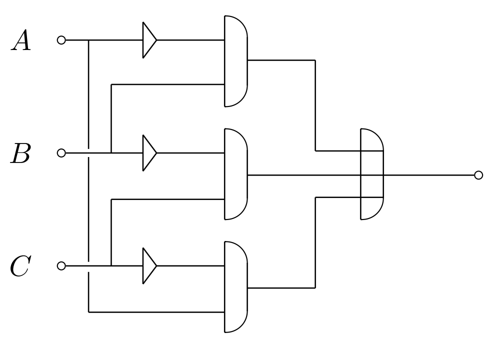
a logičko kolo na slici 2.24 realizuje funkciju

$$f_2(A,B,C) = (A' \wedge B) \vee (B' \wedge C) \vee (A \wedge C').$$

Tablicom se može proveriti da su f_1 i f_2 iste Bulove funkcije; ekvivalentno, mogu se oba terma transformisati na istu KDF. □



Slika 2.23

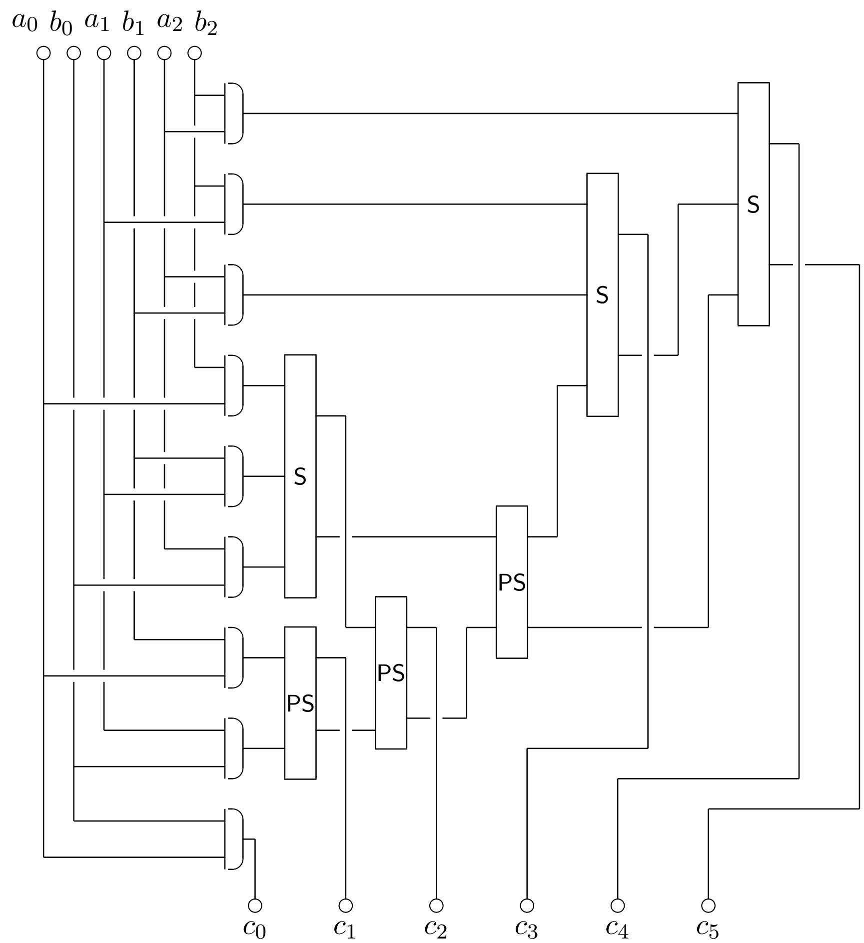


Slika 2.24

□

Zadatak 2.41. *Skicirati logičko kolo za množenje dva trocifrena binarna broja.*

Rešenje.



Slika 2.25

Odgovarajuće logičko kolo ima 6 ulaza i 6 izlaza, jer je najveći broj koji može da se pojavi na izlazu $111 \cdot 111 = 110001$.

Označimo te brojeve sa $\overline{a_2a_1a_0}$ i $\overline{b_2b_1b_0}$, a izlaz (rezultat) sa $\overline{c_5c_4c_3c_2c_1c_0}$. Tada je

$$(100a_2 + 10a_1 + a_0) \cdot (100b_2 + 10b_1 + b_0)$$
$$= 10000a_2b_2 + 1000(a_2b_1 + a_1b_2) + 100(a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_1) +$$
$$10(a_1b_0 + a_0b_1) + a_0b_0.$$

Odatle je

$c_0 \,=\, a_0b_0$

$c_1 \,=\, a_1b_0 \oplus a_0b_1$ prenos r_1

$d \,=\, a_2b_0 \oplus a_1b_1 \oplus a_0b_1$ prenos r_2

$c_2 = d \oplus r_1$ prenos r_3
$e = r_2 \oplus r_3$ prenos r_4
$c_3 = e \oplus a_2b_1 \oplus a_1b_2$ prenos r_5
$c_4 = a_2b_2 \oplus r_4 \oplus r_5$ prenos c_5.

Kolo je skicirano na slici 2.25. □

4. Minimizacija Bulovih funkcija

4.1. O problemu minimizacije. U osnovi funkcionisanja digitalnih sistema, kako je već spomenuto, jesu operacije na skupu $\{0,1\}$. U prethodnim odeljcima pokazano je da one odgovaraju Bulovim termima na algebri $\mathcal{B}_2$. Pored toga, te funkcije mogu se predstavljati i preko drugih funkcionalno potpunih sistema operacija, ili kao polinomi nad poljem $\mathsf{GF}(2)$. Digitalna tehnologija teži smanjivanju cene proizvodnje i dimenzija objekata putem kojih se realizuju ove funkcije. To znači da izrazi, termi kojima se opisuju funkcije treba da budu što jednostavniji, kaže se da ih treba *minimizovati*.

Problem pojednostavljivanja terma ovde razmatramo na jeziku Bulovih algebri. Minimizuju se tako Bulovi termi, a najjednostavniji oblici traže se u skupu disjunktivnih formi.

Postupaka za pojednostavljivanje Bulovih terma ima mnogo. Ovde se opisuju dva najpoznatija: Metod Kvajna i Mak Klaskog (Quine-McClaskey) i Karnoove tablice (Karnaugh).

4.2. Minimalna disjunktivna forma. Da bismo pojednostavili notaciju, u nastavku umesto oznake $\wedge$ koristimo tačku, $\cdot$, koju često izostavljamo. Po dogovoru smatramo da se prvo primenjuje operacija $\cdot$ a onda $\vee$, pa zato izostavljamo zagrade oko elementarnih konjunkcija. Tako pišemo $f \cdot F$ umesto $f \wedge F$, $x'y \vee z$ umesto $(x' \wedge y) \vee z$ i slično.

Minimizacija podrazumeva jasan dogovor o tome koji se od dva Bulova terma može smatrati jednostavnijim.

Zato, ako je F Bulov term u obliku DF, označimo sa

p_F - ukupan broj pojavljivanja promenljivih u F, a sa

k_F - ukupan broj elementarnih konjunkcija u F.

Primer 2.24. Za disjunktivnu formu

$$F(x,y,z) = xy \vee x'z \vee xz'$$

je prema gornjim definicijama $p_F = 6$, a $k_F = 3$. □

Neka su F_1 i F_2 Bulovi termi u obliku DF. F_1 je **jednostavniji** term od terma F_2, ako je $p_{F_1} \leqslant p_{F_2}$ i $k_{F_1} \leqslant k_{F_2}$, a bar jedna nejednakost je striktna ($<$).

PRIMER 2.25.

$$\begin{array}{rcll} F_1(x,y,z) & = & xyz' \vee xyz & p_{F_1}=6 \quad k_{F_1}=2 \\ F_2(x,y,z) & = & xy \vee z' \vee x'y & p_{F_2}=5 \quad k_{F_2}=3 \\ F_3(x,y,z) & = & x'y' \vee xy' & p_{F_3}=4 \quad k_{F_3}=2. \end{array}$$

Term F_3 je jednostavniji i od F_1 i od F_2, a F_1 i F_2 u tom smislu nisu uporedivi. □

Disjunktivna forma ϕ je **minimalna** disjunktivna forma za term F, ako je $\phi = F$ i nijedna DF jednostavnija od ϕ nije jednaka sa F.

PRIMER 2.26. Bulov term $\phi(x) = x$ je minimalna disjunktivna forma za term $F(x,y) = x \vee xy$, jer važi jednakost $x = x \vee xy$, a nema nijedne disjunktivne forme koja je jednaka sa F, a jednostavnija od x. □

Po definiciji, svaka disjunktivna forma koja ispunjava navedene uslove jeste jedna minimalna DF za dati Bulov term. Zato Bulov term može imati više minimalnih DF.

4.3. Proste implikante. Ovde se definišu termi od kojih su, kako se pokazuje, sastavljene minimalne DF.

Elementarna konjunkcija f je **implikanta** Bulovog terma F ako važi $f \leqslant F$ (tj. ako je tačna jednakost $f \cdot F = f$).

Budući da svakom Bulovom termu odgovara term-funkcija na datoj Bulovoj algebri, pojam implikante može se razmatrati i sa tog stanovišta.

TVRĐENJE 2.27. *Elementarna konjunkcija f je implikanta Bulovog terma F ako i samo ako u proizvoljnoj Bulovoj algebri F ima vrednost 1 za svaki niz vrednosti promenljivih za koji f ima vrednost 1.*

Dokaz. Neka je f elementarna konjunkcija, a F proizvoljan Bulov term. Označimo sa $f_{\mathcal{B}}$ i $F_{\mathcal{B}}$ redom term-funkcije za f i F u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$.

Pretpostavimo da važi $f \leqslant F$ i da je $f_{\mathcal{B}} = 1$. Sledi da je tačna jednakost $f \cdot F = f$, pa $f \cdot F$ i f određuju istu Bulovu funkciju. Dakle, $f_{\mathcal{B}} \cdot F_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}}$, pa iz $f_{\mathcal{B}} = 1$ sledi $F_{\mathcal{B}} = 1$.

Obratno, ako iz $f_{\mathcal{B}} = 1$ sledi $F_{\mathcal{B}} = 1$ za proizvoljnu Bulovu algebru $\mathcal{B}$, onda to važi i u dvoelementnoj algebri $\mathcal{B}_2$. To znači da je nad B_2 ispunjeno $f_{\mathcal{B}_2} \leqslant F_{\mathcal{B}_2}$, odnosno $f_{\mathcal{B}_2} \cdot F_{\mathcal{B}_2} = f_{\mathcal{B}_2}$. Na osnovu Teoreme 2.11 (str. 112), sledi da je tačan identitet $f \cdot F = f$, odnosno važi $f \leqslant F$. ■

U nastavku teksta, nakon ovog tvrđenja, ne pravimo razliku u označavanju Bulovog terma i odgovarajuće term-funkcije.

U proizvoljnoj disjunktivnoj formi $F = f_1 \vee \ldots \vee f_k$ lako se uočavaju neke implikante: svaka elementarna konjunkcija f_i je implikanta. Zaista, ako f_i u nekoj realizaciji dobije vrednost 1, onda i cela disjunktivna forma ima tu vrednost.

Elementarna konjunkcija f je **prosta implikanta** Bulovog terma F, ako je f implikanta za F i nijedna potkonjunkcija iz f nije implikanta terma F.

PRIMER 2.28. Jedna implikanta Bulovog terma

$$F(x,y,z) = (x \vee y')' \vee z \vee x'y'z'$$

je $f(x,y) = x'y$. Zaista, f ima vrednost 1 kada je $x = 0$ i $y = 1$ (z proizvoljno) a za svako $z \in \{0,1\}$ je

$$F(0,1,z) = (0 \vee 0)' \vee z \vee 1 \cdot 0 \cdot z' = 1.$$

Prema tvrđenju 2.27 term f je implikanta za F. Ta implikanta nije prosta. Zaista, implikanta je i $g(x) = x'$, jer je ona jednaka 1 za $x = 0$, a

$$F(0,y,z) = (0 \vee y')' \vee z \vee 0'y'z' = y \vee z \vee y'z' = y \vee z \vee (y \vee z)' = 1.$$

Zato je g implikanta terma F, i to prosta, a kako je g potkonjunkcija u f, sledi da f nije prosta implikanta. □

Za razliku od implikante, prosta implikanta terma F može imati samo promenljive koje se pojavljuju u F (zadatak 2.42).

TVRĐENJE 2.29. *Svaka minimalna DF Bulovog terma F sastavljena je od nekih prostih implikanti tog terma.*

Dokaz. Neka je

$$\Phi = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k$$

jedna minimalna disjunktivna forma Bulovog terma F. Kao što je već spomenuto, sve elementarne konjukcije φ_i su implikante za Φ, pa dakle i za F. Dokazujemo da su one proste. Pretpostavimo da konjunkcija - implikanta φ_i nije prosta, tj. da postoji njena potkonjunkcija φ koja je isto implikanta za F. Uočimo disjunktivnu formu

$$\Phi' = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi \vee \ldots \vee \varphi_k,$$

dobijenu iz Φ zamenom konjunkcije φ_i sa φ.

Dokazujemo da je $\Phi' = F$, pokazujući da su ovi termi jednaki kao funkcije nad $\mathcal{B}_2$:

(a) $\Phi' \leqslant F$. Zaista, ako je $\Phi' = 1$, onda je bar jedna od elementarnih konjunkcija jednaka 1, a kako su sve one (uključujući φ) implikante za F, sledi $F = 1$.

(b) $F \leqslant \Phi'$. Zaista, ako je nad $\mathcal{B}_2$ ispunjeno $F = 1$, onda je i $\Phi = 1$, jer je po pretpostavci $F = \Phi$. Tada je bar za jednu elementarnu konjunkciju φ_j ispunjeno $\varphi_j = 1$. Ako je $j \neq i$, ista konjunkcija postoji i u Φ', a ako je $i = j$, onda i $\varphi = 1$, jer se radi o potkonjunkciji u φ_i. U svakom slučaju sledi $\Phi' = 1$, što je dovoljno da nad $\mathcal{B}_2$ važi tražena nejednakost.

Iz (a) i (b) sledi jednakost terma F i Φ' kao funkcija nad $\mathcal{B}_2$, pa su na osnovu Teoreme 2.11 ti termi jednaki. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da je Φ minimalna disjunktivna forma za term F, jer je Φ' jednostavnija disjunktivna forma.

Sledi da su sve elementarne konjunkcije u Φ proste implikante terma F, što dokazuje tvrđenje. ■

Prema ovom stavu, minimalne disjunktivne forme Bulovog terma F mogu se konstruisati na sledeći način.

I *Odredi se skup svih prostih implikanti terma F*, a zatim:

II *Pogodnim postupkom izdvoje se iz tog skupa one proste implikante koje obrazuju minimalnu (ili minimalne) DF za term F.*

4.4. Postupak Kvajna (Quine) i Mak Klaskog (McClaskey). Ovde se opisuje prvi deo (I) gore navedenog postupka.

TEOREMA 2.30. *Neka je F Bulov term koji je KDF u odnosu na promenljive $x_1, \dots, x_n$, f elementarna konjunkcija čije su promenljive neke od navedenih. Tada je f implikanta terma F ako i samo ako su sve kanonske elementarne konjunkcije u odnosu na $x_1, \dots, x_n$ koje sadrže f uključene u term F.*

Dokaz. Neka je f implikanta terma F, koji je KDF. Pretpostavimo da postoji neka kanonska elementarna konjunkcija k koja sadrži f, a nije u F. Tada za pogodan izbor vrednosti promenljivih, k ima vrednost 1, a sve ostale kanonske konjunkcije imaju vrednost 0 (prema lemi 2.9, str. 111). Zato i F ima vrednost 0, pa f nije implikanta terma F.

Obratno, neka su sve kanonske konjunkcije koje sadrže f članovi terma F. Tada za svaki niz vrednosti promenljivih za koji je f jednaka 1, jedna od tih kanonskih elementarnih konjunkcija, pa dakle i forma F, ima vrednost 1. Zato je f implikanta terma F. ■

U osnovi tvrđenja 2.30 zapravo je jednakost

$$f = f \cdot (x \vee x') = f \cdot x \vee f \cdot x',$$

gde je f elementarna konjunkcija, a x promenljva.

Postupak Kvajna i Mak Klaskog za određivanje svih prostih implikanti Bulovog terma F zasniva se na poslednjem tvrđenju i sastoji se od nekoliko koraka:

(i) Odredi se KDF koja odgovara termu F.

(ii) Urede se po neopadajućem broju unarnih simbola ($'$) sve kanonske elementarne konjunkcije te forme.

(iii) U dobijenom nizu označe se elementarne konjunkcije oblika xf i $x'f$, a niz se proširi sa f.

(iv) Prethodni korak (iii) primenjuje se na dopisanim konjunkcijama sve dok je to moguće.

Broj članova niza je konačan, pa se navedena procedura završava. *Neoznačene elementarne konjunkcije koje preostanu u nizu su proste implikante* *terma F.*

Sledi primer, pa obrazloženje ovog postupka.

PRIMER 2.31. Neka je dat sledeći Bulov term koji je već u obliku KDF (kada to nije slučaj primenjuju se postupci za svođenje na KDF, kao u primeru 2.5 (str. 109)):

$$F(x, y, z, u) = x'yz'u' \vee xyz'u' \vee xy'zu' \vee xyzu' \vee xy'z'u'.$$

Dalje je naveden niz kanonskih elementarnih konjunkcija uređen po rastućem (u stvari neopadajućem) broju operacija $'$.

$$\begin{array}{cccc}
x & y & z & u' \\
\hline
x & y & z' & u' \\
x & y' & z & u' \\
\hline
x' & y & z' & u' \\
x & y' & z' & u'
\end{array}$$

Spisak je podeljen u klase sa jednakim brojem simbola $'$, jer se termi oblika af i $a'f$ mogu nalaziti samo u susednim klasama. Označavamo redom takve parove i svaki put dopunimo niz sa f:

$$\begin{array}{ccccc}
x & y & z & u' & \checkmark \\
\cline{1-4}
x & y & z' & u' & \checkmark \\
x & y' & z & u' & \checkmark \\
\cline{1-4}
x' & y & z' & u' & \checkmark \\
x & y' & z' & u' & \checkmark
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
x & y & u' & \checkmark \\
x & z & u' & \checkmark \\
\cline{1-3}
y & z' & u' & \\
x & z' & u' & \checkmark \\
x & y' & u' & \checkmark
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
xu' \\
\\
\\
\\
\\
\end{array}$$

(Jednom označene konjunkcije i dalje se koriste i proveravaju, ali ih ne treba ponovo označavati.) Proste implikante su tako $yz'u'$ i xu'. $\square$

Opisani postupak je neposredna primena tvrđenja 2.30 i definicije proste implikante. Označavanjem se eliminišu implikante koje nisu proste i ostavlja-ju zajedničke potkonjunkcije koje su implikante i one se ponovo proveravaju. Neoznačene konjunkcije su tako implikante forme F, jer su po konstrukciji sve kanonske konjunkcije koje ih sadrže uključene u F (prva kolona). Ove implikante jesu proste, jer nemaju potkonjunkcije sa istom osobinom.

4.5. Tablice prostih implikanti. Kada se jednom odrede sve proste implikante datog Bulovog terma, treba uz pomoć njih sastaviti sve minimalne disjunktivne forme (jednu ili više njih). Ne postoji jednoznačan i univerzalan algoritam kojim bi se to uradilo. Moguće je na razne načine eliminisati proste implikante koje ne učestvuju ni u jednoj minimalnoj DF, a identifikovati eventualno one koje su članovi svake. Na kraju se, u opštem slučaju, minimalne DF određuju po definiciji, iz preostalog skupa prostih implikanti. Ovde se takvi postupci opisuju.

U nastavku se pretpostavlja da KDF koje se analiziraju nisu trivijalno jednake 1, tj. da ne sadrže sve kanonske konjunkcije u odnosu na date promenljive.

Tvrđenje 2.32. *Neka je F Bulov term u obliku* KDF, *a Φ proizvoljna disjunkcija njegovih prostih implikanti. Tada važi $F = \Phi$ ako i samo ako svaka kanonska konjunkcija iz F sadrži kao potkonjunkciju neku implikantu iz Φ.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji kanonska konjunkcija f iz F, koja ne sadrži kao potkonjunkciju nijednu prostu implikantu iz Φ. Dodelimo promenljivima vrednosti iz $\mathcal{B}_2$ tako, da f bude jednaka 1. Tada je to jedina kanonska konjunkcija za date promenljive sa vrednošću 1. Term F je sadrži, pa i on ima vrednost 1. Nijedna prosta implikanta iz Φ nije potkonjunkcija u f, pa ne može imati vrednost 1 za date vrednosti promenljivih. Tada je nad $\mathcal{B}_2$ vrednost forme Φ nula, pa je $F \neq \Phi$.

