Универзитет у Новом Саду
Природно-математички факултет
Департман за математику и информатику

Ана Сливкова

Дискретна математика 2

Нови Сад, 2022

Назив: Дискретна математика 2

Аутор: Др Ана Сливкова

Рецензенти: Др Кристина Аго, доцент ПМФ-а у Новом Саду
Др Бојан Башић, ванр. проф. ПМФ-а у Новом Саду
Др Лидија Крстановић, ванр. проф. ФТН-а у Новом Саду

Издавач: Природно-математички факултет,
Универзитет у Новом Саду

ISBN: 978-86-7031-485-6

Одлуком Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Новом Саду, број 0602-07-429/22-7 од 16. 12. 2022. године, одобрено је публиковање и употреба овог уџбеника.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

51-74:004(075.8)

СЛИВКОВА, Ана, 1986–
Дискретна математика 2 [Електронски извор] / Ана Сливкова. - Нови Сад : Природно-математички факултет, 2022

Начин приступа (URL): https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/slivkova_diskretna_matematika_2.pdf. - Опис заснован на стању на дан 23.12.2022. - Насл. с насловног екрана. - Библиографија. - Регистар.

ISBN 978-86-7031-485-6

а) Дискретна математика

COBISS.SR-ID 83737353

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник је намењен студентима прве године основних студија смера Примењена математика на Департману за математику и информатику Природно-математичког факултета у Новом Саду који слушају курс Дискретна математика 2. Настао је приликом држања овог курса. Иако постоје пуно уџбеника и књига са сличном темом, због промена плана и програма дошло је до потребе да се на једном месту обухвати градиво предвиђено новим планом предмета. У пракси се показало да студентима на првој години највише одговара када не морају користити више различитих извора и на овај начин им се олакшава савлађивање градива. Пошто књига садржи теме које уводе студенте у комбинаторику и теорију графова, књигу могу користити и студенти других студијских програма и факултета који се први пут сусрећу са овим гранама дискретне математике.

Књига се састоји од 9 глава. Најпре се обрађују основни појмови комбинаторике и то: основни принципи пребројавања, уређени и неуређени избори, биномни и мултиномни коефицијенти, принцип укључења и искључења, растрој поретка, рекурентни низови, Фибоначијеви бројеви. Престали део је посвећен теорији графова. Осим основних појмова, ту су повезаност у графовима, стабла, неки алгоритми на графовима, Ојлерови и Хамилтонови графови, бојење графова и диграфови.

Овом приликом се захваљујем рецензентима на пажљивом читању и врло корисним саветима и сугестијама који су допринели бољем квалитету овог уџбеника, као и студентима који су читали прелиминарне верзије и редовно јављали на које грешке и недоумице су наилазили. Захвалност дугујем и професорима који су ми ове области предавали, али и онима са којима сам сарађивала приликом држања наставе из овог и сродних предмета.

Нови Сад, децембар 2022. Ана Сливкова

ГЛАВА 1

ОСНОВНЕ ТЕХНИКЕ ПРЕБРОЈАВАЊА

Већина проблема којима ћемо се бавити на почетку почињу са: „На колико начина…“ Заправо, једна од основних области дискретне математике, тачније комбинаторике, јесте пребројавање скупова, различитих могућности, пребројавање различитих објеката са одређеним особинама. На пример:

1. На колико начина могу бити изабрани бројеви за добијање седмице на лотоу?

2. На колико различитих начина можемо формирати парове за плес од 10 брачних парова, тако да ниједна особа не игра са својим брачним партнером?

3. На колико области n правих деле круг?

Управо због изучавања оваквих врста проблема, комбинаторику често називају уметност бројања. Комбинаторика је област математике чија су главна интересовања: пребројавање одређених објеката, груписањем, спаривањем и сличним методама, испитивање постојања објеката и структура који задовољавају унапред дате критеријуме, конструкција оваквих објеката и структура, као и оптимизација, то јест налажење „најбоље“ структуре која испуњава дате услове.

Бројање може бити једноставно, али када има пуно објеката са одређеном особином, потребно је наћи што бржи и ефикаснији начин за пребројавање. Људи су се одавно сусрели са оваквим проблемима. Најстарији писани трагови пребројавања датирају око 1600 п. н. е. у Ахмесовом папирусу (названом по египатском писару Ахмесу који га је преписао не помињући оригиналног аутора; овај папирус је такође познат и као Рајндов – по шкотском антиквару). У овом папирусу се користе комбинаторне технике на геометријском низу који пребројава број јединица и двојки који дају унапред задату суму. Индијски лекар Сушрута је у IV веку п. н. е. пребројавао на колико начина се могу комбиновати 6 различитих укуса (узимајући само један, па два и тако даље). Једно од најпознатијих пребројавања јесте Фибоначијево[1] пребројавање зечева (ово ћемо детаљније изучавати у поглављу 3.3) које објављује у својој књизи *Liber Abaci* из 1202. године. Овај начин пребројавања се заправо појављује још у санскритским списима из II–III века п. н. е.

Развоју изучавања начина пребројавања су такође допринеле игре на срећу: Кардано[2] је изучавао проблем бацања две коцке, Галилеј[3] проблем бацања три коцке, те су у XVII веку на сцену наступили Паскал[4] и Ферма[5] који су ради анализе игара на срећу започели теорију вероватноће и у њиховом раду је у основи било пребројавање повољних исхода, чиме су допринели и комбинаторици. Након њих је комбинаторика кренула више да се развија и тако долазимо до модерне комбинаторике.

Наравно, комбинаторика се не бави само пребројавањима, она има разне подобласти и сродне области. Неке од њих су: комбинаторна геометрија, теорија графова, комбинаторика на речима, комбинаторна теорија игара, Ремзијева теорија, тополошка комбинаторика, комбинаторна теорија група, пробабилистичка комбинаторика. Осим примена у најразличитијим областима математике, комбинаторика има примену и ван ње, као на пример: у хемији (проучавање распореда атома у молекулу), биологија (проучавање структуре гена и протеина), и превасходно у рачунарским наукама (анализа ефикасности алгоритама, проблеми распоређивања и премештања ресурса) итд.

1.1 Основни принципи пребројавања

Као што смо већ рекли, пребројавање објеката са одређеном особином је један од основних проблема дискретне математике. Најједноставнији начин пребројавања јесте да се сви објекти систематично наведу а затим да се преброје.

Пример 1.1. Ивана је на путовање од одеће понела три мајице: жуту, љубичасту и розе, шортс и сукњу и, од обуће, патике и ципеле. Колико различитих одевних комбинација има на располагању?

Испишимо све могућности пазећи при томе да неку не пропустимо или да

[1] Leonardo Fibonacci (?1175–1250), италијански математичар
[2] Gerolamo Cardano (1501–1576), италијански математичар, лекар, физичар, астроном
[3] Galileo Galilei (1564–1642), италијански математичар, физичар, филозоф и астроном
[4] Blaise Pascal (1623–1662), француски математичар, физичар и филозоф
[5] Pierre de Fermat (1607–1665), француски математичар и правник

неку не бројимо више пута.

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\text{ж} & \left\{\begin{array}{ll}
\text{ш} & \left\{\begin{array}{llll} \text{п} & \to & \text{жшп} & \longleftrightarrow \; 1 \\ \text{ц} & \to & \text{жшц} & \longleftrightarrow \; 2 \end{array}\right. \\
\text{с} & \left\{\begin{array}{llll} \text{п} & \to & \text{жсп} & \longleftrightarrow \; 3 \\ \text{ц} & \to & \text{жсц} & \longleftrightarrow \; 4 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\text{љ} & \left\{\begin{array}{ll}
\text{ш} & \left\{\begin{array}{llll} \text{п} & \to & \text{љшп} & \longleftrightarrow \; 5 \\ \text{ц} & \to & \text{љшц} & \longleftrightarrow \; 6 \end{array}\right. \\
\text{с} & \left\{\begin{array}{llll} \text{п} & \to & \text{љсп} & \longleftrightarrow \; 7 \\ \text{ц} & \to & \text{љсц} & \longleftrightarrow \; 8 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\text{р} & \left\{\begin{array}{ll}
\text{ш} & \left\{\begin{array}{llll} \text{п} & \to & \text{ршп} & \longleftrightarrow \; 9 \\ \text{ц} & \to & \text{ршц} & \longleftrightarrow \; 10 \end{array}\right. \\
\text{с} & \left\{\begin{array}{llll} \text{п} & \to & \text{рсп} & \longleftrightarrow \; 11 \\ \text{ц} & \to & \text{рсц} & \longleftrightarrow \; 12 \end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Дакле, пребројавањем добијамо да има на располагању 12 могућности. $\triangle$

Наравно, ретко кад се дешава да случајева има мало и да их је могуће релативно лако излистати. Али шта смо у суштини урадили приликом решавања претходног проблема? Направили смо бијекцију између скупа могућности и скупа природних бројева од 1 до 12. То је један од основних принципа пребројавања – да успоставимо бијекцију између скупа који желимо да пребројимо и скупа за који знамо колико има елемената.

Принцип бијекције принцип бијекције
Два скупа имају исти број елемената ако и само ако се између њих може успоставити бијекција.

Знамо да за пресликавање f из скупа A у скуп B, где $|A| = n$ и $|B| = m$, имамо:

– ако је f инјективно, онда важи $n \leqslant m$,

– ако је f сирјективно, онда важи $n \geqslant m$.

Одавде следи да, ако је f бијекција, онда су A и B исте кардиналности.

Погледајмо сада примере где се број објеката које посматрамо не одређује тако лако као у првом примеру.

Пример 1.2. Доказати да међу ненегативним целим бројевима мањим од 10^6 има исти број оних чији је збир цифара једнак 21 и оних чији је збир цифара једнак 33.

Уведимо ознаке

$$
\begin{aligned}
A &= \{\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 21\}, \\
B &= \{\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6} : b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 33\},
\end{aligned}
$$

где ознака $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ представља конкатенацију цифара $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Конкатенација (или надовезивање) цифара, где $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ и $n \in \mathbb{N}$, дефинише се као $\overline{a_1a_2 \ldots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} \cdots + a_{n-1}10 + a_n$.

На пример, на овај начин броју 777 одговара запис $\overline{000777}$.

Ако дефинишемо функцију

$$f(\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}) = \overline{(9-b_1)(9-b_2)(9-b_3)(9-b_4)(9-b_5)(9-b_6)},$$

није тешко показати да је она бијекција између скупова A и B, те ова два скупа имају исти број елемената. △

Пример 1.3. У равни су уочене 2022 тачке од којих је једна црвена а преостале су плаве. Да ли међу подскуповима овог скупа тачака има више оних који садрже црвену тачку или оних који је не садрже?

Означимо скуп тачака $A = \{c, p_1, p_2, \dots, p_{2021}\}$, где је c црвена тачка, а $p_1, p_2, \dots, p_{2021}$ су плаве тачке. Нека је X произвољан подскуп скупа A који не садржи тачку c. Тада пресликавање

$$\varphi(X) = X \cup \{c\}$$

представља бијекцију између подскупова од A који не садрже тачку c и оних који је садрже. Дакле, посматраних подскупова има подједнако. △

Осим принципа бијекције имамо још два основна принципа пребројавања: принцип збира и принцип производа.

принцип збира

Принцип збира

Ако су $A_1, A_2, \dots, A_n$ непразни скупови по паровима дисјунктни (то јест $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $1 \leqslant i < j \leqslant n$), онда важи

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Нека су дати дисјунктни скупови $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$. Јасно, $|A| = i$ и $|B| = j$. Пошто немају заједничких елемената, њихову унију можемо записати као

$$A \cup B = \{c_1, c_2, \dots, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, \dots, c_{i+j}\},$$

где $c_k = a_k$, за $k = 1, 2, \dots, i$, и $c_k = b_{k-i}$, за $k = i+1, i+2, \dots, i+j$. Дакле, можемо закључити да важи $|A \cup B| = i + j = |A| + |B|$. Према томе, за два скупа важи принцип збира. Принцип збира важи и за n скупова и то се може показати помоћу математичке индукције.

Пример 1.4. Бацају се две коцке, једна је бела и једна плава. На колико начина се може добити збир дељив са 5?

Приликом бацања коцкица могуће је добити два збира који су дељиви са 5, то су: 5 и 10. С обзиром на то да су коцке различитих боја, пишимо број добијен на белој коцки на првој координати а број добијен на плавој на другој координати уређеног пара. Први збир може да се добије на 4 начина: $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$. Слично, збир 10 се може добити на 3 начина: $(4,6)$, $(5,5)$, $(6,4)$. Ова бацања су груписана у два дисјунктна скупа, те на основу принципа збира укупно постоји $4 + 3 = 7$ начина. △

Пример 1.5. Колико има природних бројева у чијем се декадном запису не јавља 0 а чији је збир цифара једнак 5?

Размотримо шта могу бити цифре таквих бројева и групишимо бројеве на основу тога. Како на тај начин добијамо дисјунктне скупове бројева, коначан резултат можемо добити на основу принципа збира.

цифре	бројеви
1,1,1,1,1	11111
1,1,1,2	1112
	1121
	1211
	2111
1,1,3	113
	131
	311

цифре	бројеви
1,4	14
	41
1,2,2	122
	212
	221
2,3	23
	32
5	5

Дакле има укупно $1+4+3+2+3+2+1=16$ таквих бројева. △

Размотримо сада мало другачији тип проблема.

Пример 1.6. У ресторану се у оквиру понуде „дневни мени“ добија месо, пиринач и сос. Колико различитих оброка се може добити уколико у понуди има 3 врсте меса, 2 врсте пиринича и 3 врсте соса (и при томе од свега се мора одабрати тачно једна врста)?

Означимо могућности за месо $M=\{m_1,m_2,m_3\}$, за пиринач $P=\{p_1,p_2\}$ и за сос $S=\{s_1,s_2,s_3\}$. Како се свако јело састоји од три дела: меса, пиринча и соса, сваку могућност за оброк можемо представити уређеном тројком, јер је сваки избор окарактерисан са три независне особине. Нека на првој координати стоји врста меса, на другој врста пиринча а на трећој врста соса. Променом само једне од њих, на пример соса, док су преостале две остале фиксиране, добијамо нови избор. Стога за сваки фиксиран избор на прва два места имамо три различита коначна избора – за сваку могућност избора соса. Према томе, број свих избора једнак је производу свих могућности избора на прве две координате и броја три. За сваки фиксиран избор на првом месту, на другом месту има две могућности. Пошто на првом месту има три могућности, добијамо да укупно има $3\cdot 2\cdot 3=18$ различитих избора.

Исписивањем свих могућности добијамо: (m_1,p_1,s_1), (m_1,p_1,s_2), (m_1,p_1,s_3), (m_1,p_2,s_1), (m_1,p_2,s_2), (m_1,p_2,s_3), (m_2,p_1,s_1), (m_2,p_1,s_2), (m_2,p_1,s_3), (m_2,p_2,s_1), (m_2,p_2,s_2), (m_2,p_2,s_3), (m_3,p_1,s_1), (m_3,p_1,s_2), (m_3,p_1,s_3), (m_3,p_2,s_1), (m_3,p_2,s_2), (m_3,p_2,s_3). Приметимо да су то заправо сви елементи скупа $M\times P\times S$. Дакле, важи: $|M\times P\times S|=3\cdot 2\cdot 3=|M|\cdot|P|\cdot|S|$. △

У претходном примеру смо искористили *принцип производа*, чију формулацију дајемо у наставку. То је уопштење резоновања у датом решењу и може се може показати математичком индукцијом.

Принцип производа принцип производа

Ако су $A_1,A_2,\ldots,A_n$ коначни непразни скупови, онда важи

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|.$$

Пример 1.7. Колико има различитих петоцифрених бројева чије су цифре на парним местима непарни бројеви а цифре на непарним местима парни бројеви?

Ако петоцифрени број запишемо као $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, онда a_1 може бити 2, 4, 6 или 8 (не може бити 0, јер тада посматрани број више неће бити петоцифрен), што је 4 могућности. Цифре a_3 и a_5 имају 5 могућности јер они могу бити и 0, док и цифре a_2 и a_4 имају исто толико могућности јер постоје пет непарних цифара. Дакле, на основу принципа производа добијамо да постоји $4{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5 =$ 2500 оваквих бројева. △

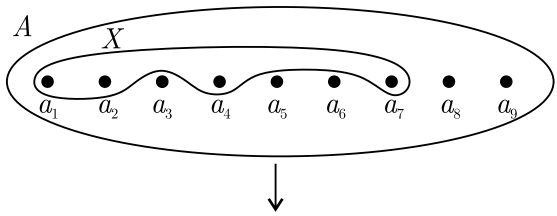
Једно од основних тврђења у математици јесте тврђење везано за број свих подскупова датог коначног скупа и његов доказ се заснива управо на принципу производа и принципу бијекције.

Теорема 1.8. *Ако* $|A| = n$*, онда важи* $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$.

Доказ. Нека $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Сваком подскупу X скупа A придружићемо уређену n-торку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где су координате одређене на следећи начин:

$$x_i = \begin{cases} 1, & a_i \in X, \\ 0, & a_i \notin X. \end{cases}$$

Овиме смо дефинисали функцију $f : \mathcal{P}(A) \to B$ која сваком $X \subseteq A$ придружује овакву n-торку, где $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{0,1\}\}$.



$$(\;1, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0\;)$$

Пример слике скупа $X = \{a_1, a_2, a_4, a_7\}$.

Функција f јесте бијекција. Стога на основу принципа бијекције важи $|\mathcal{P}(A)| = |B|$. Сада, како за сваку координату имамо две могућности, на основу принципа производа закључујемо $|B| = 2^n$, те следи тврђење. □

Често, у разним областима, треба да одредимо број делиоца природног броја.

Пример 1.9. Одредити колико позитивних делиоца има број 360.

Раставимо број 360 на просте факторе: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Према томе, сваки позитиван делилац броја 360 мора бити облика $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, где експоненти могу бити: $i \in \{0,1,2,3\}$, $j \in \{0,1,2\}$ и $k \in \{0,1\}$. Дакле, на основу принципа производа, оваквих бројева има $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. △

Резоновање из претходног примера можемо уопштити на произвољан природан број.

Теорема 1.10. *Нека је n природан број и $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ његово разлагање на просте делиоце (канонички облик). Број позитивних делиоца природног броја n је тада*

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1).$$

Доказ. Ако је d делилац броја n, онда је облика $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $\beta_i \in \{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$. Према томе, на основу принципа производа добијамо да је број позитивних делиоца броја n једнак $\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$. □

1.2 Дирихлеов принцип

Посматрајмо групу од 13 особа. Од њих сигурно бар две особе имају рођендан у истом месецу. Заиста, ако бисмо претпоставили да сваког месеца само једна особа слави рођендан, на тај начин би њих 12 било распоређено по месецима. Тада остаје једна особа чији рођендан мора бити у некад у току године, те ће месеца када је ова особа рођена, рођендан имати две особе из посматране групе. Овде смо искористили такозвани Дирихлеов[6] принцип, чија је популарна формулација следећа:

Ако се $n + 1$ зечева смести у n кавеза, онда ће бар два зеца да се нађу у једном кавезу.

На енглеском се овај принцип назива *the Pigeonhole principle*, јер популарну фомулацију наводе преко голубова. Формалнија формулација овог принципа наведена је у наставку.

Дирихлеов принцип
Ако су A и B коначни скупови и $|A| > |B|$, онда не постоји injективно пресликавање скупа A у скуп B.

Дирихлеов принцип

Овај принцип се може преформулисати тако да уместо о функцијама говоримо о партицијама скупа.

Дирихлеов принцип – преко партиције
Ако је A скуп од n елемената и ако је дато $r \in \mathbb{N}$, где $r < n$, онда свака партиција скупа A са r класа има најмање једну класу са бар два елемента.

Пример 1.11. (Теорема Ердеш[7]–Секереш[8]) Сваки низ од $mn + 1$ међусобно различитих реалних бројева садржи растући подниз од $m + 1$ бројева или опадајући подниз од $n + 1$ бројева.

Посматрајмо низ различитих реалних бројева

$$a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}.$$

[6] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), немачки математичар
[7] Erdős Pál (1913–1996), мађарски математичар
[8] Szekeres György (1911–2005), мађарски математичар

Претпоставимо супротно: растући поднизови овог низа су дужине највише m и опадајући поднизови су дужине највише n.

Сваком броју a_i у посматраном низу доделићемо два броја (r_i, o_i), где ће r_i представљати дужину најдужег растућег подниза низа $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ који почиње са a_i, док ће o_i представљати дужину најдужег опадајућег подниза посматраног низа који такође почиње са a_i.

> На пример, ако посматрамо низ $2, 4, 3, 5, 1, 6, 7$, важи $a_4 = 5$. Најдужи растући низ који почиње са 5 је $5, 6, 7$ и дужине је 3. Најдужи опадајући подниз који почиње са 5 је $5, 1$ и дужине је 2, те у овом случају члану a_4 додељујемо уређени пар $(3, 2)$.

На овај начин добијамо функцију $f(a_i) = (r_i, o_i)$, чији домен има $mn + 1$ елемената а њен кодомен је $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, то јест кодомен има mn елемената. Стога на основу Дирихлеовог принципа ова функција не може бити ињективна. С друге стране, за $i < j$ важи следеће:

$$a_i < a_j \Rightarrow r_i > r_j \Rightarrow (r_i, o_i) \neq (r_j, o_j);$$
$$a_i > a_j \Rightarrow o_i > o_j \Rightarrow (r_i, o_i) \neq (r_j, o_j).$$

Према томе, f мора бити ињективна, те долазимо до контрадикције. △

Нешто општији облик Дирихлеовог принципа се добија применом принципа збира. Ако одређене објекте распоређујемо у k кутија и ако A_i представља скуп објеката у i-тој кутији $(1 \leqslant i \leqslant k)$, где се у свакој кутији налази највише n елемената, онда ће укупан број објеката бити

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| \leqslant n + n + \cdots + n = nk.$$

уопштени Дирихлеов принцип

Уопштени Дирихлеов принцип
Нека је S коначан скуп такав да $|S| \geqslant nk + 1$, за неке природне бројеве n и k. Тада у сваком разбијању скупа S на партицију од k класа постоји бар један блок са $n + 1$ елемената.

Пример 1.12. Колико најмање карата треба извући из стандардног шпила са 52 карте да би се међу извученим картама морале налазити четири са истим знаком?

Претпоставимо да приликом извлачења карата извучене карте слажемо на 4 гомиле тако да су карте груписане на основу знака. Дакле, свака гомила представља једну класу карата и она је одређена знаком. Одавде имамо $k = 4$. Желимо да будемо сигурни да у некој од тих класа имамо бар 4 карте, те имамо $n + 1 = 4$, тј. $n = 3$. Ако скуп извучених карата означимо са S, на основу уопштеног Дирихлеовог принципа следи $|S| \geqslant 4 \cdot 3 + 1 = 13$, тј. број извучених карата мора бити најмање 13. △

Пример 1.13. Колико најмање карата треба извући из стандардног шпила са 52 карте да би се међу извученим картама морале налазити четири са знаком срца?

С обзиром на то да у овом случају јесте битно да су карте унапред одређеног знака, сада не можемо посматрати проблем преко класа (пошто су класе у партицији равноправне а овде је случај да је знак срце издвојен као посебан јер нас само он занима). Сада морамо размишљати на другачији начин.

Дакле, на располагању имамо 13 карата које нам одговарају и преосталих 39 које нам не одговарају. Све док у скупу извучених карата имамо мање од 39 карата могло се десити да ниједна од њих није са знаком срца, већ да су ту само оне непожељне, па са толико карата не можемо бити сигурни да смо извукли оно што нам треба. Према томе, ако имамо извучених $39 + 4 = 43$ карте тада се у том скупу морају наћи четири са знаком срца. $\triangle$

ГЛАВА 2

ИЗБОРИ

Бирање одређених објеката се јавља у свакодневном животу у најразноврснијим облицима и често нас интересује колико различитих могућности имамо на располагању. На пример, на колико начина можемо направити лозинку дужине 6 ако су нам на располагању 26 слова и 10 цифара; на колико начина можемо одабрати 3 представника скупа грађана од 100 људи или на колико различитих начина можемо истовремено извући три куглице из кутије са црним и белим куглицама. Оно што можемо приметити јесте да није увек у питању иста врста избора, некад је редослед битан, некад није, некад је понављање дозвољено а некад понављања нема. Због тога имамо четири основна типа избора. Ако из скупа са n различитих елемената бирамо k елемената, постоје следеће могућности.

- Битан је редослед изабраних елемената (у литератури се овакви избори често називају k-пермутације а негде и варијације):
  - са дозвољеним понављањем,
  - без понављања.
- Није битан редослед изабраних елемената (називају се и комбинације):
  - са дозвољеним понављањем,
  - без понављања.

Често ћемо приликом избора и приликом представљања различитих комбинаторних појмова користити речи. За дефиницију речи у математичком смислу потребно је дефинисати азбуку.

Азбука је произвољан непразан коначан скуп A. Елементе тог скупа називамо *слова*. азбука

Реч дужине k над азбуком A је произвољан елеменат скупа A^k. Обично уместо речи $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ пишемо само $a_1a_2\ldots a_k$. Приметимо да дати низ симбола не мора имати значење. Тако су, на пример, у математичком смислу и *abba* и *baba* и *bbaa* речи дужине 4 над азбуком $\{a, b\}$. реч бинарне речи

Пример 2.1. Пример речи које имају широку употребу у рачунарству су *бинарне речи* или *01-речи*. То су речи над азбуком $\{0,1\}$. Неке од њих су, на пример, 0101, 00011111, 111111, 0110100110010110. $\triangle$

2.1 Уређени избори елемената са понављањем

Вратимо се на први проблем пребројавања избора који смо поменули на почетку главе.

Пример 2.2. На колико начина можемо направити лозинку дужине 6 ако на располагању имамо 26 слова и 10 цифара?

У лозинки је очигледно битно који симбол на које место пишемо, стога је избор уређен. Такође, не постоји ограничење о понављању симбола те је понављање дозвољено. Дакле, имамо 6 места на које треба да упишемо симболе који су нам на располагању и њих има укупно $28 + 10 = 38$. Приметимо: број могућности када на првом месту фиксирамо да стоји 0 и број могућности када ту стоји 1 је исти, али смо у ова два случаја добили различите могућности. Штавише, тако ће важити за сваки други симбол који стоји на првом месту. Према томе, принцип производа ће нам дати крајњи резултат:

$$\frac{\quad}{38}\quad\frac{\quad}{38}\quad\frac{\quad}{38}\quad\frac{\quad}{38}\quad\frac{\quad}{38}\quad\frac{\quad}{38}\quad\longrightarrow\quad 38^6.$$

$\triangle$

Истим резоновањем као у претходном примеру можемо доћи до закључка о броју свих уређених избора k елемената са понављањем из скупа са n елемената.

Теорема 2.3. *Број уређених избора k елемената са понављањем из скупа са n елемената, једнак је n^k.*

Доказ. Уређене изборе k елемената обично представљамо помоћу уређених k-торки, пошто је у њима редослед елемената битан. Дакле, на сваком од k места имамо n могућности како их попунити, те на основу принципа производа добијамо да укупно имамо n^k различитих уређених избора k елемената са понављањем из скупа са n елемената. $\square$

На овакав начин долазимо и до броја свих могућих пресликавања из коначног у коначан скуп, јер је одређивање слика елемената из домена управо избор у којем је поредак битан и у којем је понављање дозвољено.

Теорема 2.4. *Нека су K и N скупови такви да $|K| = k$ и $|N| = n$. Број свих могућих пресликавања из скупа K у скуп N је n^k.*

Доказ. Нека $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $N = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Треба размотрити на колико начина можемо попунити места у дефиницији функције f.

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \_ & \_ & \ldots & \_ \end{pmatrix}$$

Како на сваком од k места имамо n могућности, принцип производа нам даје укупно n^k могућности. □

Уређени избори са дозвољеним понављањем су и речи. Те добијамо да важи и следеће тврђење.

Теорема 2.5. *Број различитих речи дужине k над n-елементном азбуком је n^k.*

2.2 Уређени избори без понављања

Пример 2.6. На светском првенству учествују 32 земље. На колико различитих начина је могуће да ће бити подељена прва три места?

Јасно, једна земља не може да заузме истовремено више места на првенству, а свакако је битно какав је поредак. Према томе, разматрамо уређене изборе без понављања. Прво место могу заузети 32 земље. Кад је избор прве земље готов, за друго место остаје 31 могућност а за треће само 30. Према томе, број могућности је укупно $32 \cdot 31 \cdot 30$. △

Уколико посматрамо функције које су инјективне, имамо ограничење да два различита елемента немају исту слику, те понављање није дозвољено. Стога се број инјективних функција може одредити као и број уређених избора елемената из кодомена при чему није дозвољено понављање. Наравно, да би функција могла бити инјективна, кодомен мора имати бар онолико елемената колико их има у домену функције.

Теорема 2.7. *Нека су K и N скупови такви да $|K| = k$ и $|N| = n$, где $k \leqslant n$. Број свих могућих инјективних пресликавања из скупа K у скуп N је*

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Доказ. Ако желимо да пребројимо случајеве када је

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \_ & \_ & \ldots & \_ \end{pmatrix}$$

инјективно пресликавање, размотримо најпре колико имамо могућности за попуњавање места у дефиницији функције f. На првом месту имамо n могућности; на другом имамо за једну могућност мање, да се не би поновио елеменат уписан на првом месту; затим на трећем месту за још једну мање, дакле, $n-2$ могућности, и тако даље. На последњем, k-том, месту остаће $n-(k-1)$ могућности, те добијамо да укупно имамо $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ могућности. □

Већ смо констатовали да је број инјективних функција које пресликавају k-тоелементни скуп у n-тоелементни исти као број уређених избора k елемената без понављања из скупа са n елемената, стога важи наредно тврђење.

Теорема 2.8. *Број уређених избора k елемената без понављања из скупа са n елемената, где $k \leqslant n$, једнак је*

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

2.3 Пермутације

Бијективно пресликавање из коначног скупа X у себе самог се назива пермутација *пермутација* скупа X.

Пример 2.9. Пермутација скупа $\{1,2,3,4,5\}$ је функција α дефинисана са

$$\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Скраћено, пермутацију α записујемо као 42135. △

Знамо да је код бијективних пресликавања коначних скупова довољно да функција буде инјективна и да су домен и кодомен исте кардиналности. Како је код пермутације домен и кодомен исти скуп и с обзиром на то да је бијекција инјективна, пребројавање пермутација датог скупа се своди на пребројавање инјективних функција. Стога важи следећи резултат.

Теорема 2.10. *Број пермутација скупа X, где $|X| = n$, јесте*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

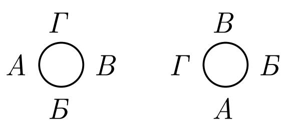
факторијел **Напомена 2.11.** Број $n!$ се чита *n факторијел*. Посебно се дефинише $0! = 1$. ◊

Пример 2.12. На колико начина Аца, Беца, Цеца, Даца, Еца и Фаца могу стати у ред тако да Аца и Цеца не стоје једно поред другог?

Број свих могућности распореда у реду јесте број пермутација скупа $\{A, B, C, D, E, F\}$, и њих има 6!. Од тога треба одузети непожељне распореде а то су оне пермутације где се A и C налазе једно до другог, тј. тамо где се AC и CA не налазе као подречи. Стога у оба ова случаја AC, односно CA, посматрамо као један симбол и тако добијамо да непожељних распореда има $2 \cdot 5!$. Дакле, коначан резултат је $6! - 2 \cdot 5! = 4 \cdot 5!$ различитих распореда. △

Пример 2.13. На колико начина је могуће n особа распоредити за округлим столом?

Распоред око округлог стола подразумева да нам је битно само ко коме седи с леве а ко с десне стране, то јест да не разликујемо столице. Треба приметити да ако распоред заротирамо око центра стола, да ће на тај начин распоред остати исти, то јест неће се променити ко седи поред кога.



Иако заротирана, горња два распореда седења су иста.

Стога је битно да једну особу фиксирамо. Тада на остала места можемо распоређивати преостале особе. Дакле, на првом месту десно од фиксиране особе имамо $n-1$ могућности, на другом $n-2$ и тако даље док не дођемо до последње особе која ће седети са леве стране особе која је у старту била фиксирана. Према томе, добијамо да постоји $(n-1)!$ могућности. △

2.4 Неуређени избори без понављања

Знамо да у скупу поредак елемената није битан, те када пребројавамо подскупове неког скупа, тада бројимо изборе где нам уређење није битно.

Теорема 2.14. *Број k-точланих подскупова скупа X, где $|X| = n$, једнак је*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказ. До траженог резултата ћемо доћи тако што ћемо на два различита начина пребројати број уређених k-точланих подскупова скупа са n елемената. Наравно, већ знамо да је број таквих подскупова $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Овај исти број се мора добити и кад овакве подскупове пребројавамо на другачији начин. Нека је A произвољан k-точлани подскуп датог скупа. Број таквих означимо са α. Сваки овакав скуп A се може уредити на $k!$ начина, према томе следи

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \alpha\cdot k!.$$

Одавде коначно добијамо

$$\alpha = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

За ненегативне целе бројеве k и n дефинише се *биномни коефицијент* са

биномни коефицијент

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{за } k \leqslant n,\\ 0, & \text{за } k > n.\end{cases}$$

С обзиром на то да је сваки избор k елемената без понављања из скупа са n елемената један k-тоелементни подскуп скупа са n елемената важи наредно тврђење.

Теорема 2.15. *Број неуређених избора k елемената без понављања из скупа са n елемената једнак је*

$$\binom{n}{k}.$$

Пример 2.16. Одредити број дијагонала конвексног n-тоугла.

Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ темена конвексног n-тоугла. Свака дијагонала је одређена са два темена. При томе, A_1A_3 и A_3A_1 је једна те иста дијагонала, тј. приликом бирања темена која одређују дијагоналу није битан поредак. Дакле, занима нас колики је укупан број двочланих подскупова скупа темена, и он је $\binom{n}{2}$. Од тог броја је потребно одузети странице n-тоугла, те је број дијагонала $\binom{n}{2} - n$. △

Пример 2.17. Колико има строго растућих низова дужине k чији су елементи из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$?

За пребројавање строго растућих низова поново ће бити довољно посматрати подскупове кардиналности k. То је зато што одабиром подскупа поредак је јединствено одређен, с обзиром на то да сваки број у низу мора бити већи од претходног. Дакле, број таквих низова је $\binom{n}{k}$. △

2.5 Неуређени избори са понављањем

Погледајмо следећи пример.

Пример 2.18. У кутији се налазе беле и црне куглице. Из кутије истовремено вадимо три куглице. Колико различитих могућности постоји за добијене куглице?

С обзиром на то да су све куглице исте боје равноправне и пошто се куглице из кутије ваде истовремено, постоје четири могућности приказане у наставку.

$$\circ\circ\circ \qquad \circ\circ\bullet \qquad \circ\bullet\bullet \qquad \bullet\bullet\bullet$$

$\triangle$

Оно што можемо приметити у оваквом избору јесте да редослед није битан, дакле за представљање оваквих избора уређене n-торке нам неће бити од помоћи. Када редослед није битан, за представљање користимо скупове. Но, проблем са скуповима јесте да код скупова нема понављања, тј. ако се деси да имамо следећи скуп $\{b, b, c\}$, онда је он исто што и $\{b, c\}$. Стога нам требају објекти који су уопштење скупова, али који дозвољавају понављање елемената.

Када у скупу дозволимо понављање елемената, онда такав објекат називамо *мултискуп*.

мултискуп

Према томе, у претходном примеру, различите могућности које се појаве након вађења куглица могли смо представити мултискуповима: $\{b, b, b\}$, $\{b, b, c\}$, $\{b, c, c\}$, $\{c, c, c\}$.

Напомена 2.19. Ако објекат $\{0, 1, 1\}$ посматрамо као мултискуп, онда он има три елемента и разликује се од $\{0, 1\}$. Поклапа се са мултискупом $\{1, 0, 1\}$, јер имају исте елементе и пошто, као и код скупова, редослед набрајања елемената у мултискупу није битан. Ако ова три објекта посматрамо као скупове, онда се они сви поклапају. $\diamondsuit$

Пример 2.20. Колико решења има једначина

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

у скупу целих ненегативних бројева?

У овом случају има довољно много могућности да би нам било пуно да их све исписујемо. Због тога, посматрајмо овај проблем на следећи начин. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 представљају четири кутије у које треба распоредити 15 истих куглица. Тако ће, на пример,

$$\underset{x_1}{\underline{|\bullet\bullet|}} \quad \underset{x_2}{\underline{|\quad|}} \quad \underset{x_3}{\underline{|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet|}} \quad \underset{x_4}{\underline{|\bullet\bullet|}}$$

представљати решење $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 11$, $x_4 = 2$. У сваком оваквом представљању решења имаћемо 15 куглица, тј. 15 симбола $\bullet$, и три преграде међу кутијама које можемо представити симболима $|$ (ако посматрамо овако у низу четири кутије, онда је са три преграде јасно какав је чији садржај). Дакле, горњи пример представљања можемо упростити на

$$\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

и можемо закључити да је свако решење представљено преко низа сачињеног од $15+3$ симбола. На 15 места се налазе симболи $\bullet$. Према томе, број решења је број начина да се од 18 места одабере њих 15 на којима ће бити распоређене куглице. Њих има $\binom{18}{15}$.

$\triangle$

Приступ претходном проблему можемо уопштити и на тај начин видети како у општем случају одредити број неуређених избора са дозвољеним понављањем.

Теорема 2.21. *Број неуређених избора k елемената са понављањем из скупа са n елемената једнак је*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Доказ. Сваки неуређен избор k елемената са понављањем можемо представити преко k куглица и $n-1$ преграда на јединствен начин: куглице представљају одабране елементе из датог скупа, преграде разврставају куглице на n група и број куглица у датој групи представља број понављања одговарајућег елемента у датом избору.

> На пример, на наредној слици је представљен избор 5 елемената из скупа $\{x, y, z\}$ помоћу 5 куглица и 2 преграде
>
> $$\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet$$
>
> и овај низ симбола представља избор када је два пута изабран елеменат x, ниједном y и три пута z.

Према томе, имамо низ сачињен од $n-1+k$ симбола. Од толико места у низу треба одабрати k места на којима ће бити распоређене куглице. Таквих избора има $\binom{n+k-1}{k}$. $\square$

Пример 2.22. На колико начина могу пет особа поделити 17 једнаких чоколада тако да нико не остане без чоколаде?

Бројеве чоколада које добију пет особа можемо обележити са $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Пошто је битно да $x_i \geqslant 1$, за $i = 1, 2, \ldots, 5$, најпре доделимо свакој особи једну чоколаду а затим преосталих 12 чоколада можемо делити без додатних ограничења. Дакле, ако запишемо $x_i = y_i + 1$, то значи да треба да одредимо колико постоји различитих решења једначине $y_1 + y_2 + \cdots + y_5 = 12$ у скупу ненегативних целих бројева. Оваквих решења постоји $\binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12}$, те је толико и начина да пет особа поделе 17 чоколада тако да нико не остане без чоколаде. $\triangle$

2.6 Пермутације са понављањем

Посебна врста пермутација јесу пермутације где има понављања елемената.

Пример 2.23. Колико постоји различитих речи (укључујући и бесмислене) које се могу добити од слова речи МАТЕМАТИКА (тј. колико има анаграма ове речи)?

Приметимо да одговор није 10!. Слово М се јавља два пута и оба појављивања су равноправна, то јест, ако им заменимо места то је као да ништа нисмо урадили. Значи, ако тражимо све анаграме, треба да пребројимо све пермутације, али морамо водити рачуна о понављању одређених слова. На располагању имамо низ од 10 слова: М, М, А, А, А, Т, Т, Е, И, К. У овом низу треба да одаберемо две позиције за слово М. Када то урадимо, од преосталих 8 места треба да одаберемо три позиције за слово А, затим две позиције за слово Т од преосталих 5 места, једно од три места за слово Е, једно од преостала два места за слово И и онда нам остаје тачно једно место на које ћемо ставити слово К. Стога анаграма дате речи имамо

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1},$$

што можемо закључити на основу принципа производа. △

Теорема 2.24. *Број пермутација речи дужине $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ у којој се слово a_i јавља n_i пута $(1 \leqslant i \leqslant k)$ једнак је*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Доказ. Како укупно има n слова у низу, за прво слово са n_1 понављања треба одабрати n_1 позиција. Даље, од преосталих $n - n_1$ места, за друго слово треба одабрати n_2 места. За треће слово тако остаје $n - n_1 - n_2$ места од којих треба одабрати n_3, и тако даље. За претпоследње слово ће тако остати $n - n_1 - \cdots - n_{k-2}$ места од којих се бира n_{k-1} места, док ће преосталих n_k места морати да се попуни последњим словом. Сада на основу принципа производа добијамо да је број оваквих пермутација са понављањем

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

□

мултиномни коефицијент

Мултиномни (полиномни) коефицијент $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ се дефинише као

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

где $n, k \in \mathbb{N}$, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ и $n_i \in \mathbb{N}_0$.

2.7 Биномни коефицијенти

Биномне коефицијенте смо већ дефинисали на страни 19. Сада ћемо анализирати неке њихове особине.

Теорема 2.25. *Нека су* $n, k \in \mathbb{Z}$. *Тада важи:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, *за све* $0 \leqslant k \leqslant n$;

2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, *за све* $1 \leqslant k \leqslant n$.

Паскалов идентитет

Доказ. Оба дела теореме остају читаоцу за вежбу да докаже по дефиницији биномних коефицијената. Но, ипак ћемо део под 2. доказати другачијом методом. Посматрајмо скуп X за који важи $|X| = n$. Фиксирајмо један елеменат $a \in X$ и пребројмо колико има k-точланих подскупова који садрже a и колико оних k-точланих подскупова који га не садрже. Наравно, збир свих њих је број свих k-точланих подскупова скупа X. Према томе, важи

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

□

Идентитет из претходне теореме под 2. се назива Паскалов идентитет. Један од главних разлога зашто се тако назива јесте то што је уско повезан са такозваним *Паскаловим троуглом.* Он се добија тако што први ред садржи 1, затим су испод две јединице, једна мало улево, једна удесно. Сваки наредни ред се добија тако што се на крајеве стави по једна јединица а између се попуњавају места тако што се ту уписују бројеви добијени као збир два броја која се налазе изнад њега. Тако је у трећем реду 1, 2, 1, у четвртом 1,3,3,1, итд. Бројеви који се налазе у Паскаловом троуглу су заправо биномни коефицијенти а нови редови се добијају коришћењем Паскаловог идентитета.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\iddots & & & & & & \vdots & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Паскалов троугао

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\iddots & & & & & & & \vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Троугао биномних коефицијената

Паскал није први математичар који је дошао до оваквог троугла. Овакав објекат је био познат још вековима раније у Индији, Кини, Персији, па и у Италији математичарима Тартаљи[1] и Кардану[2], али је ипак на западу остао познат као Паскалов троугао.

Наредна теорема коју ћемо доказати јесте једна од најпознатијих формула које се користе у математици, али и шире. У питању је биномна формула која се често назива и развој степена бинома, али и Њутнова[3] и Њутн–Лајбницова[4] формула.

биномна формула

Теорема 2.26 (Биномна формула)**.** *За сваки ненегативан цео број n важи*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Доказ. Доказ ћемо радити индукцијом по n. За $n = 0$ обе стране су једнаке јединици, те база индукције важи. Докажимо да, ако формула важи за неко $n \geqslant 0$, онда важи и за $n+1$. Сада имамо

[1] Niccoló Fontana Tartaglia (1500–1577), италијански математичар и инжењер
[2] Gerolamo Cardano (1501–1576), италијански математичар, физичар и филозоф
[3] Isaac Newton (1643–1727), енглески математичар, физичар, астроном и теолог
[4] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), немачки математичар, филозоф и дипломата

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + \binom{n}{n}a^0b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n-k+1}b^k + \binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + \binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k.
\end{aligned}
$$

Четврти ред смо добили тако што смо променили бројач у другој суми, у петом реду смо издвојили по један сабирак из сваке од сума. Шести ред смо добили користећи дистрибутивност за сабирке у сумама и такође једнакости $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ и $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Даље смо искористили Паскалов идентитет и на крају смо све сабирке груписали у једној суми. □

Може се приметити да су коефицијенти које добијамо у развоју n-тог степена бинома заправо биномни коефицијенти n-тог реда Паскаловог троугла (ако рачунамо прву јединицу као нулти ред).

Пример 2.27. Доказати: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Горњу једнакост можемо доказати тако што користимо биномну формулу и уместо a и b ставимо јединице. Други начин је да приметимо да збир са леве стране представља збир броја свих празних подскупова скупа са n елемената, једночланих подскупова, двочланих и тако даље, k-точланих подскупова, све до n-точланих подскупова. То су заправо сви подскупови скупа са n елемената, а знамо да њих има 2^n. △

Може се приметити да идентитет из претходног примера заправо даје збир бројева у n-тој врсти Паскаловог троугла.

2.8 Мултиномни коефицијенти

Мултиномне (полиномне) коефицијенте смо већ дефинисали на страни 22. Слично као што биномни коефицијенти фигуришу у биномној формули тј. у развоју степена бинома, тако и мултиномни коефицијенти учествују у развоју степена мултинома.

Пример 2.28. Размотримо развој трећег степена израза $x_1 + x_2 + x_3$.

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^3 &= (x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+x_2+x_3)\\ &= x_1x_1x_1 + x_1x_1x_2 + x_1x_1x_3 + x_1x_2x_1 + x_1x_2x_2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3x_1 + x_1x_3x_2 + x_1x_3x_3\\ &\quad + x_2x_1x_1 + x_2x_1x_2 + x_2x_1x_3 + x_2x_2x_1 + x_2x_2x_2 + x_2x_2x_3 + x_2x_3x_1 + x_2x_3x_2 + x_2x_3x_3\\ &\quad + x_3x_1x_1 + x_3x_1x_2 + x_3x_1x_3 + x_3x_2x_1 + x_3x_2x_2 + x_3x_2x_3 + x_3x_3x_1 + x_3x_3x_2 + x_3x_3x_3\end{aligned}$$

Приметимо да, пошто смо тражили трећи степен, у сваком производу учествују три елемента из скупа $\{x_1, x_2, x_3\}$. Даље, неки производи се јављају више пута (пошто важи комутативност множења), те их можемо груписати (због комутативности сабирања). Стога добијамо

$$(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3.$$

Сваки сабирак који добијамо на крају има особину да збир степена од x_1, x_2 и x_3 даје 3. Такође, коефицијенти које добијамо јесу пребрајања појављивања одговарајућих мултискупова са истим елементима. △

Горњи пример се, наравно, може уопштити и то је дато у наставку.

Теорема 2.29 (Мултиномна (полиномна) формула)**.** *За све природне бројеве n и k важи:*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n,\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\geqslant 0}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}.$$

Доказ. Када распишемо израз

$$\underbrace{(x_1+x_2+\cdots+x_k)\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_k)\cdot\ldots\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_k)}_{n \text{ заграда}}$$

добићемо k^n сабирака. Сваки сабирак је нека реч $a_1a_2\ldots a_n$, где су слова a_i из скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Пошто важи комутативност, можемо груписати све сабирке истог типа (са n_1 појављивања x_1, n_2 појављивања x_2 и тако даље до n_k). Јасно, важи $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ и $n_1, n_2, \ldots, n_k \geqslant 0$. Такође, сабирака облика $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ ће бити онолико колико постоји пермутација слова x_1, x_2, ..., x_k са датим понављањем и њих има $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. То објашњава општи члан у суми. □

Пример 2.30. Који коефицијент у развоју израза $(x + y - z)^8$ стоји уз члан xy^4z^3?

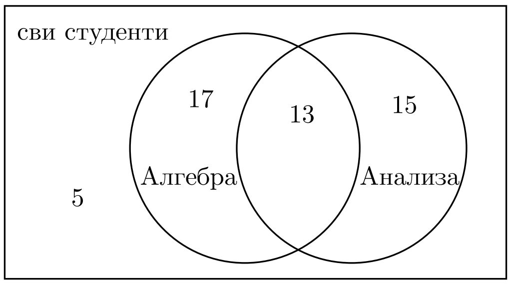
Овде важи $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$ и пошто је додатно уз z коефицијент -1, добијамо коефицијент уз посматрани члан: $\binom{8}{1,4,3}\cdot(-1)^3 = -\binom{8}{1,4,3} = -280$. △

2.9 Принцип укључења и искључења

Приликом примене принципа збира захтев који скупови треба да испуне јесте да су сви скупови чије елементе пребрајамо међусобно дисјунктни. Међутим, не мора увек важити да нека група скупова има све пресеке празне. Стога нам треба уопштење овог принципа. Посматрајмо наредни пример.

Пример 2.31. У групи од 50 студената њих 30 је у јануарско-фебруарском испитном року положило Алгебру, њих 28 Анализу и њих 13 и Алгебру и Анализу. Колико студената из групе није положило ниједан од ова два предмета?

Овакав проблем је најједноставније решити користећи Венов[5] дијаграм тако што одредимо колико има елемената у којем дисјунктном делу.



Дакле, оних који су положили само Алгебру има $30 - 13 = 17$, оних који су положили само Анализу има $28 - 13 = 15$, те оних који су положили бар један предмет има $17 + 15 + 13 = 45$. Зато је остало $50 - 45 = 5$ студената који нису положили ни један од дата два предмета. $\triangle$

У претходном примеру смо пребројавали објекте који су били окарактерисани са две особине – студенте који су полагали два предмета. Приступ преко Венових дијаграма је користан када имамо две или три особине, тј. два или три скупа који се посматрају. Међутим, већ четири скупа умеју бити проблематична приликом цртања Веновог дијаграма. И зато ће тај начин бити доста компликован да се уопшти на n скупова. Стога проблем када објекти имају три особине које их класификују сада посматрајмо на мало другачији начин.

Пример 2.32. Колико има природних бројева од 1 до 1000 који су дељиви бар једним од бројева 2, 3 и 5?

Дефинишимо следеће скупове

$$\begin{aligned}
A &= \{x : 1 \leqslant x \leqslant 1000, 2 \mid x\} = \{2, 4, 6, \dots, 1000\},\\
B &= \{x : 1 \leqslant x \leqslant 1000, 3 \mid x\} = \{3, 6, 9, \dots, 999\},\\
C &= \{x : 1 \leqslant x \leqslant 1000, 5 \mid x\} = \{5, 10, 15, \dots, 1000\}.
\end{aligned}$$

Стога имамо $|A| = 500$, $|B| = 333$ и $|C| = 200$. Нас занима колико има елемената у унији скупова A, B и C. Морамо пазити да се елементи у пресецима не броје

[5] John Venn (1834–1923), енглески математичар, логичар и филозоф

више пута. Важи

$$\begin{aligned}|A\cap B| &= |\{x : 1 \leqslant x \leqslant 1000, 6 \mid x\}| = 166,\\ |A\cap C| &= |\{x : 1 \leqslant x \leqslant 1000, 10 \mid x\}| = 100,\\ |B\cap C| &= |\{x : 1 \leqslant x \leqslant 1000, 15 \mid x\}| = 66,\\ |A\cap B\cap C| &= |\{x : 1 \leqslant x \leqslant 1000, 30 \mid x\}| = 33.\end{aligned}$$

Коначно имамо

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\ &= 500+333+200-166-100-66+33 = 734.\end{aligned}$$

Број елемената у пресеку $A\cap B$ смо одузели јер смо те елементе бројали два пута – и приликом бројања елемената у скупу A и приликом бројања елемената у скупу B. Исто и за пресеке $A\cap C$ и $B\cap C$. Међутим, овако смо елементе у пресеку сва три скупа најпре бројали три пута (у A, у B и у C), па их три пута избацили (у сваком од пресека два скупа), те их морамо на крају још једном пребројати. $\triangle$

Овакав приступ се може уопштити за n скупова. Дакле, прво ћемо сабрати кардиналности свих посматраних скупова. Затим због дуплог бројања одузети бројеве елемената свих пресека два различита скупа. Онда додати бројеве елемената свих пресека три различита скупа и тако наизменично додавати и одузимати бројеве елемената пресека са више и више скупова, све док не дођемо до пресека свих посматраних скупова. Овакав приступ се назива Принцип укључења и искључења (скраћено ПУИ). Докажимо да је овакав принцип легитиман.

Теорема 2.33 (ПУИ). *Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ подскупови коначног скупа S. Тада важи следећа формула укључења и искључења:*

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|\\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\end{aligned}$$

Доказ. Сваки елемент који се налази у скупу доприноси његовој кардиналности са 1. Фиксирајмо $x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. Дакле, x доприноси левој страни са 1. Израчунајмо колико доприноси са десне стране. Нека се x налази у k скупова који учествују у унији $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. Тада на десној страни имамо

$$\begin{aligned}k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} + 0 + \cdots + 0\\ = \underbrace{1-\binom{k}{0}}_{0} + \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}\\ = 1-(1-1)^k = 1.\end{aligned}$$

Дакле, сваки елеменат и на левој и на десној страни је пребројан једанпут, те једнакост важи. $\square$

Пример 2.34. Колико има пермутација мултискупа $M = \{a, a, a, b, b, b, c, c, c\}$ тако да никоја три узастопна слова нису једнака?

Ако са P означимо скуп свих пермутација мултискупа M, са A (респективно са B и са C) скуп оних пермутација скупа M у којима се a (респективно b и c) налази на три узастопна места, онда нас заправо интересује $|P| - |A \cup B \cup C|$. Користећи принцип укуључења и искључења добијамо

$$|P| - |A \cup B \cup C| = |P| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Израчинајмо вредности у изразу:

$$\begin{aligned}
|P| &= \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680, \\
|A| &= \frac{7!}{3! \cdot 3!} = 140 = |B| = |C|, \\
|A \cap B| &= \frac{5!}{3!} = 20 = |A \cap C| = |B \cap C|, \\
|A \cap B \cap C| &= 3! = 6.
\end{aligned}$$

Дакле, важи

$$|P| - |A \cup B \cup C| = 1680 - 3 \cdot 140 + 3 \cdot 20 - 6 = 1314.$$

△

Оно што можемо да приметимо у претходном примеру јесте да су слова a, b и c равноправна, те су кардиналности помоћних скупова једнаке, а и пресеци два различита помоћна скупа имају исту кардиналност. У оваквим примерима важи специјалан облик принципа укуључења и искључења управо због тих олакшавајућих околности.

Теорема 2.35 (Специјалан случај ПУИ)**.** *Нека је*

$$\begin{aligned}
&|A_i| = M_1, \qquad \text{за све } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\
&|A_i \cap A_j| = M_2, \qquad \text{за све } i < j,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\
&|A_i \cap A_j \cap A_k| = M_3, \ \text{за све } i < j < k,\ i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\
&\vdots \\
&|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = M_n.
\end{aligned}$$

Тада важи

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = nM_1 - \binom{n}{2} M_2 + \binom{n}{3} M_3 - \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} M_n.$$

Доказ. Како су пресеци k скупова из низа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ исте кардиналности, то јест M_k, за сваку суму из формуле ПУИ важи да има $\binom{n}{k}$ сабирака M_k, што даје формулу из овог тврђења. □

Досад смо одредили колико има различитих пресликавања из скупа са k у скуп са n елемената, колико је од њих инјективних и колико бијективних. Сада можемо одредити и колико од њих је сирјективних.

Теорема 2.36. *Нека су K и N скупови такви да $|K| = k$ и $|N| = n$, где $k \leqslant n$. Број свих могућих сирјективних пресликавања из скупа K у скуп N је*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k.$$

Доказ. Резултат можемо добити применом принципа укључења и искључења. Свих функција које пресликавају скуп K у скуп N је n^k. Од укупног броја одузимамо број оних које имају елементе кодомена који остају без оригинала, то јест функције које прескачу неки од елемената кодомена.

Без умањења општости, нека важи $N = \{1, 2, \dots, n\}$. За $1 \leqslant i \leqslant n$, означимо са A_i скуп свих функција из K у N које прескачу i. Тада је број свих сирјекција из K у N једнак $n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$. Важи:

$$\begin{aligned}
&|A_i| = (n-1)^k, \qquad \text{за све } i \in \{1, 2, \dots, n\},\\
&|A_i \cap A_j| = (n-2)^k, \qquad \text{за све } i < j,\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\},\\
&|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)^k,\ \text{за све } i < j < k,\ i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\},\\
&\vdots\\
&|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = 0.
\end{aligned}$$

Сада због специјалног случаја ПУИ имамо

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =\\
&\quad = n(n-1)^k - \tbinom{n}{2}(n-2)^k + \tbinom{n}{3}(n-3)^k - \cdots + (-1)^{n-2}\tbinom{n}{n-1}(n-(n-1))^k + 0.
\end{aligned}$$

Коначно, тражени број је

$$\begin{aligned}
n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= n^k - \sum_{i=i}^{n-1} (-1)^{(i-1)} \binom{n}{i} (n-i)^k\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k.
\end{aligned}$$

□

2.10 Растрој поретка

Пример 2.37. Лењи професор тестира групу од n студената. Након теста покупи радове, измеша их и произвољно подели студентима да их оцене. Колика је вероватноћа да ниједан студент неће добити свој рад?

Вероватноћа неког догађаја је број повољних исхода подељен са бројем свих могућих исхода.

$$\text{вероватноћа догађаја} = \frac{\text{број повољних исхода}}{\text{број свих исхода}}$$

Према томе, нас занима колико има исхода да ниједан студент не добије свој рад и колико је свих могућих исхода. Свих исхода је укупно $n!$ – као број свих пермутација скупа од n елемената. Повољни исходи су они када се у пермутацији скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ на i-том месту не налази i, за све $i = 1, 2, \dots, n$, пошто то за нас представља да i-ти ученик није добио i-ти, то јест свој рад. Број оваквих пермутација означићемо са D_n, па ћемо се касније вратити да завршимо проблем. Дакле, оно што засад знамо јесте да је вероватноћа $\frac{D_n}{n!}$ и остаје одредити D_n. △

За пермутацију $a_1 a_2 \dots a_n$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ кажемо да је *растрој поретка* (*беспоредак, деранжман*) ако се за све $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ на i-том месту не налази број i, то јест $a_i \neq i$. Број свих оваквих пермутација скупа са n елемената означавамо са D_n. растрој поретка

Теорема 2.38. *За* $n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Доказ. Означимо са A_i скуп пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ које имају особину да на i-том месту стоји баш i. Према томе, занимају нас пермутације које су у комплементу уније свих оваквих скупова. Одатле важи

$$\begin{aligned}
D_n &= \left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}\right| = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\
&= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 1! \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

□

Дакле, сада можемо закључити да је вероватноћа из примера 2.37 једнака $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496	4 334 961	14 684 570

Табела вредности D_n за $n \leqslant 11$.