Obratno, pretpostavimo da svaka kanonska konjunkcija iz forme F sadrži kao potkonjunkciju neku prostu implikantu iz Φ. Tada je $F = \Phi$. Zaista, ako je nad $\mathcal{B}_2$ vrednost terma F jedan, onda prema posledici 2.10 (str. 112) tačno jedna kanonska konjunkcija f iz F ima vrednost 1. Po gornjoj pretpostavci postoji prosta implikanta φ iz Φ koja takođe ima vrednost 1, pa je to vrednost i forme Φ. Sledi $F \leqslant \Phi$. Ako sa druge strane Φ dobije vrednost 1, onda bar jedna elementarna konjunkcija te forme ima vrednost 1. Ta konjunkcija je prosta implikanta za F, pa i taj term ima vrednost 1. Zato je $\Phi \leqslant F$, pa iz svega dobijamo $F = \Phi$. ■

Prema ovom tvrđenju, *ako neka kanonska konjunkcija iz terma F (koji je* KDF*) ima samo jednu potkonjunkciju φ iz skupa svih prostih implikanti, onda φ mora biti član svake minimalne* DF *terma F.* Takva prosta implikanta zove se **esencijalna**.

		f_1	$\cdots$	f	$\cdots$	f_m	kanonske konjunkcije iz F
	φ_1						
proste implikante	$\vdots$						
	φ			$*$			
	$\vdots$						
	φ_k						

Slika 2.26

Kada se odrede sve esencijalne proste implikante (ako ih ima), onda se neke proste implikante mogu izostaviti kao suvišne. Pregledan način da se to uradi omogućuju **tablice prostih implikanti**, opisane u nastavku (slika 2.26).

U tablici se navode sve proste implikante datog terma F i sve kanonske elementarne konjunkcije tog terma transformisanog u KDF. Pripadnost implikante φ kanonskoj konjunkciji f označava se (to je urađeno znakom $*$ u priloženoj shemi).

Primer 2.33. Neka je dat term F u obliku KDF:

$$F(x,y,z) = x'yz' \vee x'yz \vee xy'z' \vee xy'z \vee xyz.$$

Skup prostih implikanti (određen na primer metodom Kvajna i Mak Klaskog) je

$$\{x'y, xy', xz, yz\}.$$

Odgovarajuća tablica data je na slici 2.27.

	$\cancel{x'yz'}$	$\cancel{x'yz}$	$\cancel{xy'z'}$	$\cancel{xy'z}$	xyz
$x'y$	$*$	$*$			
xy'			$*$	$*$	
xz				$*$	$*$
yz		$*$			$*$

Slika 2.27 □

Analiza tablice vodi ka sledećim zaključima:

I *Ako se u nekoj koloni nalazi samo jedan znak $*$, prosta implikanta koja odgovara tom znaku je esencijalna, tj. član je svake minimalne DF.*

Pogodno je označiti (na pr. precrtati, kao na slici 2.27) sve kanonske konjunkcije kojima je neka esencijalna implikanta podterm (takve konjunkcije odgovaraju znacima koji su povezani linijom, na istoj slici); precrtane kanonske konjunkcije sigurno sadrže uočenu esencijalnu implikantu i ispunjavaju uslove tvrđenja 2.32.

U primeru 2.33 esencijalne proste implikante su $x'y$ i xy' i jedina kanonska konjunkcija koja ne sadrži nijednu od njih je xyz. U minimalnu DF zato treba uključiti bilo koju od preostalih prostih implikanti (xz odnosno yz). Tako dati term F ima dve minimalne DF:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y,z) &= x'y \vee xy' \vee xz\\ \Phi_2(x,y,z) &= x'y \vee xy' \vee yz.\end{aligned}$$

Daljom analizom složenijih tablica može se određivanje minimalnih DF još uprostiti:

II *Ako kolona α ima znak $*$ na svim mestima (vrstama) na kojima i kolona β, onda se konjunkcija koja odgovara koloni α može precrtati, tj. za nju nije potrebno posebno tražiti potkonjunkciju - implikantu.*

Zaista, traženu implikantu obezbeđuje konjunkcija koja odgovara koloni β.

III *Ako u vrsti u znaci $*$ stoje na svim mestima (kolonama) na kojima i znaci u vrsti v i pri tome implikanta vrste u ima manje promenljivih od implikante vrste v, izostavlja se vrsta v, jer je odgovarajuća prosta implikanta suvišna (ne učestvuje u formiranju minimalnih DF).*

Obrazloženje: Preostala prosta implikanta (koja odgovara vrsti u) sadržana je u svim konjunkcijama u kojima i izostavljena, a od nje ima manje promenljivih.

U jednostavnijim slučajevima, posle primene ovih postupaka obrazovanje minimalnih DF nije teško (postoje i druge metode za analizu tablice, videti na pr. [**14**]).

Primer 2.34. [**14**] Neka je

$$\begin{aligned} F(x,y,z,u) &= xyuv \vee xy'uv \vee x'yuv' \vee xy'u'v' \vee x'yu'v' \vee xyuv' \vee \\ &\quad xy'uv' \vee xy'u'v \vee x'yuv \vee x'yu'v \vee x'y'u'v'. \end{aligned}$$

Skup prostih implikanti može se odrediti metodom Kvajna i Mak Klaskog:

$$\{y'u'v', x'u'v', xu, yu, xy', x'y\}$$

Formirajmo tablicu prostih implikanti (slika 2.28).

	$xyuv$	$xy'uv$	$x'yuv'$	$xy'u'v'$	$x'yu'v'$	$xyuv'$	$xy'uv'$	$xy'u'v$	$x'yuv$	$x'yu'v$	$x'y'u'v'$
$y'u'v'$				$*$							$*$
$x'u'v'$					$*$						$*$
xu	$*$	$*$				$*$	$*$				
yu	$*$		$*$			$*$			$*$		
xy'		$*$		$*$			$*$	$\circledast$			
$x'y$			$*$		$*$				$*$	$\circledast$	

Slika 2.28

Može se primetiti da su xy' i $x'y$ jedine proste implikante koje su podtermi redom u kanonskim konjunkcijama $xy'u'v$ i $x'yu'v$. Zato su xy' i $x'y$ esencijalne proste implikante i moraju biti članovi svake minimalne disjunktivne forme. Kada se precrtaju i uklone kanonske konjunkcije koje sadrže te dve implikante, preostaje tablica koja je predstavljena na slici 2.29.

	$xyuv$	$xyuv'$	$x'y'u'v'$
$y'u'v'$			$*$
$x'u'v'$			$*$
xu	$*$	$*$	
yu	$*$	$*$	

Slika 2.29

Na osnovu pravila **II** može se eliminisati bilo koja od prve dve kolone (na primer druga), pa ostaje tablica na slici 2.30.

	$xyuv$	$x'y'u'v'$
$y'u'v'$		$*$
$x'u'v'$		$*$
xu	$*$	
yu	$*$	

Slika 2.30

Analiza ove poslednje tablice pokazuje da u svaku minimalnu DF polaznog terma mora biti uključena bilo koja od prve dve i bilo koja od druge dve proste implikante. Otuda su minimalne disjunktivne forme terma $F(x,y,z,u)$ datog na početku, sledeće četiri.

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee y'u'v' \vee xu\\
\Phi_2(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee y'u'v' \vee yu\\
\Phi_3(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee x'u'v' \vee xu\\
\Phi_4(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee x'u'v' \vee yu.
\end{aligned}$$

□

4.6. Karnoove tablice. U ovom odeljku se opisuje postupak za pronalaženje minimalnih DF datog Bulovog terma u obliku kanonske disjunktivne forme, ali bez prethodnog određivanja skupa svih njegovih prostih implikanti.

	y	y'
x		
x'		

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x				
x'				

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy				
xy'				
$x'y'$				
$x'y$				

Slika 2.31

Metod se zasniva na preglednom prikazivanju kanonskih elementarnih konjunkcija pomoću posebnih, tzv. Karnoovih tablica. Na taj način mogu se minimizovati termi sa ne više od šest promenljivih, ali se već sa pet promenljivih preglednost tablice smanjuje.

Na slici 2.31 predstavljene su nepopunjene Karnoove tablice koje služe za predstavljanje Bulovih terma koji su kanonske disjunktivne forme sa redom dve, tri i četiri promenljive.

	y	y'
x		*
x'	*	

$xy' \vee x'y$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		*	*	
x'		*		*

$xyz' \vee xy'z' \vee x'yz' \vee x'y'z$

Slika 2.32

Svakom polju tablice odgovara konjunkcija terma koji su u zaglavlju, tj.

jedna kanonska elementarna konjunkcija u odnosu na odgovarajuće promenljive. Označavanjem pojedinih polja tako se jednoznačno određuje kanonska disjunktivna forma.

Primer 2.35. Na slikama 2.32 i 2.33 predstavljene su popunjene tablice i navedene odgovarajuće kanonske forme. □

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy				$*$
xy'	$*$	$*$		
$x'y'$			$*$	
$x'y$			$*$	

$xyu'v \vee xy'uv \vee xy'uv' \vee$
$x'y'u'v' \vee x'yu'v'$

Slika 2.33

Polja Karnoove tablice koja kao kvadrati imaju zajedničku stranicu zovu se **susedna**. Susednim nazivamo i prvo odnosno poslednje polje svake vrste (kolone).

Primer 2.36. Na slikama 2.34, 2.35 i 2.36 navedeni su primeri susednih polja, koja su još i dodatno grafički povezana zatvorenom linijom oko odgovarajućih znakova.

	y	y'
x	$*$	
x'	$*$	

$xy \vee x'y = y$

	y	y'
x		
x'	$*$	$*$

$x'y \vee x'y' = x'$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x				
x'		$*$	$*$	

$x'yz' \vee x'y'z' = x'z'$

Slika 2.34

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x			$*$	
x'			$*$	

$xy'z' \vee x'y'z' = y'z'$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	$*$			$*$
x'				

$xyz \vee xy'z = xz$

Slika 2.35

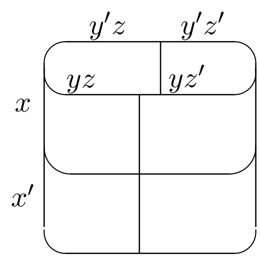
Iz konstrukcije se može zaključiti da se termi koji odgovaraju susednim poljima razlikuju tačno na mestu jedne promenljive (koja kod jednog ima, a kod drugog nema znak unarne operacije). Zato susedna polja određuju zajednički podterm tih elementarnih konjunkcija.

Napomena. Treba zapaziti da je raspored terma u zaglavljima tablice takav da se i kod njih susedni razlikuju samo na mestu jedne promenljive. Pored toga, taj raspored je cikličan, tj. poslednji term se od prvog isto razlikuje na tačno jednom mestu. To je i razlog što susednim smatramo i krajnja polja u redu. Ciklička interpretacija tablice sa tri promenljive data je na slici 2.37; tablicu sa četiri promenljive trebalo bi interpretirati torusom.

$xy'uv' \vee xy'u'v' = xy'v'$ $\qquad$ $xyu'v \vee x'yu'v = yu'v$

Slika 2.36

□



Slika 2.37

Dalje proširujemo pojam susednih polja na sledeći način. Četiri polja koja obrazuju kvadrat ili pripadaju istom redu zovemo (četvoroelementni) **blok**. Polja u bloku odgovaraju termima koji se razlikuju na mestima tačno dve promenljive (u odnosu na unarnu operaciju). To sledi iz rasporeda terma u zaglavljima.

Primer 2.37. Navodimo primere blokova sa četiri polja (slike 2.38, 2.39, 2.40 i 2.41). □

$xyz \vee xyz' \vee x'yz \vee x'yz' = y$ $\qquad$ $x'yz \vee x'yz' \vee x'y'z' \vee x'y'z = x'$

Slika 2.38

Kao i u slučaju dva polja, blok čine i četiri polja koja su susedna u cikličkom rasporedu.

Na tablicama sa četiri promenljive, blok čine i dva susedna reda (vrste ili kolone), uključujući i ciklički raspored.

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	*			*
x'	*			*

$xyz \vee xy'z \vee x'yz \vee x'y'z = z$

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy				
xy'		*	*	
$x'y'$		*	*	
$x'y$				

$xy'uv' \vee xy'u'v' \vee x'y'uv' \vee x'y'u'v' = y'v'$

Slika 2.39

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy			*	*
xy'				
$x'y'$				
$x'y$			*	*

$xyu'v' \vee xyu'v \vee x'yu'v' \vee x'yu'v = yu'$

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy		*		
xy'		*		
$x'y'$		*		
$x'y$		*		

$xyuv' \vee xy'uv' \vee x'y'uv' \vee x'yuv' = uv'$

Slika 2.40

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy	*			*
xy'				
$x'y'$				
$x'y$	*			*

$xyuv \vee xyu'v \vee x'yuv \vee x'yu'v = yv$

Slika 2.41

Primer 2.38. Na slici 2.42 predstavljena su dva bloka sa osam elemenata. □

U nastavku ponekad koristimo isti naziv - blok - bilo da je u pitanju polje, par susednih polja ili grupa od četiri odnosno osam polja.

Iz gornjih definicija slede osnovne osobine tablica:

- Svaki blok jednoznačno određuje jednu elementarnu konjunkciju.

- Polja u istom bloku odgovaraju kanonskim konjunkcijama koje sadrže zajedničku potkonjunkciju.

- Ako je blok B_1 sadržan u bloku B_2, onda je term određen blokom B_2 podterm terma određenog blokom B_1.

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy		$*$	$*$	
xy'		$*$	$*$	
$x'y'$		$*$	$*$	
$x'y$		$*$	$*$	

$$xyuv' \vee xyu'v' \vee xy'uv' \vee xy'u'v' \vee$$
$$x'y'uv' \vee x'y'u'v' \vee x'yuv' \vee x'yu'v' = v'$$

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy	$*$	$*$	$*$	$*$
xy'				
$x'y'$				
$x'y$	$*$	$*$	$*$	$*$

$$xyuv \vee xyuv' \vee xyu'v' \vee xyu'v \vee$$
$$x'yuv \vee x'yuv' \vee x'yu'v' \vee x'yu'v = y$$

Slika 2.42

Jasno je da postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između kanonskih dijunktivnih formi sa ne više od četiri promenljive i tablica sa odgovarajuće označenim poljima. To znači da se za svaku kanonsku disjunktivnu formu

$$F = f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_k$$

sastavlja jedinstvena Karnoova tablica, tako što se označe polja koja odgovaraju termima $f_1, \ldots, f_k$.

Kada se to ima u vidu, onda se navedena svojstva tablica mogu formulisati na jeziku Bulovih terma, kao što sledi.

Tvrđenje 2.39. *Neka je F Bulov term u obliku* KDF *sa najviše četiri promenljive, za koji je sastavljena Karnoova tablica. Tada važi:*

(i) *Svaki blok sa označenim poljima određuje jednu implikantu terma F.*

(ii) *Ako je blok maksimalan, tj. nije sadržan u nekom drugom bloku sa označenim poljima, njemu odgovarajuća implikanta je prosta.*

(iii) *Svaki skup blokova sa označenim poljima, koji pokriva sva označena polja, određuje jednu* DF *jednaku termu F.* ■

Na osnovu poslednjeg tvrđenja može se opisati **postupak za određivanje minimalnih DF** proizvoljnog terma F sa najviše četiri promenljive:

(1) Term se predstavi kao KDF i popuni se odgovarajuća Karnoova tablica.

(2) Za svako označeno polje uoči se i zaokruži maksimalni blok koji ga sadrži. Po redosledu, prvo se zaokružuju jedinstveni maksimalni blokovi, a među njima prvo oni sa manjim brojem polja. Za preostala polja (koja

ne pripadaju jedinstvenim maksimalnim blokovima) zaokruže se sve kombinacije maksimalnih blokova koji ih sadrže.

(3) Svaki podskup skupa blokova koji pokriva sva označena polja određuje jednu DF jednaku termu F; iz tako sačinjene liste disjuktivnih formi izdvoje se one koje su po definiciji minimalne.

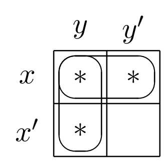
Da se na ovaj način odista dobijaju sve minimalne DF datog terma F, sledi neposredno iz tvrđenja 2.39, u stvari iz konstrukcije Karnoovih tablica. Objašnjenje zaslužuje tačka (2), deo o prvenstvenom zaokruživanju jedinstvenih blokova sa manjim brojem polja. Preciznije, prvo se zaokruže polja koja sama čine jedinstvene blokove, zatim od preostalih polja ona čiji jedinstveni blokovi imaju dva polja itd. Razlog za ovaj redosled je što manji jedinstven blok ne može biti pokriven većim (jer je jedinstven), a obratno može da se desi. Zato bi obrnut redosled mogao dovesti do zaokruživanja suvišnih blokova: odgovarajuće implikante nisu članovi minimalnih DF (videti primere koji slede, posebno primer 2.42).

Primer 2.40. Ovde određujemo minimalne DF za terme koji su već u obliku kanonske disjunktivne forme.

(a) $$F(x,y) = xy \vee xy' \vee x'y.$$

Karnoova tablica predstavljena je na slici 2.43, a minimalna disjunktivna forma je

$$\Phi(x,y) = x \vee y.$$

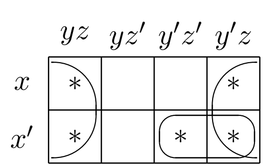


Slika 2.43

(b) $$F(x,y,z) = xyz \vee x'y'z' \vee xy'z \vee x'yz \vee x'y'z.$$

Minimalna DF (određena pomoću tablice na slici 2.44):

$$\Psi(x,y,z) = z \vee x'y'.$$



Slika 2.44

(c) $$F(x,y,z) = xyz' \vee xy'z' \vee x'yz' \vee x'y'z.$$

Karnoova tablica data je na slici 2.45, a jedinstvena minimalna disjunktivna forma je:

$$\Phi(x,y,z) = xz' \vee yz' \vee x'y'z.$$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		$*$	$*$	
x'		$*$		$*$

Slika 2.45

(*d*) $$F(x,y,z) = xyz' \vee xy'z' \vee xy'z \vee x'yz \vee x'yz'.$$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		$*$	$*$	$*$
x'	$*$	$*$		

Slika 2.46

Prema Karnoovoj tablici na slici 2.46, postoje dva jedinstvena maksimalna bloka za terme $xy'z$ i $x'yz$. Za preostalo polje koje odgovara termu xyz' mogu se izdvojiti dva maksimalna bloka, oba sa po dva polja. Zato postoje dve minimalne disjunktivne forme ovog terma:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &= xz' \vee xy' \vee x'y \\ \Phi_2(x,y,z) &= yz' \vee xy' \vee x'y. \end{aligned}$$

(*e*) $$\begin{aligned} F(x,y,u,v) \;=\; & xyuv \vee xyu'v' \vee xyu'v \vee x'y'uv \vee x'y'uv' \vee x'y'u'v' \vee \\ & x'yu'v' \vee x'yu'v. \end{aligned}$$

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy	$*$		$*$	$*$
xy'				
$x'y'$	$*$	$*$	$*$	
$x'y$			$*$	$*$

Slika 2.47

Prema priloženoj Karnoovoj tablici (slika 2.47), ne postoje za sva polja jedinstveni maksimalni blokovi. Zato ovaj term ima dve minimalne disjunktivne forme:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y,u,v) &= yu' \vee x'y'u \vee xyv \vee x'y'v' \\ \Phi_2(x,y,u,v) &= yu' \vee x'y'u \vee xyv \vee x'u'v'.\end{aligned}$$

(f) Sledi problem koji je urađen pomoću tablica prostih implikanti u primeru 2.34 (str. 150).

$$\begin{aligned}F(x,y,z,u) = {} & xyuv \vee xy'uv \vee x'yuv' \vee xy'u'v' \vee x'yu'v' \vee xyuv' \vee \\ & xy'uv' \vee xy'u'v \vee x'yuv \vee x'yu'v \vee x'y'u'v'.\end{aligned}$$

(a) (b)

Slika 2.48

U Karnoovoj tablici izdvoje se prvo maksimalni blokovi koji su jedinstveni za terme $xy'u'v'$ i $xy'u'v$ odnosno za $x'yu'v'$ i $x'yu'v$ (slika 2.48 (a)). Njima odgovaraju proste implikante xy' i $x'y$, koje su esencijalne. Preostala označena polja mogu se uključiti u maksimalne blokove kao na slici 2.48 (b). Tako se mogu formirati četiri minimalne DF:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee y'u'v' \vee xu \\ \Phi_2(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee y'u'v' \vee yu \\ \Phi_3(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee x'u'v' \vee xu \\ \Phi_4(x,y,z,u) &= xy' \vee x'y \vee x'u'v' \vee yu.\end{aligned}$$

□

Dobra strana Karnoovih tablica jeste što se one mogu primenjivati i na disjunktivne forme koje nisu kanonske, što veoma skraćuje postupak. Za datu disjunktivnu formu sa najviše četiri promenljive tablica se popunjava tako, da se oznake stavljaju u sva polja čije kanonske konjunkcije sadrže neku od konjunkcija polazne disjunktivne forme. Na taj način se implicitno određuje kanonska disjunktivna forma datog terma (za dokaz videti zadatak 2.60).