Пример 2.39. На колико начина је могуће офарбати поља шаховске табле са 8 боја тако да свака врста садржи свих 8 боја и да не постоје два поља са заједничком страницом која су обојена истом бојом?

Како у свакој врсти морају бити искоришћене све боје, по врстама ћемо имати пермутације датих осам боја. Кренувши од прве врсте, ту су све пермутације дозвољене, те имамо 8! могућности. Када је прва врста обојена, у наредној врсти нису дозвољене премутације боја такве да се боје поклапају на пољима која се налазе једно испод другог. Број оваквих пермутација је D_8. Када се обоји и друга врста, слично као за другу врсту, долазимо до закључка да сада имамо D_8 могућности за бојење треће врсте и тако даље све до последње врсте. Дакле, укупно има $8! \cdot D_8^7$ могућности. △

ГЛАВА 3

РЕКУРЕНТНИ НИЗОВИ

> *Брахмина кула*
>
> Бог је при стварању света у једном храму у Бенаресу поставио кулу са 64 златна диска и поверио монасима задатак да све дискове пребаце са једног стуба на други. Они су у истом тренутку кренули да их пребацују. Оног тренутка када заврше свој задатак и кула буде потпуно премештена, доћи ће до смака света.

Западном свету је овај проблем 1883. године представио француски математичар Едуар Лика.[1] У источном делу света је он био позната под различитим именима са варијацијама у локацијама и теми у зависности од религија и региона у којој је преношен (једно од најчешћих имена која се јављају је Легенда о ханојској кули), но суштина је свугде иста. Она се састоји у следећем.

> Дискови су на почетку поређани на стубу тако да је први одоздо највећи и сваки следећи је мањи од претходног. Кулу треба пребацити на други стуб и при томе може се користити помоћни стуб. (Дакле, укупно има три стуба на располагању.) У сваком потезу се премешта тачно један диск. Сме се премештати диск који је на врху једног стуба и ставити га на врх другог стуба. Ни у једном тренутку се не сме већи диск наћи изнад мањег. Питање је колико најмање потеза треба за премештање куле?

Решавањем овог и сличних проблема бавићемо се у овој глави. За то ће нам најпре требати једна специјална врста низова.

Нека је дат низ $t : a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Ако је почевши од неког n, n-ти члан низа могуће записати као функцију претходних чланова, тј.

$$a_n = f_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

онда се горњи израз назива *рекурентна релација* низа t, док се низ t назива рекурентна релација

[1] François Édouard Anatole Lucas (1842–1891), француски математичар

рекурентни низ

рекурентни низ. Кажемо и да низ t *задовољава* (или *испуњава*) ову рекурентну релацију. Такође, сваки низ који задовољава дату рекурентну релацију јесте њено *решење*.

Пример 3.1. Посматрајмо низ факторијела $1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots$ Општи члан низа је $a_n = n!$ и овај низ испуњава релацију

$$a_n = n \cdot a_{n-1}.$$

△

3.1 Телескопирање

Рекурентна релација коју низ задовољава нам даје доста информација о низу, јер довољно је да знамо неколико почетних чланова и на тај начин можемо одредити све наредне чланове користећи рекурентну релацију.

Погледајмо пример аритметичког низа. Подсетимо се да је аритметички низ онај чија је разлика два узастопна члана константна и једнака d. Овакав низ испуњава рекурентну релацију $a_n = a_{n-1} + d$.

Пример 3.2. Нека је почетни члан аритметичког низа $a_0 = 11$ и разлика два узастопна члана овог низа нека је $d = 5$. То значи $a_1 = 16$, $a_2 = 21$, и тако даље. Ако желимо да израчунамо шта је a_{2022} у овом низу, онда је потребно да 2022 пута применимо рекурентну релацију на чланове низа и тако долазимо до $a_{2022} = 10121$. △

Ово, наравно, није било тешко израчунати с обзиром на рекурентну релацију која је прилично једноставна, но свакако би било још једноставније да из датих услова добијемо везу између почетног члана низа и n-тог члана који нас занима. Штавише, када је рекурентна релација компликованија, биће нам још од веће користи да n-ти члан низа изразимо помоћу почетка низа. Једну методу за овакво одређивање приказаћемо управо преко примера аритметичког низа.

Методом телескопирања општи члан низа можемо одредити на следећи начин.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \cancel{a_{n-1}} + d \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + d \\ \cancel{a_{n-2}} &= \cancel{a_{n-3}} + d \\ &\vdots \\ \cancel{a_1} &= a_0 + d \end{aligned}\right\} + \qquad \Rightarrow \qquad a_n = a_0 + n \cdot d$$

Дакле, телескопирање се заправо састоји у исписивању рекурентне релације за a_n, затим a_{n-1} и тако све до почетног члана а затим свођењем аритметичким операцијама на облик који нам одговара. Одговара нам да добијемо a_n изражено преко што мање претходних чланова низа и то таквих да су са почетка низа, тј. да су њихови индекси што је могуће мањи.

Пример 3.3. Геометријски низ је низ чији је количник два узастопна члана константан и једнак q. Овакав низ испуњава рекурентну релацију $a_n = a_{n-1} \cdot q$, док се општи члан низа може добити телескопирањем и за њега важи $a_n = a_0 \cdot q^n$. △

За рекурентну релацију кажемо да је *реда* k ако је k најмањи број такав да је a_n једнозначно одређено са $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$, тј. са k претходних чланова. У том случају, за одређивање свих елемената низа помоћу рекурентне релације реда k довољно је знати првих k чланова низа. Вредности a_0, a_1, $\ldots$, a_{k-1} тада називамо *почетним условима* и кажемо да рекурентна релација заједно са почетним условима *генеришу* низ t. почетни услови

Пример 3.4. Рекурентна релација $f_n = \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}$ је реда 2, док је рекурентна релација $a_n = 2a_{n-2} + 3a_{n-3}$ реда 3. Иако је a_n изражено само преко два члана која се налазе пре њега у низу, да бисмо га израчунали помоћу дате рекурентне релације, морамо знати чак члан који се налази три места пре њега. (Најлакши начин одређивања реда рекурентне релације је да се одузме најмањи од највећег индекса чланова низа који се јављају датој у релацији.)

Низ парних природних бројева $2, 4, 6, 8, \ldots$ генерисан је помоћу рекурентне релације $a_n = a_{n-1} + 2$ и почетног услова $a_0 = 2$. Променом почетног услова добија се другачији низ. На пример, за $a_0 = 1$ добијамо непарне бројеве, док за $a_0 = -100$, осим свих парних природних бројева, у низу имамо и 50 негативних парних бројева и нулу. △

Вратимо се на Брахмину кулу.

Означимо са h_n најмањи број корака потребних да се кула од n дискова премести са једног на други стуб. Првих неколико чланова низа можемо практично да одредимо преслагањем дискова: $h_1 = 1$, $h_2 = 3$, $h_3 = 7$, $\ldots$

Даље, одредимо рекурентну релацију коју овај низ испуњава. За преслагање n дискова најпре је потребно пресложити горњих $n-1$ дискова са почетног стуба на помоћни (за шта је потребно h_{n-1} корака), затим последњи, највећи, диск преместити на коначан стуб и на крају оних $n-1$ дискова са помоћног стуба пресложити на коначан стуб. Дакле, добијамо рекурентну релацију

$$h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1}.$$

Сада можемо помоћу телескопирања да одредимо општи члан низа.

$$\left.\begin{array}{rll} h_n = & 2h_{n-1} + 1 & \\ h_{n-1} = & 2h_{n-2} + 1 & / \cdot 2^1 \\ h_{n-2} = & 2h_{n-3} + 1 & / \cdot 2^2 \\ \vdots & & \\ h_3 = & 2h_2 + 1 & / \cdot 2^{n-3} \\ h_2 = & 2h_1 + 1 & / \cdot 2^{n-2} \\ h_1 = & 1 & / \cdot 2^{n-1} \end{array}\right\} + \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} h_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\ h_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \end{array}$$

Према томе, добијамо општи члан низа $h_n = 2^n - 1$. Те ако на располагању имамо 64 диска, потребно је $2^{64} - 1$ потеза.

Ако бисмо претпоставили да за сваки потез треба једна секунда, онда за премештање треба

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615\ s \approx 585\,000\,000\,000 \text{ година}.$$

(То је око 42 пута дуже од тренутне старости универзума.)

3.2 Хомогене линеарне рекурентне релације са константним коефицијентима

Није свака рекурентна релација таква да се општи члан може одредити помоћу телескопирања. Једна класа рекурентних релација код које телескопирање не помаже у општем случају јесу хомогене линеарне рекурентне релације са константним коефицијентима и у овом одељку ћемо изучавати како код оваквих релација доћи до општег решења.

Нека је дата рекурентна релација $a_n = f_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. За ову релацију кажемо да је: *хомогена* ако је задовољава нула-низ, тј. низ $a_n = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$; *линеарна* ако важи да је функција f_n линеарна по свим аргументима; *са константним коефицијентима* ако се f_n може дефинисати преко коначно много константих параметара.

Дакле, кажемо да низ испуњава *хомогену рекурентну релацију са константним коефицијентима* (ХЛРРКК) реда k ако је облика

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

где су $c_1, c_2, \dots, c_k$ константе (реалне или комплексне) и $c_k \neq 0$.

Пример 3.5. $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ је хомогена и са константним коефицијентима, али није линеарна.
$h_n = 2h_{n-1} + 1$ је линеарна са константним коефицијентима, али није хомогена.
$g_n = n g_{n-2}$ је линеарна и хомогена, али није са константним коефицијентима.
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ и $a_n = \frac{1}{2} a_{n-2} - \frac{1}{3} a_{n-3}$ јесу примери ХЛРРКК. △

За решавање оваквих рекурентних релација биће нам потребне додатне дефиниције.

Нека је низ $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ одређен са $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$, где $c_k \neq 0$. Овом низу одговара *карактеристична једначина*

карак- терис- тична једна- чина

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k.$$

Решења (не нужно различита) ове једначине $x_1, x_2, \dots, x_k$ називамо *карактеристични корени.*

карак- терис- тични корени

Пример 3.6. Рекурентној релацији

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

одговара карактеристична једначина

$$x^2 = x + 1, \qquad \text{тј.} \qquad x^2 - x - 1 = 0.$$

Њени карактеристични корени су $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. △

За решавање ХЛРРКК користимо наредно тврђење.

Теорема 3.7. *Нека је дато $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$, где $c_k \neq 0$.*

1. *Ако је r карактеристични корен, онда је $a_n = r^n$ једно решење рекурентне релације.*

2. *Ако су* $a'_n, a''_n, \ldots, a_n^{(k)}$ *решења рекурентне релације и* $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *произвољне константе, онда је*

$$a_n = C_1 a'_n + C_2 a''_n + \cdots + C_k a_n^{(k)}$$

такође једно решење рекурентне релације.

3. *Ако су* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *различити карактеристични корени, онда се свако решење рекурентне релације може записати у облику* ХЛРРКК са различитим коренима

$$a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \cdots + C_k x_k^n,$$

за неке константе $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Напомена 3.8. Суштина дела 3. претходног тврђења јесте да се за различите почетне услове (који могу бити задати произвољно) могу одабрати константе $C_1, C_2, \ldots, C_k$ тако да је $a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \cdots + C_k x_k^n$ решење за дате почетне услове. ♢

Најпре ћемо на примеру демонстрирати како нам ова теорема помаже, а после ћемо је и доказати.

Пример 3.9. Дата је рекурентна релација

$$a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n$$

са почетним условима $a_0 = 1,\ a_1 = -3,\ a_2 = -29$.

Карактеристична једначина је $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ а њени карактеристични корени су $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ и $x_3 = 4$.

Опште решење је

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + C \cdot 4^n,$$

где су A, B, C неке константе и то смо добили на основу теореме 3.7. Остаје да одредимо константе A, B, C.

Када почетне услове убацимо у опште решење, добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1, \\ 2A + 3B + 4C &= -3; \\ 4A + 9B + 16C &= -29. \end{aligned}$$

Следи $A = 2,\ B = 3,\ C = -4$, па је коначно

$$a_n = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n - 4 \cdot 4^n.$$

△

Доказ теореме 3.7. За дату рекурентну релацију карактеристична једначина је

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k.$$

Ако је r решење ове једначине, онда важи

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_{k-1} r + c_k.$$

Када цео израз помножимо са r^{n-k}, добијамо

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_{k-1} r^{n-k+1} + c_k r^{n-k},$$

одакле директно следи да је r^n једно решење за a_n. (Тиме је доказан део 1.)

Убацивањем решења $a'_n, a''_n, \ldots, a_n^{(k)}$ у релацију добијамо

$$\begin{aligned}
a'_n &= c_1 a'_{n-1} + c_2 a'_{n-2} + \cdots + c_k a'_{n-k},\\
a''_n &= c_1 a''_{n-1} + c_2 a''_{n-2} + \cdots + c_k a''_{n-k},\\
&\vdots\\
a_n^{(k)} &= c_1 a_{n-1}^{(k)} + c_2 a_{n-2}^{(k)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(k)}.
\end{aligned}$$

(Треба имати у виду да ова решења представљају функције које зависе од n, те ако знамо a'_n, онда је и a'_{n-i} такође познато – само се уместо n у израз убацује $n-i$.)

Множећи i-ту једнакост са C_i, за $1 \leqslant i \leqslant k$, а затим сабирањем свих једнакости, добијамо

$$\begin{aligned}
C_1 a'_n + C_2 a''_n + \cdots + C_k a_n^{(k)} &= c_1 (C_1 a'_{n-1} + C_2 a''_{n-1} + \cdots + C_k a_{n-1}^{(k)})\\
&+ c_2 (C_1 a'_{n-2} + C_2 a''_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-2}^{(k)}) + \cdots + c_k (C_1 a'_{n-k} + C_2 a''_{n-k} + \cdots + C_k a_{n-k}^{(k)}).
\end{aligned}$$

Одавде следи да је и $a_n = C_1 a'_n + C_2 a''_n + \cdots + C_k a_n^{(k)}$ такође решење дате рекурентне релације (те је доказан и део 2).

Нека су сада почетни услови: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$. Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_k$ различити карактеристични корени, онда због већ доказаних делова теореме имамо

$$a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \cdots + C_k x_k^n.$$

Доказаћемо да су константе $C_1, C_2, \ldots, C_k$ јединствено одређене на основу почетних услова. Користећи почетне услове добијамо:

$$\begin{aligned}
C_1 \quad &+ C_2 \quad + \cdots + C_k \quad = b_0,\\
C_1 x_1 \quad &+ C_2 x_2 \quad + \cdots + C_k x_k \quad = b_1,\\
C_1 x_1^2 \quad &+ C_2 x_2^2 \quad + \cdots + C_k x_k^2 \quad = b_2,\\
&\vdots\\
C_1 x_1^{k-1} &+ C_2 x_2^{k-1} + \cdots + C_k x_k^{k-1} = b_{k-1}.
\end{aligned}$$

Знамо да овакав систем има јединствено решење за $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ако и само ако је детерминанта система различита од нуле. Према томе, хајде да видимо чему је она једнака.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k\\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_k^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_i - x_j)$$

Дакле, детерминанта[2] система је различита од нуле ако и само ако су вредности $x_1, x_2, \ldots, x_k$ различите, што нам је и дато у претпоставци и тиме је доказ завршен. □

Као што смо могли да видимо, засад умемо да решимо рекурентну релацију када су карактеристични корени различити. Наравно, решења карактеристичне једначине не морају нужно бити различита и описани поступак у том случају нам не би дао опште решење. Тада нам у последњој етапи решавања помаже наредна теорема.

Теорема 3.10. *Ако карактеристична једначина има s-тоструки корен r, онда су*

ХЛРРКК са вишеструким коренима

$$a_n' = r^n, a_n'' = n \cdot r^n, \ldots, a_n^{(s)} = n^{s-1} r^n$$

решења дате рекурентне релације.

Корену r одговара онај део општег решења који је облика

$$(C_1 + nC_2 + n^2 C_3 + \cdots + n^{s-1} C_s) r^n.$$

Збир таквих израза по свим различитим коренима даје опште решење рекурентне релације.

Доказ. Нека је $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = r$ s-тоструко решење карактеристичне једначине

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_k.$$

Посматрајмо функцију

$$P(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k.$$

Јасно: $P(r) = 0$. Штавише, r је s-тоструки корен овог полинома. Дефинишимо нових s функција:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &:= x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_k x^{n-k},\\
P_1(x) &:= x \cdot P_0'(x) = n x^n - c_1 (n-1) x^{n-1} - c_2 (n-2) x^{n-2} - \cdots - c_k (n-k) x^{n-k},\\
P_2(x) &:= x \cdot P_1'(x) = n^2 x^n - c_1 (n-1)^2 x^{n-1} - c_2 (n-2)^2 x^{n-2} - \cdots - c_k (n-k)^2 x^{n-k},\\
&\vdots\\
P_{s-1}(x) &:= x \cdot P_{s-2}'(x) = n^{s-1} x^n - c_1 (n-1)^{s-1} x^{n-1} - \cdots - c_k (n-k)^{s-1} x^{n-k}.
\end{aligned}$$

Пошто је r s-тоструки корен, добијамо да $P_0(r) = P_1(r) = \cdots = P_{s-1}(r) = 0$. Из ових услова даље имамо

$$\begin{array}{llll}
P_0(r) = 0 & \Rightarrow & r^n - c_1 r^{n-1} - \cdots - c_k r^{n-k} = 0 & \Rightarrow \quad r^n \text{ је решење за } a_n,\\
P_1(r) = 0 & \Rightarrow & n r^n - \cdots - c_k (n-k) r^{n-k} = 0 & \Rightarrow \quad n r^n \text{ је решење за } a_n,\\
P_2(r) = 0 & \Rightarrow & n^2 r^n - \cdots - c_k (n-k)^2 r^{n-k} = 0 & \Rightarrow \quad n^2 r^n \text{ је решење за } a_n,\\
\vdots & & & \\
P_{s-1}(r) = 0 & \Rightarrow & n^{s-1} r^n - \cdots - c_k (n-k)^{s-1} r^{n-k} = 0 & \Rightarrow \quad n^{s-1} r^n \text{ је решење за } a_n.
\end{array}$$

[2] Ова конкретна добијена детерминанта позната је у линеарној алгебри као Вандермондова детерминанта.

Како су сва ова решења различита, можемо искористити закључак из теореме 3.7, те добијамо да је $C_1r^n + C_2nr^n + \cdots + C_sn^{s-1}r^n$, тј.

$$(C_1 + C_2n + \cdots + C_sn^{s-1})r^n$$

такође решење, за неке константе $C_1, C_2, \ldots, C_s$. $\square$

Пример 3.11. Дата је рекурентна релација

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 4a_{n-3} + 8a_{n-4}$$

са почетним условима $a_0 = 1$, $a_1 = 8$, $a_2 = 12$, $a_3 = 38$.

Карактеристична једначина ове релације је $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ и њени карактеристични корени су $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ и $x_4 = -1$.

Опште решење је

$$a_n = (A + Bn + Cn^2) \cdot 2^n + D \cdot (-1)^n.$$

Из почетних услова добијамо следећи систем

$$\begin{aligned} A + D &= 1, \\ 2A + 2B + 2C - D &= 8, \\ 4A + 8B + 16C + D &= 12, \\ 8A + 24B + 72C - D &= 38. \end{aligned}$$

Следи $A = 3$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ и $D = -2$, па коначно имамо

$$a_n = \left(3 - \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}n^2\right) \cdot 2^n - 2 \cdot (-1)^n.$$

$\triangle$

3.3 Фибоначијеви бројеви

Италијанског математичара Леонарда из Пизе називају још и Леонардо Пизано, Леонардо Боначи, али је најпознатији као Леонардо Фибоначи, где је презиме дошло од италијанског израза „filius Bonacci“ што значи „син Боначија“. Он је један од најзначајнијих средњовековних европских математичара. Образовао се у Алжиру. Аутор је више математичких књига које су имале велики утицај на повратак математике у научни живот средњовековне Европе. У својој књизи *Књига о рачуну* (*Liber abaci*, 1202) уводи арапско-индијски позициони систем који је научио од трговаца медитерана, ту описује како се користи, пореди са другим бројевним системима и начинима рачунања. Такође наводи низ комбинаторних проблема и између осталог описује и проблем са зечевима.

Проблем са зечевима

Пар одраслих зечева, почев од навршеног другог месеца, сваког месеца доноси на свет један нови пар зечева. Почетком месеца неки човек је добио пар тек рођених зечева. Колико ће парова зечева бити на почетку n-тог месеца (под условом да сви преживе)?

Да бисмо решили овај проблем, број парова зачева на почетку n-тог месеца означимо са F_n. Вредности за првих неколико месеци није тешко израчунати, оне ће бити: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, итд.

Број парова на почетку n-тог месеца се састоји од броја парова претходног месеца (то јест F_{n-1}) и броја новорођених парова зечева којих има онолико колико је парова било пре два месеца (то јест F_{n-2}), јер је то број парова који могу добити потомство. Дакле, добијамо рекурентну релацију

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\text{за } n \geqslant 3),$$

коју испуњавају бројеви из низа који представљају бројеве парова зечева.

Обично се овај низ проширује са нултим чланом $F_0 = 0$, те се *Фибоначијеви бројеви* најчешће дефинишу преко

Фибоначијеви бројеви

$$F_0 = 0, F_1 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\text{за } n \geqslant 2).$$

Решимо сада горњу рекурентну релацију.

Карактеристична једначина је $x^2 - x - 1 = 0$ а њени карактеристични корени су $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Одавде добијамо опште решење

$$F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Из почетних услова добијамо следећи систем

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Следи $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, те је општи члан

Бинеова формула

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

Претходна формула за општи члан Фибоначијевог низа је позната и под именом *Бинеова*[3] *формула*.

n	0	1	2	3	4	5	6	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

Табела Фибоначијевих бројева за $n \leqslant 16$.

[3] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), француски математичар, физичар и астроном

Фибоначијеви бројеви имају пуно занимљивих особина и јављају се на различитим местима у природи. Занимљиво је, на пример, што већина цветова има број латица који је једнак неком од Фибоначијевих бројева. Такође, односи два узастопна Фибоначијева броја конвергирају ка броју који се као пропорција јавља на многим местима: од распореда листова и грана на стаблу, преко музичких акорда и пропорција људског тела, до конфигурација минерала. Израчунајмо вредност ове константе.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}+F_{n-2}}{F_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$$

Одавде, ако лимес означимо са L, добијамо

$$L=1+\frac{1}{L},$$

одакле следи $L^2-L-1=0$, те имамо два решења ове једначине $L_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Но, како су Фибоначијеви бројеви позитивни а друго решење ове једначине је негативан број, следи

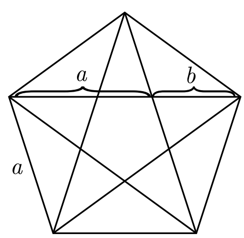
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

златни пресек

Ова константа се обично означава са φ и назива се *златни пресек.* С обзиром на то да се сматра да су објекти у оваквој пропорцији најпријатнији људском оку, φ се назива и божанска пропорција. Број φ је био познат још Старим Грцима и играо је велику улогу у тадашњој архитектури, уметности, естетици, што је остало до данас. Вредност константе златног пресека износи

$$\varphi=1,6180339887\ldots$$

Када су две величине a и b у односу једнаком φ, за њих кажемо да су у златном односу. Један од најједноставнијих геометријских облика где се овакав однос јавља јесте у правилном петоуглу, где једна дијагонала сече другу у овом златном односу. Поред тога важи да је страница тог петоугла једнака дужем делу дијагонале.

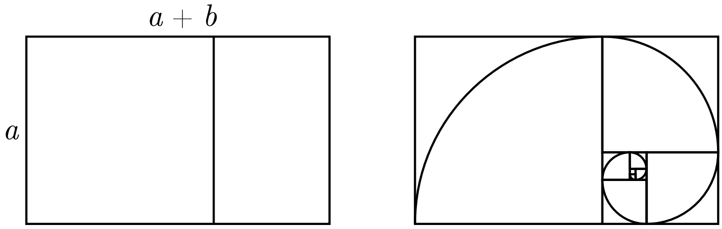


Дијагонале правилног петоугла се секу у златном односу.

За величине a и b које су у златном односу важи и да је њихов збир према већој такође у златном односу, то јест

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi.$$

Правоугаоник са страницама a и $a+b$ се назива *златни правоугаоник*. Помоћу њега и лукова кужница можемо конструисати геометријску криву коју називамо *златна спирала*.



Златни правоугаоник и златна спирала.

Златна спирала се такође често јавља у природи: у распореду атома у решетки квазикристала, у структури цветова сунцокрета, у шкољци пужа наутилуса, у ураганима и галаксијама.

Наведимо још неколико особина Фибоначијевих бројева.

Теорема 3.12. *За све* $n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Доказ. Ову особину можемо доказати телескопирањем.

$$\left.\begin{aligned} F_{n+2} &= \cancel{F_{n+1}} + F_n \\ \cancel{F_{n+1}} &= \cancel{F_n} + F_{n-1} \\ \cancel{F_n} &= \cancel{F_{n-1}} + F_{n-2} \\ &\vdots \\ \cancel{F_3} &= \cancel{F_2} + F_1 \\ \cancel{F_2} &= 1 \end{aligned}\right\} + \qquad \Rightarrow \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n-1} + \cdots + F_2 + F_1 + 1$$

□

Теорема 3.13. *За све* $n \in \mathbb{N}$ *важи* $\quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$

Доказ. Доказаћемо индукцијом по n. Лако се може проверити да овај идентитет важи за неколико почетних чланова низа. Претпоставимо да важи за n и покажимо да онда мора важити и за $n+1$.

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_n^2 = F_{n+1}(-F_{n-1}) + F_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Ако рекурентној релацији која одговара Фибоначијевим бројевима додамо неке друге почетне услове, на тај начин добијамо *бројеве Фибоначијевог типа*. Једни од најпознатијих таквих бројева су *Ликаови бројеви*. Они се дефинишу на следећи начин: Ликаови бројеви

$$L_0 = 2, L_1 = 1; \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (\text{за } n \geqslant 2).$$

Теорема 3.14. *Општи члан Ликаовог низа је*

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Доказ. Опште решење Ликаовог низа се добија исто као опште решење Фибоначијевог низа и оно је

$$L_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Из почетних услова добијамо следећи систем

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Следи $A = B = 1$, одакле добијамо општи члан из тврђења. □

n	0	1	2	3	4	5	6	6	8	9	10	11	12	13	14	15
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1 364

Табела Ликаових бројева за $n \leqslant 15$.

Занимљива је и веза између Фибоначијевих и Ликаових бројева дата у наредном тврђењу.

Теорема 3.15. *За све* $n \in \mathbb{N}$ *важи* $\qquad L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

Доказ. Ова особина се лако проверава за првих неколико чланова низа. Докажимо да, ако тврђење важи за све $k < n$, тада мора важити и за n.

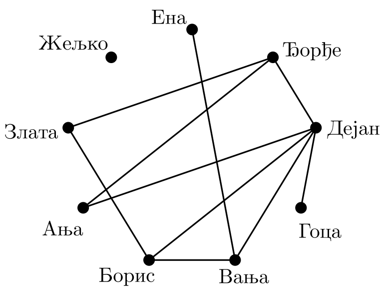
$$L_n = L_{n-1}+L_{n-2} = F_n+F_{n-2}+F_{n-1}+F_{n-3} = F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3} = F_{n+1}+F_{n-1}$$

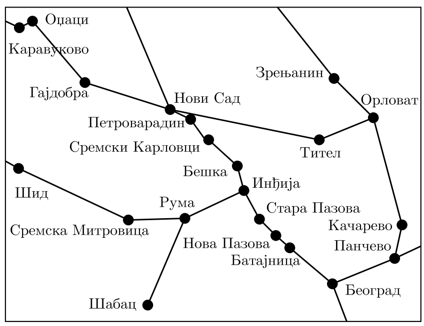
□

ГЛАВА 4

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ГРАФОВА

Теорија графова је грана математике која проучава графове – математичке објекте који моделирају бинарне релације међу објектима. Графови се обично приказују преко тачака које представљају објекте и линија које их спајају; ове линије представљају релације међу датим објектима.





Пријатељства у групи људи приказана помоћу графа и скица повезаности околине Новог Сада путничким железничким саобраћајем.

Графове можемо посматрати као природне моделе за различите структуре из природе, технике па и друштвених наука. Примери ван математике где се графови јављају су: саобраћајне мапе; social graphs; неуронске мреже и вештачка интелигенција; представљање алгоритама; дизајн чипова, процесора; молекуларне структуре, проучавање миграција, епидемија, размножавања; динамика физичких процеса...

Историјски гледано, почетак теорије графова је наступио 1736. године, када је Леонард Ојлер[1] објавио рад у којем је решио проблем мостова Кенигсберга, што се сматра за први рад из теорије графова. Тек век и по касније Силвестер[2] први пут користи термин *граф*. Први уџбеник из теорије графова

[1] Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар, физичар, астроном, географ и инжењер

[2] James Joseph Sylvester (1814–1897), енглески математичар

се појавио тек два века после Ојлеровог рада са проблемом мостова. Написао га је Денеш Кениг[3] 1936. године.

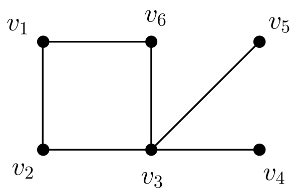
У данашње време је теорија графова врло актуелна област математике која не интерагује само са другим областима математике, већ и са другим наукама. Има и разнолике подобласти, неке од њих су: класична теорија графова, алгебарска, геометријска, вероватносна, екстремална, тополошка теорија графова и многе друге.

4.1 Дефиниција и основни појмови

граф

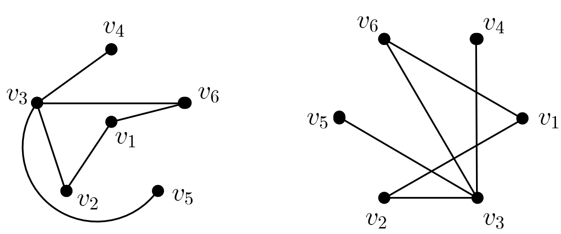
Граф G (прост граф) је уређени пар $G = (V, E)$, где је V коначан непразан скуп, а E подскуп скупа свих двоелементних подскупова скупа V. Елементе скупа V називамо *чворови* а елементе скупа E називамо *гране*. Често када говоримо о неком графу G његов скуп чворова означавамо и са $V(G)$ а скуп грана са $E(G)$.

Пример 4.1. Нека је дат граф чији је скуп чворова $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ а скуп грана $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}\}$. Овај граф можемо представити као на слици доле.



△

Напомена 4.2. Битно је напоменути да графичко представљање графа није јединствено одређено. У наставку дајемо још два начина како можемо приказати граф из примера 4.1.



Понекад се и цртеж идентификује са графом, али тада са њега мора бити јасно шта је скуп чворова а шта скуп грана. ◇

За гране се обично користе краћи записи, те тако грану $\{v_1, v_2\}$ краће означавамо и са v_1v_2 или само са e. При томе су v_1 и v_2 *крајњи чворови* гране $e = v_1v_2$.

[3] Kőnig Dénes (1884–1944), мађарски математичар јеврејског порекла

Осим простих графова, постоји још пуно сродних објеката који у својој основи имају просте графове. Неки од њих су:

– диграфови, тј. усмерени или оријентисани графови – њихов скуп грана је облика $E \subseteq \{(x, y) \in V^2 : x \neq y\}$;

– мултиграфови – дозвољено је више грана које спајају исте чворове, тј. скуп грана је мултискуп;

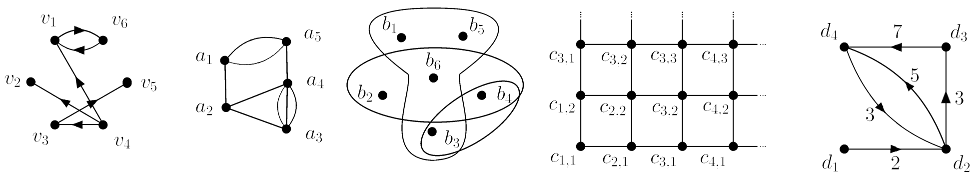
– хиперграфови – уопштење графа у смислу да гране могу бити подскупови са више од два чвора, то јест $E \subseteq \mathcal{P}(V)$;

– бесконачни графови – дозвољава се бесконачан скуп чворова или грана;

– рандом графови – чворови којима су гране додате насумично;

– тежински графови – графови чије гране имају придружену тежину;

– усмерени тежински графови (енгл. networks) итд.



Пример диграфа, мултиграфа, хиперграфа, бесконачног графа и усмереног тежинског графа.

Нека је дат граф $G = (V, E)$. *Ред графа* G, у ознаци $n(G)$, јесте број његових чворова, док је *величина графа* G, у ознаци $m(G)$, број његових грана. тј. $n(G) = |V|$ и $m(G) = |E|$.

ред и величина графа

Чворови u и v графа G се називају *суседни чворови* ако је uv грана графа G.

Ако је $e = uv$ грана графа G, онда кажемо да су чворови u и v *инцидентни* са граном e и да је e *инцидентна* са чворовима u и v.

Две гране графа су *суседне гране* ако су инцидентне са истим чвором.

суседне гране

Пример 4.3. Вратимо се на граф из примера 4.1. Негов ред и величина су $n(G) = 6$ и $m(G) = 6$. Пример суседних чворова су v_2 и v_3, док v_4 и v_5 нису суседни. Грана v_2v_3 је суседна грана са граном v_1v_2. Чвор v_6 је инцидентан са гранама v_1v_6 и v_3v_6. $\triangle$

Скуп суседних чворова чвора v се назива *суседство чвора* v и означава се са $N(v)$. *Степен чвора* v је број његових суседа у графу G и ознака је $d_G(v)$, или само $d(v)$ уколико је јасно у ком се графу посматра. Дакле, $d(v) = |N(v)|$.

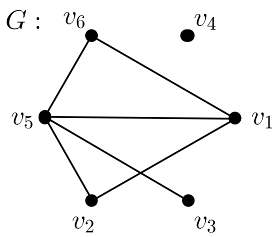
суседство и степен чвора

Чвор који нема суседе, то јест степена 0, називамо *изолован чвор*. Чвор степена 1 називамо *висећи чвор*. *Висећа грана* је грана инцидентна са висећим чвором.

изолован и висећи чвор

Чвор је *(не)паран* ако је његов степен (не)паран.

Пример 4.4. Нека је дат граф G као на слици доле.

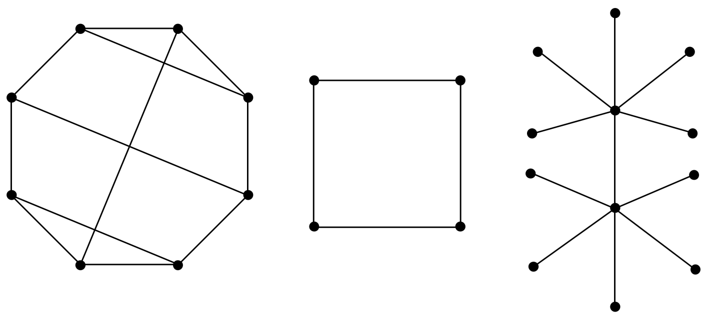


У G важи $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = d(v_6) = 2$, $d(v_3) = 1$, $d(v_4) = 0$ и $d(v_5) = 4$. Чвор v_4 је изолован чвор. Чвор v_3 је висећи чвор. Пример висеће гране је v_3v_5. Чворови v_1 и v_3 су непарни чворови, остали су парни. △

регуларан граф

Посебно се издвајају графови који имају специфичне степене чворова. Граф чији су сви чворови истог степена називамо *регуларан граф*. Ако је тај степен k, онда кажемо још и k-*регуларан*.

Полурегуларан граф је граф чији је скуп степена чворова двоелементан. Кажемо и да је (p, q)-*регуларан* ако је $\{p, q\}$ скуп степена чворова.



Примери 3-регуларног, 2-регуларног и $(1, 6)$-регуларног графа.

Пређимо сада на неке особине графова које су везане за степене чворова. Прво тврђење које наводимо је познато и као Прва теорема теорије графова.

Теорема 4.5. *Збир степена чворова графа (али и мултиграфа) једнак је двоструком броју грана, то јест, за граф $G = (V, E)$ важи*

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2 \cdot |E|.$$

Доказ. Нека је uv произвољна грана графа $G = (V, E)$. Она суми степена чворова доприноси два пута: једном за чвор u а други пут за чвор v. Дакле када саберемо степене свих чворова, сваку грану бројимо двапут, одакле се добија формула из тврђења. □

Наредно тврђење је последица претходног.

Теорема 4.6. *Број непарних чворова у графу је увек паран.*

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је граф $G = (V, E)$ такав да је број непарних чворова у њему једнак $2k+1$, за неко $k \geqslant 0$, и без умањења општости нека су то чворови $u_1, u_2, \ldots, u_{2k+1}$. Означимо $|V| = n$ и $|E| = m$. Сада важи

$$2|E| = 2m = \sum_{u \in V} d(u) = \underbrace{d(u_1) + \cdots + d(u_{2k+1})}_{\text{непарни бројеви}} + \underbrace{d(u_{2k+2}) + \cdots + d(u_n)}_{\text{парни бројеви}}.$$

Према томе, следи да је паран број једнак збиру непарног (јер имамо непаран број непарних сабирака) и парног броја (збир парних сабирака), што нас доводи до контрадикције. Претпоставка је била нетачна, те следи тврђење. $\square$

Често битну улогу играју степени чворова који су минимални односно максимални у датом графу. Са $\delta(G)$ означавамо *минималан* а са $\Delta(G)$ *максималан степен* чворова графа G, тј.

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v) \quad \text{и} \quad \Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v).$$

Пример 4.7. За граф G из примера 4.4 важи $\delta(G) = 0$ и $\Delta(G) = 4$. $\triangle$

Јасно, важи следеће тврђење.

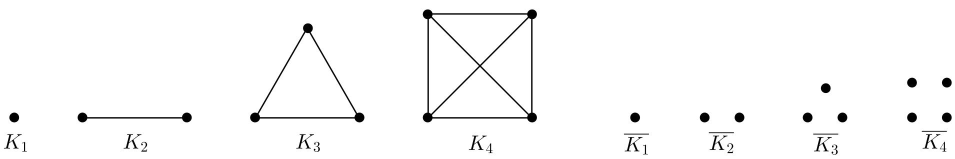
Теорема 4.8. *За граф G са n чворова испуњено је*

$$0 \leqslant \delta(G) \leqslant \Delta(G) \leqslant n - 1.$$

Из великог броја различитих графова издвајају се још неки специјални графови. Поменимо неке од њих.

Комплетан (*потпун*) граф K_n је граф са n чворова у ком су свака два чвора суседна. Према томе, важи да је K_n $(n-1)$-регуларан граф и $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$. комплетан граф

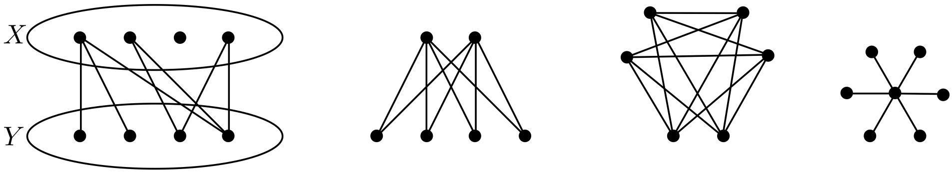
Празан (*потпуно неповезан*) граф $\overline{K_n}$ је граф са n чворова који нема гране. Важи да је $\overline{K_n}$ 0-регуларан. празан граф



Комплетни и празни графови за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Ако се $V(G)$ може разбити на m непразних дисјунктних скупова $X_1, X_2, \ldots, X_m$ тако да свака грана спаја чворове из различитих скупова партиције (тј. ниједна грана графа G не спаја чворове унутар исте класе партиције), онда такав граф називамо *m-партитан* граф и означавамо са $G(X_1, X_2, \ldots, X_m)$. Специјално, за $m = 2$ такав граф називамо *бипартитан* граф. m-партитан бипартитан

Комплетан m-партитан граф, у ознаци $K_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$, јесте m-партитан граф у којем су свака два чвора из различитих делова партиције повезана. Специјално, за $m = 2$ такав граф називамо *комплетан бипартитан* и означавамо са $K_{p,q}$. Још издвојенији случај, граф $K_{1,n}$ називамо *звезда*. звезда



$G(X,Y)$ $K_{2,4}$ $K_{2,2,2}$ $K_{1,6}$

Често су у теорији графова занимљиве особине графа које зависе само од апстрактне дефиниције, а не од његовог означавања чворова и конкретног представљања. Због тога, разликујмо следеће дефиниције.

Нека су дати графови $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Кажемо да су G_1 и G_2:

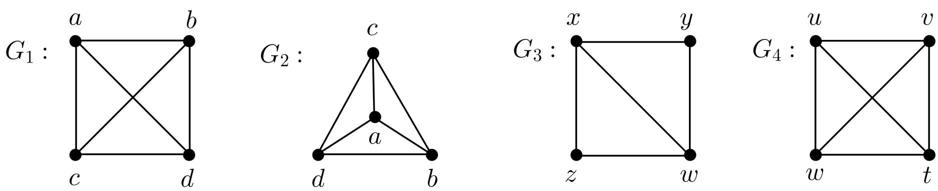
једнаки и изоморфни графови

– *једнаки*, ако важи $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$, (ознака $G_1 = G_2$)

– *изоморфни*, ако постоји бијективно пресликавање $\varphi : V_1 \to V_2$ тако да је суседност чворова очувана (овакву бијекцију називамо *изоморфизам графова* G_1 и G_2), тј.

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E_2. \quad (\text{ознака } G_1 \cong G_2)$$

Пример 4.9. На слици су дата четири графа.



Графови G_1 и G_2 су једнаки, јер $V(G_1) = V(G_2)$ и у оба графа су свака два чвора суседна. Можемо приметити да су они заправо два различита представљања комплетног графа са четири чвора. Граф G_4 није једнак са G_1 и G_2, пошто му се скуп чворова разликује, али јесте изоморфан са њима. Један од изоморфизама који ово потврђује је

$$f : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & t \end{pmatrix}.$$

Граф G_3 није изоморфан са њима, јер чворови y и z нису суседни, док су у комплетном графу (какви јесу G_1, G_2 и G_4) свака два чвора суседна. $\triangle$

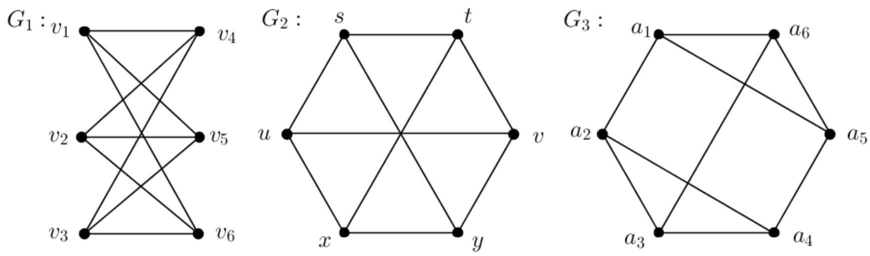
Ако два графа немају исти број чворова, јасно је да се не може дефинисати бијекција међу скуповима њихових чворова. Али ако имају исти број чворова и при томе нису изоморфни, онда није тако једноставно проверити да ли све могуће бијекције међу чворовима кваре суседност чворова или постоје неке које суседност очувавају. Ту нам у помоћ пристижу особине које се не мењају приликом дозвољене трансформације графа, које називамо

инваријанте изоморфизма

инваријанте изоморфизма графа. Неке од инваријанти су: број чворова, број грана, низ степена чворова, постојање контура, дужине тих контура.

Дакле, два графа нису изоморфна уколико постоји инваријанта изоморфизма графова коју један граф има а други не.

Пример 4.10. Посматрајмо три графа G_1, G_2 и G_3 приказана на слици доле, чији су редом скупови чворова $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $V(G_2) = \{s, t, u, v, x, y\}$ и $V(G_3) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.



Графови G_1 и G_2 су изоморфни, о томе сведочи функција

$$\phi : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ s & v & x & t & u & y \end{pmatrix},$$

док G_3 није изоморфан ни са G_1, ни са G_2, јер се не може наћи бијекција међу чворовима ових графова која очувава суседност чворова. Можемо приметити да, ако се у G_3 крећемо по гранама из чвора a_1, после три корака можемо се вратити натраг у a_1 крећући се редом по чворовима a_1, a_5, a_6, a_1. У графовима G_1 и G_2 се у три корака не може тако нешто урадити ни за један чвор. У одељку 5.1 ћемо видети да се оваква путања кретања назива контура дужине три. Дакле, графови G_1 и G_2 немају контуру дужине три, док је G_3 има, а да би били изоморфни и они би морали имати овакву контуру. △

Изоморфност графова јесте релација еквиваленције на скупу свих графова, што није тешко показати. Еквиваленција дели овај скуп на класе; у свакој класи су међусобно изоморфни графови. Бирањем представника ових класа и брисањем одговарајућих ознака добијамо *неозначене графове*.

Граф је *означени* ако је сваком његовом чвору додељена ознака.

неозначени и означени граф

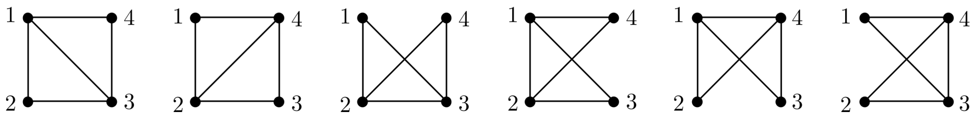
Теорема 4.11. *Број означених простих графова над скупом од n чворова јесте $2^{\binom{n}{2}}$.*

Доказ. Уколико имамо означени граф, онда на располагању имамо укупно $\binom{n}{2}$ грана одређених тим чворовима. Остаје да видимо колико је различитих могућности да од тих грана одаберемо које ће бити у скупу грана – то значи да различитих означених графова са n чворова има онолико колико и подскупова свих грана одређених овим чворовима. Њих има $2^{\binom{n}{2}}$. □

Теорема 4.12. *Број означених простих графова над скупом од n чворова са m грана јесте $\binom{\binom{n}{2}}{m}$.*

Доказ. Са n означених чворова одређено је укупно $\binom{n}{2}$ грана. Према томе, од толико треба одабрати њих m. Одатле добијамо тражени број. □

Пример 4.13. Означених графова са 4 чвора и 5 грана има $\binom{\binom{4}{2}}{5} = 6$.



Приметимо да постоји само један неозначени граф са 4 чвора и 5 грана. То важи јер су сви добијени графови међусобно изоморфни, тј. када обришемо ознаке добијамо исти неозначени граф. △

Треба напоменути да формула за одређивање броја неозначених графова не постоји. Без обзира на то да ли је задат само број чворова или и број грана, да бисмо одредили њихов број, морамо анализирати које могућности постоје а затим их пребројати.

4.2 Подграфови и операције на графовима

подграф

Нека је дат граф $G = (V, E)$. За граф $G_1 = (V_1, E_1)$ кажемо да је *подграф* графа G ако и само ако је испуњено $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$. Такође, тада се G назива *надграф* графа G_1.

надграф

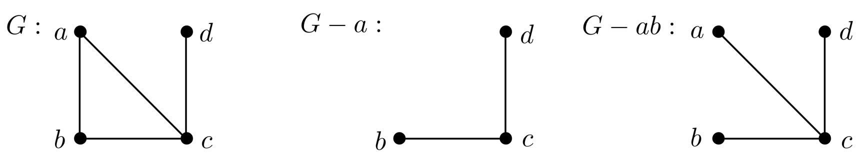
локалне опер. на графу

Подграфови заправо настају вишеструком применом *локалних операција* на графу. То су:

– *одстрањивање (брисање) чвора* $G - v$ – када бришемо чвор v и све гране инцидентне са њим;

– *одстрањивање (брисање) гране* $G - e$ – када бришемо само грану e.

Пример 4.14. На слици доле са леве стране се налази граф G, у средини је $G - a$, док је на десној страни $G - ab$.



△

Уколико из графа бришемо више чворова одједном, нека су то чворови скупа $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq V(G)$, онда уместо $G - a_1 - a_2 - \cdots - a_k$ користимо краћи запис $G - S$.

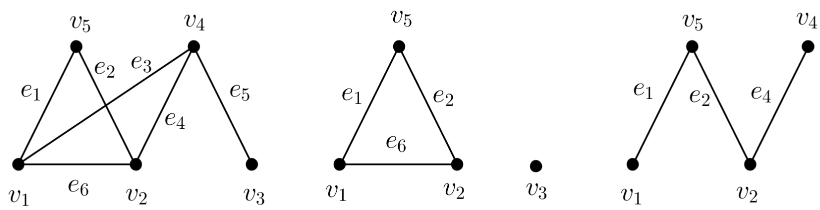
Покривајући подграф G_1 графа G је подграф са истим скупом чворова као и G. Можемо рећи и да је покривајући подграф добијен само помоћу брисања грана.

Пример 4.15. На слици су дати примери два подграфа истог графа. Испрекиданим линијама су означене гране које су обрисане, док су обрисани чворови представљени празним кружићем. Први је настао брисањем два чвора, те су са њима обрисане и гране инцидентне са њима (има их три) и брисањем још три гране осим тога. Други је добијен само брисањем грана.

Takође, можемо приметити да је други пример покривајући подграф, док први то није. △

индукован подграф

Нека је дат граф $G = (V, E)$ и скупови U и F такви да важи $\emptyset \neq U \subseteq V$ и $\emptyset \neq F \subseteq E$. *Подграф графа* G *индукован скупом чворова* U, у ознаци $G[U]$, јесте граф (U, E_1), где је $E_1 \subseteq E$ скуп свих грана чија су оба крајња чвора из скупа U. *Подграф графа* G *индукован скупом грана* F, у ознаци $G[F]$, јесте граф (V_1, F), где је $V_1 \subseteq V$ скуп свих чворова који су инцидентни са бар једном граном из скупа F.



G $\quad$ $G[\{v_1, v_2, v_3, v_5\}]$ $\quad$ $G[\{e_1, e_2, e_4\}]$

пресек

Наведимо још неке операције на графовима. *Пресек* графова G_1 и G_2, у ознаци $G_1 \cap G_2$, дефинисан је са:

$$\begin{aligned} V(G_1 \cap G_2) &= V(G_1) \cap V(G_2), \\ E(G_1 \cap G_2) &= E(G_1) \cap E(G_2). \end{aligned}$$

унија

Унија графова G_1 и G_2, у ознаци $G_1 \cup G_2$, дефинисана је са:

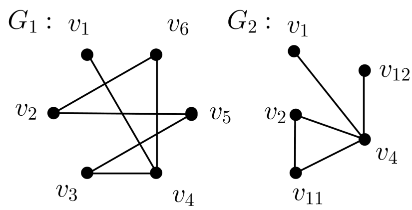
$$\begin{aligned} V(G_1 \cup G_2) &= V(G_1) \cup V(G_2), \\ E(G_1 \cup G_2) &= E(G_1) \cup E(G_2). \end{aligned}$$

Такође, у специјалном случају, ако графу G додајемо грану xy, где се чворови x и y већ налазе у $V(G)$, тада пишемо $G + xy$.

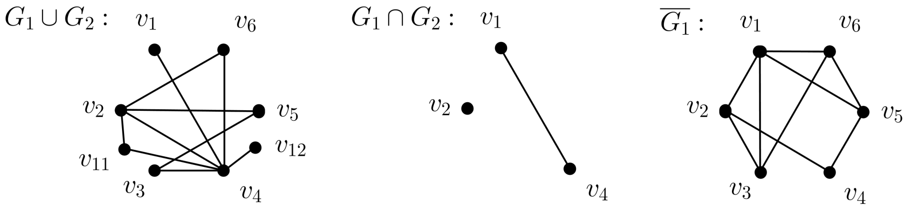
комплемент

Нека $G = (V, E)$. Граф $\overline{G}$ је *комплемент* графа G ако $\overline{G} = (V, \overline{E})$, за $\overline{E} = \{uv : u, v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$.

Пример 4.16. Нека су дати графови G_1 и G_2.



У наставку можемо видети $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ и $\overline{G_1}$.



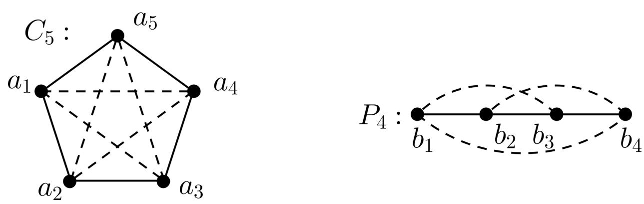
$\triangle$

Како знамо колико има грана у комплетном графу са n чворова, није тешко видети да важи наредно тврђење.

Теорема 4.17. *Ако је G граф са n чворова и m грана, онда је $\overline{G}$ граф са n чворова и $\binom{n}{2} - m$ грана.*

самокомплементаран *Самокомплементаран* граф је граф изоморфан свом комплементу.

Пример 4.18. На слици су примери два самокомплементарна графа. Са леве стране је граф C_5, који има 5 чворова и његове гране су представљене преко пуних линија, док је његов комплемент представљен испрекиданим гранама.



Они су изоморфни захваљујући изоморфизму $\phi : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}$. Са десне стране је самокомплементаран граф са 4 чвора P_4 (такође су његове гране пуне линије, док су гране комплемента испрекидане). Самокомплементаран је због изоморфизма $\theta : \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_4 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$. Наравно, тај изоморфизам не мора бити јединствен. Пример још једног изоморфизма између ова два графа је $\tau : \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_3 & b_1 & b_4 & b_2 \end{pmatrix}$. $\triangle$

У наредном тврђењу можемо видети колико чворова може имати самокомплементаран граф.

Теорема 4.19. *Ако је G самокомплементаран граф са n чворова, онда важи* $n \equiv 0 \pmod 4$ *или* $n \equiv 1 \pmod 4$.

Доказ. Нека је граф G са n чворова изоморфан свом комплементу $\overline{G}$. То значи да оба имају исти број грана, тј. важи $|E(G)| = |E(\overline{G})|$. Такође, како је унија ова два графа комплетан граф K_n и њихов пресек празан граф $\overline{K_n}$, важи

$$|E(G) \cup E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \binom{n}{2} \quad \text{и} \quad |E(G) \cap E(\overline{G})| = |E(\overline{K_n})| = 0.$$

Сада следи $|E(G) \cup E(\overline{G})| = 2 \cdot |E(G)|$, те важи

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Број грана у графу мора бити ненегативан цео број. То значи да имамо три могућности:

1. $4 \mid n$,
2. $4 \mid n - 1$,
3. $2 \mid n$ и $2 \mid n - 1$.

Међутим, како су n и $n - 1$ два узастопна броја, један од њих мора бити непаран, те трећа могућност отпада. Стога добијамо да мора да важи 1. или 2, тј. $n \equiv 0 \pmod 4$ или $n \equiv 1 \pmod 4$. □

Пример 4.20. Наћи један самокомплементаран граф (уколико постоји) са:

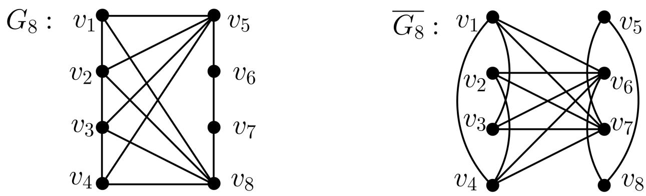
(а) 7 чворова;

(б) 8 чворова;

(в) 9 чворова.

(а) Како важи $7 \equiv 3 \pmod 4$, на основу теореме 4.19 следи да самокомплементаран граф са 7 чворова не постоји.

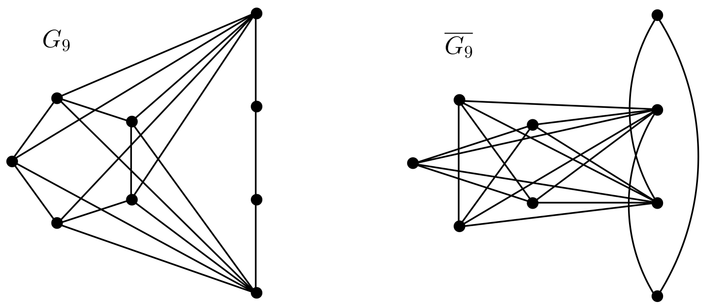
(б) Сада имамо $8 \equiv 0 \pmod 4$, те нам у овом случају теорема 4.19 не помаже, пошто даје само потребан услов, али не и довољан. Покушајмо онда конструисати такав граф. Означимо са G_8 граф који тражимо. Кренућемо од самокомплементарног графа који нам је већ познат из примера 4.18 и то је P_4. Овај граф има 4 чвора, па две копије оваквог графа имају укупно 8 чворова, колико се и тражи. Даље, да би G_8 био самокомплементаран, треба да има $\frac{8(8-1)}{4} = 14$ грана. Две копије P_4 имају укупно 6 грана, према томе треба на згодан начин додати 8 грана, да би се коначно добио самокомплементаран граф. То можемо урадити тако што почетни и крајњи чвор из друге копије P_4 спојимо са сваким чвором прве копије P_4.



Заиста, овај граф је самокомплементаран, један изоморфизам који о томе сведочи јесте

$$\varphi : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ v_3 & v_1 & v_4 & v_2 & v_6 & v_8 & v_5 & v_7 \end{pmatrix}.$$

(в) Слично као у делу под (б), за основу самокомплементарног графа G_9 са 9 чворова могли бисмо узети графове из примера 4.18, с обзиром на то да један има 5 а други 4 чвора. Такође можемо израчунати колико грана такав граф треба да има: $\frac{9(9-1)}{4} = 18$. Према томе треба додати 10 грана. Њих ћемо слично као у претходном делу додати тако да спајају крајње чворове у P_4 са сваким од 5 чворова у C_5. Тако добијамо граф који је самокомплементаран.