Primer 2.41. Dat je term

$$F(x,y,u,v) = xyu \vee xuv \vee xy'v \vee x'yu' \vee yu'v.$$

Term F je disjunktivna forma, ali ne i kanonska. Prema gore navedenom postupku, popunjena odgovarajuća tablica data je na slici 2.49.

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy	$*$	$*$		$*$
xy'	$*$			$*$
$x'y'$				
$x'y$			$*$	$*$

Slika 2.49

Jedinstvena minimalna disjunktivna forma terma F je

$$\Phi(x, y, u, v) = xv \vee xyu \vee x'yu'. \qquad \square$$

U primeru koji sledi mogu se uočiti razlozi za prioritet izdvajanja jedinstvenih blokova (tačka (2), prvo manji blokovi).

Primer 2.42.

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) \;\; = \;\; & x'y'uv \vee xyuv' \vee xy'uv' \vee x'y'uv' \vee xy'u'v' \vee \\ & x'y'u'v' \vee x'yu'v' \vee xy'u'v \end{aligned}$$

Za prvu, drugu, sedmu i osmu kanonsku konjunkciju izdvojeni su maksimalni blokovi označenih polja i izdvojene odgovarajuće proste implikante (slika 2.50). Na taj način su pokrivena sva označena polja, pa je prosta implikanta $y'v'$ koja odgovara bloku od četiri polja u sredini tablice suvišna.

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy		$*$		
xy'		$*$	$*$	$*$
$x'y'$	$*$	$*$	$*$	
$x'y$			$*$	

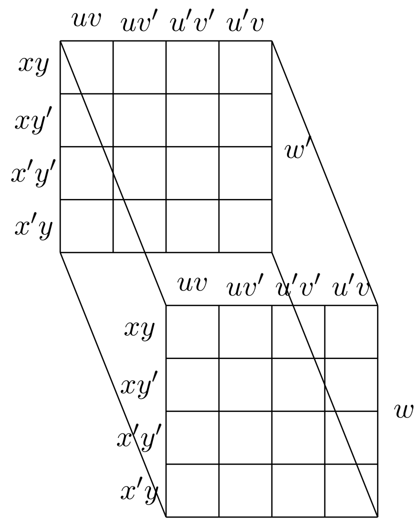
Slika 2.50

Sledi da je jedina minimalna DF ovog terma

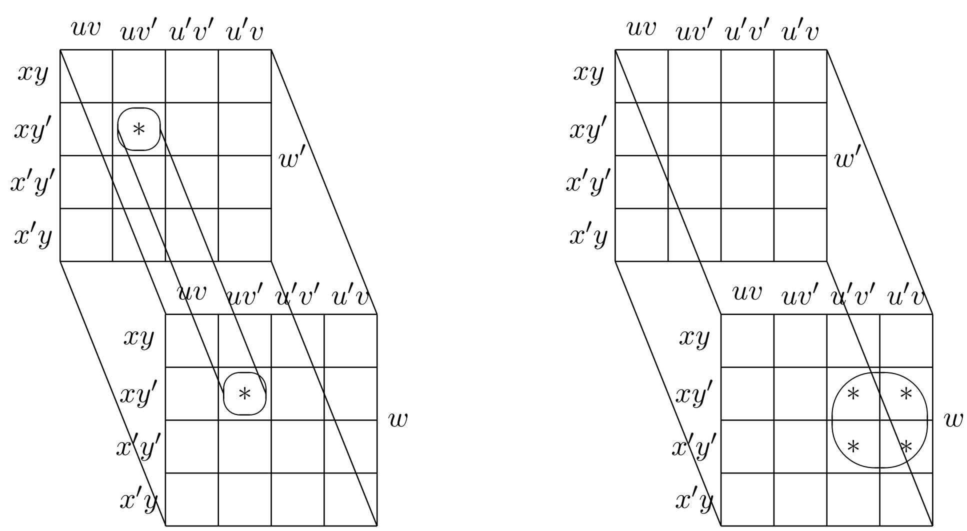
$$\Phi(x, y, u, v) = xuv' \vee xy'u' \vee x'y'u \vee x'u'v'. \qquad \square$$

Za minimizaciju Bulovih terma sa pet promenljivih označenih ovde sa x, y, u, v, w koriste se prostorne (trodimenzionalne) Karnoove tablice, skicirane na slici 2.51.

Sve što je već rečeno za Karnoove tablice važi i za ove prostorne. Novo je što se blokovima smatraju i grupe odgovarajućih polja u dvema ravnima (*odgovarajuća* su polja koja se razlikuju samo u odnosu na promenljivu w); u tom smislu jedno polje odgovara kanonskoj konjunkciji sa svih pet promenljivih, a blokovi sa 2, 4, 8 i 16 polja redom odgovaraju implikantama sa 4, 3, 2 i 1 promenljivom.



Slika 2.51

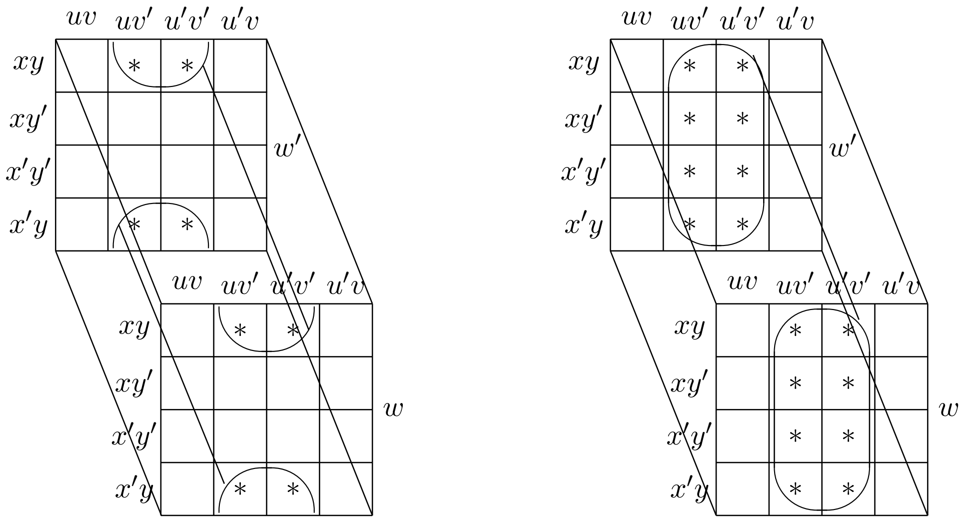


$xy'uv'w \vee xy'uv'w' = xy'uv'$

$xy'u'v'w \vee xy'u'vw \vee$
$x'y'u'v'w \vee x'y'u'vw = y'u'w$

Slika 2.52

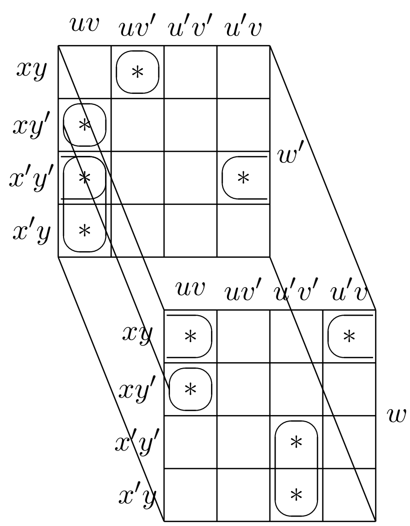
PRIMER 2.43. Na slikama 2.52 i 2.53 su predstavljeni neki od blokova i odgovarajući termi. □



$xyuv'w \vee xyu'v'w \vee x'yuv'w \vee x'yu'v'w \vee$
$xyuv'w' \vee xyu'v'w' \vee x'yuv'w' \vee x'yu'v'w'$
$= yv'$

v'

Slika 2.53



Slika 2.54

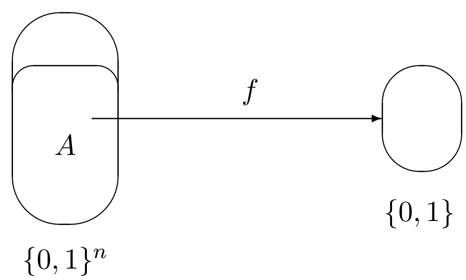
PRIMER 2.44. Dat je term

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v,w) \quad = \quad & xyuvw \vee xy'uvw' \vee xyu'vw \vee xy'uvw \vee x'yuvw' \vee \\ & xyuv'w' \vee x'yu'v'w \vee x'y'u'v'w \vee x'y'u'vw' \vee x'y'uvw'. \end{aligned}$$

Minimalna disjunktivna forma za ovaj term određena je uz pomoć Karnoove tablice na slici 2.54. Ona je jedinstvena, jer se svako označeno polje na samo jedan način može uključiti u maksimalan blok.

$$\Phi(x,y,u,v,w) = xyuv'w' \vee xyvw \vee xy'uv \vee x'u'v'w \vee x'y'vw' \vee x'uvw'. \quad \square$$

4.7. Minimizacija parcijalnih Bulovih funkcija. U praktičnoj realizaciji funkcija $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ događa se da neke n-torke iz skupa $\{0,1\}^n$ nikada nisu ulazne vrednosti. Ako se to uzme u obzir u postupku minimizacije, onda odgovarajući termi i minimalne DF mogu biti jednostavniji nego kada se te okolnosti zanemare.



Slika 2.55

Parcijalna Bulova funkcija sa n promenljivih je svako preslikavanje $f : A \to \{0,1\}$, gde je A neki pravi podskup iz $\{0,1\}^n$ (slika 2.55). U stvari, ovako definisana funkcija je jedna parcijalna n-arna operacija na skupu $\{0,1\}$.
Parcijalne Bulove funkcije dakle nisu definisane za sve n-torke iz $\{0,1\}^n$.

Primer 2.45. Tri parcijalne Bulove funkcije (jedna sa dve i dve sa tri promenljive) date su priloženim tablicama. Svaka od tih funkcija definisana je na podskupu odgovarajućeg stepena skupa $\{0,1\}$.

x	y	$g(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	-
1	1	0

x	y	z	$h_1(x,y,z)$	$h_2(x,y,z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	-	-
1	0	1	-	-
1	1	0	-	0
1	1	1	-	-

Tablicom je data i funkcija f koja „prepoznaje" neparne brojeve iz skupa $\{0,1,\ldots,9\}$, pri čemu su ti brojevi dati u binarnom zapisu sa četiri cifre. S obzirom da f nije definisana za četvorke koje odgovaraju brojevima $10, 11, \ldots, 15$, ona je jedna parcijalna Bulova funkcija.

n	x	y	u	v	$f(x,y,u,v)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	-
11	1	0	1	1	-
12	1	1	0	0	-
13	1	1	0	1	-
14	1	1	1	0	-
15	1	1	1	1	-

□

Svaka parcijalna Bulova funkcija nad $\mathcal{B}_2$ može se na više načina proširiti do Bulove funkcije koja nije parcijalna. Preciznije, ako f nije definisana za k n-torki, onda postoji 2^k različitih proširenja te funkcije na ceo domen $\{0,1\}^n$ (na toliko načina tablica se može dopuniti vrednostima iz skupa $\{0,1\}$). Zato je ispunjeno sledeće:

Svakoj parcijalnoj Bulovoj funkciji odgovara 2^k različitih Bulovih terma, gde je k broj n-torki za koje ta funkcija nije definisana.

Primer 2.46. Parcijalnoj Bulovoj funkciji $f(x,y)$ datoj priloženom tablicom odgovara svaki od terma u nastavku. To su četiri kanonske disjuktivne forme pridružene svim proširenjima $(f_1,\ldots,f_4)$ ove funkcije. Do njih se dolazi kao u primeru 2.8 (str. 111), za svaku od navedenih dopunjenih tablica.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	-
1	0	1
1	1	-

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= xy' \\ f_2(x,y) &= xy' \vee x'y \\ f_3(x,y) &= xy' \vee xy \\ f_4(x,y) &= xy' \vee x'y \vee xy. \end{aligned}$$

Treba zapaziti da sva tri terma imaju iste vrednosti na domenu $A = \{(0,0),(1,0)\}$, tj. određuju istu parcijalnu operaciju datu tablicom. □

Sve KDF pridružene na opisani način parcijalnoj Bulovoj funkciji f tako sadrže fiksne i promenljive kanonske konjunkcije; fiksne su one koje odgovaraju jedinicama u tablici funkcije f (u gornjem primeru to je xy'), a promenljive se dobijaju iz tablica odgovarajućih proširenja. Ove promenljive konjunkcije (u navedenom primeru xy i $x'y$) se u literaturi na engleskom jeziku zovu *uslovi bez uticaja* („don't care conditions"), jer njihovo prisustvo u termu ne menja parcijalnu funkciju od koje se polazi.

Primer 2.47. Minimalne DF za terme koji odgovaraju proširenjima parcijalne funkcije u primeru 2.46 su redom:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y) &= xy' \\ \Phi_2(x,y) &= xy' \vee x'y \\ \Phi_3(x,y) &= x \\ \Phi_4(x,y) &= x \vee y. \end{aligned}$$

Najjednostavnija je Φ_3, pa se ona smatra za minimalnu DF polazne parcijalne funkcije. □

Sledi definicija. Neka je f parcijalna Bulova funkcija i $\mathcal{M}_f$ skup minimalnih disjunktivnih formi svih proširenja funkcije f. **Minimalna disjuktivna forma** za funkciju f je svaka disjunktivna forma iz skupa $\mathcal{M}_f$ od koje nema jednostavnije u tom skupu.

Primer 2.48. Ovde se ilustruje minimizacija jedne parcijalne Bulove funkcije.

Treba konstruisati prekidačko kolo sa minimalnim brojem prekidača, koje iz skupa $\{0,1,2,\ldots,9\}$ izdvaja brojeve 6, 7 i 8. Ti brojevi dati su u binarnom zapisu sa četiri cifre; smatramo da oni odgovaraju stanjima prekidača. Tih stanja ima ukupno $2^4 = 16$, ali se ona koja odgovaraju brojevima $10,11,\ldots,15$ po pretpostavci ne uzimaju u obzir. Odgovarajuća Bulova funkcija data tablicom je parcijalna. Tablica se može dodefinisati na 2^6 načina i tačno toliko različitih Bulovih terma odgovara polaznoj parcijalnoj funkciji.

Vrednosti koje odgovaraju ulazima $10,11,\ldots,15$ (ti ulazi zovu se i *pseudotetrade*) nemaju uticaja na ovu parcijalnu funkciju. Ako bi se pretpostavilo da su ti izlazi nule, dobila bi se KDF sa isključivo fiksnim kanonskim konjunkcijama:

$$x'yuv' \vee x'yuv \vee xy'u'v'.$$

Preostale, promenljive kanonske konjunkcije, odgovaraju proširenju ove parcijalne funkcije koja ima izlaze 1 na svim spomenutim mestima. To su termi

$$xy'uv', xy'uv, xyu'v', xyu'v, xyuv', xyuv.$$

n	x	y	u	v	$f(x,y,u,v)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	-
11	1	0	1	1	-
12	1	1	0	0	-
13	1	1	0	1	-
14	1	1	1	0	-
15	1	1	1	1	-

Karnoovu tablicu popunjavamo tako što različito označavamo fiksne (znakom $*$) i promenljive (znakom $\circ$) terme (slika 2.56 (a)). Nakon toga izdvajamo maksimalne blokove obeleženih polja, tako da budu uključene sve fiksne konjunkcije (slika 2.56 (b)). Tako je izabrana kanonska disjunktivna forma

$$x'yuv' \vee x'yuv \vee xy'u'v' \vee xyuv \vee xyuv' \vee xyu'v' \vee xy'uv'.$$

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
xy'	$\circ$	$\circ$	$*$	
$x'y'$				
$x'y$	$*$	$*$		

(a)

	uv	uv'	$u'v'$	$u'v$
xy	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
xy'	$\circ$	$\circ$	$*$	
$x'y'$				
$x'y$	$*$	$*$		

(b)

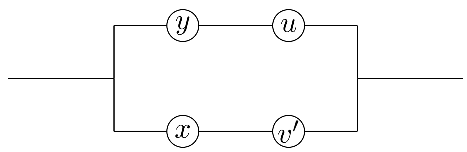
Slika 2.56

Minimalna disjunktivna forma za ovaj term je

$$\Phi(x, y, u, v) = yu \vee xv',$$

i ona je po definiciji minimalna i za polaznu parcijalnu funkciju $f(x, y, u, v)$.

Odgovarajuće prekidačko kolo prikazano je na slici 2.57.



Slika 2.57

Ovo je zaista najjednostavnija disjunktivna forma od svih koje odgovaraju termima sa fiksnim i promenljivim konjunkcijama iz ove tablice. Na primer, minimalna disjunktivna forma koja odgovara gore navedenom termu sa samo fiksnim konjunkcijama (označenim zvezdicama u Karnoovim tablicama) je

$$\Phi_1(x, y, u, v) = x'yu \vee xy'u'v'$$

pa prekidačko kolo koje odgovara tom termu ima više prekidača. □

4.8. Dopune i zadaci.

U zadacima koji slede često se koriste teoreme 2.11 i 2.12 (str. 112): tačnost identiteta proverava se na algebri $\mathcal{B}_2$.

Zadatak 2.42. *Navesti primer Bulovog terma F i njegove implikante, među čijim promenljivima ima i onih koje ne figurišu u F.*

Dokazati da prosta implikanta terma F (koji nije identički jednak 1) ne može imati promenljive koje ne figurišu u F.

Rešenje. Elementarna konjunkcija $xyztu$ je implikanta Bulovog terma $xyz \vee xyt$. Taj Bulov term ne sadrži promenljivu u, a data implikanta je sadrži.

Za dokaz drugog dela zadatka, pretpostavimo da je f elementarna konjunkcija koja je implikanta terma F. Pretpostavimo dalje da f sadrži promenljivu x koja ne figuriše u F. Uočimo elementarnu konjunkciju g, koja se dobija iz f izostavljanjem promenljive x. Prvo, ne može biti $f = x$, jer sama promenljiva x koja nije i promenljiva u F nije ni implikanta terma F (proverava se direktno). Dakle, ako se iz f izostavi x, ostaje elementarna konjunkcija g, za koju pokazujemo da je takođe implikanta za F. Zaista, ako g ima vrednost 1 za neke vrednosti promenljivih, tada za pogodnu vrednost promenljive x i f ima vrednost 1, pa dakle i F. Vrednost koju dobija x ne utiče na vrednost terma F (x ne figuriše u F); sledi da F ima vrednost 1 uvek kada i g. Stoga je g implikanta za F. U implikanti f ima više promenljivih nego u g, pa f nije prosta implikanta. Odatle kontrapozicijom zaključujemo da prosta implikanta terma F ne može da ima promenljive koje se ne pojavljuju u F. □

ZADATAK 2.43. *Ako je f elementarna konjunkcija, a x promenljiva, i ako su $x \cdot f$ i $x' \cdot f$ implikante terma F, onda je i f implikanta terma F. Dokazati.*

Rešenje.

Ako je $$x \cdot f \leqslant F \text{ i } x' \cdot f \leqslant F,$$

onda je i $$x \cdot f \vee x' \cdot f \leqslant F, \quad \text{tj.}$$

$$(x \vee x') \cdot f = 1 \cdot f = f \leqslant F,$$

odnosno f je implikanta terma F. □

ZADATAK 2.44. *Ako je elementarna konjunkcija f_2 potkonjunkcija elementarne konjunkcije f_1, onda je $f_2 = f_1 \vee f_2$. Dokazati.*

Rešenje.

Ako je f_2 potkonjunkcija od f_1, onda je $f_1 = f_1 \cdot f_2$, pa je

$$f_2 = f_1 \cdot f_2 \vee f_2 = f_1 \vee f_2.$$ □

ZADATAK 2.45. *Ako su F i G Bulovi termi, a x Bulova promenljiva, pokazati da je*

$$F \vee G = x \cdot F \vee G \text{ ako i samo ako je } F \leqslant x \vee G.$$

Rešenje.

Iz $F \vee G = x \cdot F \vee G$ sledi

$$F = F \cdot (F \vee G) = F \cdot (x \cdot F \vee G) = F \cdot x \vee F \cdot G = F \cdot (x \vee G).$$

Odatle je $F \leqslant x \vee G$.

Za dokaz drugog pravca, pretpostavi se da važi $F \leqslant x \vee G$. Onda je

$$F \vee G \leqslant x \vee G \vee G = x \vee G \text{ odnosno } (F \vee G) \cdot (x \vee G) = F \vee G.$$

Na osnovu distributivnog zakona i apsorpcije sledi

$$F \vee G = F \cdot x \vee F \cdot G \vee G \cdot x \vee G = F \cdot x \vee G.$$ □

ZADATAK 2.46. *Dokazati da je svaki Bulov term jednak disjunkciji svih njegovih prostih implikanti.*

Rešenje.

Neka je F Bulov term, a $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sve njegove proste implikante.

$$\text{Iz } f_1 \leqslant F, f_2 \leqslant F, \ldots, f_n \leqslant F \text{ sledi } f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n \leqslant F.$$

F se može transformisati u kanonsku disjunktivnu formu

$$F = k_1 \vee k_2 \vee \cdots \vee k_m.$$

Pretpostavimo da je ispunjeno

$$F \nleqslant f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n.$$

Tada nad $\mathcal{B}_2$ postoje vrednosti promenljivih iz F takve da važi

$$F = 1, \text{ odnosno } k_1 \vee k_2 \vee \cdots \vee k_m = 1, \text{ a } f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n = 0.$$

Sledi da tačno jedno k_i ima vrednost 1. Neka je f_ℓ prosta implikanta koja je potkonjunkcija u k_i, a koja postoji prema teoremi 2.30. Tada je i $f_\ell = 1$, a iz $f_1 \vee \cdots \vee f_n = 0$ sledi da sve proste implikante (uključujući i f_ℓ) za taj niz vrednosti promenljivih imaju vrednost 0. Kontradikcija! Zaključujemo da je ispunjeno

$$F = f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n. \qquad \Box$$

Zadatak 2.47. *Pokazati da je konjunkcija dve različite kanonske elementarne konjunkcije u odnosu na iste promenljive jednaka nuli.*

Rešenje.

Pošto su u pitanju dve različite kanonske elementarne konjunkcije u odnosu na iste promenljive, njihova konjunkcija sadrži kao potkonjunkciju $x \cdot x'$, za neku promenljivu x, pa je jednaka nuli. $\Box$

Zadatak 2.48. *Neka su A i B Bulovi termi, a x Bulova promenljiva. Dokazati da je $A \cdot B = A \cdot (x \vee B)$ ako i samo ako je $A \cdot x$ implikanta za B.*

Rešenje.

Iz $A \cdot B = A \cdot (x \vee B)$ sledi primenom distributivnih zakona

$$A \cdot B = A \cdot x \vee A \cdot B,$$

odakle je $A \cdot x \leqslant A \cdot B$. Iz toga i iz $A \cdot B \leqslant B$ dobija se da je $A \cdot x$ implikanta za B.

Obratno, iz $A \cdot x \leqslant B$ sledi $A \cdot x \vee B = B$, pa dobijamo

$$A \cdot B = A \cdot (A \cdot x \vee B) = A \cdot x \vee A \cdot B = A \cdot (x \vee B). \qquad \Box$$

Zadatak 2.49. *Neka su F i G Bulovi termi koji nemaju zajedničkih promenljivih. Neka je f prosta implikanta za F, a g prosta implikanta za G. Dokazati da je $f \cdot g$ prosta implikanta za $F \cdot G$.*

Rešenje.

Iz $f \leqslant F$ i $g \leqslant G$ sledi da je $f \cdot g \leqslant F \cdot G$, odnosno $f \cdot g$ je implikanta za $F \cdot G$.

Pretpostavimo da $f \cdot g$ nije prosta implikanta za $F \cdot G$, tj. da postoji potkonjunkcija h od $f \cdot g$, takva da je $h \leqslant F \cdot G$. Tada je $h = h_1 \cdot h_2$, gde je h_1 potkonjunkcija u f, a h_2 potkonjunkcija u g. Ovo rastavljanje je jednoznačno, jer f i g nemaju zajedničkih promenljivih (može se dogoditi da je $h_1 = f$ ili $h_2 = g$, ali nikad istovremeno).

Dalje se pokazuje da je $h_1 \leqslant F$ i $h_2 \leqslant G$. (Pretpostavi se da to nije tačno, pa se dobije da nije ni $h \leqslant F \cdot G$ - kontradikcija). Formule $h_1 \leqslant F$ i $h_2 \leqslant G$ su u kontradikciji sa pretpostavkom da su f i g proste implikante, što dokazuje tvrđenje. $\Box$

ZADATAK 2.50. *Neka je f elementarna konjunkcija, a F disjunktivna forma. Neka je, dalje, α promenljiva sa negacijom ili bez nje. Kažemo da je α* ***suvišno slovo*** *u $\alpha \cdot f \vee F$ ako je $\alpha \cdot f \vee F = f \vee F$.*

Dokazati da je α suvišno slovo u $\alpha \cdot f \vee F$ ako i samo ako je f implikanta za $\alpha \vee F$.

Rešenje.

Dokazuje se slično kao zadatak 2.45. □

ZADATAK 2.51. *Neka je Φ disjunktivna forma. Elementarna konjunkcija f je* ***suvišna*** *u $f \vee \Phi$ ako je $f \vee \Phi = \Phi$.*

Dokazati da je f suvišna u $f \vee \Phi$ ako i samo ako je f implikanta za term Φ.

Rešenje.

Direktno po definiciji implikante,

$$f \leqslant \Phi \text{ ako i samo ako } f \vee \Phi = \Phi. \quad \square$$

ZADATAK 2.52. *Ako jedna od elementarnih konjunkcija f iz disjunktivne forme F nije prosta implikanta za F, tada u f postoji suvišno slovo. Dokazati!*

Rešenje.

Ako je f jedna od elementarnih konjunkcija disjunktivne forme F, onda je ispunjeno $f \leqslant F$, tj. f je implikanta za F. Pošto f nije i prosta implikanta za F, sledi da postoji potkonjunkcija iz f koja je implikanta za F, što znači da u f postoji suvišno slovo. □

ZADATAK 2.53. *Pokazati da je prvo pojavljivanje B' suvišno slovo u disjunktivnoj formi*

$$AB \vee AB'C \vee A'B'C \vee BC'.$$

Rešenje.

AC je implikanta za term

$$B' \vee AB \vee A'B'C \vee BC'$$

(videti zadatak 2.50). Zaista, ako elementarna konjunkcija AC ima vrednost 1, tada i A i C imaju vrednost 1 i u tom slučaju je dati Bulov term ekvivalentan sa $B' \vee B$, pa dobija vrednost 1. □

ZADATAK 2.54. *Proveriti da li je elementarna konjunkcija BC' suvišna u*

a) $ABC' \vee A'BCD \vee A'B'CD \vee BC'$;

b) $BC' \vee ABD' \vee BD \vee A'C'D'$.

Rešenje.

Koristi se rezultat zadatka 2.51.

a) BC' nije suvišna elementarna konjunkcija, jer BC' nije implikanta za $ABC' \vee A'BCD \vee A'B'CD$. Zaista, ako B uzima vrednost 1, a C uzima vrednost 0, tada BC' uzima vrednost 1. Za iste vrednosti promenljivih term $ABC' \vee A'BCD \vee A'B'CD$ ima vrednost promenljive A (što može biti i 0).

b) BC' je suvišna: ako B uzima vrednost 1, a C je 0, tada BC' dobija vrednost 1, a term $ABD' \vee BD \vee A'C'D'$ svodi se na

$$AD' \vee D \vee A'D' = D' \cdot (A \vee A') \vee D,$$

što ima vrednost 1. □

Zadatak 2.55. *Metodom Kvajna i Mak Klaskog odrediti sve proste implikante sledećih Bulovih terma:*

a) $xyz' \vee x'yz \vee x'y'z' \vee xy'z \vee x'y'z$;

b) $xyz't \vee xy'z't \vee x'y'zt \vee x'yz't \vee x'y'z't \vee x'y'z't'$;

c) $abcde \vee abc'de \vee ab'cde \vee ab'cd'e \vee abc'd'e \vee a'b'cde \vee a'bc'de' \vee ab'c'd'e \vee a'b'c'd'e \vee a'b'c'd'e'$.

Rešenje.

U sva tri slučaja može se odmah primeniti postupak Kvajna i Mak Klaskog, jer su Bulovi termi dati u KDF. Horizontalnim linijama grupisane su elementarne konjunkcije sa istim brojem znakova unarne operacije ($'$). Elementarne konjunkcije koje se označavaju (znakom $*$) nalaze se u susednim klasama. Neoznačene konjunkcije su proste implikante.

a)
$$\begin{array}{ll@{\qquad}l}
xyz' & & x'z \\
x'yz & * & y'z \\
xy'z & * & x'y' \\
\cline{1-2}
x'y'z & * & \\
\cline{1-2}
x'y'z' & * &
\end{array}$$

Proste implikante su $\quad xyz', x'z, y'z, x'y'$.

b)
$$\begin{array}{ll@{\qquad}ll@{\qquad}l}
xyz't & * & xz't & * & z't \\
\cline{1-2}
xy'z't & * & yz't & * & \\
\cline{3-4}
x'y'zt & * & y'z't & * & \\
x'yz't & * & x'y't & & \\
\cline{1-2}
x'y'z't & * & x'z't & * & \\
\cline{1-2}\cline{3-4}
x'y'z't' & * & x'y'z' & &
\end{array}$$

Proste implikante su $\quad x'y't, x'y'z', z't$.

c) Proste implikante su

$a'bc'de', abde, acde, ab'ce, abc'e, b'cde, ab'd'e, a'b'c'd'$. □

Zadatak 2.56. *Koristeći metod Kvajna i Mak Klaskog i tablicu prostih implikanti, odrediti minimalne disjunktivne forme za sledeće Bulove terme:*

a) $abcd \vee abc'd \vee ab'cd \vee abc'd' \vee a'bcd \vee a'bcd' \vee a'bc'd \vee a'b'c'd$;

b) $xyzu \vee x'yzu' \vee xy'zu' \vee xy'z'u' \vee x'yz'u' \vee xyzu' \vee x'yzu \vee xy'z'u \vee xy'zu \vee x'yz'u \vee x'y'z'u'$;

c) $ab \vee a'cde \vee a'bd \vee c'de' \vee ab'd'$.

Rešenje.

U svakom od narednih slučajeva, prvo primenjujemo postupak Kvajna i Mak Klaskog, a zatim određujemo minimalnu disjunktivnu formu uz pomoć tablice prostih implikanti.

a)

$\underline{abcd}$ *	abd *	bd
$abc'd$ *	acd	
$ab'cd$ *	$\underline{bcd}$ *	
$\underline{a'bcd}$ *	abc'	
$abc'd'$ *	$bc'd$ *	
$a'bcd'$ *	$a'bc$	
$\underline{a'bc'd}$ *	$\underline{a'bd}$ *	
$a'b'c'd$ *	$a'c'd$	

Proste implikante su acd, $a'bc$, $a'c'd$, abc' i bd.

Tablica prostih implikanti, kada se popuni, ima sledeći izgled:

	$abcd$	$abc'd$	$ab'cd$	$a'bcd$	$abc'd'$	$a'bcd'$	$a'bc'd$	$a'b'c'd$
acd	*		$\underline{*}$					
$a'bc$				*		$\underline{*}$		
$a'c'd$							*	$\underline{*}$
abc'		*			$\underline{*}$			
bd	*	*		*			*	

U ovom slučaju analiza tablice pokazuje da su proste implikante acd, $a'bc$, $a'c'd$ i abc' esencijalne, jer su jedine potkonjunkcije odgovarajućih kanonskih elementarnih konjunkcija (uočiti kolone sa podvučenim zvezdicama). Budući da svaka kanonska elementarna konjunkcija polaznog terma sadrži potkonjunkciju iz skupa te četiri esencijalne (koje moraju biti uključene u svaku minimalnu disjunktivnu formu), postoji samo jedna minimalna disjunktivna forma:

$$F = acd \vee a'bc \vee a'c'd \vee abc'.$$

b)

$\underline{f_1 = xyzu}$ *	yzu *	$x'yu'$ *	yz
$f_2 = x'yzu$ *	xzu *	$xy'u'$ *	$\underline{xz}$
$f_3 = xy'zu$ *	$\underline{xyz}$ *	$xy'z'$ *	$x'y$
$\underline{f_4 = xyzu'}$ *	$x'yz$ *	$\underline{x'yz'}$ *	xy'
$f_5 = x'yzu'$ *	$x'yu$ *	$y'z'u'$	
$f_6 = xy'zu'$ *	$xy'z$ *	$x'z'u'$	
$f_7 = xy'z'u$ *	$xy'u$ *		
$\underline{f_8 = x'yz'u}$ *	yzu' *		
$f_9 = xy'z'u'$ *	xzu' *		
$\underline{f_{10} = x'yz'u'}$ *			
$f_{11} = x'y'z'u'$ *			

Proste implikante su dakle $y'z'u'$, $x'z'u'$, yz, xz, $x'y$ i xy', a odgovarajuća tablica izgleda ovako:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
$y'z'u'$									*		*
$x'z'u'$										*	*
yz	*	*		*	*						
xz	*		*	*		*					
$x'y$		*			*			$\underline{*}$		*	
xy'			*			*	$\underline{*}$		*		

Kolona konjunkcije f_4 eliminiše se iz razmatranja zato što ima zvezdice na istim mestima kao i kolona za f_1. Implikante $x'y$ i xy' su esencijalne (podvučene zvezdice), te pripadaju svakoj minimalnoj disjunktivnoj formi. One obezbeđuju potkonjunkcije za sve konjunkcije osim za f_1 i f_{11}, pa su minimalne disjunktivne forme:

$$\begin{aligned} F_1 &= x'y \vee xy' \vee xz \vee x'z'u' \\ F_2 &= x'y \vee xy' \vee xz \vee y'z'u' \\ F_3 &= x'y \vee xy' \vee yz \vee x'z'u' \\ F_4 &= x'y \vee xy' \vee yz \vee y'z'u'. \end{aligned}$$

c) *Uputstvo.* Prvo pretvoriti Bulov term u kanonsku disjunktivnu formu. Minimalna DF u ovom slučaju je jedinstvena i to je term

$$ab \vee ad' \vee c'de' \vee a'cde \vee bd. \qquad \square$$

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_2$
x_3x_4			*	
x_3x_4'		*	*	*
$x_3'x_4'$		*		*
$x_3'x_4$		*	*	*

Slika 2.58

Zadatak 2.57. *Odrediti jedan Bulov term kome odgovaraju bar četiri različite minimalne disjunktivne forme i jedan koji ima jedinstvenu minimalnu DF.*

Rešenje.

Karnoova tablica na slici 2.58 daje jednu od mnogo mogućih varijanti za Bulov term sa više od četiri minimalne DF:

Odgovarajući term se lako identifikuje iz tablice. Treba uočiti da je tablica popunjena tako, da se u svim minimalnim DF zaokružuju po dva polja, a da je ukupan broj zvezdica neparan. Ovom Bulovom termu odgovara 10 različitih minimalnih DF od kojih svaka ima pet elementarnih konjunkcija sa po tri promenljive.

Drugi deo zadatka: jedan Bulov term sa jedinstvenom minimalnom DF je, na primer,

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4. \qquad \square$$

Zadatak 2.58. *Odrediti minimalne DF za Bulove terme iz zadatka 2.55.*

Rešenje.

a) Jedinstvena minimalna DF je

$$xyz' \vee x'z \vee y'z.$$

b) Jedinstvena minimalna DF je

$$x'yt \vee x'y'z' \vee z't.$$

c) Postoje dve minimalne DF. To su:

$$a'bc'de' \vee abde \vee abc'e \vee b'cde \vee ab'd'e \vee a'b'c'd' \quad \text{i}$$
$$a'bc'de' \vee acde \vee abc'e \vee b'cde \vee ab'd'e \vee a'b'c'd'. \qquad \square$$

Zadatak 2.59. *Pomoću Karnoovih tablica odrediti minimalne DF sledećih Bulovih terma:*

a) $F_1(x, y, z) = xyz \vee xyz' \vee xy'z \vee xy'z' \vee x'yz \vee x'yz' \vee x'y'z$;

b) $F_2(x, y, u, v) = x'y'u'v \vee x'y'uv' \vee x'y'uv \vee x'yu'v' \vee x'yu'v \vee x'yuv' \vee x'yuv \vee xy'u'v' \vee xy'u'v \vee xy'uv' \vee xy'uv \vee xyu'v'$;

Rešenje.

a) Karnoova tablica data je na slici 2.59.

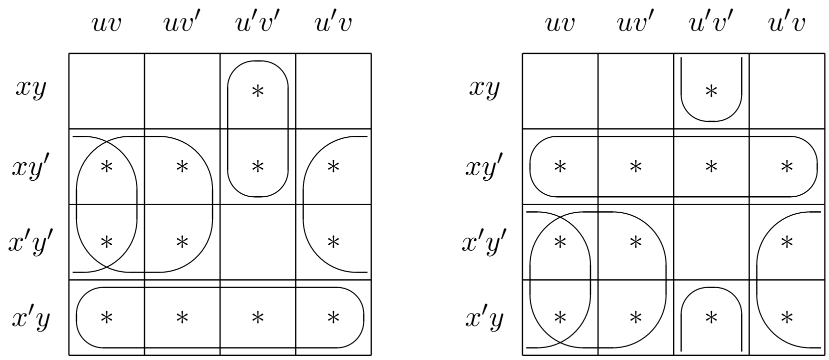
	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	*	*	*	*
x'	*	*		*

Slika 2.59

Minimalna disjunktivna forma je jedinstvena:

$$\Phi_1(x, y, z) = x \vee y \vee z.$$

b) Na popunjenoj Karnoovoj tablici blokovi se mogu zaokružiti na dva načina (slika 2.60).



Slika 2.60

Zato ovde postoje dve minimalne DF:

$$\begin{aligned}\Phi_2(x,y,u,v) &= xy'v' \vee x'y \vee y'v \vee y'u \\ \Phi'_2(x,y,u,v) &= yu'v' \vee xy' \vee x'v \vee x'u.\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.60. *Neka je data disjunktivna forma F i odgovarajuća Karnoova tablica popunjena na sledeći način: oznake se stavljaju u sva polja čije kanonske konjunkcije sadrže kao podterm neku od konjunkcija iz F. Dokazati da je KDF koja odgovara ovako popunjenoj tablici ekvivalentna sa polaznom disjunktivnom formom F.*

Rešenje. Dokaz sledi iz Leme 2.3 na strani 108. Zaista, kanonska disjunktivna forma ekvivalentna datoj disjunktivnoj formi se dobija dodavanjem svih nedostajućih promenljivih u svakoj elementarnoj konjunkciji koja nije i kanonska. Tako se umesto svake elementarne konjunkcije koja nije i kanonska dodaju sve kanonske konjunkcije koje imaju tu elementarnu konjunkciju kao podterm. Tako se za dati term dobija ekvivalentan oblik u kanonskoj disjunktivnoj formi. Ista KDF se dobija kada se Karnoova tablica popuni kako je opisano, odakle sledi tvrđenje zadatka. □

Zadatak 2.61. *Odrediti minimalne disjunktivne forme sledećih Bulovih terma, bez transformisanja tih terma na kanonsku disjunktivnu formu:*

a) $F(x,y,z) = x' \vee xyz' \vee xyz$;

b) $G(x,y,z,t) = z' \vee zt' \vee x'y'zt \vee xy'zt$;

c) $H(x,y,z,t) = ((z' \vee x't)(z \vee ((x \vee y)(x'y)')))'$.