Приликом тражења изоморфизма, битно је да приметимо да чворови графа који потичу од C_5 треба да се пресликају у тај исти скуп, а да при томе остане очувана повазаност као и у оригиналу. Исто и са чворовима који потичу од P_4. Оно што је додатно погодно, а и потребно да би граф био самокомплементаран, јесте да се оних 10 додатних грана на овај начин таман „преселе“ тако да спајају све чворове из дела C_5 и сада нове крајње чворове у делу P_4. $\triangle$

Као што смо видели, тврђење 4.19 нам даје потребан услов да би граф са n чворова био самокомплементаран. За конкретне природне бројеве n који испуњавају овај услов морали смо конструкцијом проверити да ли постоји самокомплементаран граф са толико чворова. Штавише, конструкција из примера 4.20 се може уопштити, и то тако да покажемо да је услов тврђења 4.19 и довољан за постојање самокомплементарног графа са n чворова.

Теорема 4.21. *За сваки природан број n такав да $n \equiv 0 \pmod 4$ или $n \equiv 1 \pmod 4$ постоји самокомплементаран граф са n чворова.*

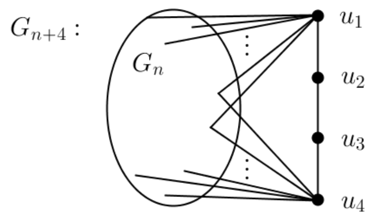
Доказ. Ово тврђење показујемо индукцијом по броју чворова графа n. Најпре покажимо да постоје самокомплементарни графови са 1, односно 4 чвора.

Уколико имамо један чвор, онда тај граф мора бити K_1. С друге стране, $\overline{K_1} = K_1$, те је тривијално да је самокомплементаран. Даље, на основу примера 4.18 знамо да постоји самокомплеметаран граф са 4 чвора.

Докажимо сада да, ако постоји самокомплементаран граф G_n са n чворова за неко n ($n \geqslant 1$) које је конгруентно са 0 или 1 по модулу 4, да се онда може конструисати самокомплементаран граф са $n + 4$ чвора.

Нека је G_n самокомплементаран граф са n чворова и нека је f изоморфизам између G_n и $\overline{G_n}$. Дефинишимо нов граф G_{n+4} тако да важи

$$\begin{aligned}
&V(G_{n+4}) = V(G_n) \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\\
&E(G_{n+4}) = E(G_n) \cup \{u_1 v : v \in V(G_n)\} \cup \{u_4 v : v \in V(G_n)\} \cup \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\}.
\end{aligned}$$



То јест, на G_n додајемо P_4 тако што крајње чворове из P_4 спајамо са свим чворовима из G_n.

Посматрајмо сада пресликавање

$$\phi : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ f(v_1) & f(v_2) & \dots & f(v_n) & u_3 & u_1 & u_4 & u_2 \end{pmatrix}$$

где $V(G_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Јасно, ово је бијекција, пошто је f бијекција на скупу $V(G_n)$, док ϕ пермутује преостале чворове. Проверимо и да ли је очувана суседност чворова. Изоморфизам f очувава суседност у G_n, те је и ϕ очувава међу чворовима $v_1, v_2, \dots, v_n$. Такође, није тешко видети да ϕ очувава суседност међу чворовима u_1, u_2, u_3, u_4. Остаје још да видимо шта се дешава са гранама чији је један чвор из скупа $V(G_n)$ а други из $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, тј. са $\{u_1 v : v \in V(G_n)\} \cup \{u_4 v : v \in V(G_n)\}$. Ове суседности ће помоћу ϕ постати $\{u_3 f(v) : v \in V(G_n)\} \cup \{u_2 f(v) : v \in V(G_n)\}$, што је заправо $\{u_3 x : x \in V(G_n)\} \cup \{u_2 x : x \in V(G_n)\}$, јер је f бијекција на скупу $V(G_n)$. То су управо суседности које нам требају с обзиром на то да кад се G_{n+4} преслика помоћу ϕ, онда u_2 и u_3 постају крајње тачке дела графа који потиче од P_4. Дакле, G_{n+4} јесте самокомплементаран. □

ГЛАВА 5

ПОВЕЗАНОСТ У ГРАФОВИМА

Већ смо помињали да се графови често користе да прикажу структуре из реалности као што су саобраћајне мапе, дизајн процесора или социјалну повезаност неког скупа људи. Један од аспеката који нас занима приликом проучавања таквих структура јесте да ли се у мапи путева може стићи од једног места до другог, колико станица постоји између њих, да ли се то може скратити, итд. Основни појмови који нам при томе помажу приликом приче о графовима јесу путеви.

5.1 Путеви и контуре

Шетња у графу G је коначан низ шетња

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k,$$

где су $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$, $e_1, \dots, e_k \in E$ и грана e_i је инцидентна са чворовима v_{i-1} и v_i, за $i = 1, \dots, k$. Кажемо још и $v_0 - v_k$ шетња.

У простом графу шетња је одређена чворовима. Због тога приликом навођења шетње обично изостављамо гране, јер је јасно која грана мора да се налази између два наведена чвора. Чвор v_0 је *почетак* шетње, а v_k је *крај* шетње. Чворови $v_1, \dots, v_{k-1}$ су *унутрашњи* чворови шетње. За k кажемо да је *дужина* шетње.

Напомена 5.1. У шетњи је дозвољено вишеструко појављивање чворова и грана. $\diamondsuit$

У односу на специфичне особине дефинишу се и специјалне шетње:

– *тривијална шетња* је шетња без грана,

– *затворена шетња* је шетња у којој се почетак и крај поклапају,

– *стаза* је шетња у којој се свака грана јавља највише једном, стаза

– *затворена стаза* је затворена шетња која је стаза,

пут

– *пут* је стаза у којој се сваки чвор јавља највише једном (пут са n чворова обично означавамо са P_n),

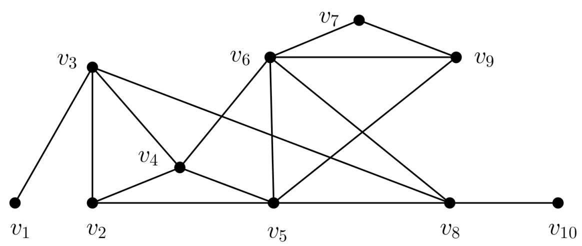
контура

– *контура* је затворен пут (контуру са n чворова обично означавамо са C_n).

дужина пута и контуре

За пут P_n кажемо да је *дужине* $n-1$, јер има $n-1$ грана. Слично, контура C_n је дужине n.

Пример 5.2. Нека је дат граф на слици доле.



Пример шетње у овом графу је $v_2v_5v_6v_4v_5v_8v_6v_5$. Ова шетња није стаза је се грана v_5v_6 јавља два пута. Шетња $v_5v_8v_6v_9v_5v_4v_2v_5$ је затворена. Пример стазе која није пут је $v_1v_3v_2v_4v_3v_8v_6v_5v_8v_{10}$ (v_3 се јавља више пута). Пример затворене стазе је $v_3v_2v_4v_6v_9v_5v_4v_3$ и она није контура јер се чвор v_4 у њој јавља више од једном. Један пут овог графа је $v_1v_3v_4v_5v_9v_7v_6$ и он је дужине 6. Пример контуре дужине 6 је $v_2v_3v_8v_6v_4v_5v_2$. △

Напомена 5.3. Можемо приметити да је P_n увек $(1,2)$-регуларан граф са тачно два висећа чвора, док је C_n увек 2-регуларан граф. ♢

Напомена 5.4. Корисно је знати да постојање контуре и пута дате дужине јесу инваријанте изоморфизма графова. Дакле, ако су два графа изоморфна и један има контуру дужине k, онда такву контуру мора имати и други. Ако то није испуњено, онда посматрани графови не могу бити изоморфни. Исто важи и за путеве. ♢

У наредном тврђењу дајемо потребан и довољан услов за постојање пута између два чвора у графу.

Теорема 5.5 (Егзистенција пута)**.** *У неком графу постоји $u-v$ шетња ако и само ако постоји $u-v$ пут.*

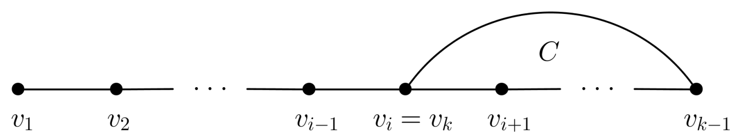
Доказ. Нека важи да у графу G постоји $u-v$ шетња и нека је то $uv_1v_2\dots v_kv$. Докажимо да тада постоји и $u-v$ пут. Ако се неки чвор x јавља више пута у посматраној шетњи, онда све што се налази између првог и последњег појављивања чвора избацимо. Ако на овај начин добијемо шетњу без понављања чворова – завршили смо, ова шетња је пут. Ако и даље постоји чвор који се понавља, онда поновимо поступак и тако наставимо док не дођемо до тога да нема понављања чворова. Овакав поступак се мора завршити у коначно много корака, јер радимо са коначним графовима, те и шетња мора бити коначна.

Сада, ако у G постоји $u-v$ пут, онда постоји и $u-v$ шетња, јер је пут по самој дефиницији специјална врста шетње. □

Често је корисно знати да ли неки граф садржи контуру. Један од довољних услова за њено постојање је дат у наставку.

Теорема 5.6 (Егзистенција контуре)**.** *Ако у графу G важи $\delta(G) \geqslant 2$, онда G садржи контуру.*

Доказ. Кренимо од произвољног чвора графа G, означимо га са v_1. Будући да $d(v_1) \geqslant 2$, постоји грана инцидентна с њим, што значи да постоји неко $v_2 \in V(G)$ тако да $v_1v_2 \in E(G)$. Сада, пошто $d(v_2) \geqslant 2$, постоји неко $v_3 \in V(G)$, $v_3 \neq v_1$, тако да $v_2v_3 \in E(G)$. На тај начин добијамо пут $v_1v_2v_3$. Даље, како $d(v_3) \geqslant 2$, постоји неко $v_4 \in V(G)$ тако да $v_3v_4 \in E(G)$. Ако се v_4 поклапа са v_1 (са v_2 и v_3 се не може поклапати због дефиниције простог графа), добијамо тражену контуру. Ако се не поклапа, онда добијамо пут $v_1v_2v_3v_4$. И за v_4 важи $d(v_4) \geqslant 2$, те постоји бар још једна грана инцидентна са овим чвором, нека је то v_4v_5. Поново, ако се v_5 поклапа са v_1 или v_2 добијамо контуру $v_1v_2v_3v_4v_1$, односно $v_2v_3v_4v_2$. Ако се v_5 не поклапа ни са једним од чворова које имамо у путу, настављамо поступак. У једном моменту се мора десити да је крајњи чвор нове гране коју додајемо неки од чворова који смо већ раније додали. У супротном би значило да имамо бесконачно много чворова у графу, што је у контрадикцији са дефиницијом простог графа. Дакле, постоји неко k



тако да смо описаним поступком дошли до стазе $v_1v_2\dots v_i\dots v_k$ и за које важи да $v_kv_i \in E(G)$. Тада ће тражена контура бити $C = v_iv_{i+1}\dots v_{k-1}v_i$. □

5.2 Повезаност и компоненте повезаности

Чвор u је *повезан* са чвором v у графу G, ако у графу G постоји $u-v$ шетња. Одавде одмах следи да тада постоји и $u-v$ пут у графу G. Кажемо и да су u и v *повезани* у G. Граф G је *повезан* ако су свака два чвора графа G повезана. У супротном граф G је *неповезан*. повезан граф

Теорема 5.7. *Релација повезаности чворова је релација еквиваленције на скупу чворова графа G.*

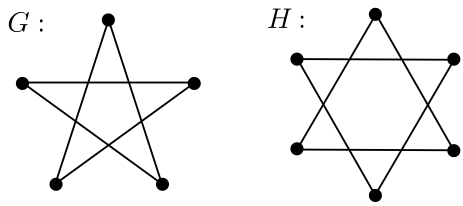
Доказ. Јасно, сваки чвор $v \in V(G)$ је повезан сам са собом, јер је v тривијална шетња. Нека важи да су u и v повезани чворови у G. Према томе, постоји $u-v$ шетња $ux_1x_2\dots x_kv$ у графу G. Тада је $vx_k\dots x_1u$ $v-u$ шетња те су и v и u повезани. Тако смо показали рефлексивност и симетричност релације повезаности, остаје још да покажемо да важи и транзитивност ове релације. Нека су u и v повезани и v и t повезани. Стога знамо да у графу G постоје шетње $ux_1x_2\dots x_kv$ и $vy_1y_2\dots y_lt$. Одавде добијамо $u-t$ шетњу: $ux_1x_2\dots x_kvy_1y_2\dots y_lt$. Дакле, u и t су повезани и тиме је доказ завршен. □

растојање

Растојање између чворова u и v у графу G (озн. $d_G(u,v)$) је дужина најкраћег $u-v$ пута. Није тешко видети да важи $d_G(u,u)=0$ и $d_G(u,v)=d_G(v,u)$, за све чворове u и v у графу G. Такође, ако u и v нису повезани, тада пишемо $d_G(u,v)=\infty$.

Пример 5.8. Ако посматрамо граф из примера 5.2, пример пута који спаја v_1 и v_6 је $v_1v_3v_4v_5v_9v_7v_6$. Међутим растојање између ова два чвора није 6, јер постоји краћи v_1-v_6 пут: $v_1v_3v_4v_6$. Овај пут је и најкраћи v_1-v_6 пут, дакле важи $d_G(v_1,v_6)=3$. △

Посматрајмо сада графове G и H на слици доле.

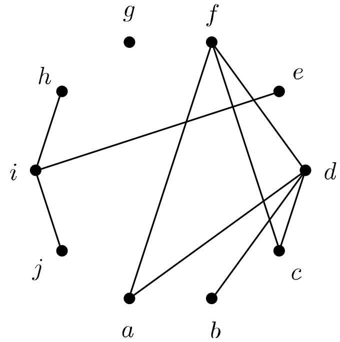


Иако на први поглед делује да су у графу H сви чворови повезани, као што то јесу чворови у графу G, када се боље загледамо, можемо видети да граф H чине две контуре дужине три које су дисјунктне. Дакле, овај граф није повезан и има две засебне целине. Те целине називамо компоненте повезаности и оне се дефинишу на следећи начин.

Подграф индукован скупом чворова једне класе еквиваленције релације повезаности чворова назива се *компонента повезаности* графа G. Број компонената повезаности означавамо са $\omega(G)$.

компонента повезаности

Пример 5.9. Нека је дат граф $G=(V,E)$, где $V=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ и $E=\{ad,af,bd,cd,cf,df,ei,hi,ij\}$.



Граф G има три компоненте повезаности, тј. $\omega(G) = 3$. То су $G[\{a, b, c, d, f\}]$, $G[\{e, h, i, j\}]$ и $G[\{g\}]$. △

Није тешко доказати да важи наредно тврђење.

Теорема 5.10. *Нека је G граф са n чворова. Тада важи*

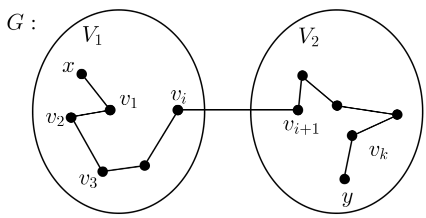
$$1 \leqslant \omega(G) \leqslant n.$$

Доказ. Ако су сви чворови графа повезани, јасно, важи $\omega(G) = 1$ и то је најмање компонената колико неки граф може имати. С друге стране, граф има највише компонената повезаности када нема ниједну грану, то јест када су сви чворови изоловани и тада важи $\omega(G) = n$. □

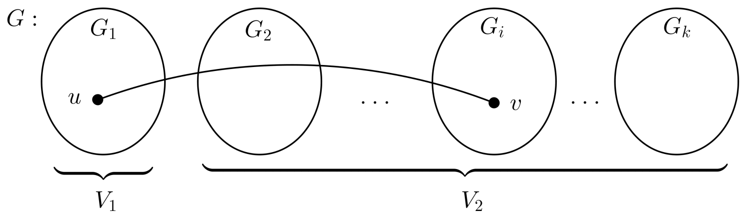
Један од потребних и довољних услова за повезаност датог графа дат је у наредном тврђењу.

Теорема 5.11. *Граф $G = (V, E)$ је повезан ако и само ако за сваку партицију (V_1, V_2) скупа V постоји грана која спаја неки чвор из V_1 са неким чвором из V_2.*

Доказ. Претпоставимо прво да је G повезан граф и докажимо да тада важи услов из тврђења. Претпоставимо супротно, нека постоји партиција (V_1, V_2) скупа V (дакле, испуњено је $V_1 \cup V_2 = V$ и $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) таква да не постоји грана која спаја неки чвор из V_1 и чвор из V_2. Посматрајмо сада произвољне чворове $x \in V_1$ и $y \in V_2$. С обзиром на то да је граф G повезан, постоји пут P који повезује x и y. Уколико је P баш грана xy, онда је то грана која нам треба. Размотримо сада случај када $P = xv_1v_2 \dots v_ky$, $k \geqslant 1$. Крећући се овим путем по графу G почевши од x који се налази у делу партиције V_1 у неком тренутку се морамо наћи у делу V_2, јер се ту налази чвор y. Нека је v_i „последњи“ чвор из V_1 на путу P. Тада је v_{i+1} „први“ у скупу V_2. Према томе, грана v_iv_{i+1} спаја V_1 и V_2, те долазимо до контрадикције.



Покажимо и други смер овог тврђења. Нека важи услов да за сваку партицију (V_1, V_2) скупа V постоји грана која спаја неки чвор из V_1 са неким чвором из V_2. Ако претпоставимо супротно, да је G неповезан, онда важи $\omega(G) = k \geqslant 2$. Означимо компоненте повезаности са $G_1, G_2, \dots, G_k$. Њихови скупови чворова су дисјунктни и њихова унија је једнака V, те можемо бирати $V_1 = V(G_1)$ и $V_2 = V(G_2) \cup \dots \cup V(G_k)$ и тада је (V_1, V_2) једна партиција скупа V. На основу претпоставке, постоји грана $uv \in E$ таква да $u \in V_1$ и $v \in V_2$. Чвор v стога мора бити у $V(G_i)$, где $2 \leqslant i \leqslant k$.



То значи да $G_1 \cup G_i$ чини једну компоненту, те важи $\omega(G) = k-1$, па долазимо до контрадикције. Тиме је доказ завршен. $\square$

Теорема 5.12. *У сваком повезаном графу G са n чворова и m грана важи $m \geqslant n-1$.*

Доказ. Дато тврђење је еквивалентно са:
Ако граф G са n чворова (где $n \geqslant 2$) има строго мање од $n-1$ грана, онда је неповезан, док је за $n = 1$ граф G увек повезан.

За $n = 1$ граф G је K_1, те је јасно да је повезан. За $n \geqslant 2$ тврђење показујемо индукцијом по n. Проверимо најпре шта се дешава када $n = 2$. Тада у G важи $m < 2 - 1 = 1$ грана, те има $m = 0$ грана. Дакле, G мора бити $\overline{K_2}$. Према томе, неповезан је.

Претпоставимо сада да за фиксирано n и сваки граф са n чворова и мање од $n-1$ грана (тј. $m < n-1$) није повезан. Посматрајмо сада граф $G = (V, E)$ за који важи $|V| = n+1$ и $|E| < n$. Покажимо да тада и он мора бити неповезан.

Приметимо прво да мора постојати $x \in V$ тако да $d(x) \leqslant 1$. Заиста, ако би важило да не постоји такав чвор, тј. да је степен сваког чвора у G бар 2, тада бисмо на основу теореме 4.5 имали

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2(n+1) = n+1,$$

а то је у супротности са $|E| < n$.

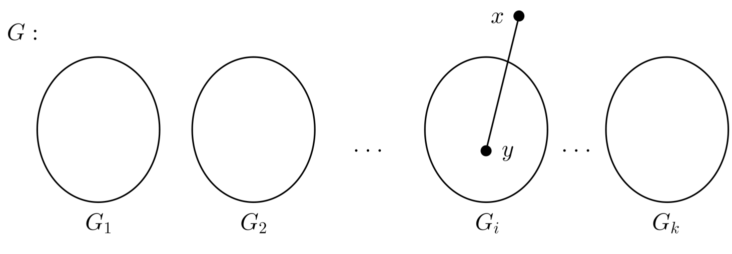
Према томе, имамо два случаја:

1. $\underline{d(x) = 0}$. Тада је x изолован чвор, а како G има бар 2 чвора, следи да је G неповезан граф.

2. $\underline{d(x) = 1}$. Нека $N(x) = \{y\}$ и дефинишимо $G' = G - x$. За G' важи

$$|V(G')| = n \quad \text{и} \quad |E(G')| = |E| - 1 < n - 1.$$

Дакле, за G' је испуњена индукцијска хипотеза, те следи да је неповезан. Нека су $G_1, G_2, \ldots, G_k$ компоненте графа G', $k \geqslant 2$.



Стога, за неко $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ важи $y \in G_i$. Коначно, можемо закључити $V = V(G') \cup \{x\}$ и $E = E(G') \cup \{xy\}$. То значи $\omega(G) = \omega(G') = k$, те како имамо $k \geqslant 2$, следи да је G и у овом случају неповезан. □

Наредно тврђење нам даје класификацију бипартитних графова. Ово тврђење је битно и корисно, но доказ превазилази захтеве овог курса, те га наводимо без доказа (доказ се може наћи у [9]).

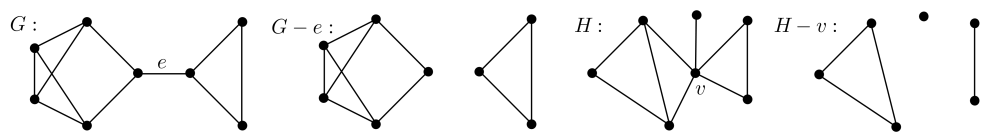
Теорема 5.13 (Класификација бипартитних графова)**.** *Нетривијалан граф је бипартитан ако и само ако не садржи контуру непарне дужине.*

5.3 Артикулациони чворови и мостови

Када причамо о повезаности графа, посебну улогу играју чворови које називамо артикулациони и гране које називамо мостови. Ови елементи графа су специфични по томе што играју улогу „најслабијих карика“ с обзиром на то да се њиховим уклањањем из графа граф распада на више компонената повезаности.

Мост је грана e графа G чијим се брисањем повећава број компонената у графу, тј. $\omega(G - e) > \omega(G)$. мост

Артикулациони чвор је чвор v графа G чијим се брисањем повећава број компонената у графу, тј. $\omega(G - v) > \omega(G)$. артикулациони чвор



У графу G грана e је мост, док је v артикулациони чвор графа H.

Напомена 5.14. Мостови и артикулациони чворови су инваријанте изоморфизма графова. ♢

У наставку дајемо карактеризације и особине ових елемената графа.

Теорема 5.15. *Грана e графа G је мост ако и само ако у G постоје чворови u и v такви да сваки $u - v$ пут у графу G садржи грану e.*

Доказ. Нека је e мост графа G. Према томе, постоји компонента графа G која се брисањем гране e распада на бар две компоненте: из једне узмимо један чвор и обележимо га са u а из друге чвор који обележимо са v. Дакле, сваки пут који повезује ова два чвора мора садржати грану e, пошто без ње не постоји $u - v$ пут.

Нека сада сваки пут од u до v пролази кроз грану e. То значи да су u и v у истој компоненти. Ако обришемо e, више неће постојати $u - v$ пут, те ова два чвора више нису повезана. Тиме је повећан број компонената графа. Дакле, грана e је мост. □

Теорема 5.16. *Грана e графа G је мост ако и само ако не припада ниједној контури графа G.*

Доказ. Нека је грана $e = uv$ мост графа G. Претпоставимо супротно, нека e припада контури $C = ueve_1x_1e_2x_2 \dots x_{k-1}e_ku$. Пошто је e мост, њеним брисањем добијамо да ће се u и v налазити у различитим компонентама графа. Међутим, u и v су и даље повезани путем добијеним од C након брисања гране e, то јест $ve_1x_1e_2x_2 \dots x_{k-1}e_ku$. Те долазимо до контрадикције.

Нека је сада грана $e = uv$ таква да не лежи ни на једној контури и претпоставимо да није мост. То значи да њеним брисањем број компонената остаје исти, те након овог брисања u и v су и даље повезани, то јест постоји $u - v$ пут. Враћањем гране e у граф ова грана заједно са постојећим $u - v$ путем чини контуру, те поново долазимо до контрадикције. □

контурна грана

Грана која није мост назива се *контурна* грана.

Теорема 5.17. *Ако је e мост графа G, онда важи $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$.*

Доказ. Докажимо најпре тврђење за повезане графове. Нека је G повезан граф, тј. $\omega(G) = 1$, и нека је $e = xy$ мост графа G. Према томе, циљ је да покажемо да важи $\omega(G - e) = 2$.

Како је e мост, након уклањања гране e из графа G чворови x и y ће се налазити у различитим компонентама повезаности графа G; нека су то редом G_1 и G_2. Ако би се десило да се приликом уклањања гране e добије још нека нова компонента повезаности, на пример G_3, тада враћањем гране e, како је она инцидента само са чворовима x и y, повезаће се само компоненте G_1 и G_2. С друге стране како смо вратили једину грану која је била обрисана, добили смо цео граф G. Међутим, сада имамо бар две компоненте повезаности, ону коју чине G_1 и G_2 повезане са e као и G_3, што је контрадикција са претпоставком да је G повезан граф. Дакле, повезан граф се након укљањања моста распада на тачно две компоненте.

Нека је сад G неповезан и нека се мост e налази у компоненти повезаности G'. Уклањање гране e једино утиче на повезаност компоненте G', која ће се од једне компоненте на основу претходно показаног распасти на две, док се остале компоненте повезаности неће мењати. Према томе, важи $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$. □

Теорема 5.18. *Чвор u повезаног графа G је артикулациони чвор ако и само ако у G постоје чворови v и w ($u \notin \{v, w\}$) такви да сваки $v - w$ пут у G садржи чвор u.*

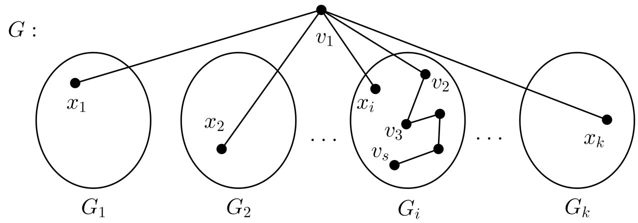
Доказ. Компонента повезаности графа G у којој се налази чвор u се после брисања овог чвора распада на бар две компоненте, те за v и w бирамо чворове из различитих компонената. То значи да сваки $v - w$ пут у G мора пролазити кроз u.

Обрнуто, ако сваки $v - w$ пут у G садржи чвор u, брисањем чвора u добијамо да v и w нису повезани, то јест налазе се у различитим компонентама повезаности. Пре брисања су били у истој компоненти повезаности, што значи да се број $\omega(G)$ повећао, те је u артикулациони чвор. □

Теорема 5.19. *У графу G са n чворова, ($n \geqslant 2$) има највише $n - 2$ артикулационих чворова.*

Доказ. Нека је прво G повезан. Посматрајмо пут максималне дужине у G, нека је то $P_s = v_1 v_2 \dots v_s$, за неко $s \geqslant 2$ (чија је дужина $s-1$). Показаћемо да тада v_1 и v_s не могу бити артикулациони чворови.

Претпоставимо супротно, нека су v_1 и v_s артикулациони чворови. Стога $G - v_1$ је неповезан граф и нека су његове компоненте $G_1, G_2, \dots, G_k$. Како је v_1 артикулациони чвор, то значи да за свако G_i постоји $x_i \in V(G_i)$ тако да $v_1 x_i \in E(G)$. Такође, пут $P' = v_2 \dots v_s$ (или, ако $s = 2$, онда само чвор v_2) се мора налазити у некој од компонената, нека је то G_i.



Сада ако посматрамо $P_{s+1} = x_j v_1 v_2 \dots v_s$, где $xj \neq v_2$, имамо да је P_{s+1} пут у G дужине s. То значи да смо нашли пут у G дужи од максималне дужине пута у G, те долазимо до контрадикције. Аналогно се показује да v_s не може бити артиклациони чвор. Дакле, како имамо два чвора који не могу бити артикулациони, следи да G има највише $n-2$ артикулационих чворова.

Нека је сада G неповезан граф. Уколико има бар једну компоненту повезаности која има бар два чвора, на основу горе показаног, у тој компоненти постоје бар два чвора који не могу бити артикулациони, те тврђење следи. Ако су све компоненте повезаности сачињене од једног чвора, онда су сви чворови изоловани. Како изоловани чвор није артикулациони, и у овом случају важи твђење. □

ГЛАВА 6

СТАБЛА

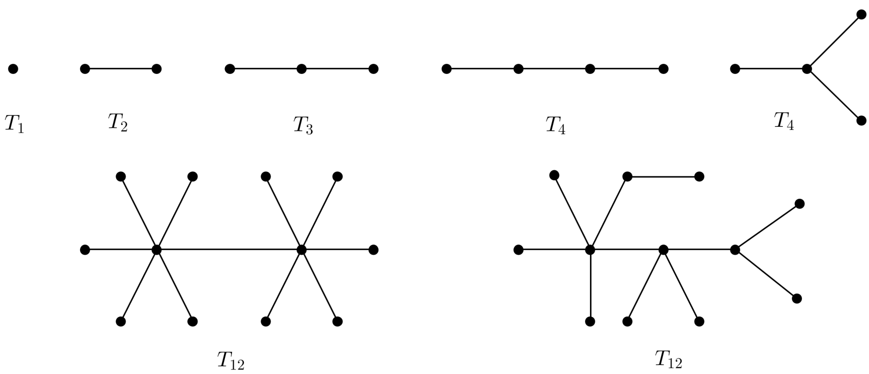
Један од најважнијих појмова у теорији графова јесте стабло. Стабла су најједноставнији повезани графови, имају занимљиве и корисне особине, стога и доста примена. Пример примене јесте њихова улога у претрази графова што ћемо видети на крају ове главе.

6.1 Основне особине стабала

Ацикличан граф (или *шума*) је (прост) граф без контура. *Стабло* T је повезан ацикличан граф. Стабло са n чворова често означавамо са T_n. Можемо приметити да су стабла компоненте повезаности шуме.

шума

стабло



Графови T_1, T_2 и T_3 су јединствено одређени, али већ стабло са четири чвора, T_4, може представљати два различита графа. Са повећањем броја чворова n повећава се и број стабала T_n.

У литератури се може наићи на другачије дефиниције стабла. Оно што је занимљивост код стабала јесте да се могу дефинисати на више различитих и при томе еквивалентних начина. Сваки од тих начина нам даје неки другачији аспекат оваквих графова. Наредна теорема нам даје карактеризацију стабала, то јест шест еквивалентних дефиниција стабла.

Теорема 6.1 (Карактеризација стабала)**.** *Нека је T граф са n чворова. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *T је стабло.*
2. *T је ацикличан и има $n-1$ грана.*
3. *T је повезан и има $n-1$ грана.*
4. *Свака два чвора у T су повезана тачно једним путем.*
5. *T је повезан и свака његова грана је мост.*
6. *T нема контура, али додавањем било које нове гране добија се граф са тачно једном контуром.*

Доказ. Доказ ћемо дати тако што ћемо показати наредних шест импликација: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$. Такође, за $n \in \{1, 2\}$ лако се проверава да су за T_1 и T_2 сви ови услови испуњени, те у наставку доказа имамо $n \geqslant 3$.

($1 \Rightarrow 2$) Нека је T стабло. Како је стабло ацикличан и повезан граф, треба да покажемо да има $n-1$ грана. Приметимо најпре да стабло (са бар 3 чвора) има бар један висећи чвор. Заиста, ако стабло нема чворова степена 1, онда сви чворови морају бити степена бар 2, те на основу тврђења 5.6 следи да T садржи контуру, што је немогуће јер је T ацикличан граф.

Одстрањивањем висећег чвора број чворова се смањује за један и број грана се смањује исто за један. Тиме од T добијамо стабло T_{n-1}. И ово стабло мора имати бар један висећи чвор, па његовим одстрањивањем добијамо стабло T_{n-2}. Овај поступак настављамо док не дођемо до T_2. Ово стабло има једну грану и два чвора. Дакле, после $n-2$ корака скидања висећих чворова долазимо до једне гране, што имплицира да је на почетку било $n-1$ грана.

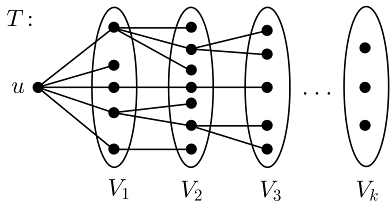
($2 \Rightarrow 3$) Нека је T ацикличан граф са $n-1$ грана. Докажимо да је тада T повезан граф. Означимо $\omega(T) = k$ и нека су $G_1, G_2, \ldots, G_k$ компоненте повезаности графа T. Сада важи

$$|E(T)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| = \sum_{i=1}^{k} (|V(G_i)| - 1) = n - k,$$

где друга једнакост важи на основу већ показаног ($1 \Rightarrow 2$) да у ацикличном повезаном графу са t чворова има $t-1$ грана. Према томе, како T има $n-1$ грана, следи $k = 1$, те је T повезан граф.

($3 \Rightarrow 4$) Нека је сада T повезан граф са $n-1$ грана. Уочимо произвољан чвор u графа T. Због повезаности графа T, за сваки чвор $v \in V(T) \setminus \{u\}$ важи $d(u, v) = i$, за неки природан број i. Поделимо стога преостале чворове на класе тако да се у класи V_i налазе сви чворови графа T на растојању од u које износи тачно i. Посматрајмо сад подграф графа T који добијамо на следећи начин: кренувши од чвора u додајемо најпре чворове који су на растојању

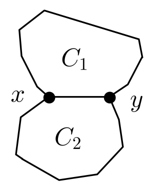
1 од u и уз сваки чвор додајемо и једну грану из $E(T)$ која сведочи о тој удаљености. Затим додајемо чворове који су на удаљености 2 од u, дакле то морају бити суседни чворови чворова из класе V_1. Поново са сваким чвором додајемо само једну грану из $E(T)$ тако да је додат чвор суседан са неким чвором из претходне класе. Овај поступак додавања класа наставимо док не потрошимо све чворове. Ситуација коју добијемо ће излгедати приближно као што је приказано на слици доле.



Како смо са сваким додавањем чвора додавали тачно једну грану, то значи да смо овим поступком потрошили тачно свих $n-1$ грана графа T. Такође, на овај начин до сваког чвора у T од чвора u можемо доћи на јединствен начин, јер до сваког чвора од претходне класе води само једна грана.

$(4 \Rightarrow 5)$ Нека су свака два чвора у T повезана тачно једним путем. То значи да је T повезан. Покажимо још да је свака грана графа T мост. Претпоставимо супротно, нека је грана $e = xy$ контурна грана. Дакле, e се налази на некој контури $xyv_1v_2 \ldots v_kx$. Међутим, то значи да од x до y постоји бар још један пут: $xv_k \ldots v_1y$, контрадикција.

$(5 \Rightarrow 6)$ Нека је T повезан и нека је свака његова грана мост. Дакле, T нема контура, јер би у супротном значило да постоји контурна грана. Размотримо шта се дешава ако додамо произвољну грану xy где x и y нису били суседни чворови у T. Како је T повезан, то значи да су и x и y повезани путем, те додавањем гране xy добијамо бар једну контуру. Уколико бисмо добили две контуре, нпр. C_1 и C_2, онда би то значило да смо већ пре додавања гране xy имали контуру $C_1 \cup C_2 - xy$, али је то немогуће, јер T нема контурних грана.



$(6 \Rightarrow 1)$ Нека сада важи услов 6. Како T нема контурних грана, T је ацикличан. Нека су сада $u, v \in V(T)$ произвољни. Треба да покажемо да су они повезани. Уколико важи $uv \in E(T)$, јасно је. Уколико важи $uv \notin E(T)$, због услова 6. додавањем ове гране добија се контура у графу T, што значи да постоји $u{-}v$ пут у графу T, те су и у овом случају ова два чвора повезана. Дакле, T је повезан граф. $\square$

У доказу претходног тврђења закључили смо да свако стабло са бар два чвора има најмање један висећи чвор. Важи и јаче тврђење које наводимо у наставку.

Теорема 6.2. *Свако нетривијално стабло има бар два висећа чвора.*

Доказ. Нека је T стабло са n чворова, $n \geqslant 2$. Пошто већ знамо да у стаблу постоји бар један висећи чвор v, претпоставимо да је он јединствен. Према томе, за све остале чворове u графа T важи $d(u) \geqslant 2$. Нека $T' = T - v$. У овом графу важи $|V(T')| = n - 1$ и $|E(T')| = n - 2$. Сада имамо

$$2(n-2) = 2|E(T')| = \sum_{u \in V(T')} d(u) \geqslant (n-2) \cdot 2 + 1,$$

што нас доводи до контрадикције. Дакле, како стабло T не може имати само један висећи чвор, мора их имати бар два. □

Према томе, уколико у стаблу имамо бар 2 чвора знамо колики је минималан број висећих чворова. Такође можемо одредити и максималан број висећих чворова у стаблу.

Теорема 6.3. *За $n > 2$, максималан број висећих чворова у стаблу T_n је $n - 1$.*

Доказ. Пример стабла са n чворова и тачно $n-1$ висећих чворова јесте звезда $K_{1,n-1}$. Покажимо да не постоји стабло T_n са више, тј. n, висећих чворова. Ако претпоставимо супротно, добијамо

$$\sum_{v \in V(T_n)} d(v) = n \cdot 1 = 2|E(T)| = 2(n-1) = 2n - 2,$$

што имплицира $n = 2$, контрадикција. □

Наредно тврђење је последица класификације бипартитних графова.

Теорема 6.4. *Свако стабло са бар два чвора је бипартитан граф.*

Доказ. Како стабло нема контура, нема ни контура непарне дужине, те на основу тврђења 5.13 следи да је стабло бипартитан граф. □

Слично, свака шума је бипартитан граф а такође се може одредити и тачан број грана у шуми.

Теорема 6.5. *Свака шума са n чворова ($n \geqslant 2$) је бипартитан граф. Ако има k компонената, онда је број грана у тој шуми једнак $n - k$.*

Доказ. Нека су компоненте повезаности шуме G: $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Свака компонента је стабло, те добијамо

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| = \sum_{i=1}^{k} (|V(G_i)| - 1) = n - k.$$

□

Приликом изучавања графова посебно долази до изражаја врста подграфова који су стабла.

покривајуће стабло

Покривајуће стабло (разапињујуће стабло) је покривајући подграф који је стабло.

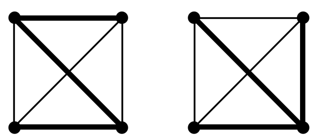
Теорема 6.6. *Граф садржи покривајуће стабло ако и само ако је повезан.*

Доказ. Ако граф садржи покривајући подграф који је стабло, то значи да су свака два чвора повезана, те је и сам граф повезан.

Обрнуто, ако је граф G са n чворова повезан, на основу тврђења 5.12 знамо да има бар $n-1$ грана. Помоћу индукције по броју грана у графу доказаћемо да посматрани граф има покривајуће стабло. Нека важи $|E(G)| = n-1$. Како је G повезан, следи да је G сам по себи стабло, те тривијално садржи покривајуће стабло. Покажимо сада да, ако сваки повезан граф са n чворова и m грана, где $m \geqslant n-1$, садржи покривајуће стабло, онда и граф са $m+1$ грана мора садржати покривајуће стабло. Дакле, нека је G повезан граф са n чворова и $m+1$ грана. Пошто важи $m+1 \geqslant n$, следи да G има контурну грану e. Како e није мост, $G-e$ је повезан граф за који важи да има n чворова и m грана. Те на основу индукцијске хипотезе $G-e$ има покривајуће стабло. Ово је покривајуће стабло и графа G. □

Претходно тврђење нам, између осталог, говори да сваки повезан граф можемо поједноставити тако што избацимо вишак грана а да сви чворови остану повезани у најједноставнијем повезаном графу – стаблу. Ово се користи када нам је битно да радимо са што мањим графом (у смислу броја грана) а да повезаност чворова из почетног графа не буде нарушена.

Напомена 6.7. Граф може имати неколико различитих покривајућих стабала.

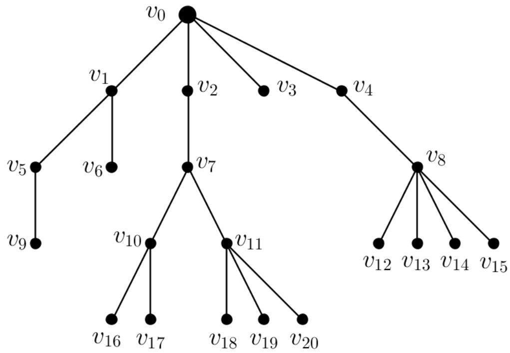


На слици су дата два различита покривајућа стабла комплетног графа K_4 и она су представљена подебљаним гранама. ♢

коренско стабло

Поменимо још једну посебну врсту стабала. *Коренско* стабло је стабло у којем је један чвор посебно означен и назива се *корен* и тиме се успоставља одређена хијерархија чворова. Да би се то нагласило, обично се коренска стабла приказују по нивоима тако што се крене од горе где се смести корен, затим су испод њега сви чворови њему суседни, те испод њих њихови преостали суседи и тако даље. Чвор који се налази директно „изнад“ посматраног чвора је његов *родитељ*, док су суседни чворови непосредно „испод“ посматраног чвора његова *деца*. Такође, све чворове који се налазе на путу од чвора до корена називамо *преци* а све који се налазе испод називамо *потомци*. Као што видимо из терминологије, пример оваквих стабала су породична стабла, али она имају широку примену. У наредним одељцима ћемо видети једну од њих.

Пример 6.8. На наредној слици је приказано коренско стабло T са кореном v_0.



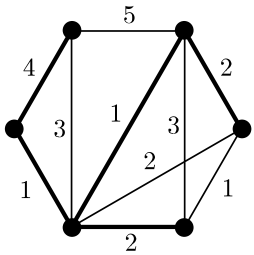
Деца чвора v_7 су v_{10} и v_{11}, док су његови потомци v_{10}, v_{11}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19} и v_{20}. Његов родитељ је чвор v_2. Преци чвора v_9 су v_0, v_1 и v_5. △

6.2 Тежински графови и Примов алгоритам

тежински граф

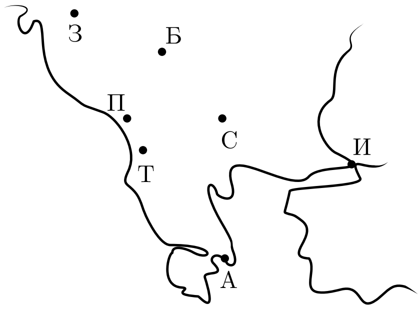
Граф G је *тежински* ако је свакој његовој грани додељена тежина, тј. ако $G = (V, E, w)$, где $w : E \to \mathbb{R}^+$. *Тежина* гране e је $w(e)$, док је *тежина графа* G заправо $w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$.

Пример 6.9. Нека је дат тежински граф G на слици доле, где су тежине грана написане поред сваке гране, и нека је T његово покривајуће стабло, које је представљено подебљаним гранама.



Тежина графа G је $w(G) = 1+4+5+2+1+2+1+3+3+2 = 24$, док је $w(T) = 4+1+1+2+2 = 10$ тежина стабла T. △

Посматрајмо сада наредни проблем. Авио-компанија је одлучила да повеже седам градова југоисточне Европе: Атину, Београд, Загреб, Истамбул, Подгорицу, Софију и Тирану. Након истраживања тржишта и услова, добила је следећу табелу са коефицијентима који одговарају линијама које спајају ове градове. При томе важи да што је коефицијент мањи, то је за компанију повољније да успостави лет на тој линији. Циљ је да се успоставе летови међу овим градовима тако да се свака два града могу повезати летовима ове компаније (не нужно директним летовима) и, наравно, да компанија прође што је повољније могуће.



	Б	З	И	П	С	Т
А	14,2	24,5	5,1	16	10,5	12,2
Б	–	12,7	8,1	11,7	10	15,7
З	–	–	13	27,2	34	26,7
И	–	–	–	12,1	5,6	9,5
П	–	–	–	–	23,8	22
С	–	–	–	–	–	19,2

На основу датих информација можемо добити комплетан граф са 7 чворова којем су додате тежине из табеле. Тада се проблем своди на налажење покривајућег (јер треба сви градови да буду повезани) стабла (да има минимално грана) чија ће тежина бити минимална.

Постоје поступци који нам помажу приликом решавања оваквих проблема које називамо алгоритми, те ћемо најпре мало говорити о алгоритмима уопштено, па ћемо се вратити на наш конкретан проблем.

Алгоритам је поступак (правило, „рецепт“) за решавање математичких проблема. Састоји се од низа инструкција које, ако се прате корак по корак, воде ка решењу проблема. Сваки корак у алгоритму мора бити прецизно и једнозначно дефинисан и алгоритам се мора завршити решавањем проблема у коначно много корака. алгоритам

Сваки алгоритам (по Доналду Кнуту[1] којег честоназвају „оцем анализе алгоритама“ због његовог доприноса развоју и систематизацији анализе сложених рачунарских алгоритама користећи математички угао посматрања) мора имати следећих пет важних особина: коначност, дефинисаност, улаз (енг. input), излаз (енг. output) и ефективност.

Критеријуми за одређивање ефикасности алгоритма јесу меморија која је потребна за извршавање посматраног алгоритма и време израчунавања као функција величине улаза, тј. улазних информација. Ми се нећемо бавити тим аспектима алгоритама, нити њиховом анализом, али треба имати у виду да ове особине играју врло битну улогу у коришћењу самих алгоритама.

Пошто се ми бавимо изучавањем графова, у нашем случају улаз је граф, а величина улаза је представљена бројем чворова n и бројем грана m.

Вратимо се сада на проблем одређивања минималног покривајућег стабла повезаног тежинског графа G. Алгоритам који нас води до решења називамо по Роберту Приму[2], који је до овог алгоритам дошао 1957. године, но независно од њега до овог поступка су дошли и Војтјех Јарњик[3] 1930. и Едсгер Дајкстра[4] 1959.

Примов алгоритам Примов алгоритам

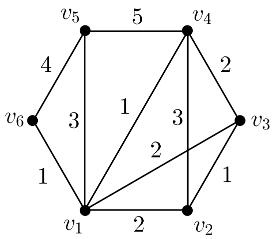
Улаз: повезан тежински граф G.

Корак 1. Одабери произвољан чвор v графа G. Тада $T_1 := v$.

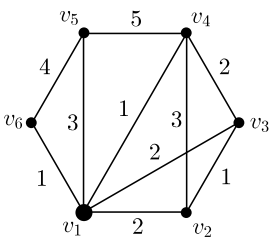
[1] Donald Knuth (1938–), амерички информатичар и математичар
[2] Robert Clay Prim (1921–), амерички математичар и информатичар
[3] Vojtěch Jarník (1897–1970), чешки математичар
[4] Edsger W. Dijkstra (1930–2002), холандски информатичар

Корак 2. Нађи грану најмање тежине инцидентну са v и њу додај у стабло T_1 и новодобијено стабло означи са T_2. Ако има више таквих грана, од њих одабери било коју.
Корак 3. За $i \geqslant 2$, T_{i+1} се добија додавањем гране најмање тежине инцидентне са чворовима графа T_i и да при томе важи да је она висећа грана у T_{i+1}. Ако има више таквих, одабери било коју од њих.
Корак 4. За $i = |V(G)|$ стани, у супротном понови корак 3.
Излаз: покривајуће стабло минималне тежине.

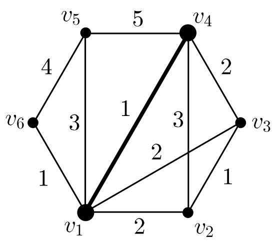
Пример 6.10. Нека је дат тежински граф G, где $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4 v_5, v_6\}$ и гране и њихове тежине су као на слици доле.



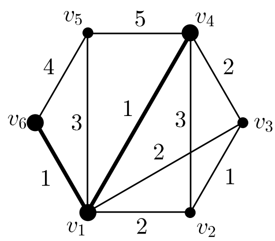
Применом корака из Примовог алгоритма на граф G, за који важи $|V(G)| = 6$, добијамо следеће.



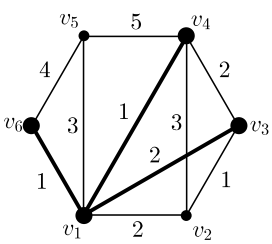
1. $T_1 = v_1$,
$i = 1$



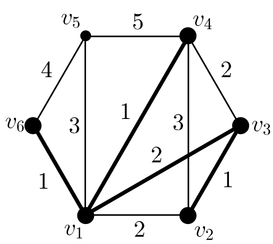
2. $T_2 : V(T_2) = \{v_1, v_4\}$
$E(T_2) = \{v_1 v_4\}$,
$i = 2$



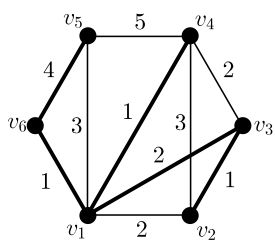
3. $T_3 : V(T_3) = \{v_1, v_4, v_6\}$
$E(T_3) = \{v_1 v_4, v_1 v_6\}$,
$i = 3$



3. T_4 :
$V(T_4) = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$
$E(T_4) = \{v_1 v_4, v_1 v_6, v_1 v_3\}$,
$i = 4$



3. T_5 :
$V(T_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$
$E(T_5) = \{v_1 v_4, v_1 v_6, v_1 v_3,$
$v_2 v_3\}$,
$i = 5$



3. T_6 :
$V(T_6) = V(G)$
$E(T_6) = \{v_1 v_4, v_1 v_6, v_1 v_3,$
$v_2 v_3, v_5 v_6\}$
$i = 6$ КРАЈ

Тежина овако добијеног покривајућег стабла тежинског графа G је $w(T_6) = 1 + 1 + 2 + 1 + 4 = 9$. △

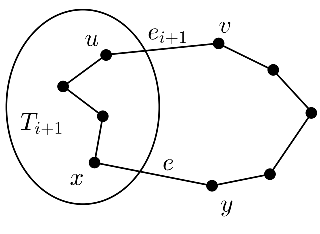
Наравно, постојање алгоритма нам не даје гаранцију да је резултат његове примене управо оно што нам треба. Стога, да бисмо били сигурни да Примов алгоритам стварно даје као резултат покривајуће стабло минималне тежине (које називамо и *минимално покривајуће стабло*), потребно нам је наредно тврђење.

Теорема 6.11. *Примов алгоритам, примењен на повезан тежински граф, даје покривајуће стабло минималне тежине.*

Доказ. Нека је G повезан тежински граф са n чворова и нека је T_n подграф графа G добијен помоћу Примовог алгоритма.

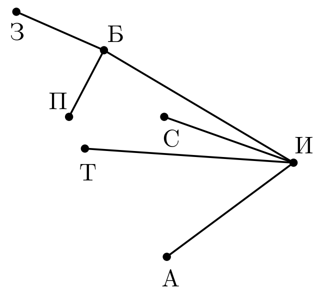
Прво треба да покажемо да је T_n покривајуће стабло графа G. Граф T_1 је тривијално стабло, те је повезан. T_2 добијамо додавањем једног чвора и гране инцидентне са оба његова чвора, те је и T_2 повезан граф. У сваком наредном кораку додајемо једну висећу грану са чвором инцидентним с њом, те је сваки од добијених графова повезан и без контурних грана. Према томе, граф T_n је стабло. Како садржи све чворове графа G, оно је и покривајуће стабло.

Покажимо сада да је T_n покривајуће стабло минималне тежине. Нека су гране графа T_n означене са $e_1, \ldots, e_{n-1}$ тако да су стабла добијена приликом примене Примовог алгоритма $T_k = G[e_1, \ldots, e_{k-1}]$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Нека је t минимална тежина покривајућег стабла графа G. Претпоставимо супротно, нека важи $t < w(T_n)$ и нека постоји неко покривајуће стабло графа G које је тежине t. Од свих таквих покривајућих стабала графа G изаберимо оно које има првих i заједничких грана са T_n, где је то i максимално такво. Означимо ово стабло са S. Према томе, како $S \neq T_n$, важи $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Тада важи $e_1, \ldots, e_i \in E(S)$ и $e_{i+1} \notin E(S)$. Даље, нека $e_{i+1} = uv$, тако да $u \in V(T_{i+1})$ и $v \notin V(T_{i+1})$. Пошто је S покривајући подграф и повезан, следи да у S постоји $u - v$ пут и овај пут мора садржати неку грану $e = xy$ за коју је испуњено $x \in V(T_{i+1})$ и $y \notin V(T_{i+1})$.



Због Примовог алгоритма и његовог корака 3, с обзиром на то да је за T_{i+2} одабрана грана e_{i+1} а не грана e, следи $w(e) \geqslant w(e_{i+1})$.

Нека сада $S' = S - e + e_{i+1}$. Граф S' је покривајуће стабло, пошто је повезан покривајући подграф са $n-1$ грана. Такође важи $w(S') \leqslant w(S) = t$. Како је t минимална тежина покривајућег стабла графа G, следи $w(S') = t$. Према томе, и S' је минимално покривајуће стабло. С друге стране, S' има $i+1$ заједничких грана са T_n, што је у контрадикцији са избором стабла S. □



На крају, осврнимо се на проблем авио-компаније са почетка. Након примене Примовог алгоритма на одговарајући тежински граф долази се до закључка да је за компанију најповољније да успостави линије представљене на графу горе.

6.3 Алгоритми претраге

Један од проблема на које се наилази приликом изучавања структура које се представљају преко графова јесте одредити компоненте повезаности графа.

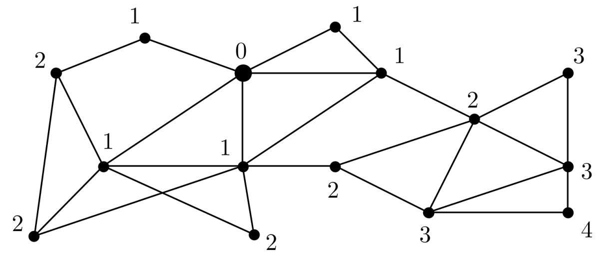
Два алгоритма која се користе у решавању оваквог проблема јесу BFS (енг. *Breadth-first search* или *претрага у ширину*) и DFS (енг. *Depth-first search* или *претрага у дубину*). Ови алгоритими имају и другачије примене, на пример претраживање графа (одакле и назив претрага у ширину, односно дубину) с обзиром на то да се приликом обилажења графа помоћу ових алгоритама, пролази кроз све чворове посматране компоненте повезаности. То јест, претражује се сваки чвор у тој компоненти.

BFS алгоритам

BFS алгоритам
Улаз: граф G и његов фиксиран чвор u (без ознаке).
Корак 1. Означи чвор u са 0.
Корак 2. Додели бројачу i вредност 0, тј. $i := 0$.
Корак 3. Пронађи све неозначене чворове које имају бар једног суседа означеног са i. Ако таквих нема, заустави се.
Корак 4. Означи све чворове пронађене у кораку 3 са $i + 1$.
Корак 5. Повећај вредност бројача i за један, тј. $i := i+1$, и врати се на корак 3.
Излаз: чворови графа G означени њиховим удаљеностима од u.

Можемо приметити да BFS алгоритам креће од једног чвора, затим издвоји све његове суседе, па све суседе суседа и тако даље. На тај начин се шири кроз граф док не исцрпи све чворове у компоненти повезаности. Додатна погодност овог алгоритма јесте да одређује растојање чворова од почетног чвора, те се користи и за одређивање растојања чворова у графу.

Пример 6.12. На слици доле можемо видети означени граф који се добије помоћу BFS алгоритма ако се крене од чвора који је приказан већи од осталих.



△

Напомена 6.13. Чворови који остану неозначени су они који се не налазе у истој компоненти повезаности као u.

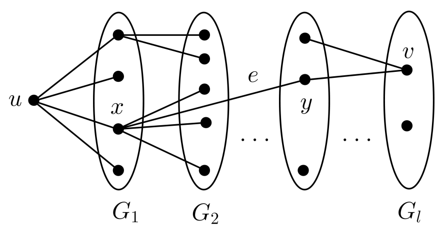
Уколико нас занима само растојање чвора v од чвора u и желимо да скратимо поступак, уведемо додатан корак (између корака 4 и 5) који зауставља алгоритам чим се означи чвор v. ♢

Докажимо сада да BFS алгоритам стварно даје оно што нам је потребно.

Теорема 6.14. BFS *алгоритам израчунава растојање од чвора u до сваког чвора графа G који се налази у истој компоненти повезаности.*

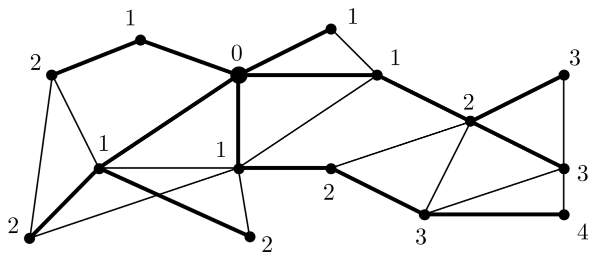
Доказ. Јасно, применом овог алгоритма ће бити означени само чворови у истој компоненти као чвор u.

Нека је l ознака произвољног чвора v која је добијена помоћу BFS алгоритма. То значи $d_G(u,v) \leqslant l$. Докажимо да важи једнакост. Ако претпоставимо супротно, тј. $d_G(u,v) < l$, онда следи да постоји $u-v$ пут који је краћи од l. Одавде добијамо да постоји нека грана $e = xy \in E(G)$ таква да $x \in G_i$ и $y \in G_j$, где $i+1 < j$ и при томе G_k означава скуп чворова графа G који су означени са k.