Rešenje.

Primenjujemo postupak izložen u prethodnom zadatku.

a) Term F je disjunktivna forma, pa se direktno popunjava tablica data na slici 2.61.

	xy	$x'y$	$x'y'$	xy'
z	*	*	*	
z'	*	*	*	

Slika 2.61

Jedina minimalna DF je

$$\Phi_3(x, y, z) = y \vee x'. \qquad \square$$

b) Karnoova tablica data je na slici 2.62, a jedina minimalna DF je

$$\varphi = z' \vee t' \vee y'.$$

	xy	$x'y$	$x'y'$	xy'
zt			*	*
zt'	*	*	*	*
$z't'$	*	*	*	*
$z't$	*	*	*	*

Slika 2.62

c) Na osnovu De Morganovih i distributivnih zakona, term H jednak je sledećoj disjunktivnoj formi:

$$zx \vee zt' \vee z'x'y' \vee z'x'y.$$

	xy	xy'	$x'y'$	$x'y$
zt	*	*		
zt'	*	*	*	*
$z't'$			*	*
$z't$			*	*

Slika 2.63

Uz pomoć navedevog terma popuni se tablica (slika 2.63), iz koje se određuju minimalne disjunktivne forme; ima ih dve:

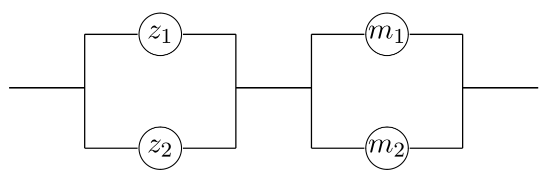
$$\begin{aligned} \phi_1 &= zx \vee z'x' \vee zt' \\ \phi_2 &= zx \vee z'x' \vee x't'. \end{aligned}$$

□

ZADATAK 2.62. *U komisiji su dve žene i dva muškarca. Odluka se donosi ili većinom glasova, ili ako za nju glasaju dva člana komisije, ali samo ako su različitog pola.*

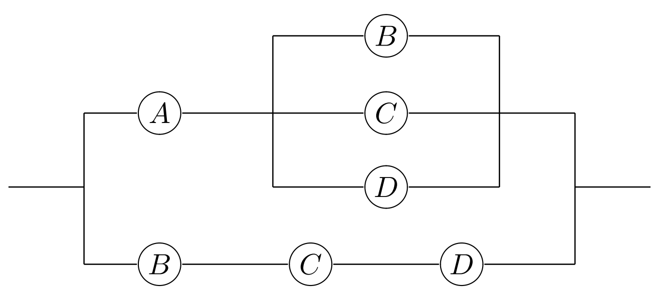
Konstruisati prekidačko kolo kroz koje prolazi struja ako i samo ako se odluka izglasa.

Rešenje.



Slika 2.64

Neka su z_1 i z_2 prekidači kojima upravljaju žene, a m_1 i m_2 oni koje koriste muškarci. Tada je odgovarajuće prekidačko kolo ono koje je prikazano na slici 2.64. □



Slika 2.65

ZADATAK 2.63. *Četiri grupe ljudi glasaju za donošenje neke odluke. Prva grupa ima pet članova, druga četiri, a treća i četvrta po dva člana. Sve grupe se unutar sebe usaglašavaju i odluka grupe „za“ donosi onoliko glasova koliko ima članova u ekipi.*

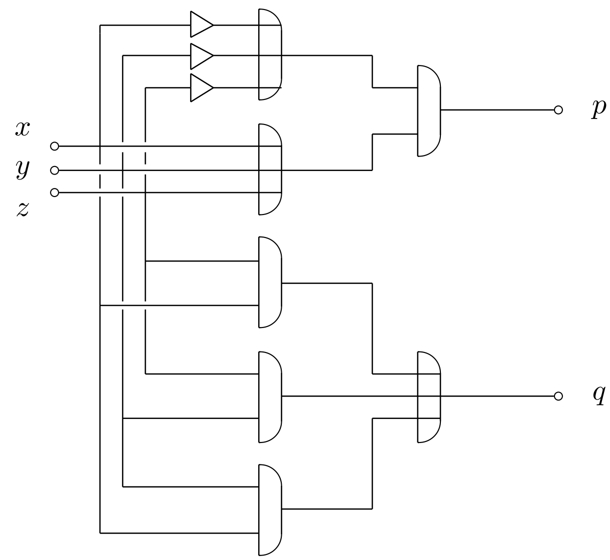
Konstruisati prekidačko kolo kroz koje protiče struja ako i samo ako se odluka izglasa.

Rešenje.

Sa A, B, C i D obeleženi su prekidači koji odgovaraju, redom, prvoj, drugoj, trećoj i četvrtoj grupi. Odgovarajuće prekidačko kolo je prikazano na slici 2.65. □

Zadatak 2.64. *Motor snabdevaju tri generatora. Ako jedan ili dva generatora otkažu, pali se signalna lampica, a ako otkažu dva, ili sva tri, javlja se zvučni signal. Obrazovati odgovarajuće Bulove terme i jedno logičko kolo sa dva izlaza (svetlosni i zvučni signal).*

Rešenje.



Slika 2.66

x	y	z	p	q
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Označimo sa x, y i z generatore, a sa p i q svetlosni i zvučni signal. Sve navedene veličine imaju po dva stanja (generator radi ili ne radi, signal se javlja ili se ne javlja). Zato ih interpretiramo kao Bulove promenljive koje uzimaju vrednosti 0 i 1. Uslove traženog problema opisuje priložena tablica.

Pojavljivanje signala u zavisnosti od stanja generatora određeno je Bulovim funkcijama datim termima:

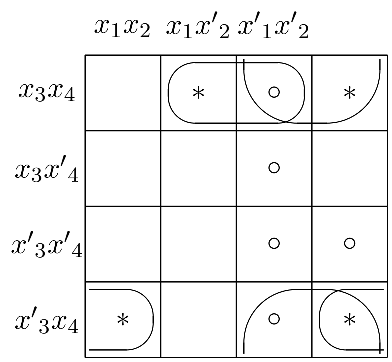
$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= (x' \vee y' \vee z') \cdot (x \vee y \vee z) \\ q(x,y,z) &= x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z. \end{aligned}$$

Logičko kolo skicirano je na slici 2.66. □

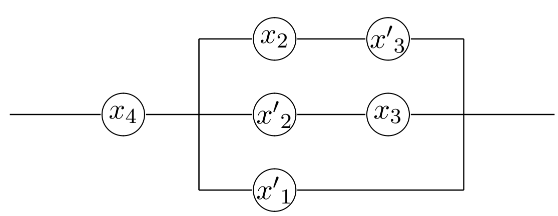
Zadatak 2.65. *Odrediti minimalnu DF i zatim skicirati što jednostavnije prekidačko kolo za izdvajanje prostih brojeva iz skupa* $\{5, 6, \ldots, 15\}$*, ako su brojevi dati u binarnom zapisu sa četiri cifre.*

Rešenje.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	-
0	0	0	1	-
0	0	1	0	-
0	0	1	1	-
0	1	0	0	-
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0



Slika 2.67



Slika 2.68

Funkcija f data u tablici na slici 2.67 izdvaja proste brojeve iz traženog skupa (zvezdice u Karnoovoj tablici), a brojevi izvan tog skupa (0 - 4) koriste se za formiranje minimalne DF kao uslovi bez uticaja (kružići). Pokrivanjem se moraju obuhvatiti sva polja sa zvezdicama (ona koja su određena uslovima zadatka), pri čemu se mogu koristiti i sva polja koja nisu u tabeli (polja označena kružićima).

Minimalna DF je

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 x_3' x_4 \vee x_1' x_4 \vee x_2' x_3 x_4.$$

Ona se može napisati u ekvivalentnom obliku tako da se smanji ukupan broj pojavljivanja promenljivih (što u prekidačkom kolu daje manji broj prekidača) :

$$x_4 \cdot (x_2 \cdot x_3' \vee x_2' \cdot x_3 \vee x_1').$$

Odgovarajuće prekidačko kolo dato je na slici 2.68. □

Zadatak 2.66. *Odrediti sve minimalne DF i nacrtati što jednostavnije prekidačko kolo koje izdvaja brojeve 0,1,2,6,7,9,10,12,13,15 predstavljene u binarnom zapisu iz skupa brojeva* $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$.

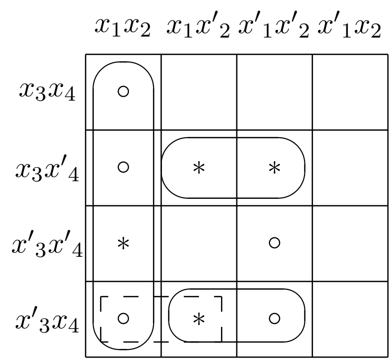
Rešenje.

Ima 9 minimalnih DF. □

Zadatak 2.67. *Odrediti sve minimalne DF i zatim skicirati što jednostavnije prekidačko kolo za izdvajanje brojeva koji počinju slovom D iz skupa brojeva* $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$, *ako su brojevi dati u binarnom zapisu sa četiri cifre.*

Rešenje.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	-
0	0	0	1	-
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	-
1	1	1	0	-
1	1	1	1	-



Slika 2.69

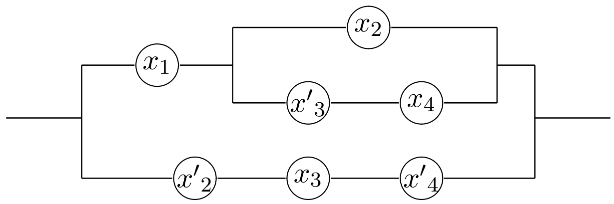
Minimalne DF su:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee x_2' x_3 x_4' \vee x_2' x_3' x_4$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee x_2' x_3 x_4' \vee x_1 x_3' x_4.$$

Kako je

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot (x_2 \vee x_3' \cdot x_4) \vee x_2' \cdot x_3 \cdot x_4',$$

jedno prekidačko kolo izgleda kao na slici 2.70.

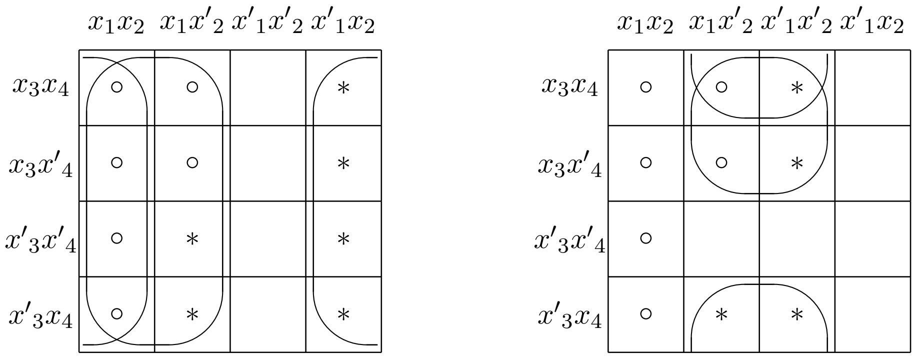


Slika 2.70

□

Zadatak 2.68. *Odrediti sve minimalne disjunktivne forme i konstruisati što jednostavnije logičko kolo koje realizuje funkciju $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$, gde je x prirodan broj od 0 - 9 u binarnom zapisu ($\lfloor a\rfloor$ je oznaka za najveći ceo broj koji nije veći od a).*

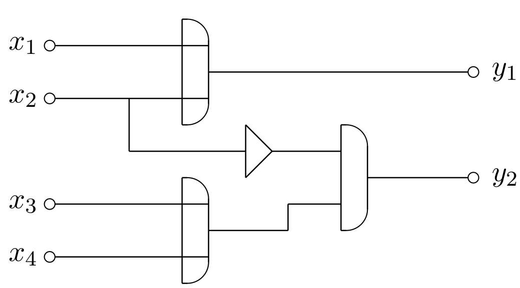
Rešenje.



$y_1 = x_1 \vee x_2$

$$y_2 = x'_2x_3 \vee x'_2x_4 = x'_2(x_3 \vee x_4)$$

Slika 2.71



Slika 2.72

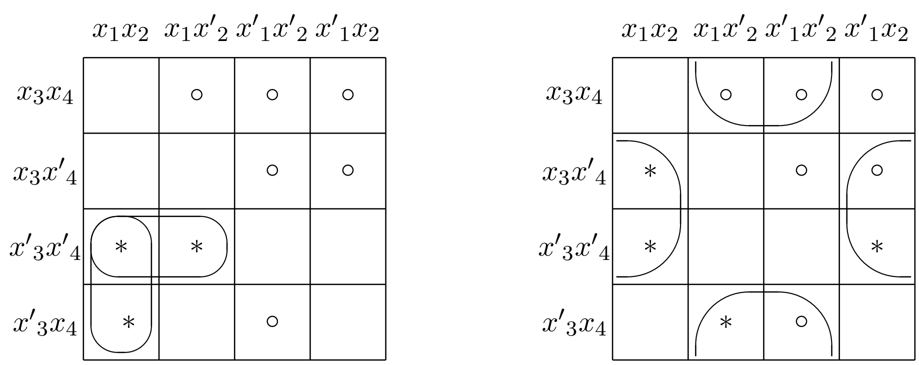
Ako je $x = \overline{x_1x_2x_3x_4}$ binarno zapisan broj između 0 i 9, onda $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \overline{y_1y_2}$ ima najviše dve cifre. Za svaku od tih cifara posebno se određuje minimalna disjunktivna forma prema navedenoj tablici, a logičko kolo ima četiri ulaza, $x_1, \ldots, x_4$ i dva izlaza, y_1 i y_2. Na Karnoovim tablicama (slika 2.71)navedeni su i uslovi bez uticaja, a prekidačko kolo je skicirano na slici 2.72.

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	-	-
1	0	1	1	-	-
1	1	0	0	-	-
1	1	0	1	-	-
1	1	1	0	-	-
1	1	1	1	-	-

□

Zadatak 2.69. *Konstruisati logičko kolo koje realizuje oduzimanje dva dvocifrena binarna broja od kojih je onaj od koga se oduzima (umanjenik) uvek veći ili jednak sa drugim (umanjiocem).*

Rešenje.



Slika 2.73

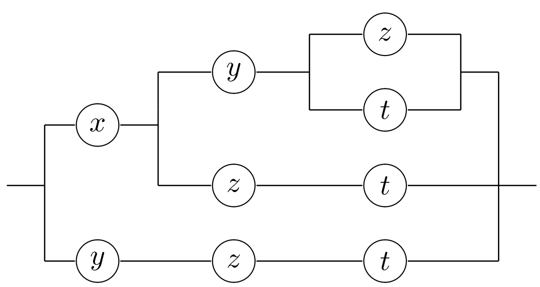
Neka je $\overline{x_1x_2}$ prvi broj, $\overline{x_3x_4}$ drugi broj, a $\overline{y_1y_2}$ razlika, pri čemu su ovi brojevi dati u pozicionom binarnom sistemu. Razlika nije definisana ako je umanjenik manji od umanjioca, tj. ako je $\overline{x_1x_2} < \overline{x_3x_4}$. Zato se ti slučajevi ne razmatraju, pa se i u ovom slučaju problem svodi na minimizaciju parcijalne Bulove funkcije. Data tablica nije popunjena za sve vrednosti, a u Karnoovim tablicama (slikapodve) koriste se uslovi bez uticaja (kružići).

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	-	-
0	0	1	0	-	-
0	0	1	1	-	-
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	-	-
0	1	1	1	-	-
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	-	-
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Analiza priloženih Karnoovih tablica daje sledeće minimalne disjunktivne forme za svaku od binarnih cifara razlike:

$$y_1 = x_1x_2x_3' \vee x_1x_3'x_4', \quad y_2 = x_2x_4' \vee x_2'x_4.$$

Odgovarajuće logičko kolo sada se lako konstruiše. □



Slika 2.74

Zadatak 2.70. *Predsednik i tri člana komisije glasaju pritiskom na dugme. Odluka se donosi ili većinom glasova, ili glasom predsednika i bar jednog preostalog člana. Konstruisati što jednostavnije prekidačko kolo kroz koje protiče struja ako i samo ako se odluka izglasa.*

Rešenje. Neka je prekidač koji odgovara predsedniku obeležen sa x, a prekidači koji odgovaraju ostalim članovima komisije sa y, z i t. Jedno prekidačko kolo koje ispunjava uslove zadatka je skicirano na slici 2.74. □

ZADATAK 2.71. *Konstruisati logičko kolo koje realizuje deljenje četvorocifrenog binarnog broja*

a) *brojem 2;*
b) *brojem 3;*
c) *brojem 4;*
d) *brojem 5;*
e) *brojem 6;*
f) *brojem 7;*
g) *brojem 8.*

Izlaz neka sadrži količnik i ostatak, u binarnom zapisu.

Rešenje.

Kola **a)**, **c)** i **g)** je jednostavno realizovati, jer su brojevi dati u binarnom zapisu, pa je deljenje ekvivalentno pomeranju decimalnog zareza na levo (na primer, ako delimo binarni broj $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ brojem 8, decimalni zarez se pomera za tri mesta u levo, pa je količnik broj x_1, a ostatak broj $\overline{x_2x_3x_4}$).

b) Najveći količnik dobijen deljenjem četvorocifrenog binarnog broja brojem 3 ima tri cifre, a najveći ostatak dve cifre u binarnom zapisu, pa će izlaz imati pet cifara. Tablicom se predstavlja funkcija koja realizuje traženo deljenje, gde je $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ broj koji se deli (deljenik), $\overline{y_1y_2y_3}$ je količnik, a $\overline{z_1z_2}$ je ostatak.

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0

Uputstvo za dalji postupak. Ovde je navedena tablica vrednosti za tražene veličine, urađena prema gornjoj analizi. Za svaku od veličina y_1, y_2, y_3, z_1 i z_2 (posmatranih kao funkcija promenljivih x_1, x_2, x_3 i x_4) nađu se odgovarajući Bulovi termi, i zatim se konstruiše logičko kolo koje treba da ima četiri ulaza i pet izlaza. □

Zadatak 2.72. *U komisiji su dve žene i tri muškarca. Odluka se donosi većinom glasova, ali pod uslovom da za nju glasa bar jedna žena. Nacrtati odgovarajuće prekidačko kolo.*

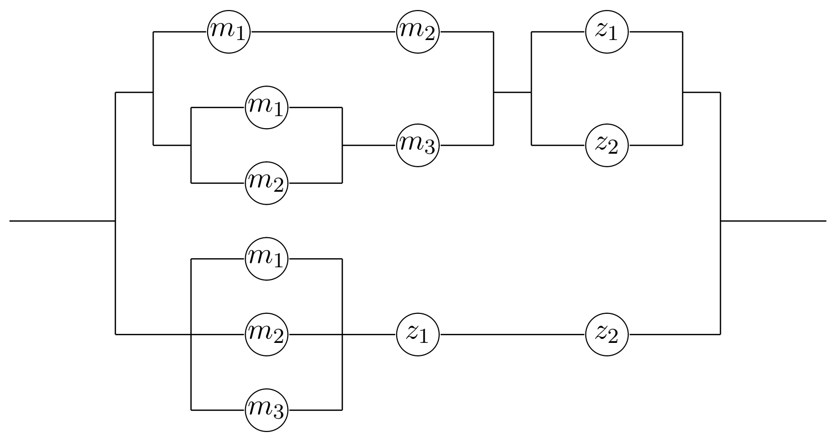
Rešenje.

Uvedimo sledeće oznake:

z_1, z_2 - prekidači koji odgovaraju ženama;

m_1, m_2, m_3 - prekidači koji odgovaraju muškarcima.

Jedno od odgovarajućih prekidačkih kola je predstavljeno na slici 2.75.