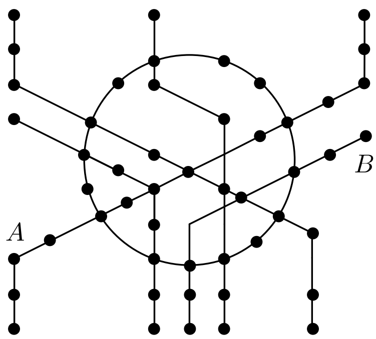
Међутим, ако $e \in E(G)$, онда би y морало бити обележено са $i+1$, тј. $y \in G_{i+1}$. Но, како важи $i+1 < j$, долазимо до контрадикције, јер сваки чвор приликом примене BFS алгоритма може бити обележен само једним бројем. □

Покривајућа стабла повезаних графова која настају приликом извршавања BFS алгоритма називамо BFS-*стабла*: сваки пут када се означава нови чвор додаје се и грана инцидентна са тим и већ означеним чвором. Можемо BFS-стабло приметити да је овакво стабло заправо пример коренског стабла са кореном 0.

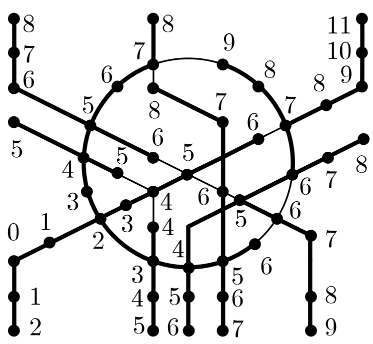


BFS-стабло које се добија у примеру 6.12.

Пример 6.15. На слици доле је скица метро-линија и станица. Потребно је доћи од станице A до станице B што краћим путем (где су у реалности сваке две станице директно спојене метром на приближно истом растојању).



Применом BFS алгоритма, где је улаз дати граф и чвор A, добијамо да је чвор B на растојању 8 од чвора A и пут којим се то може постићи јесте део BFS-стабла који се добија приликом примене BFS алгоритма.



△

За разлику од BFS алгоритма, DFS алгоритам иде у дубину графа. Из скупа суседа посматраног чвора се издваја један који дотад није био обележен. Ако таквог нема, онда се враћа на најближи претходни који има неозначеног суседа. Ако има таквог суседа, онда алгоритам даље наставља да испитује његове суседе. Другим речима, иде далеко колико год може.

DFS алгоритам DFS алгоритам

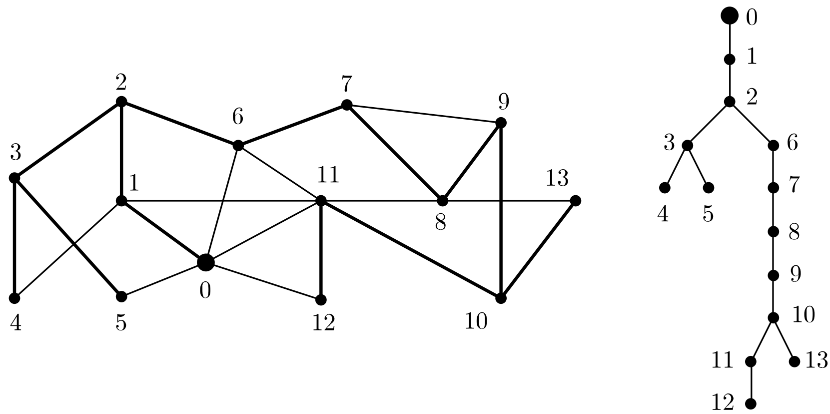
Улаз: граф G и његов фиксиран чвор u (без ознаке).
Корак 1. Означи u као 0.
Корак 2. Бројачу i додели вредност 0, тј. $i := 0$.
Корак 3. Ако i има суседа који је неозначен, тог суседа означи са $i+1$.
Корак 4. Ако i нема таквог суседа, врати се на највеће $k < i$ које има неозначеног суседа и тог суседа означи са $i+1$.
Корак 5. Ако не постоји ниједно $k < i$ чији је сусед неозначен, заустави се.
Корак 6. Повећај вредност i за један, тј. $i := i+1$, и врати се на корак 3.
Излаз: граф G са означеним свим чворовима који су повезани са u.

Као и у примени BFS алгоритма, и приликом примене DFS алгоритма градимо коренско стабло T са кореном u који је означен са 0. Стабло T је заправо покривајуће стабло компоненте повезаности посматраног графа G у којој се налази уочени чвор u. Добијено стабло T називамо DFS-*стабло*. У случају овог алгоритма јасно је да наредно тврђење важи. DFS-стабло

Теорема 6.16. DFS *алгоритам означава сваки чвор који се налази у истој компоненти повезаности као* u.

Када DFS алгоритам (али и BFS) користимо за одређивање компонената повезаности у графу и при томе желимо да одредимо све компоненете повезаности, у DFS алгоритам (исто и за BFS) на крају додамо корак који нам каже да претражимо да ли постоји неозначен чвор. Кад нађемо један такав, онда њега одредимо као улазни чвор u и поновимо цео алгоритам који ће одредити компоненту у којој се налази овај нови чвор u. Тако настављамо док не исцрпимо све чворове. Тиме се добијају покривајућа стабла свих компонената посматраног графа, где ће број стабала бити број компонената у графу.

Пример 6.17. На наредној слици можемо видети означене чворове и одговарајуће DFS-стабло које се добија применом DFS алгоритма, ако се крене од чвора који је приказан већи од осталих. Са десне стране је добијено стабло приказано као коренско стабло.



△

Осим одређивања компонената повезаности, DFS алгоритам има још једну примену значајну за нас а то је одређивање артикулационих чворова графа. Теорему која нам ово гарантује наводимо без доказа, а оне које занима доказ могу наћи у [1].

Теорема 6.18. *Нека је T DFS-стабло добијено од повезаног графа G. Тада важи:*

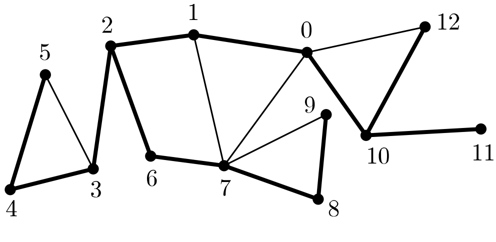
1. *Корен и стабла T је артикулациони чвор графа G ако и само ако у стаблу T чвор и има најмање два детета.*

2. *Висећи чворови стабла T нису артикулациони чворови графа G.*

3. *За преостале чворове стабла T важи: чвор v је артикулациони чвор графа G ако и само ако има дете чији ниједан потомак у графу G нема грану која га повезује са неким од предака чвора v.*

У наредном примеру можемо видети примену наведене теореме.

Пример 6.19. На слици доле можемо видети граф G и једно DFS-стабло графа G (означено подебљаним гранама).



Корен стабла 0 има двоје деце, те је артикулациони чвор графа G. Висећи чворови стабла T су 5, 9, 11 и 12, те ови чворови нису артикулациони чворови графа G. Од преосталих чворова тражимо оне који имају дете чији ниједан потомак у оригиналном графу нема грану која га повезује са неким од предака посматраног чвора. Такви су 2 (дете које има описану особину је 3), затим чвор 3 (деца са особином су и 4 и 5) и 7 (деца 8 и 9).

Чвор 1 није артикулациони, јер је једино његово дете 2 и у графу G постоји грана између потомка, 7, и претка, 0. Због ове гране артикулациони чвор није ни 6. Такође, ни 4 није артикулациони због гране између 5 и 3. Чвор 8 није артикулациони због гране између 9 и 7. Коначно, артикулациони чвор није ни 10 због гране измађу 12 и 0. △

Још једна предност DFS алгоритма у односу на BFS (коју овако без програмирања не можемо лако видети) јесте да је за њега довољно мање меморије, јер ради на другачији начин. Мање је сложен, те се и брже извршава.

ГЛАВА 7

ОЈЛЕРОВИ И ХАМИЛТОНОВИ ГРАФОВИ

У овој глави ћемо се упознати се специјалним врстама графова названим по двојици математичара: Ојлеру и Хамилтону[1]. Проблеми који се своде на овакве графове су на пример: да ли можемо неки цртеж нацртати без подизања оловке са папира у једном потезу, како одредити оптималан пут за градску чистоћу приликом скупљања ђубрета или да ли се може прошетати кроз неки град тако да се пређе кроз сваки трг да се уз то не враћа на посећене тргове.

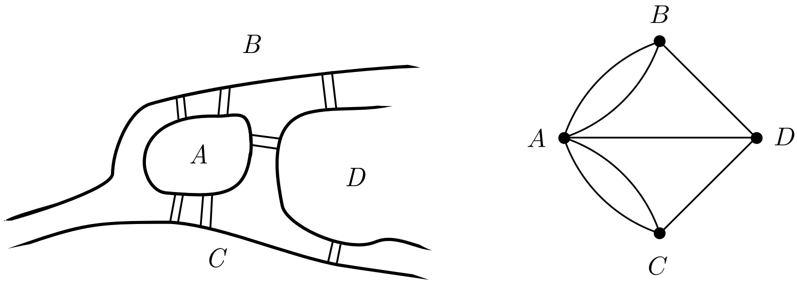
7.1 Ојлерови графови

Леонард Ојлер је швајцарски математичар који је живео у XVIII веку и већину живота је провео у Санкт Петербургу и Берлину. Допринео је многим областима математике од анализе, геометрије, преко логике, алгебре, до теорије бројева; зачетник је дисциплина као што су топологија, теорија графова, аналитичка теорија бројева; бавио се и физиком, астрономијом, географијом, инжењерством. Осим значајних научних резултата, битан је његов допринос у популаризацији нотација: $f(x)$ за функцију, $\sin x$, $\cos x$, π, i, e, Σ (увео је све поменуте сем π).

Већ смо помињали да је Ојлер 1736. године објавио рад у којем је решио проблем мостова Кенигсберга. Проблем је био следећи.

> У Кенигсбергу на реци Прегел се налази седам мостова који спајају обале ове реке и острва која се налазе на њој. Да ли је могуће организовати шетњу кроз град тако да се сваки мост пређе тачно једном?

[1] William Rowan Hamilton (1805–1865), ирски математичар, физичар и астроном



Са леве стране је скица реке Прегел и мостова који су се налазили на њој у доба када је Ојлер живео. Са десне стране су делови копна Кенигсберга представљена помоћу чворова и мостови који их спајају представљени помоћу грана.

Ојлер је доказао да такав обилазак преко свих мостова не постоји. Одатле и назив посебних графова који су добили име управо по Ојлеру.

Ојлерова стаза

Ојлерова стаза је стаза графа G која пролази кроз сваку грану графа G. *Затворена Ојлерова стаза* је Ојлерова стаза графа G чији се почетак и крај поклапају.

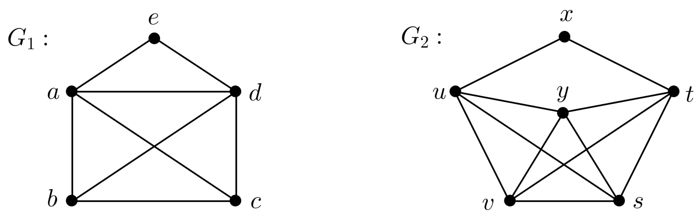
полуојлеров граф

Полуојлеров граф је граф који садржи Ојлерову стазу.

Ојлеров граф

Ојлеров граф је граф који садржи затворену Ојлерову стазу.

Пример 7.1. На слици доле су дати графови G_1 и G_2.



Граф G_1 је полуојлеров а једна његова Ојлерова стаза је $bdeabcdac$. Граф G_2 је пример Ојлеровог графа. Једна његова затворена Ојлерова стаза је $xuvstyusyvtx$. △

Према томе, ако желимо графове из претходног примера нацртати без подизања оловке и без прелажења неке гране више пута, можемо то урадити управо пратећи Ојлерову, односно Ојлерову затворену стазу.

Напомена 7.2. Дефиниције и тврђења које наводимо у овом поглављу важе и за мултиграфове. ♢

Теорема 7.3 (Карактеризација Ојлерових графова)**.** *Повезан граф је Ојлеров ако и само ако су му сви чворови парног степена.*

Доказ. Нека је G Ојлеров граф и нека је његова затворена Ојлерова стаза $w = v_0e_1v_1e_2\ldots e_kv_0$. То значи да се свака грана графа G јавља тачно једном у стази w, док се чворови могу понављати. Кретањем по овој стази се у сваки чвор мора ући и изаћи (осим v_0 који на почетку има излазак а на крају улазак), те следи да за сваки чвор v графа G мора важити $2 \mid d(v)$.

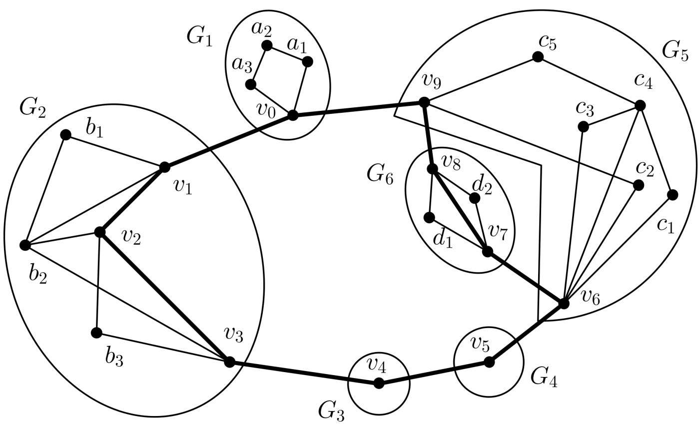
Други смер доказујемо индукцијом по броју грана графа. Најмање грана у повезаном графу чији су сви чворови парног степена јесте 3. Тада он може бити само K_3 и јасно је да овај граф има затворену Ојлерову стазу. Докажимо да ако је сваки повезан граф са строго мање од m грана чији су сви чворови парни Ојлеров граф, онда је и повезан граф са парним чворовима и тачно m грана такође Ојлеров. Нека је G повезан са парним чворовима и m грана. Како је повезан, мора важити $d(v) \geqslant 2$ за све $v \in V(G)$. Стога следи да G садржи контуру $C = v_0e_1v_1 \dots e_tv_0$. Нека је G' подграф графа G који се добија брисањем грана контуре C. Нека су $G_1, \dots, G_k$ компоненте повезаности графа G'. Како важи $|E(G')| < m$, у свакој компоненти има мање од m грана. Даље, за степене чворова графа G важи:

$$d_{G'}(v) = d_G(v) - 2 \text{ за } v \in C, \text{ и } d_{G'}(v) = d_G(v) \text{ за } v \notin C.$$

Према томе, за сваку компоненту G_i која није изоловани чвор важи индукцијска хипотеза, те у свакој од њих постоји затворена Ојлерова стаза w_i.

Сада можемо конструисати затворену Ојлерову стазу w графа G тако што, крећући се по контури C у сваком чвору којим се још нисмо шетали, а налази се у компоненти повезаности G_i, прошетамо стазом w_i. Кад завршимо ову стазу, наставимо да се крећемо контуром C док не дођемо до новог чвора у којем још нисмо били, па се поново прошетамо стазом компоненте у којој се тај чвор налази и тако наставимо док не затворимо контуру C.

Нека, на пример, имамо ситуацију као на слици доле. Контура $C = v_0v_1 \dots v_9v_0$ је обележена дебљим гранама, док се након брисања њених грана граф распада на 6 компонената повезаности $G_1, G_2, \dots, G_6$.



Затворена Ојлерова стаза компоненте G_1 јесте $v_0a_1a_2a_3v_0$, компоненте G_2 стаза $v_1b_1b_2v_2b_3v_3b_2v_1$. Компоненте G_3 и G_4 су изоловани чворови. А затворене Ојлерове стазе компонената G_5 и G_6 су редом $v_6c_1c_4v_6c_2v_9c_5c_4c_3v_6$ и $v_7d_1v_8d_2v_7$. Стога затворена Ојлерова стаза целог графа јесте

$$v_0a_1a_2a_3v_0v_1b_1b_2v_2b_3v_3b_2v_1v_2v_3v_4v_5v_6c_1c_4v_6c_2v_9c_5c_4c_3v_6v_7d_1v_8d_2v_7v_8v_9v_0.$$

$\square$

Последица доказа претходног тврђења јесте следећа особина Ојлерових графова.

Теорема 7.4. *Повезан граф је Ојлеров ако и само ако се скуп његових грана може разбити на дисјунктне (по гранама) контуре.*

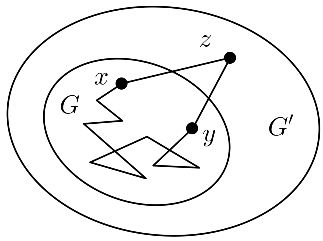
Наредно тврђење нам даје карактеризацију полуојлерових графова.

Теорема 7.5. *Повезан граф је полуојлеров ако и само ако има највише два непарна чвора.*

Доказ. Нека је G полуојлеров граф. Према томе, G садржи Ојлерову стазу. Ако се први и последњи чвор ове стазе поклапају, онда је граф Ојлеров, те су сви чворови парни. Ако се они не поклапају, та два чвора су непарни док су преостали парни.

Покажимо и обрнути смер. Нека у повезаном графу G важи да има највише два непарна чвора. Ако су сви чворови парни, на основу тврђења 7.3 следи да је G Ојлеров граф, па је и полуојлеров. Како граф не може имати један непаран чвор, преостаје да видимо случај када граф има тачно два непарна чвора, нека су то x и y. Дефинишимо сада нови граф G' тако да

$$V(G') = V(G) \cup \{z\}, \text{ где } z \notin V(G),$$
$$E(G') = E(G) \cup \{xz, yz\}.$$



Сада за G' важи да је повезан и да је сваки његов чвор парног степена. На основу тврђења 7.3 следи да је G' Ојлеров граф, те садржи затворену Ојлерову стазу. Избацивањем чвора z и грана xz и yz добијамо Ојлерову стазу графа G. □

Идеју из доказа претходног тврђења можемо уопштити. Стога важи тврђење у наставку.

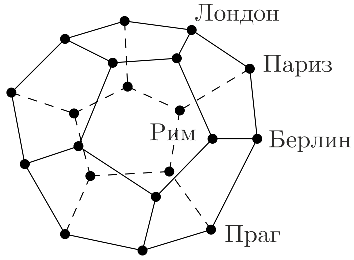
Теорема 7.6. *Повезан граф са $2k$ непарних чворова може се разложити на k стаза.*

Доказ. Графу додамо k нових чворова и сваки од њих повежемо са два непарна чвора првобитног графа. Тако добијен граф има затворену Ојлерову стазу, те уклањањем додатих k чворова она се распада на k стаза. □

Пример 7.7. Вратимо се на проблем са обиласком мостова у Кенигсбергу. Ако посматрамо мултиграф који представља делове копна и мостове, закључујемо да су степени чворова: $d(A) = 5$ и $d(B) = d(C) = d(D) = 3$. Према томе, како овај мултиграф има четири чвора и сви су непарни чворови, овај граф није ни полуојлеров ни Ојлеров, тј. шетња која води преко сваког моста тачно једном не постоји. △

7.2 Хамилтонови графови

Вилијам Хамилтон је био ирски научник који се бавио математиком, физиком и астрономијом. Сада га помињемо јер је он направио игру Пут око света (енг. *Around the world*). Игра се састоји у томе да додекаедар представља земаљску куглу, његова темена представљају 20 градова света, док његове ивице представљају путеве који спајају градове. (Дакле, суседни градови су они који су суседни у додекаедру.) Циљ игре је обићи све градове тако да се кроз сваки град прође тачно једном и при томе да се врати у град одакле је путовање почело.



Лондон
Париз
Берлин
Рим
$\vdots$
Лондон

Одатле и мотивација за терминологију коју наводимо у наставку.

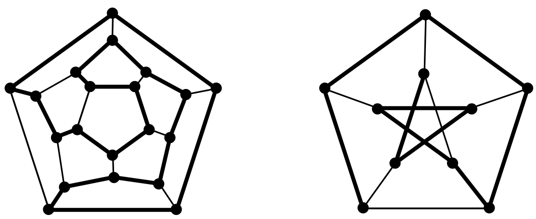
Хамилтонов пут је пут графа G који садржи сваки чвор графа G. *Хамилтонова контура* је контура графа G која садржи сваки чвор графа G.

Полухамилтонов граф је граф G који садржи Хамилтонов пут.

Хамилтонов граф је граф G који садржи Хамилтонову контуру.

Хамилтонов и полухамилтонов граф

Пример 7.8. Ако додекаедар из игре Пут око света пројектујемо на раван, добићемо граф приказан на слици лево. Он јесте Хамилтонов јер садржи Хамилтонову контуру која је приказана подебљаним гранама.



Са десне стране је пример полухамилтоновог графа. Овај конкретан граф се назива Петерсенов[2] граф. △

У претходном поглављу смо видели да Ојлерови графови имају добру карактеризацију. Добра је у смислу да, ако имамо задат граф и разматрамо да ли је он Ојлеров, то се може решити тако што се одреде парности његових чворова, проверимо јесу ли сви парни или нису и то је релативно лако да се уради. За разлику од Ојлерових графова, за Хамилтонове засад не постоји карактеризација која не захтева пуно додатних провера. Одредити потребан и довољан услов да је граф Хамилтонов а да се при томе тај услов лако

[2] Julius Peter Christian Petersen (1839–1910), дански математичар

проверава је још увек *отворен проблем.* Стога, бавићемо се условима које је лакше проверити, најпре посебно потребним а затим довољним условима.

Теорема 7.9. *Нека је G Хамилтонов граф и нека $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$. Тада важи*

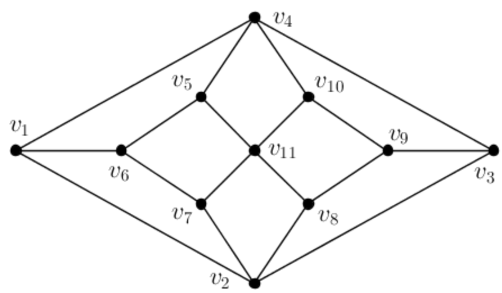
$$\omega(G-S) \leqslant |S|.$$

Доказ. Нека је $C = v_1v_2\dots v_nv_1$ Хамилтонова контура графа G. Даље, нека је S произвољан непразан подскуп скупа чворова графа G и нека $|S| = k \geqslant 1$. Посматрајмо граф $C-S$. Важи $\omega(C-S) \leqslant k$. С друге стране, како је C подграф графа G, и $C-S$ је подграф графа $G-S$, те имамо $\omega(G-S) \leqslant \omega(C-S)$. Дакле, добијамо $\omega(G-S) \leqslant k = |S|$. □

Приметимо да обрнути смер претходне теореме не важи. Пример за то је Петерсенов граф. За овај граф важи да, ако му одузмемо непразан подскуп чворова, број компонената који се добије је мањи од броја одузетих чворова. Но, Петерсенов граф није Хамилтонов.

Потребни услови су најкориснији приликом доказивања да неки граф није Хамилтонов. То јест, ако граф не испуњава потребан услов, онда не може бити Хамилтонов. Овакву примену можемо видети у наредном примеру.

Пример 7.10. Нека је дат граф G на слици доле.



Ако бирамо $S = \{v_2, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$, добијамо $\omega(G-S) = 6$. То је строго више од броја избачених чворова, те на основу тврђења 7.9 дати граф је пример графа који није Хамилтонов. △

Теорема 7.11. *Хамилтонов граф нема мостове и артикулационе чворове.*

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је G Хамилтонов граф и нека је v артикулациони чвор овог графа. Сада важи $\omega(G-v) = 2$, што је у контрадикцији са резултатом из теореме 7.9.

У случају да Хамилтонов граф G има мост $e = uv$, тада су чворови u и v артикулациони у графу G, а то по претходно показаном није могуће. □

Дакле, на основу претходног тврђења, ако уочимо мост или артикулациони чвор у неком графу, онда одмах можемо закључити да он не може бити Хамилтонов. Пређимо сада на довољне услове.

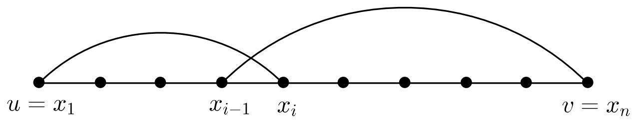
Теорема 7.12 (Оре[3]). *Нека је G граф са n чворова, $n \geqslant 3$, такав да за свака два несуседна чвора $u, v \in V(G)$ важи*

$$d(u) + d(v) \geqslant n.$$

Тада је G Хамилтонов.

Доказ. Претпоставимо да постоји граф G са n чворова који није Хамилтонов, али важи услов из тврђења. Додатно, нека је G максималан такав у смислу да додавањем било које гране он постаје Хамилтонов.

Ако су u и v несуседни чворови у графу G, онда је по претходно претпостављеним условима $G+uv$ Хамилтонов. Како у њему постоји Хамилтонова контура C, док у G таква контура не постоји, следи да грана uv мора бити на контури C. Према томе, у G постоји Хамилтонов $u - v$ пут. Означимо га $u = x_1 x_2 \dots x_n = v$.



Покажимо сада: ако $x_1 x_i \in E(G)$, за $2 \leqslant i \leqslant n-1$, онда $x_{i-1} x_n \notin E(G)$. Ако би важило да $x_{i-1} x_n \in E(G)$, тада би $x_1 \dots x_{i-1} x_n x_{n-1} \dots x_i x_1$ била Хамилтонова контура графа G, што је немогуће јер G није Хамилтонов.

Израчунајмо сада колико највише може бити $d(v)$:

$$d(v) \leqslant n - 1 - d(u),$$

јер $v = x_n$ не може бити сусед сам себи и за свако x_i које је сусед чвора $u = x_1$ важи да x_{i-1} не може бити сусед чвора v. Тиме добијамо да

$$d(v) + d(u) \leqslant n - 1 < n,$$

што нас води до контрадикције са претпоставком да за свака два несуседна чвора u и v важи $d(u) + d(v) \geqslant n$. □

Обрнути смер претходног тврђења не важи: граф C_5 је Хамилтонов, али услов из тврђења за два несуседна чвора u и v гласи $4 = d(u) + d(v) \geqslant 5$, што је нетачно.

У наставку наводимо теорему Дирака чије је уопштење тврђење 7.12. Хронолошки гледано, прво је Дирак доказао његово тврђење а десетак година касније је Оре дошао до његовог резултата. Но, како је Диракова теорема директна последица теореме 7.12, нема потребе наводити Дираков доказ.

Теорема 7.13 (Дирак[4]). *Нека је G граф са n чворова, $n \geqslant 3$, такав да за сваки чвор $u \in V(G)$ важи*

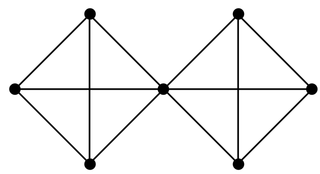
$$d(u) \geqslant \frac{n}{2}.$$

[3] Øystein Ore (1899–1968), норвешки математичар

[4] Gabriel Andrew Dirac (1925–1984), британски математичар мађарског порекла

Тада је G Хамилтонов.

Приметимо да се услов из теореме 7.12 не може ослабити, тј. неједнакост се не може заменити са $d(u) + d(v) \geqslant n - 1$. Томе нам сведочи граф на слици доле.



У овом графу за свака два несуседна чвора u и v важи

$$d(u) + d(v) = 3 + 3 = 6 \geqslant 7 - 1 = 6,$$

дакле испуњен је ослабљени услов. Међутим, како овај граф има артикулациони чвор, он не може бити Хамилтонов.

ГЛАВА 8

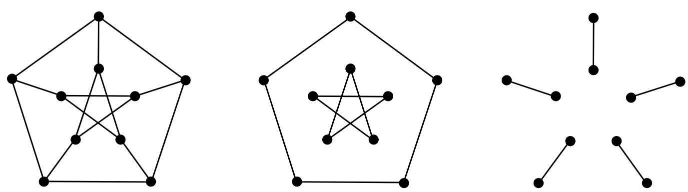
БОЈЕЊЕ ГРАФОВА

Како одредити распоред испита тако да има минимално термина за полагање и тако да се два испита са исте године студија не одржавају истовремено? Колико минимално боја нам је потребно да обојимо мапу са различитим државама тако да никоје две суседне нису обојене једном бојом? Овакви и слични проблеми се решавају помоћу бојења графова. Пре него што пређемо на бојење графова, најпре уводимо основне ствари везане за декомпозицију графова. Иако је ова тема опширна, урадићемо само особине које су нам потребне у наставку где се бавимо бојењима.

8.1 Декомпозиција графова

Декопозиција (факторизација) графа представља разлагање графа на његове покривајуће подграфове. Дефинишимо најпре факторе графа.

Фактором графа G називамо покривајући подграф H графа G. Ако је H при томе и k-регуларан, кажемо да је у питању *k-фактор* графа G. фактор

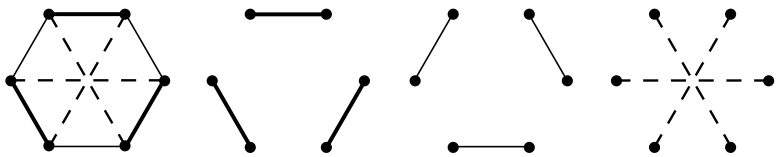


Петерсенов граф (лево) и примери једног његовог 2-фактора (у средини) и 1-фактора (десно).