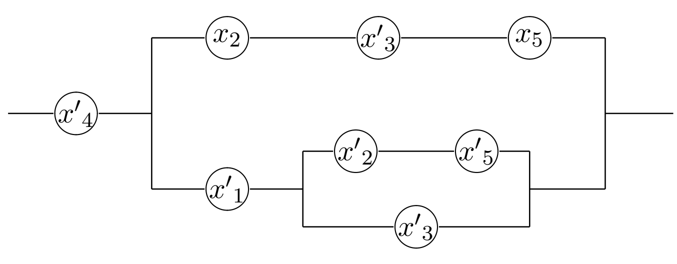


Slika 2.75

□

Zadatak 2.73. *Odrediti sve minimalne DF i što jednostavnije prekidačko kolo koje od brojeva 0 - 31 u binarnom zapisu izdvaja sve potpune kvadrate.*

Rešenje.



Slika 2.76

KDF za traženu funkciju je:

$$\begin{aligned} F &= x_1'x_2'x_3'x_4'x_5' \vee x_1'x_2'x_3'x_4'x_5 \vee x_1'x_2'x_3x_4'x_5' \\ &\quad \vee x_1'x_2x_3'x_4'x_5 \vee x_1'x_2x_3'x_4'x_5' \vee x_1x_2x_3'x_4'x_5. \end{aligned}$$

Minimalne DF određuju se metodom Kvajna i Mak Klaskog i tablicom prostih implikanti.

Prvo se primenjuje metoda Kvajna i Mak Klaskog.

$f_1 = x_1x_2x_3'x_4'x_5$ *	$x_2x_3'x_4'x_5$	$x_1'x_3'x_4'$
$f_2 = x_1'x_2x_3'x_4'x_5$ *	$x_1'x_2x_3'x_4'$ *	
$f_3 = x_1'x_2x_3'x_4'x_5'$ *	$x_1'x_3'x_4'x_5$ *	
$f_4 = x_1'x_2'x_3'x_4'x_5$ *	$x_1'x_3'x_4'x_5'$ *	
$f_5 = x_1'x_2'x_3x_4'x_5'$ *	$x_1'x_2'x_3'x_4'$ *	
$f_6 = x_1'x_2'x_3'x_4'x_5'$ *	$x_1'x_2'x_4'x_5'$	

Proste implikante su $x_2x_3'x_4'x_5$, $x_1'x_2'x_4'x_5'$ i $x_1'x_3'x_4'$.

Tablica prostih implikanti:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
$x_2x_3'x_4'x_5$	*	*				
$x_1'x_2'x_4'x_5'$					*	*
$x_1'x_3'x_4'$		*	*	*		*

Minimalna DF je na osnovu analize ove tablice

$$D = x_2x_3'x_4'x_5 \vee x_1'x_2'x_4'x_5' \vee x_1'x_3'x_4'.$$

Budući da je

$$D = x_4' \cdot (x_2 \cdot x_3' \cdot x_5 \vee x_1' \cdot (x_2' \cdot x_5' \vee x_3')),$$

može se konstruisati prekidačko kolo sa manjim brojem prekidača od onog koje određuje DF (slika 2.76). □

Zadatak 2.74. *U komisiji su tri muškarca, od kojih je jedan predsednik i dva člana, i dve žene, od kojih je jedna potpredsednica, a druga član. Odluka se donosi većinom glasova, ali ne ako za nju glasaju samo tri muškarca, i sa dva glasa, ako glasaju predsednik i još jedan član suprotnog pola, ili potpredsednica i još jedan član suprotnog pola.*

Naći sve minimalne DF i konstruisati što jednostavnije prekidačko kolo kroz koje protiče struja ako i samo ako se odluka izglasa.

Rešenje.

p_m - prekidač koji odgovara predsedniku;

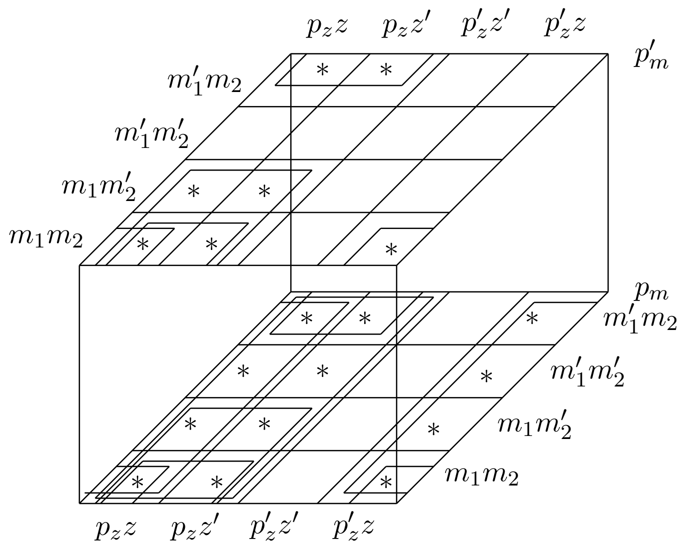
m_1, m_2 - prekidači koji odgovaraju članovima muškarcima;

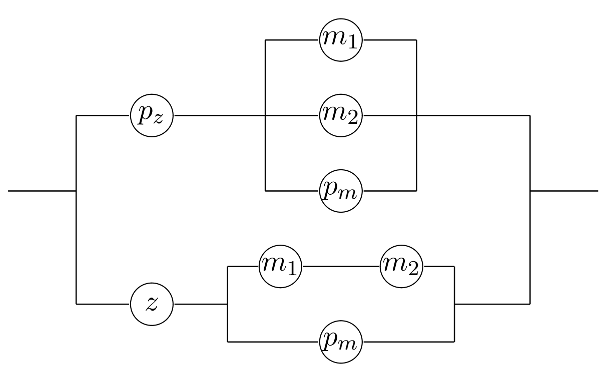
p_z - prekidač koji odgovara potpredsednici;

z - prekidač koji odgovara članu ženi.

KDF za funkciju koja odgovara tom kolu je sledeća:

$$
\begin{aligned}
F \;=\;& p_m m_1 m_2 p_z z \vee p_m' m_1 m_2 p_z z \vee p_m m_1' m_2 p_z z \vee p_m m_1 m_2' p_z z \vee\\
& p_m m_1 m_2 p_z' z \vee p_m m_1 m_2 p_z z' \vee p_m m_1' m_2 p_z' z \vee p_m m_1 m_2' p_z' z \vee\\
& p_m' m_1 m_2 p_z' z \vee p_m' m_1 m_2 p_z z' \vee p_m m_1' m_2 p_z z' \vee p_m m_1 m_2' p_z z' \vee\\
& p_m' m_1' m_2 p_z z \vee p_m' m_1 m_2' p_z z \vee p_m m_1' m_2' p_z z \vee p_m m_1' m_2' p_z z' \vee\\
& p_m m_1' m_2' p_z' z \vee p_m' m_1 m_2' p_z z' \vee p_m' m_1' m_2 p_z z'.
\end{aligned}
$$





Slika 2.77

Minimalne DF određujemo metodom Karnoovih tablica.

Analizom priložene „prostorne“ Karnoove tablice, na sličan način kao i za terme sa manjim brojem promenljivih, dolazi se do sledeće jedinstvene minimalne DF.

$$F = zm_1m_2 \vee p_zm_2 \vee p_zm_1 \vee p_mp_z \vee p_mz.$$

Kada se ovaj term transformiše,

$$F = p_z \cdot (m_1 \vee m_2 \vee p_m) \vee z \cdot (m_1 \cdot m_2 \vee p_m),$$

može se konstruisati prekidačko kolo koje odgovara ovom problemu. Skicirano je na slici 2.77. □

GLAVA 3

Dodatak: Bulove funkcije, kodovi i statistička teorija informacija

Savremeno računarstvo koristi digitalnu tehnologiju i informacije se obrađuju pomoću binarnih kodova. To su kolekcije reči istih dužina nad dvoelementnim alfabetom i mogu se na prirodan način povezati sa Bulovim funkcijama, odnosno sa Bulovom algebrom $\mathcal{B}_2^n$. Greške koje se javljaju u obradi podataka i transmisiji poruka ispunjavaju neke statističke zakone. Zato se za konstrukciju i analizu kodova koji se efektivno primenjuju u kompjuterskoj tehnologiji, koriste obe spomenute oblasti: Bulove funkcije i statistička teorija informacija.

1. Binarni blok-kodovi

1.1. Definicija, primeri. Kodovi sa fiksiranom dužinom kodnih reči ili blok-kodovi uvode se na sledeći način:

Posmatraju se konačni skupovi

$A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_a\}$ *alfabet izvora* i

$B = \{\beta_1, \ldots, \beta_b\}$ *alfabet kôda*; b je *baza* kôda.

Elementi skupova A i B su *slova* odgovarajućeg alfabeta.

Svako $1-1$ preslikavanje $f : A \to B^n$, za neko $n \in \mathbb{N}$, je **kodiranje sa fiksiranom dužinom** (n) **kodnih reči** alfabeta A.

Skup $V = f(A) \subseteq B^n$ je **blok-kôd,** njegovi elementi (uređene n-torke slova iz B) su **kodne reči**, n je **dužina** kôda i ako je $|B| = b = 2$, kažemo da je on *binaran*.

Preslikavanje f je $1-1$, pa je broj slova alfabeta A određen brojem reči blok-kôda V. Otuda se često govori da je podskup V iz B^n blok-kôd kardinalnosti a, nad alfabetom B. O egzistenciji takvog kôda za date parametre a, b i n govori sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.1. *Da bi postojao blok-kôd $V \subseteq B^n$, $|B| = b$, $b, n \in \mathbb{N}$, kardinalnosti $a \in \mathbb{N}$, potrebno je i dovoljno da bude*

$$n \geqslant \frac{\log a}{\log b}\,. \tag{6}$$

Dokaz. Kodnih reči ne može biti više od svih reči u skupu B^n. Otuda, ako postoji takav kôd, važi $a \leqslant b^n$. Logaritmovanjem se sada neposredno dobija tražena nejednakost.

Slično je i u obrnutom smeru. ∎

U nastavku razmatramo isključivo binarne blok-kôdove, tj. smatramo da je $B = \{0, 1\}$. Prema nejednakosti (6) u tom slučaju (za bazu 2 logaritma) ispunjeno je

$$n \geqslant \log_2 a.$$

S obzirom da je dužina kôda u stvari broj kôdnih simbola koji dolaze na jedno slovo alfabeta izvora, od nje zavisi i brzina prenošenja kodiranih poruka; za veće n ta brzina je manja i obratno.

Primer 3.2. Za kodiranje dekadnih cifara $0, 1, 2, \ldots, 9$ binarnim kôdom potrebno je, na osnovu (6), da dužina kodnih reči bude bar 4. Zaista, iz te nejednakosti je $n \geqslant \log_2 10 \approx 3,2$.

Najrasprostranjeniji takvi tetradni kôdovi na kojima se bazira rad elektronskih računskih mašina navedeni su u tablici. BCD (Binary Coded Decimal) je već spomenuti direktan binarni kôd a ostali nose ime po autoru ili načinu na koji su konstruisani („plus 3“).

cifra	BCD kôd	kôd Gray-a	kôd plus 3	kôd Gray Stibitz-a	kôd Aiken-a
0	0000	0000	0011	0010	0000
1	0001	0001	0100	0110	0001
2	0010	0011	0101	0111	0010
3	0011	0010	0110	0101	0011
4	0100	0110	0111	0100	0100
5	0101	0111	1000	1100	1011
6	0110	0101	1001	1101	1100
7	0111	0100	1010	1111	1101
8	1000	1100	1011	1110	1110
9	1001	1101	1100	1010	1111

□

Višecifreni dekadni brojevi se u računarima predstavljaju pomoću ovih kôdova navođenjem kodnih reči odgovarajućih cifara (na primer: broj 256 se pomoću BCD kôda registruje kao reč 0010/0101/0110).

Sabiranje (na primer) tako registrovanih brojeva izvodi se cifra po cifra, sa zapisivanjem odgovarajućeg ostatka po modulu 10. Svaki od navedenih kôdova ima u tom smislu određenih prednosti.

Za unutrašnju interpretaciju alfanumeričkih podataka u računarima, u koje su dakle uključena i slova, znaci interpunkcije itd., koriste se kôdovi većih dužina.

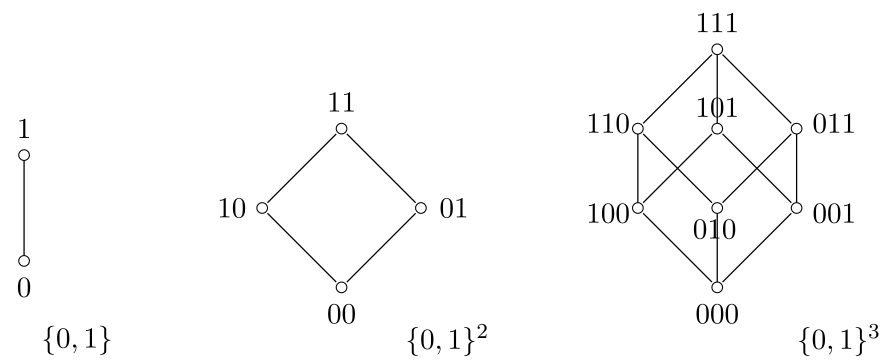
Ako se, na primer, kodiraju slova engleske abecede ($a = 26$), iz (6) sledi $n \geqslant \log 26 \approx 4,7$, tj. odgovarajući kôd mora imati dužinu bar 5. Na primer, za EBDC-kôd (Extended BCD) je $n = 6$, za kôd ASCII (American Standard Code for Information Interchange) je $n = 7$, a EBCDIC (EBCD - Interchange Code) ima dužinu $n = 8$. U ovom poslednjem kôdu postoje kodne reči za 86 različitih znakova, a velika i mala slova abecede različito su kodirana.

Na izbor dužine kôda utiču, pored kardinalnosti alfabeta izvora, još neki drugi razlozi, koji su u vezi sa otkrivanjem i ispitivanjem grešaka u transmisiji. O tome se govori u sledećim odeljcima.

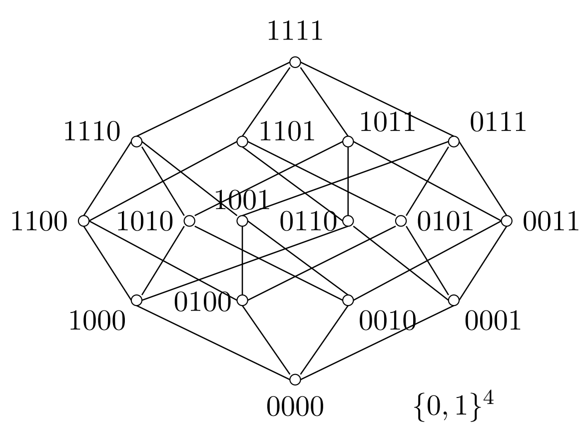
1.2. Algebarske strukture na skupu $\{0,1\}^n$. Skup $\{0,1\}$ uređuje se relacijom $\leqslant$ na uobičajeni način: $0 \leqslant 1$. Skup $\{0,1\}^n$ uređenih n-torki elemenata 0 i 1 uređuje se uz pomoć tog poretka po koordinatama:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \text{ ako } \alpha_i \leqslant \beta_i \text{ za sve } i = 1, \ldots, n.$$

Ovako definisana relacija je poredak na skupu $\{0,1\}^n$ u odnosu na koji je ta struktura Bulova mreža, odnosno Bulova algebra (str. 71). Dijagrami ovih uređenih struktura za $n \in \{1,2,3,4\}$ predstavljeni su redom na slikama 3.1 i 3.2.



Slika 3.1



Slika 3.2

Kao sto je izloženo u odeljku 2.2 (str. 121), na skupu $\{0,1\}$ mogu se posmatrati i binarne operacije „$\oplus$“ i „$\cdot$“, definisane tablicama:

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

U navedenom odeljku dokazano je da je struktura $(\{0,1\},\oplus,\cdot)$ polje, tzv. Galoaovo polje, koje se označava sa $GF(2)$.

Definišimo sada binarnu operaciju „$\oplus$“ na skupu $\{0,1\}^n$, za proizvoljno $n\in\mathbb{N}$. Za $x,y\in\{0,1\}^n$ $(x=(x_1,\ldots,x_n),\ y=(y_1,\ldots,y_n))$, je

$$x\oplus y := (x_1\oplus y_1,\ldots,x_n\oplus y_n), \tag{7}$$

gde je na desnoj strani sa $\oplus$ označena prva operacija iz polja $GF(2)$.

Tvrđenje 3.3. *$(\{0,1\}^n,\oplus)$ je Abelova grupa.*

Dokaz. Asocijativnost i komutativnost operacije $\oplus$ su posledica odgovarajućih osobina operacija na koordinatama, neutralni elemenat je $(0,\ldots,0)$, a inverzni elemenat za $(x_1,\ldots,x_n)$ je ta ista $n-$torka (s obzirom da je u $GF(2)$ za svako $i=1,\ldots,n,\ x_i\oplus 0=x_i,\ x_i\oplus x_i=0$). ■

Primetimo da je gornji stav zapravo posledica Tvrđenja 2.15 (str. 121), jer je direktan stepen grupe isto grupa.

Definišimo preslikavanje $\{0,1\}\times\{0,1\}^n\to\{0,1\}^n$, u oznaci „$\cdot$“, na sledeći način:

ako je $a\in\{0,1\}$ i $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$, onda je

$$a\cdot x := (a\cdot x_1,\ldots,a\cdot x_n), \tag{8}$$

gde je na desnoj strani sa „$\cdot$“ označena druga operacija polja $GF(2)$.

Ovo „množenje vektora skalarom“ može se opisati i na sledeći način:

za $a\in\{0,1\}$ i $x\in\{0,1\}^n$,

$$a\cdot x=\begin{cases}(0,\ldots,0), & \text{za } a=0\\ \quad x, & \text{za } a=1\,.\end{cases}$$

Lema 3.4. *Abelova grupa $(\{0,1\}^n,\oplus)$ je u odnosu na operaciju definisanu sa (i) vektorski prostor nad poljem $GF(2)$ (Označimo ga sa $\mathcal{S}_2^n$).*

Dokaz. Osobine vektorskog prostora (str. 9) se neposredno proveravaju, pri čemu je množenje skalarom definisano sa (8). ■

Primer 3.5. Vektorski prostor $\mathcal{S}_2^4$ čine vektori $(0,0,0,0),\ (0,0,0,1),\ldots,$ $(1,1,1,1)$ i ima ih 16. U njemu je, na primer,

$$\begin{array}{rcccc} (0,1,0,1) & \oplus & (1,1,1,0) & = & (1,0,1,1),\\ (1,0,0,1) & \oplus & (1,0,0,1) & = & (0,0,0,0),\\ 0 & \cdot & (1,0,1,1) & = & (0,0,0,0),\\ 1 & \cdot & (0,1,1,0) & = & (0,1,1,0), \end{array}$$

itd. □

$\mathcal{S}_2^n$ je $n-$dimenzionalan vektorski prostor i jedna baza mu je skup

$$\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}.$$

1.3. Metrička svojstva. Norma (težina) vektora $x \in \{0,1\}^n$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, u oznaci $\|x\|$, definiše se jednakošću:

$$\|x\| := \sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{9}$$

gde je na desnoj strani zbir elemenata iz skupa $\{0,1\}$ kao prirodnih brojeva.

(Norma je dakle preslikavanje $\{0,1\}^n \to \mathbb{N}_0$).

Na primer, ako je $x = 1011010$, onda je

$$\|x\| = 1+0+1+1+0+1+0 = 4.$$

Uz pomoć norme uvodi se još jedan od osnovnih pojmova:

Hemingovo[1] **rastojanje** $d(x,y)$ vektora x i y iz $\{0,1\}^n$ definiše se jednakošću

$$d(x,y) := \|x \oplus y\|\,.$$

Na primer, ako je $x = 11101011$, $y = 10101010$, onda je $d(x,y) = 2$, jer je $x \oplus y = 01000001$, a $\|x \oplus y\| = 1+1 = 2$.

(Kao i ranije, vektore često označavamo i kao reči - bez zagrada i zareza).

Iz definicije ovog rastojanja sledi: ako je

$$x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n),$$

onda je

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \oplus y_i\,.$$

Uočavamo i sledeće: *norma vektora je broj njegovih ne-nula koordinata, a Hemingovo rastojanje između x i y jednako je broju koordinata na kojima se ti vektori razlikuju.*

Naredne osobine direktno se mogu proveriti.

Ako su x i y iz $\{0,1\}^n$, onda je

1) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = (0,\ldots,0)$;

2) $\|x \oplus y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Osobina 2) neposredno sledi iz nejednakosti

$$x_i \oplus y_i \leqslant x_i + y_i,\ \ x_i, y_i \in \{0,1\} \subseteq \mathbb{N}_0,$$

gde su $\oplus$ i $+$ redom sabiranje po modulu dva i „obično“ sabiranje.

Pomoću navedenih osobina norme, sada se jednostavno dokazuju sledeća svojstva Hemingovog rastojanja: ako su x, y, z iz $\{0,1\}^n$, onda je

a) $d(x,y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

[1] R.W.Hamming, američki matematičar.

b) $d(x, y) = d(y, x)$;

c) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Svojstvo c) proizilazi iz 2): kako je $z \oplus z = 0$, to je

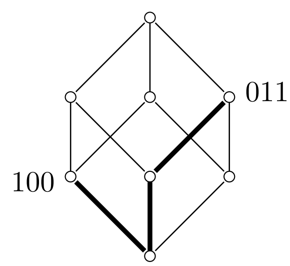
$$\|x \oplus y\| = \|x \oplus z \oplus y \oplus z\| \leqslant \|x \oplus z\| + \|y \oplus z\| .$$

Neposredna posledica ovih razmatranja je sledeći stav.

TVRĐENJE 3.6. *Uređeni par* $(\{0,1\}^n, d)$ *je metrički prostor, pri čemu je*

$$d : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \mathbb{N}_0$$

preslikavanje definisano Hemingovim rastojanjem. ■



Slika 3.3

Metrički prostor $(\{0,1\}^n, d)$ ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Elemente skupa $\{0,1\}^n$ možemo posmatrati kao temena n-dimenzionalne jedinične kocke (Bulove algebre $\mathcal{B}_2^n$). Tada je $d(x, y)$ minimalan broj ivica kocke, u nizu koji povezuje temena x i y.

PRIMER 3.7. Rastojanje između vektora $x = 100$ i $y = 011$ je 3, a odgovarajuća interpretacija na trodimenzionalnoj jediničnoj kocki data je na slici 3.3. □

Za kôd $V \subseteq \{0,1\}^n$ definiše se **kodno rastojanje** u oznaci $d(V)$, kao broj

$$d(V) := \min_{u \neq v,\, u,v \in V} d(u, v),$$

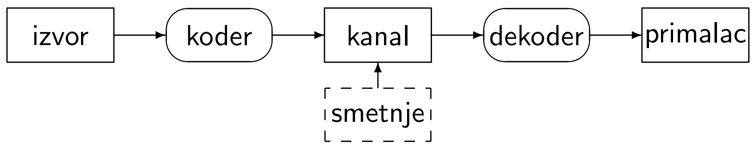
gde je $d(u, v)$ Hemingovo rastojanje između vektora u i v.

PRIMER 3.8. a) Kodno rastojanje samog skupa $\{0,1\}^n$ iznosi 1 (na primer $d(x, y) = 1$, gde je $x = (0, \ldots, 0)$, $y = (1, 0, \ldots, 0)$).

b) Za kôd $V = \{0101, 1010, 1100, 0011, 1111\}$, je $d(V) = 2$, jer je na primer $d(x, y) = 2$, gde je $x = 1111$, a $y = 1100$. Manjeg rastojanja između ma koja dva vektora iz V nema. □

2. Komunikacijski kanal; BSC

2.1. Shema komunikacije. Obrade podataka, transmisije poruka formulisanih binarnim kodovima, podložne su greškama. Greške, kao neizbežno svojstvo digitalne tehnologije, imaju statističku prirodu. Da bi se greške kontrolisale, u statističkoj teoriji informacija, komunikacija koja se obavlja pomoću kodova vezuje se uz komunikacijski kanal. Njegova shema data je na slici 3.4.



Slika 3.4

Izvor informacija generiše poruke (kojima se fizički ili na drugi način konkretizuje informacija).

Koder je objekat u kome se poruka transformiše u oblik pogodan za prenošenje kroz kanal (kodira se), pri čemu se obično vodi računa o brzini tog prenošenja i obliku koji je najmanje osetljiv na greške.

Kanal je medijum za transmisiju kodiranih poruka.

Smetnje se javljaju kod svakog prenošenja poruka, jer je nemoguće izolovati sistem od drugih izvora informacije. Smetnje određuju svojstva kanala i obično ih je moguće opisati statističkim zakonima.

U **dekoderu** se poruke ponovo transformišu, sada u oblik koji je prihvatljiv za primaoca.

Teorije informacija i kodiranja svakom od spomenutih objekata dodelju-ju preciznu matematičku interpretaciju. Ovde se navedena komunikacija analizira sa aspekta binarnih blok-kodova.

2.2. Binarni simetrični kanal (BSC). Za binarno kodirane poruke i podatke (o kojima i govorimo ovde), komunikacijski kanal takođe je binaran. Greške u komunikaciji su trasformacije jednog binarnog simbola u drugi ($0 \to 1$ i $1 \to 0$), tzv., *greške zamene*. Ako je binarni alfabet $\{0,1\}$, onda **binarni kanal** definišemo kao matricu oblika

$$\Pi = \begin{bmatrix} p(0|0) & p(1|0) \\ p(0|1) & p(1|1) \end{bmatrix}.$$

U prvoj vrsti su verovatnoće da se na izlazu iz kanala pojave redom 0 i 1, pod uslovom da je na ulazu 0, a u drugoj vrsti, analogno, uslovne verovatnoće za izlaze redom 0 i 1, ako je ulaz 1. To su *uslovne raspodele* na alfabetu $\{0,1\}$, što po definiciji znači da su svi elementi matrice nenegativni realni brojevi i da je zbir verovatnoća u svakoj vrsti broj 1:

$$p(x|y) \geqslant 0, x, y \in \{0,1\}; \qquad p(0|0) + p(1|0) = p(0|1) + p(1|1) = 1.$$

Verovatnoće $p(0|0)$ i $p(1|1)$ odnose se na ispravno prenet odgovarajući binarni simbol, a $p(1|0)$ i $p(0|1)$ su *verovatnoće greške* u transmisiji.

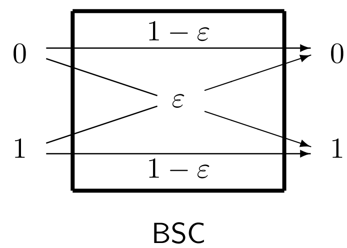
U praksi se događa da su greške $0 \to 1$ i $1 \to 0$ obično jednako verovatne, pa je tada $p(1|0) = p(1|0)$. Pod tim uslovom, definišemo **binarni simetrični**

kanal (**BSC**, engl. Binary Symmetric Channel) sledećom matricom:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}, \quad 0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}\,.$$

Prema definiciji binarnog kanala, ovde je ε **verovatnoća greške**. Ova verovatnoća zavisi od svojstava uređaja i određuje se obično statističkim metodama (npr., kao relativna frekvencija: količnik broja pojavljivanja jednog od dva binarna simbola i ukupnog broja oba simbola u nekom reprezentativnom uzorku). Ovde pretpostavljamo da je greška manja od $0,5$, kao što se u praksi i događa.

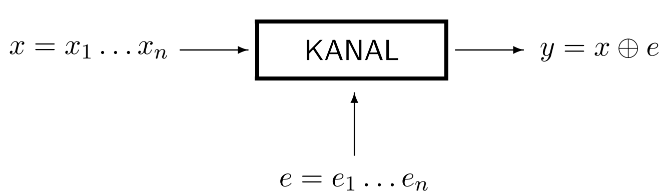
Simbolično, BSC predstavljamo shemom na slici 3.5.



Slika 3.5

3. Dekodiranje; ispravljanje i otkrivanje grešaka

3.1. Dekodiranje. Pretpostavimo da se elementi datog binarnog kôda $V \subseteq \{0,1\}^n$ upućuju binarnim simetričnim kanalom (BSC). Prolaskom kroz ovaj kanal, reč $x \in \{0,1\}^n$ transformiše se u reč $y \in \{0,1\}^n$, gde je $y = x \oplus e$. Vektor $e = e_1 \ldots e_n \in \{0,1\}^n$ je **vektor greške** (slika 3.6).



Slika 3.6

S obzirom na spomenutu prirodu BSC, $e_i = 0$ sa verovatnoćom $1-\varepsilon$ (u kom slučaju se $i-$ta koordinata ne menja), a $e_i = 1$ sa verovatnoćom ε (na $i-$toj koordinati došlo je do greške oblika $0 \to 1$ ili $1 \to 0$).

Ako se y razlikuje od x na s $(0 \leqslant s \leqslant n)$ koordinata, kažemo da je y dobijeno iz x usled s grešaka; drugim rečima, to se događa kada je $\|e\| = s$).

Primer 3.9. Ako je $x = 101101$, onda je reč $y = 111101$ dobijena iz x usled jedne, a $z = 000011$ usled četiri greške. □

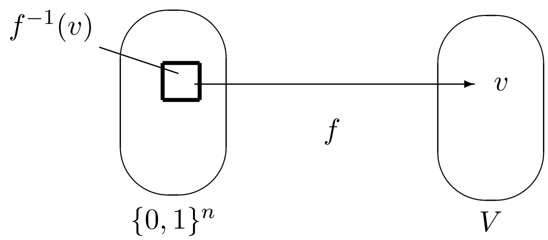
Napomena. Greškama se smatraju i transformacije koje menjaju dužinu reči, kao i one koje su posledica sabiranja sa binarnim brojevima tj. ± 10, $\pm 100, \ldots$ itd. (aritmetičke greške) videti na pr. [**17**]).

Primetimo da rastojanje Heminga između reči x i iz nje, pod uticajem s grešaka dobijene reči y, iznosi baš s.

U nastavku pretpostavljamo da se elementi kôda $V \subseteq \{0,1\}^n$ propuštaju kroz BSC.

Svako preslikavanje f skupa $\{0,1\}^n$ na skup V je jedno **dekodiranje** reči iz $\{0,1\}^n$.

Dekodiranjem f kao funkcijom određeno je jedno razbijanje skupa $\{0,1\}^n$ na disjunktne podskupove $f^{-1}(v),\ v \in V$ (to je jezgro funkcije f, dakle jedna particija skupa $\{0,1\}^n$, slika 3.7)[2].



Slika 3.7

Sledeći stav daje *opšti postupak dekodiranja* kojim se prevazilaze eventualne smetnje u transmisiji.

Tvrđenje 3.10. *Neka je BSC dat matricom*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

i kôd $V \subseteq \{0,1\}^n$. *Tada za sve* $u, v \in V$ *i* $x \in \{0,1\}^n$, *važi*

$$p(x|u) > p(x|v) \text{ ako i samo ako } d(u,x) < d(v,x).$$

Dokaz. Na osnovu osobina uslovnih verovatnoća za nezavisne događaje, za $x = x_1 \cdots x_n$ i $u = u_1 \cdots u_n$ ispunjeno je:

$$p(x|u) = p(x_1 \cdots x_n | u_1 \cdots u_n) = p(x_1|u_1) \cdot \cdots \cdot p(x_n|u_n)$$

i zato je

$$p(x|u) = \varepsilon^{d(u,x)} (1-\varepsilon)^{n-d(u,x)}$$

($d(u,x)$ je, kao što smo uočili, broj grešaka zamene na reči u, a verovatnoća svake od tih grešaka je ε).

Slično

$$p(x|v) = \varepsilon^{d(v,x)} (1-\varepsilon)^{n-d(v,x)}.$$

[2] $f^{-1}(v)$ je inverzna slika elementa v tj. jednočlanog skupa $\{v\}$ (videti str. 8). Ovde se ne koristi inverzna funkcija, pa ne može doći do zabune.

Odatle je

$$\frac{p(x|u)}{p(x|v)} = \frac{\varepsilon^{d(u,x)}(1-\varepsilon)^{n-d(u,x)}}{\varepsilon^{d(v,x)}(1-\varepsilon)^{n-d(v,x)}} = \Big(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{d(v,x)-d(u,x)}. \tag{10}$$

S obzirom da je po pretpostavci

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

ispunjeno je

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 1,$$

pa iz (10) neposredno sledi dokaz. ■

Primetimo da iz dokaza prethodnog tvrđenja, konkretno iz formule (10), sledi

$$p(x|u) = p(x|v) \text{ ako i samo ako } d(u,x) = d(v,x). \tag{11}$$

Dakle, ako je reč x jednako udaljena od kodnih reči u i v, ne možemo zaključiti da li je, usled grešaka, x nastalo od u ili od v.

Iz svega zaključujemo: *dekodiranje* $f : \{0,1\}^n \to V$ *treba definisati tako da se svaka reč iz* $\{0,1\}^n$ *preslika u njoj najbližu (u smislu metrike Heminga) kodnu reč iz* V. Taj postupak (zbog (11)) nije u opštem slučaju jednoznačno izvodljiv. U primeru koji sledi izloženo je jedno moguće dekodiranje datog kôda V, zadavanjem klasa $f^{-1}(v),\ v \in V$.

Primer 3.11. Neka je $V = \{0000, 0011, 0110, 0101\}$. Jedno dekodiranje skupa $\{0,1\}^4$ motivisano tvrđenjem 3.10 je sledeće razbijanje tog skupa:

$f^{-1}(0000)$	$f^{-1}(0011)$	$f^{-1}(0110)$	$f^{-1}(0101)$
0000	0011	0110	0101
1000	1011	1110	1101
0001	0010	0100	1001
1100	0111	1010	1111

U svakoj klasi nalazi se po jedna kodna reč, a ostali članovi klase su joj bliski po rastojanju Heminga. Razbijanje nije jednoznačno: pojedine reči jednako su udaljene od više kodnih reči, pa se grupisanje može izvesti na više načina. □

3.2. Ispravljanje grešaka. U nastavku se opisuju kodovi koji omogućuju ispravljanje određenog broja grešaka do kojih dolazi u transmisiji.

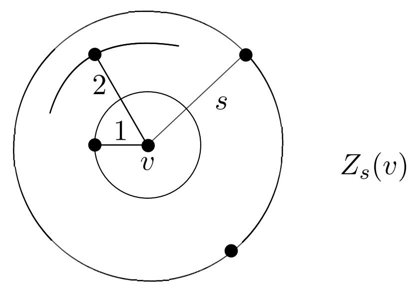
Neka je dat kôd $V \subseteq \{0,1\}^n$. Za $v \in V$ i $0 \leqslant s \leqslant n$, neka je

$$Z_s(v) = \{x \mid x \in \{0,1\}^n \quad \text{i} \quad d(v,x) \leqslant s\}. \tag{12}$$

$Z_s(v)$ je dakle skup svih reči iz $\{0,1\}^n$ koje se iz v mogu dobiti usled najviše s grešaka. U metričkom prostoru $(\{0,1\}^n, d)$ $Z_s(v)$ je lopta sa centrom u v i poluprečnikom s (slika 3.8).

Pretpostavimo da je reč $x \in \{0,1\}^n$ nastala iz reči $v \in V$ usled s grešaka. Sledi da se x ispravno dekodira funkcijom $f : \{0,1\}^n \to V$, ako važi

$$x \in Z_s(v) \cap f^{-1}(v).$$



Slika 3.8

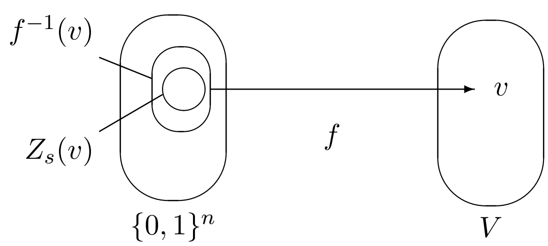
Dekodiranjem f se u tom slučaju *ispravljaju* greške koje reč v transformišu u x.

Imajući ovo u vidu, u nastavku precizno definišemo kodove koji omogućuju ispravljanje grešaka.

Za kôd $V \subseteq \{0,1\}^n$ kažemo da **omogućuje ispravljanje** s **grešaka** $(0 \leqslant s \leqslant n)$ ako postoji takvo dekodiranje f, za koje važi:

$$Z_s(v) \subseteq f^{-1}(v),$$

za svako $v \in V$ (sl. 3.9).



Slika 3.9

Drugim rečima, *ako postoji dekodiranje kôda* V *po kome se sve reči koje se od proizvoljne kodne reči* v *razlikuju na najviše* s *mesta dekodiraju kao* v, *onda* V *omogućuje ispravljanje* s *grešaka.*

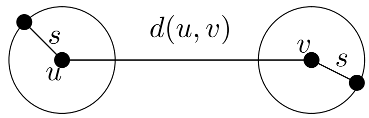
Iz definicije sledi da kôd V omogućuje ispravljanje s grešaka ako i samo ako su svi skupovi $Z_s(v)$, $v \in V$ u parovima disjunktni u $\{0,1\}^n$.

O ovome govori tvrđenje koje sledi.

Tvrđenje 3.12. *a) kôd* $V \subseteq \{0,1\}^n$ *omogućuje ispravljanje* s *grešaka ako i samo ako je*

$$d(V) > 2s.$$

Dokaz. kôd V omogućuje ispravljanje s grešaka ako i samo ako su klase $Z_s(v)$, $v \in V$ disjunktne tj. na osnovu (12) ako i samo ako je za sve $u, v \in V$, $d(u,v) > 2s$ (videti sliku 3.10). ■



Slika 3.10

U praksi su česti kanali u kojima važi:

(13) Na reči dužine n može se desiti najviše s $(0 \leqslant s \leqslant n)$ grešaka.

To drugim rečima znači da je skup svih vektora greške oblika:

$$\{e \mid e \in \{0,1\}^n \ \text{ i } \ \|e\| \leqslant s\}.$$

Za kôd koji omogućuje ispravljanje s grešaka (u prethodnom slučaju svih mogućih) u samoj definiciji dato je dekodiranje kojim se to postiže. Njime se svaka reč iz $\{0,1\}^n$ preslikava u njoj najbližu kodnu reč (u smislu metrike). Pri tome za svaku reč iz $\bigcup\limits_{v\in V} Z_s(v)$ postoji tačno jedna kodna reč sa tom osobinom.

Primer 3.13. kôd $V = \{00000000, 00011111, 11111000, 11100111\}$ omogućuje ispravljanje najviše dve greške, s obzirom da je $d(V) = 5$. Na primer, reč 01011011 dekodira se kao njoj najbliža kodna reč 00011111, od koje je i postala usled dve greške. □

3.3. Otkrivanje grešaka. Za razliku od ispravljanja, *otkrivanje* grešaka shvatamo kao blaži uslov: znamo da se primljena poruka razlikuje od poslate, ali ne znamo koji su simboli pogrešno preneti. Sledi definicija odgovarajućeg kôda.

kôd $V \subseteq \{0,1\}^n$ **omogućuje otkrivanje** s **grešaka** $(0 \leqslant s \leqslant n)$ ako za svako $v \in V$ važi:

$$\text{Ako je } \ x \in Z_s(v), \ \text{ onda } \ x \notin V \setminus \{v\}.$$

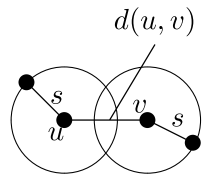
Ili opisno: *ako se prilikom javljanja najviše s grešaka na kodnoj reči ne dobije neka druga kodna reč, onda kôd omogućuje otkrivanje s grešaka.*

Prema definiciji, kôd V otkriva s-grešaka ako i samo ako nijedna kodna reč nije u s-okolini neke druge kodne reči. To koristimo u narednom tvrđenju.

Tvrđenje 3.14. *kôd $V \subseteq \{0,1\}^n$ omogućuje otkrivanje s grešaka ako i samo ako je*

$$d(V) > s.$$

Dokaz. Implikacija u definiciji kôda koji ispravlja s grešaka važi ako i samo ako u $s-$okolini kodne reči $v \in V$ nema nijedne druge reči iz V, a to važi (videti sliku 3.11) tačno tada, kada je $d(V) > s$. ■



Slika 3.11

Za kôd koji omogućuje samo otkrivanje s grešaka, dekodiranjem pomoću najbliže kodne reči u kanalu sa osobinom (13) (prethodni odeljak), izvesno je samo da nijedna greška ne može ostati neotkrivena.

Tako kôd iz primera 3.13 otkriva najviše četiri greške. Na primer, reč 00111100 (u kanalu u kome se ne može desiti više od četiri greške) može se dekodirati kao bilo koja od kodnih reči $11111000, 00011111$ jer se od svake razlikuje na tri mesta.

3.4. Hemingov uslov. U konstrukciji kodova od posebnog je značaja sledeći problem. Za dati alfabet izvora kardinalnosti a, odrediti kôd najmanje dužine n, tako da se mogu ispraviti sve greške kojih po pretpostavci, u kanalu može biti najviše s ($0 \leqslant s \leqslant n$).

Sledeći stav daje delimičan odgovor na to pitanje, jer govori o odnosu tih parametara: broja a slova u alfabetu, dužine kôda n i broja grešaka s.

TVRĐENJE 3.15. *Neka je dat kôd $V \subseteq \{0,1\}^n$, $|V| = a$, čiji se elementi propuštaju kroz BSC i neka u kanalu može biti najviše s grešaka ($0 \leqslant s \leqslant n$), na reči dužine n. Tada, da bi V omogućavao ispravljanje s i manje grešaka, potrebno je da važi:*

$$\frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{s} \binom{n}{i}} \geqslant a \quad \textit{(Hemingov uslov).} \tag{14}$$

Dokaz. Posmatrajmo skupove $Z_k(v)$, $v \in V$, $k = 0, \ldots, s$, odnosno njihove kardinalne brojeve: za dati $v \in V$, $|Z_0(v)| = 1$ (tom skupu pripada samo v);

$|Z_1(v)| = 1 + n$ (pored vektora v u $Z_1(v)$ su i svi oni koji se od njega razlikuju na jednom mestu, a takvih ima n);

$|Z_2(v)| = 1 + n + \binom{n}{2}$ i slično:

$|Z_s(v)| = 1 + n + \cdots + \binom{n}{s} = \sum\limits_{i=0}^{s} \binom{n}{i}$.

kôd V omogućava ispravljanje s grešaka ako i samo ako su sve klase $Z_s(v)$, $v \in V$ disjunktne. U tom slučaju za konstrukciju klasa potrebno je bar $a \cdot |Z_s(v)|$ elemenata u $\{0,1\}^n$. S obzirom da je $|\{0,1\}^n| = 2^n$, treba da važi:

$$a \cdot \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} \leqslant 2^n,$$

a odatle sledi i traženi uslov. ■

Spomenuti uslov samo je potreban: ako je on zadovoljen to ne znači da se odgovarajući kôd može konstruisati. Na primer, brojevi $n = 4,\ s = 1$ i $a = 3$, zadovoljavaju Hemingov uslov, ali se ne može konstruisati binarni kôd dužine 4 sa tri elementa, koji ispravlja jednu grešku. Zaista, ako je v jedna kodna reč tj. $v = v_1v_2v_3v_4$, onda već sledeća kodna reč ima na (bar) tri koordinate različite vrednosti, na primer, $W = v_1\overline{v}_2\overline{v}_3\overline{v}_4$ ($\overline{0} = 1$ i $\overline{1} = 0$). Treća kodna reč, koja se od obe razlikuje na (bar) tri koordinate ne postoji (tj. u četvoro-dimenzionalnoj jediničnoj kocki nije moguće izdvojiti tri disjunktne sfere poluprečnika 3).

	$s = 1$	$s = 2$
n	a	a
5	5	2
6	9	2
7	16	4
8	28	6
9	51	11
10	93	18

U tablici koju navodimo izračunate su maksimalne vrednosti broja a koje zadovoljavaju nejednakost Heminga, za različite dužine kodnih reči n i jednu, odnosno dve (maksimalno) greške u kanalu. Primećuje se da je za, na primer, kodiranje dekadnih cifara ($a = 10$) u kanalu koji dopušta dve greške, potrebno uzeti dužinu kodnih reči bar 9, ako se želi kôd koji omogućuje ispravljanje tih grešaka. Dakle, od mogućih $2^9 = 512$ reči dužine 9 koristi se samo 10.

Dopune i zadaci.

Zadatak 3.1. *Odrediti prekidačko kolo koje provodi BCD kôd u kôd Greja (tablica uz primer 3.2)*

Zadatak 3.2. *Konstruisati logičko kolo koje BCD kôd prevodi u kôd „plus 3“ (tablica uz primer 3.2).*

Zadatak 3.3. *Koliko je Hemingovo rastojanje između vektora koji predstavljaju:*

a) dva susedna temena n-dimenzionalne jedinične kocke $\{0,1\}^n$?

b) x i njegov komplement $\overline{x}$ u n-dimenzionalnoj jediničnoj kocki?

Rešenje. a) 1 b) n.

Zadatak 3.4. *Odrediti vektore x, y, z i u iz $\{0,1\}^3$, tako da Hemingovo rastojanje između svaka dva od ta četiri vektora bude 2.*

Rešenje. Pošto je rastojanje između svaka dva različita vektora sa parnom normom bar dva, jedno rešenje se sastoji od skupa svih vektora sa parnom normom, kojih ima četiri: $\{000, 011, 101, 110\}$. Drugo rešenje je skup svih vektora sa neparnom normom: $\{001, 010, 100, 111\}$. Ostalih rešenja nema.

Zadatak 3.5. *Ako je $x \in \{0,1\}^n$, neka je $N(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i 2^{n-i}$ ($x = x_1 \dots x_n$). $N(x)$ je* **brojna vrednost** *vektora x. Odrediti $N(x)$ za sve $x \in \{10010, 11011, 01010\}$.*

Rešenje. $N(10010) = 18$, $N(11011) = 27$ i $N(01010) = 10$.

Zadatak 3.6. *Za proizvoljne prirodne brojeve n i k, takve da je $0 \leqslant n \leqslant 2^k$, neka je $e_k(n)$ binarni zapis broja n sa k cifara tj.*

$$e_k(n) = b_1 \cdots b_k \ i \ n = \sum_{i=1}^{k} b_i 2^{k-i}.$$

Odrediti $e_5(19)$, $e_7(7)$, $e_9(13)$.

Rešenje. $e_5(19) = 10011$, $e_7(7) = 0000111$, $e_9(13) = 000001101$.

Zadatak 3.7. *Dokazati: $d(x \oplus z,\ y \oplus z) = d(x, y)$, $x, y, z \in \{0,1\}^n$, gde je sa d označeno Hemingovo rastojanje.*

Rešenje. Sledi direktno iz definicije:

$$d(x \oplus z,\ y \oplus z) = \|x \oplus z \oplus y \oplus z\| = d(x, y)$$

koristeći komutativnost, asocijativnost i $z \oplus z = 0$.

Zadatak 3.8. *Odrediti koliko grešaka otkriva, a koliko ispravlja binarni kôd dat sa*

$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n \mid x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 1\}$.

Rešenje. Skup V se sastoji od svih vektora sa neparnom normom dužine n. Kodno rastojanje u ovom kôdu je 2, tako da on ne ispravlja ni jednu, a otkriva jednu grešku.

Zadatak 3.9. *Polazeći od svih vektora iz skupa $\{0,1\}^n$ konstruiše se kôd $V \subseteq \{0,1\}^{2n}$ na sledeći način: ako $x \in \{0,1\}^n$ i $||x||$ je paran broj, neka je $v_x = xx$, u protivnom neka je $v_x = x\bar{x}$ ($\bar{x}$ se dobija iz x zamenom $0 \longleftrightarrow 1$).*

Ako je $V = \{v_x | x \in \{0,1\}^n\}$, odrediti $d(V)$ kao funkciju od n. Pokazati da je $(V, \oplus)$ grupa, gde je $\oplus$ sabiranje po modulu 2.

Rešenje. Neka su A_p, odnosno A_n skupovi koji se sastoje od svih elemenata iz $\{0,1\}^n$ sa parnom, odnosno neparnom normom. Kodna rastojanja skupova A_p i A_n očito iznose 2.

Ako $a_1, a_2 \in A_p$, onda $a_1a_1, a_2a_2 \in V$, i $d(a_1a_1, a_2a_2) \geq 4$.

Ako $a_1, a_2 \in A_n$, onda $a_1\bar{a}_1$, $a_2\bar{a}_2 \in V$, i $d(a_1\bar{a}_1,\ a_2\bar{a}_2) \geq 4$.

Ako $a_1 \in A_n$, $a_2 \in A_p$, onda $a_1\bar{a}_1$, $a_2a_2 \in V$, pa $d(a_1\bar{a}_1, a_2a_2) = d(a_1, a_2) + d(\bar{a}_1, a_2) = n$.

Slično se dobija i za slučaj $a_1 \in A_p$, $a_2 \in A_n$.

Sledi da je

$$d(V) = min\{4, n\}.$$

Jednostavno je pokazati sledeću jednakost:

$$\text{za } \; a, b \in \{0,1\}^n : \overline{a} \oplus b = \overline{a \oplus b}.$$

Pošto je $\overline{\overline{a}} = a$ sledi da je

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a \oplus \overline{b}} = \overline{\overline{b} \oplus a} = \overline{\overline{b \oplus a}} = a \oplus b.$$

Ako $a_1, a_2 \in A_p$, onda $a_1a_1, a_2a_2 \in V$, i $a_1a_1 \oplus a_2a_2 = (a_1 \oplus a_2)(a_1 \oplus a_2)$.

Skup A_p je zatvoren u odnosu na operaciju $\oplus$, pa sledi da $a_1a_1 \oplus a_2a_2 \in V$.

Ako $a_1, a_2 \in A_n$, onda $a_1\overline{a}_1$, $a_2\overline{a}_2 \in V$, i $a_1\overline{a}_1 \oplus a_2\overline{a}_2 = (a_1 \oplus a_2)(\overline{a}_1 \oplus \overline{a}_2) = (a_1 \oplus a_2)(a_1 \oplus a_2)$. Pošto $a_1 \oplus a_2 \in A_p$, sledi da $a_1\overline{a}_1 \oplus a_2\overline{a}_2 \in V$.

Ako $a_1 \in A_n$, $a_2 \in A_p$, onda $a_1\overline{a}_1$, $a_2a_2 \in V$ i $a_1\overline{a}_1 \oplus a_2a_2 = (a_1 \oplus a_2)(\overline{a}_1 \oplus a_2) = (a_1 \oplus a_2)(\overline{a_1 \oplus a_2})$. Pošto $a_1 \oplus a_2 \in A_n$, sledi da $a_1\overline{a}_1 \oplus a_2a_2 \in V$.

Slično se ispituje i za slučaj $a_1 \in A_p$, $a_2 \in A_n$.

Skup V je dakle zatvoren u odnosu na operaciju $\oplus$. Pošto je operacija $\oplus$ asocijativna i komutativna i V ima neutralni elemenat 00...00, a svaki elemenat je sam sebi inverzan, $(V, \oplus)$ je Abelova grupa. □

Zadatak 3.10. *Dokazati da iz svakog skupa $C \subseteq \{0,1\}^n$ može da se izdvoji kôd koji otkriva 1 grešku, ako se iz C ukloni ne više od pola vektora.*

Rešenje. Kodno rastojanje svakog od skupova $\{x \mid ||x|| \text{ je paran broj }\}$, i $\{x \mid ||x|| \text{ je neparan broj }\}$ je 2, pa kôd obrazovan od svakog od njih otkriva jednu grešku. Bar jedan od njih sadrži pola (ili više) vektora. □

Zadatak 3.11. *Binarnim blok kôdom kodirano je 30 slova. Kolika je najmanja dužina kodnih reči ako se može izvršiti ispravno dekodiranje, a u kanalu je moguća*

a) *jedna*

b) *dve greške?*

Rešenje. **a)** Polazi se od Hemingovog uslova:

$$\frac{2^n}{\sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}} \geq a.$$

Ovde je $a = 30$, $s = 1$, pa treba naći n tako da bude

$$\frac{2^n}{1+n} \geq 30,$$

tj.

$$2^n - 30n - 30 \geq 0.$$

Za $n = 8$: $2^8 - 30 \cdot 8 - 30 = -14 < 0$, a

za $n = 9$: $2^9 - 30 \cdot 9 - 30 = 212 > 0$,

pa je $n = 9$ tražena dužina kodnih reči.

b)

$$\frac{2^n}{1 + n + \frac{n\cdot(n-1)}{2}} \geq 30,$$

pa je

$$2^n - 15n^2 - 15n - 30 \geq 0.$$

Za $n = 10$, $\quad 2^{10} - 15 \cdot 10^2 - 15 \cdot 10 - 30 = -656 < 0$, a

za $n = 11$, $\quad 2^{11} - 15 \cdot 11^2 - 15 \cdot 11 - 30 = 38 > 0$,

pa je $n = 11$ tražena dužina kodnih reči. □

Zadatak 3.12. *Dat je kanal sa greškama tipa zamene koje se mogu desiti najviše dvaput na reči dužine 8. Da li kôd*

$$V = \{00000000, 11010101, 10101011, 01111110\}$$

omogućuje jednoznačno dekodiranje?

Rešenje. Kako je $d(V) = 5 > 2 \cdot 2$, ovaj kôd omogućuje ispravljanje dve greške zamene na reči, pa omogućuje jednoznačno dekodiranje. □

Indeks

$\mathcal{B}_2$, 71
$\mathbf{M}_3$, 50
$\mathbf{N}_5$, 48
čvor, 10

alfabet
  izvora, 189
  kôda, 189
alternativa, 122
anti-lanac, 14
apsorpcija, 28
asocijativnost, 28
atom, 18
automorfizam, 15

baza, 10, 120
baza kôda, 189
blok, 153
blok-kôd, 189
  binaran, 189
brojna vrednost (vektora), 203
BSC, 196
Bulov prsten, 99
Bulova algebra, 63
  atomarna, 66
  bezatomska, 66, 83
  dvoelementna, 71, 191
  potpuna, 66
  slobodna, 97
Bulova funkcija, 109
  parcijalna, 162
Bulova mreža, 61
Bulova podalgebra, 66
  generisana skupom, 91
  potpuna, 68
Bulova promenljiva, 129

De Morganovi zakoni, 73
  beskonačni, 92
Dedekind, 47
dekoder, 195
dekodiranje, 197
DF, 108
  minimalna, 144
    parcijalne Bulove funkcije, 164
dijagram, 12
direktan proizvod Bulovih algebri, 89
direktan proizvod mreža, 37
disjunktivna forma, 108
  kanonska, 108
distributivne nejednakosti, 32
distributivni zakoni, 33
  beskonačni, 93
dokonačan, 35, 66, 86
drvo, 24
dužina kôda, 189
dvopozicioni relej, 129

ekskluzivna disjunkcija, 122
ekvivalentna kola, 130, 133
elemenat
  maksimalan, 17
  minimalan, 17
  najmanji, 17
  najveći, 17
elementarna disjunkcija, 108
elementarna konjunkcija, 108
  kanonska, 108
  suvišna, 169
elementi
  neuporedivi, 11
  uporedivi, 11

filter, 35, 95
  glavni, 24, 35
  pravi, 35
funkcija
  Šeferova, 119
  Bulova, 109
    parcijalna, 162
  izotona, 15

Lukasijevičeva, 119
obostrano izotona, 15
saglasna sa poretkom, 15
saglasna sa relacijom pokrivanja, 15
funkcionalno potpun skup operacija, 120

generatori, 68
Bulove (pod)algebre, 91
slobodni, 97
GF(2), 122, 192
graf, 10
grana, 10
greška zamene, 195
grupa, 9

Hase dijagram, 12
Hemingov uslov, 201
Hemingovo rastojanje, 193
homomorfizam, 35, 68
dualni, 35

I-sklop, 131
ideal, 35, 95
glavni, 24, 35, 96
maksimalni, 96
pravi, 35
prost, 58
idempotentnost, 29
identitet, 32
dualan, 33, 107
samodualan, 34
ILI-sklop, 132
implikanta, 144
prosta, 145
esencijalna, 148
infimum, 20
invertor, 132
involucija, 62
ispravljanje grešaka, 199
izomorfizam, 15, 16, 35, 69
dualni, 35
izvor, 195

jedinica, 17
jednostavniji (term), 143

kôd
Ajkena, 190
Grej-Stibica, 190
Greja, 190
plus tri, 190
sa fiksiranom dužinom kodnih reči, 189

kanal, 195
binarni, 195
simetrični, 196
KDF, 108
KF, 108
KKF, 108, 115
koatom, 19
koder, 195
kodiranje, 189
kodna reč, 189
kodno rastojanje, 194
komplement, 60
komutativnost, 28
konjunktivna forma, 108
kanonska, 108, 115
kvadratno slobodan, 14, 61

lanac, 14
logičko kolo, 132

međa
donja, 19
gornja, 19
minimalna DF, 144
modularna nejednakost, 32
modularni zakon, 33
monoid, 9
mreža, 26
(kao algebra), 29
atomarna, 29
Bulova, 61
Dedekindova, 47
distributivna, 49
jednoznačno komplementirana, 60
komplementirana, 60
modularna, 47
ograničena, 26, 59
potpuna (kompletna), 26

norma (vektora), 193
nula, 17
nula-funkcija, 110

ograničenje
donje, 19
gornje, 19
otkrivanje grešaka, 200

parcijalna Bulova funkcija, 162
partitivni skup, 11
pentagon, 48
petlja, 10
podmreža, 34
polje, 9

polu-filter, 14, 23
polu-ideal, 14
polugrupa, 9
polusabirač, 134
poredak, 11
  dualni, 16
  indukovani, 14
  linearan, 11
  totalan, 11
postupak Kvajna i Mak Klaskog, 146
potprostor (vektorskog prostora), 10
prekidač, 129
prekidačko kolo, 129
Princip dualnosti
  za Bulove algebre, 64, 107
  za mreže, 34
  za uređene skupove, 17
problem reči, 112
prosta implikanta, 145
  esencijalna, 148
prsten, 9
  Bulov, 99
pseudotetrada, 164

rastojanje (Hemingovo), 193
rastojanje (kodno), 194
relacija
  deljivosti, 11
  pokrivanja, 12
  poretka, 11

sabirač, 134
serijsko-paralelno (prekidačko) kolo, 129
simetrična razlika, 100, 122
skup
  linearno (totalno) uređen, 11
  uređen, parcijalno uređen, 11
smetnje, 195
Stonova teorema reprezentacije, 71, 95
supremum, 20
susedna polja, 152
suvišno slovo, 169

tablice prostih implikanti, 148
težina (vektora), 193
term
  n-arni, 31
  Bulov, 107
    n-arni, 107
    dualni, 107
  dualni, 33
  mrežni, 31
term funkcija, 109
termi
  ekvivalentni, 108

ultrafilter, 96
uređeni podskup, 14
uređeni skup
  ograničen, 17

vektor greške, 196
vektorski prostor, 9
verovatnoća greške, 195
verovatnoča greške, 196

zakon
  medijane, 50
  modularni, 33
zakoni
  apsorpcije, 28, 29, 64
  asocijativnosti, 28, 29, 65
  De Morganovi, 62
    beskonačni, 92
  distributivnosti, 33, 63
  idempotentnosti, 29, 30, 64
  komutativnosti, 28, 29, 63
zasićen (podskup), 82
Zornova lema, 18, 19

Literatura

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[2] M. Barbut, B. Monjardet, *Ordre et Classification*, Librairie Hachette, Paris, 1970.

[3] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, AMS, Providence, Rhode Island, 1984.

[4] T.S. Blyth, *Lattices and ordered algebraic structures*, Springer, 2005.

[5] P. Crawley, R.P. Dilworth, *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1973.

[6] B.A. Davey, H.A. Pristley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[7] V. Devidé, *Zadaci iz apstraktne algebre*, Naučna knjiga, Beograd, 1979.

[8] V. Devidé, *Matematička logika, Prvi Dio (Klasična logika sudova)*, Matematički institut, Beograd, 1972.

[9] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[10] R. P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Pearson Education, 2004.

[11] P.R. Halmos, *Lectures on Boolean Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[12] R. Lidl, G. Pilz, *Applied Abstract Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[13] S. Lipschutz, *Set Theory and related Topics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1964.

[14] E. Mendelson, *Boolean Algebra and Switching Circuits*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

[15] V.N. Salij, *Rešetki s Jedinstvenimi Dopolnjenijami*, "Nauka", Moskva, 1984.

[16] B. Šešelja, *Matematika informatike*, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1990.

[17] B. Šešelja, *Teorija informacije i kodiranja*, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2008.

[18] B. Šešelja, *Teorija mreža*, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006.

[19] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Algebra 1*, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, 2000.

[20] R. Sikorski, *Boolean Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1964.

[21] A. Tepavčević, B. Šešelja, *Matematičke osnove informatike*, Stylos, Novi Sad, 1995.

[22] M. Weese, H.J. Goltz, *Boolean Algebras*, Seminarbericht Nr. 62, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 1984.