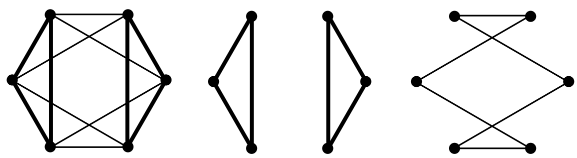
Напомена 8.1. 1-фактор се назива и савршени мечинг. ♢

Под *факторизацијом* графа G подразумевамо његово разлагање на факторе тако да су свака два фактора грански дисјунктна а да је унија грана свих фактора једнака скупу свих грана графа G. Ако су сви фактори који учествују у факторизацији k-фактори, тада говоримо о *k-факторизацији*, тј. G је *k-факторабилан* ако и само ако важе следећи услови

$$\begin{array}{l} E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \cdots \cup E(G_s), \\ E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset \text{ за } i \neq j, \\ G_1, G_2, \ldots, G_s \text{ су његови } k\text{-фактори.} \end{array}$$



Пример 1-факторабилног графа.

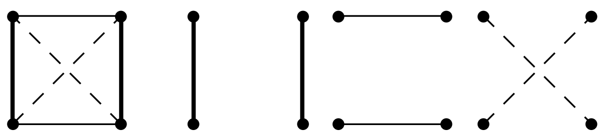


Пример 2-факторабилног графа.

Теорема 8.2. *K_{2k+1} нема 1-факторизацију. K_{2k} има 1-факторизацију.*

Доказ. Нека важи $n = 2k+1$. Тада K_{2k+1} нема 1-фактор, јер у 1-фактору сви чворови морају бити степена 1 а граф не може имати непаран број непарних чворова.

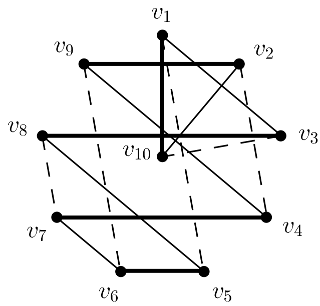
Нека сада $n = 2k$. Јасно, за $k = 1$, K_2 је сам 1-фактор. За $k = 2$, K_4 можемо разложити на три 1-фактора, као што је приказано на слици доле.



1-факторизација графа K_4.

Урадимо сада конструкцију 1-фактора за $k \geqslant 2$. Нека $V(K_{2k}) = \{v_1, \ldots, v_{2k}\}$. Првих $2k-1$ чворова сместимо на места темена правилног $2k-1$-тоугла (означимо га са U_{2k-1}), док последњи чвор ставимо у средину овог многоугла. Означимо покривајуће подграфове са $M_1, \ldots, M_{2k-1}$. Њихови скупови грана су:

$$\begin{array}{rcl} E(M_1) & = & \{v_{2k}v_1, v_2v_{2k-1}, v_3v_{2k-2}, \ldots, v_kv_{k+1}\}, \\ E(M_2) & = & \{v_{2k}v_2, v_3v_1, v_4v_{2k-1}, \ldots, v_{k+1}v_{k+2}\}, \\ & \vdots & \\ E(M_i) & = & \{v_{2k}v_i, v_{i+1}v_{i-1}, v_{i-2}v_{i+2}, \ldots, v_{i+k-1}v_{i+k}\}, \\ & \vdots & \\ E(M_{2k-1}) & = & \{v_{2k}v_{2k-1}, v_1v_{2k-2}, v_2v_{2k-3}, \ldots, v_{k-1}v_k\}. \end{array}$$



Фактори M_1, M_2 и M_3 за $k = 5$.

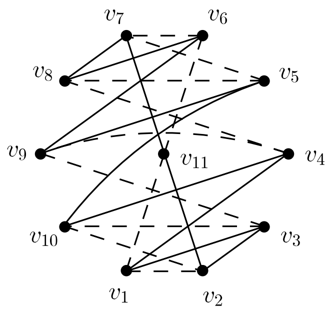
Покажимо да је ово стварно факторизација графа K_{2k}. Можемо приметити да ако дат граф посматрамо као правилан $2k-1$-тоугао U_{2k-1}, онда је свака страница и дијагонала нормална на тачно један „полупречник“ $v_{2k}v_i$. M_i је конструисан тако да покупи све оне дијагонале и страницу које су нормалне на $v_{2k}v_i$. Према томе, ове гране нису суседне, два различита M_i и M_j немају заједничких грана а унија даје цео K_{2k}. Према томе, $M_1, \dots, M_{2k-1}$ су фактори 1-факторизације графа K_{2k}. $\square$

Теорема 8.3. *K_{2k} нема 2-факторизацију. K_{2k+1} има 2-факторизацију. Штавише, K_{2k+1} се може разложити на Хамилтонове контуре.*

Доказ. Нека важи $n = 2k$. Тада K_{2k} нема 2-факторизацију, јер су сви чворови непарног степена, док се унијом 2-фактора добијају чворови парног степена.

Нека сада $n = 2k+1$. За $k = 1$, јасно, K_3 је сам по себи 2-фактор. За $k \geqslant 2$ нека важи $V(K_{2k+1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ и нека првих $2k$ чворова формирају правилни $2k$-тоугао U_{2k} док је последњи чвор у центру овог многоугла. Конструишемо покривајуће подграфове $F_1, F_2, \dots, F_k$ тако да су њихови скупови грана следећи:

$$
\begin{aligned}
E(F_1) &= \{v_{2k+1}v_1, v_{2k+1}v_{k+1}, v_1v_2, v_{2k}v_3, v_{2k-1}v_4, \dots, v_{k+2}v_{k+1},\\
&\qquad v_2v_{2k}, v_3v_{2k-1}, \dots, v_kv_{k+2}\},\\
E(F_2) &= \{v_{2k+1}v_2, v_{2k+1}v_{k+2}, v_2v_3, v_1v_4, v_{2k}v_5, \dots, v_{k+3}v_{k+2},\\
&\qquad v_3v_1, v_4v_{2k}, \dots, v_{k+1}v_{k+3}\},\\
&\;\;\vdots\\
E(F_i) &= \{v_{2k+1}v_i, v_{2k+1}v_{k+i}, v_iv_{i+1}, v_{i-1}v_{i+2}, \dots, v_{i+k+1}v_{i+k},\\
&\qquad v_{i+1}v_{i-1}, v_{i+2}v_{i-2}, \dots, v_{i+k-1}v_{i+k+1}\},\\
&\;\;\vdots\\
E(F_k) &= \{v_{2k+1}v_k, v_{2k+1}v_{2k}, v_kv_{k+1}, v_{k-1}v_{k+2}, \dots, v_1v_{2k},\\
&\qquad v_{k+1}v_{k-1}, v_{k+2}v_{k-2}, \dots, v_{2k-1}v_1\}.
\end{aligned}
$$



Фактори F_1 и F_2 за $k = 5$.

Уколико кренемо од правилног многоугла U_{2k} који се добија од чворова $v_1, \ldots, v_{2k}$, подграфове F_i смо заправо добили преко две гране које спајају центар са два наспрамна темена v_i и v_{i+k} многоугла U_{2k}, затим гране која представља страницу $v_i v_{i+1}$ и њој паралелне странице, свих дијагонала паралелних са овом страницом, и грана које су дијагонале паралелне са $v_{i+1}v_{i-1}$. Овако посматрано, лако је закључити да је F_i заправо Хамилтонова контура, те је 2-фактор. С друге стране грана $v_s v_t$ $(s \neq t)$ се налази тачно у једном подграфу F_i. Према томе, $F_1, \ldots, F_k$ чине 2-факторизацију графа K_{2k+1}. □

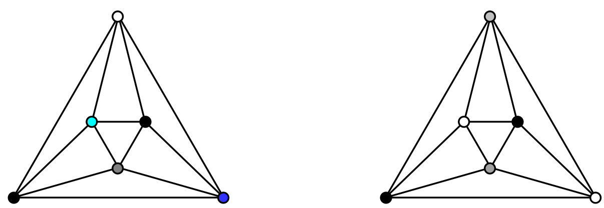
8.2 Бојење чворова

Правилно бојење или краће *бојење* чворова графа G је придруживање боја сваком чвору графа G тако да суседни чворови нису исте боје. Ако је у бојењу коришћено k боја, онда такво бојење називамо *k-бојење*. За граф G кажемо да је *k-обојив* ако за G постоји неко l-бојење где $l \leqslant k$.

хроматски број

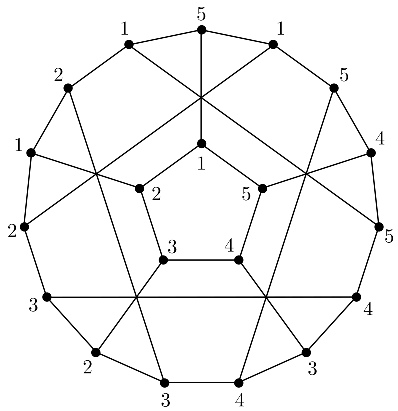
Хроматски број графа G је најмањи број k такав да је G k-обојив. Хроматски број графа G означавамо са $\chi(G)$. Ако важи $\chi(G) = k$, кажемо и да је G *k-хроматски*.

Пример 8.4. На слици лево можемо видети правилно бојење графа помоћу 5 боја. Дакле, граф је 5-обојив.



На слици десно је 3-бојење графа. Како не можемо наћи правилно бојење овог графа са мање боја (сваки чвор у графу има само један који му је несуседан, те максимално два могу бити исте боје, па је у сваком случају потребно најмање 3 боје), важи $\chi(G) = 3$. △

Напомена 8.5. С обзиром на то да је у графовима са великим бројем чворова и грана људском оку тешко да разликује велики број нијанси, често се уместо бојења чворова конкретним бојама сваком чвору придружује природан број који представља боју.



5-бојење графа

♢

Позабавимо се сада неким основним особинама хроматског броја.

Теорема 8.6. *1.* $\chi(K_n) = n$.

2. Ако важи $H \subseteq G$, *онда* $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.

3. Ако важи $K_n \subseteq G$, *онда* $n \leqslant \chi(G)$.

4. $\chi(C_{2k}) = 2$, $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Доказ. 1. Како су у K_n свака два чвора суседна, произвољан чвор мора бити различите боје од свих осталих, те важи $\chi(K_n) = n$.

2. Сви чворови који су суседни у H, они морају бити суседни и у G. Стога за бојење чворова графа G нам треба бар онолико боја колико је потребно за бојење графа H.

3. Ако важи $K_n \subseteq G$, онда је n чворова међусобно суседно, те сви морају бити различитих боја.

4. Контуру парне дужине $v_1 v_2 \ldots v_{2k} v_1$ можемо обојити са две боје тако што чворове са парним индексима обојимо једном бојом а оне са непарним индексима другом бојом. Наравно, то је и најмање потребних боја, пошто ако бисмо све обојили једном бојом, суседни чворови би били исте боје. Даље, за контуру непарне дужине $v_1 v_2 \ldots v_{2k+1} v_1$ нам нису довољне 2 боје. Ако бисмо користили бојење као код контуре парне дужине, на крају би v_1 и v_{2k+1} били исте боје, но они су суседни и такво бојење није правилно. Ипак, 3 боје јесу довољне: једну боју користимо за чворове $v_1, v_3, \ldots, v_{2k-1}$, другу за $v_2, v_4, \ldots, v_{2k}$ и кад трећом обојимо чвор v_{2k+1}, добијамо правилно бојење ове контуре. □

Може се одредити када граф има хроматски број 1, 2 или бар 3, што ћемо видети у наставку.

Теорема 8.7. $\chi(G) = 1$ *ако и само ако је* G *празан граф.*

Доказ. Важи $\chi(G) = 1$ ако и само ако не постоје суседни чворови у графу. То је еквивалентно са условом да је G празан. □

Теорема 8.8. $\chi(G) = 2$ *ако и само ако је* G *бипартитан и има бар једну грану.*

Доказ. Нека важи $\chi(G) = 2$. Тада морају постојати бар два чвора који су суседни, те граф има бар једну грану. Даље, нека је X скуп свих чворова прве боје а Y скуп свих чворова друге боје. Два чвора из X не могу бити суседна, јер би то значило да нису исте боје. Исто важи и за чворове у Y. Према томе, G је бипартитан са партицијом (X, Y).

Нека је сада $G = G(X, Y)$ бипартитан и нека има бар једну грану. Чворове из X обојимо једном бојом а чворове из Y другом. Дакле, $\chi(G) \leqslant 2$. Како $E(G) \neq \emptyset$, важи $\chi(G) \neq 1$, те следи тврђење. □

Теорема 8.9. $\chi(G) \geqslant 3$ *ако и само ако* G *садржи непарну контуру.*

Доказ. Ако важи $\chi(G) \geqslant 3$, онда важи $\chi(G) \neq 1$ и $\chi(G) \neq 2$, те граф G није празан, нити бипартитан. Одавде следи да мора садржати непарну контуру, јер знамо да је граф бипартитан ако и само ако не садржи непарну контуру.

Обрнуто, ако G садржи непарну контуру, због теореме 8.6 знамо да су нам за бојење оваквог графа потребне бар три боје. □

Наредно тврђење нам даје грубу али корисну процену хроматског броја графа.

Теорема 8.10. *Сваки граф* G *је* $(\Delta(G) + 1)$*-обојив, тј.* $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Доказ. Доказ радимо индукцијом по $n = |V(G)|$. Ако G има један чвор, јасно $\Delta(G) = 0$, $\chi(G) = 1$, те тврђење важи за $n = 1$. Докажимо сада да, ако тврђење важи за све графове са строго мање од n чворова, онда мора важити и за граф G са тачно n чворова. Нека је $v \in V(G)$ произвољно. Дефинишимо $G' = G - v$. Тада важи $\Delta(G') \leqslant \Delta(G)$. На основу индукцијске хипотезе важи $\chi(G') \leqslant \Delta(G') + 1$. Дакле, граф G' је $(\Delta(G) + 1)$-обојив. Но, како важи $d_G(v) < \Delta(G)+1$, постоји бар једна боја таква да њом није обојен ниједан сусед чвора v. Том бојом можемо обојити v, те је и граф G $(\Delta(G) + 1)$-обојив. □

Наредна корисна теорема је резултат Брукса из 1941. године и њу дајемо без доказа. Њен доказ се може наћи у [9].

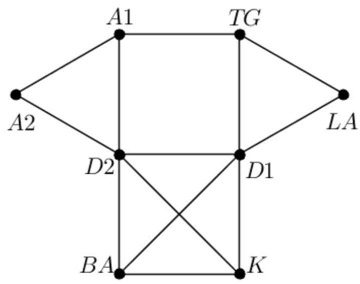
Теорема 8.11 (Брукс[1])**.** *Нека је* G *повезан граф који није ни непарна контура ни комплетан граф. Тада важи* $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

Једна од примена бојења чворова јесте у проблемима који се изучавају у рачунарству и то су такозвани проблеми распоређивања.

[1] Rowland Leonard Brooks (1916–1993), енглески математичар

Пример 8.12. Потребно је направити распоред колоквијума из предмета: Дискретна математика 1 ($D1$), Дискретна математика 2 ($D2$), Алгебра 1 ($A1$), Алгебра 2 ($A2$), Линеарна алгебра (LA), Булове алгебре (BA), Теорија графова (TG) и Комбинаторика (K), тако да је укупна дужина полагања што краћа (сви колоквијуми исто трају). Неки од колоквијума се не смеју одржавати у исто време, због професора који треба да буду присутни на њима. У табели доле стоји $\times$ код парова предмета из којих колоквијуми не могу бити истовремено. Такође треба имати у виду да су само два амфитеатра довољно велика да могу примити све студенте који полажу предмете.

	$D1$	$D2$	$A1$	$A2$	LA	BA	TG	K
$D1$		$\times$			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$D2$	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$		$\times$
$A1$		$\times$		$\times$			$\times$	
$A2$		$\times$	$\times$					
LA	$\times$						$\times$	
BA	$\times$	$\times$						$\times$
TG	$\times$		$\times$		$\times$			
K	$\times$	$\times$				$\times$		



Направимо граф G на следећи начин: чворови су предмети који се полажу а они који не могу истовремено бити у распореду повезујемо гранама. Сада ћемо сваком чвору придружити боју где ће боје представљати засебан термин за полагање. Дакле, ако одредимо хроматски број графа, то ће нам одредити и минималан број термина за полагање датих колоквијума, а самим тим ће дужина полагања бити минимална. Како је K_4 подграф графа G, знамо $\chi(G) \geqslant 4$. Покушајмо стога да нађемо неко 4-бојење графа G. Једно 4-бојење је:

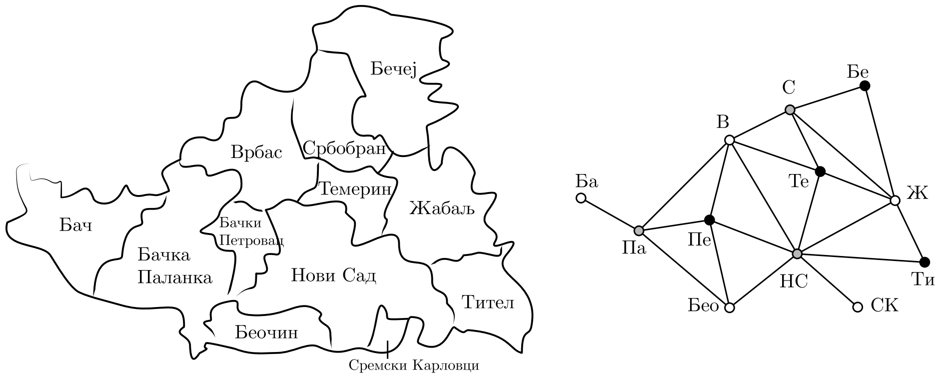
$$\begin{array}{rl} 1: & D1, A1; \\ 2: & D2, LA; \\ 3: & K, A2, TG; \\ 4: & BA. \end{array}$$

Међутим, са оваквим распоредом по терминима у трећем термину би требало да се полажу три испита а на располагању су нам само две просторије. Стога морамо покушати да један од њих пребацимо у четврти термин. Комбинаторика је суседан чвор са Буловим алгебрама, тако да ова два чвора не могу бити исте боје. Како Алгебра 2 није суседна са Буловим алгебрама, можемо њу пребацити у четврти термин. Стога је закључак да минимално трајање полагања је у четири термина и један распоред који то омогућава јесте:

$$\begin{array}{rl} 1: & D1, A1; \\ 2: & D2, LA; \\ 3: & K, TG; \\ 4: & BA, A2. \end{array}$$

△

Пример 8.13. Мапу општина у Јужнобачком округу потребно је обојити са што мање боја тако да, ради прегледности, суседне општине не буду обојене истом бојом.



Мапу ћемо представити помоћу графа: чворови ће представљати општине а гране суседства општина. Тиме дати проблем сводимо на тражење хроматског броја датог графа. Он мора бити већи од 2, јер има контуру дужине 3. На основу слике десно можемо видети да су нам довољне три боје. △

Као што смо видели, још једна примена бојења чворова јесте бојење мапа. Мапе се заправо могу представљати као планарни графови (графови које је могуће представити у равни тако да се гране не секу). Један од најпознатијих проблема теорије графова јесте управо везан за бојење планарних графова познат као *Проблем четири боје*:

Сваки планаран граф се може обојити са 4 боје.

Дакле, циљ бојења мапа јесте да буду прегледне и да се користи што мање боја. Да би се постигла прегледност, потребно је да суседне области не буду исте боје. Картографима је из искуства вековима био познато да је за тако нешто потребно највише 4 боје. Међутим, није се знало да ли је то могуће за сваку мапу. Веровало се да јесте тако увек, али доказ за то није постојао. Године 1852. студент Лондонског универзитетског колеџа је поставио то питање свом професору Де Моргану[2] и он није знао да му одговори. Проблем је представио својим колегама и тако је почело решавање које је трајало више од једног века. После разних покушаја и приступа, године 1976. је коначно америчким математичарима Апелу, Хакену и Коху (Kenneth Appel, Wolfgang Haken, John Koch) пошло за руком да уз помоћ рачунара и докажу ову хипотезу.

8.3 Бојење грана

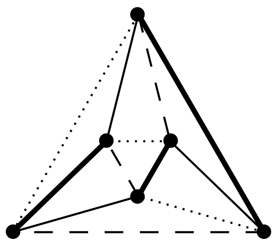
Слично као што се боје чворови можемо бојити и гране.

Бојење грана графа G је придруживање боје свакој грани графа G тако да суседне гране нису исте боје. Ако је у бојењу грана коришћено k боја, онда

[2] Augustus De Morgan (1806–1871), британски математичар и логичар

га називамо *гранско k-бојење.* За граф G кажемо да је *грански k-обојив* ако за G постоји неко l-бојење грана где $l \leqslant k$.

Хроматски индекс графа G је најмањи природан број k такав да је G грански k-обојив. Означавамо га са $\chi_l(G)$. Ако важи $\chi_l(G) = k$, кажемо и да је G *грански k-хроматски.* хроматски индекс



Пример графа чији је хроматски индекс 4.

Слично као код особина хроматског броја, није тешко испитати неке основне особине хроматског индекса.

Теорема 8.14. *1.* $\chi_l(G) \geqslant \Delta(G)$*.*

2. Ако важи $H \subseteq G$*, онда* $\chi_l(H) \leqslant \chi_l(G)$*.*

3. $\chi_l(C_{2k}) = 2$*,* $\chi_l(C_{2k+1}) = 3$*.*

Доказ. 1. Како суседне гране не могу бити обојене истом бојом, онда хроматски индекс мора бити најмање онолико колико износи највећи степен чвора у графу.

2. Пошто је свака грана подграфа H такође у графу G, за бојење грана графа G нам треба бар онолико боја колико је потребно за бојење графа H.

3. Овај део тврђења се доказује аналогно као тврђење за вредности хроматског броја за контуре парне, односно непарне дужине. У овом случају улогу чворова преузимају гране пошто је сваки чвор степена 2 и свака грана инцидентна са 2 чвора, док је број грана и број чворова исти. □

За комплетне графове могуће је одредити вредност хроматског индекса и он зависи од тога да ли је број чворова паран или непаран.

Теорема 8.15. $\chi_l(K_{2k}) = 2k - 1$*.*

Доказ. На основу теореме 8.2 знамо да је K_{2k} 1-факторизабилан и да га можемо разложити на $2k-1$ фактора $M_1, \ldots, M_{2k-1}$. Како су ово дисјунктни фактори и сваки од њих је сачињен од грана које нису суседне, сваки фактор може бити обојен једном бојом. С обзиром на то да има укупно $2k-1$ фактора, следи $\chi_l(K_{2k}) \leqslant 2k-1$. С друге стране, пошто важи $\Delta(K_{2k}) = 2k-1$, важи и обрнута неједнакост, те смо завршили доказ. □

Теорема 8.16. $\chi_l(K_{2k-1}) = 2k - 1$*.*

Доказ. Покажимо најпре да важи $\chi_l(K_{2k-1}) \geqslant 2k-1$. Претпоставимо супротно, нека важи $\chi_l(K_{2k-1}) = s < 2k-1$. Тада можемо K_{2k-1} разложити на s подграфова $G_1, \ldots, G_s$, тако да подграф G_i чине гране обојене i-том бојом и чворови инцидентни са овим гранама. Према томе, важи

$$\begin{aligned} &E(G_1) \cup \cdots \cup E(G_s) = E(K_{2k-1}), \\ &E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset \text{ за } i \neq j. \end{aligned}$$

При томе, како су гране исте боје несуседне, свака грана у E_i је инцидентна са два чвора која су у том подграфу инцидентни само са њом. Због тога важи

$$|E(G_i)| \leqslant \frac{|V(K_{2k-1})|}{2} = \frac{2k-1}{2} < k-1.$$

Сада добијамо да важи

$$|E(K_{2k-1})| = |E(G_1)| + \cdots + |E(G_s)| < s \cdot (k-1) < (2k-1) \cdot (k-1).$$

С друге стране имамо

$$|E(K_{2k-1})| = \binom{2k-1}{2} = \frac{(2k-1) \cdot (2k-2)}{2} = (2k-1) \cdot (k-1),$$

што нас доводи до контрадикције. Дакле, хроматски индекс графа K_{2k-1} може бити најмање $2k-1$. Да бисмо показали да важи једнакост, довољно је наћи једно $(2k-1)$-бојење грана графа K_{2k-1}. Додајмо чвор v на граф K_{2k-1} и повежимо га са свим чворовима. На тај начин добијамо граф K_{2k}. На основу теореме 8.15, следи да је овај граф $(2k-1)$-обојив. Одстрањивањем чвора v добијамо граф K_{2k-1} који је обојен са $2k-1$ боја. То је тражено $(2k-1)$-бојење грана. □

Наредне две теореме су врло корисне, али су им докази сложенији, те их дајемо без доказа. Читаоци доказе ових тврђења могу наћи у [9].

Теорема 8.17 (Кениг)**.** *За сваки бипартитни мултиграф G важи $\chi_l(G) = \Delta(G)$.*

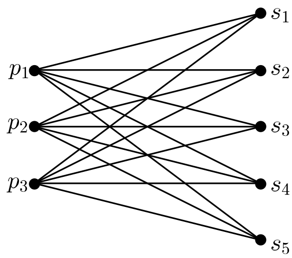
Теорема 8.18 (Визинг[3])**.** *За сваки граф G важи $\Delta(G) \leqslant \chi_l(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.*

Бојење грана графа има широку примену у рачунарству, слично као и бојење чворова, и велики део заузимају проблеми распоређивања. Они се даље примењују у практичним проблемима у индустрији, технологији, али и шире.

Пример 8.19. Пет студената треба да полажу три усмена испита код различитих професора. Редослед полагања испита није битан, битно је да свако има свој термин полагања и да укупан број термина буде минималан.

Представићемо студенте и професоре преко чворова $\{s_1, \ldots, s_5, p_1, p_2, p_3\}$ а полагање усменог ће бити представљено граном која спаја студента и професора код којег полаже испит. Тако добијамо граф $K_{3,5}$ чије гране треба обојити са што мање боја, јер ће свака боја представљати један термин, тј. гране које су исте боје ће представљати усмене који ће се одвијати истовремено.

[3]Вадим Георгійович Візінг (1937–2017), украјински математичар



Неко би рекао да је довољно да најпре прва три студента исполажу своје усмене, тако што ће се измењати код професора у цикличном реду, а кад они заврше преосталих двоје полажу своје испите. Један од таквих распореда јесте

$$\begin{array}{ll} 1: & s_1p_1, s_2p_2, s_3p_3; \\ 2: & s_1p_2, s_2p_3, s_3p_1; \\ 3: & s_1p_3, s_2p_1, s_3p_2; \\ 4: & s_4p_1, s_5p_2; \\ 5: & s_4p_2, s_5p_3; \\ 6: & s_4p_3, s_5p_1. \end{array}$$

Дакле, у оваквом случају је потребно 6 термина. Међутим, како смо добили комплетан бипартитан граф, на основу Кенигове теореме добијамо $\chi_l(K_{3,5}) = \Delta(K_{3,5}) = 5$. Дакле, могуће је наћи бојење грана са 5 боја, тј. направити распоред који ће захтевати само 5 термина. Један од таквих распореда је дат у наставку.

$$\begin{array}{ll} 1: & s_1p_1, s_2p_2, s_3p_3; \\ 2: & s_2p_1, s_3p_2, s_4p_3; \\ 3: & s_3p_1, s_4p_2, s_5p_3; \\ 4: & s_4p_1, s_5p_2, s_1p_3; \\ 5: & s_5p_1, s_1p_2, s_2p_3. \end{array}$$

$\triangle$

ГЛАВА 9

ДИГРАФОВИ

У овој последњој глави се бавимо диграфовима, тј. усмереним графовима. Пошто су њихове гране оријентисане, диграфови су погодни за представљање структура где постоји неки ток; то може бити проток информација међу различитим рачунарима, ток саобраћаја, вршење различитих процеса који могу бити извршавани само у неким одређеним редоследима. Неки од проблема су и да ли се може оријентисати мрежа путева тако да се путује што ефикасније, где се проблем своди на оријентисање графова тако да се добије јако повезан диграф. У друштвеним наукама, као што су економија и политичке науке, посебну улогу имају турнири који се између осталог користе приликом рангирања и предвиђања друштвеног избора.

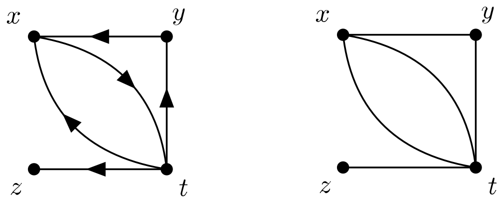
9.1 Основне особине диграфова

Диграф D (оријентисани или усмерени граф) је уређени пар (V, E), где је V скуп чворова а E скуп оријентисаних грана међу чворовима диграфа D, тј. $E = \{(x, y) : x, y \in V\}$. диграф

Грана (x, y) се често означава са $x \to y$ или само xy и кажемо да x *води ка* y, x *туче* (или *доминира, побеђује*) y, и y је *тучен* (или *доминиран, побеђен*) од x. Чвор x је *почетак*, а чвор y *крај* гране $x \to y$.

База диграфа је граф (мултиграф) који се добија када се занемаре оријентације грана.

Пример 9.1. На наредној слици лево можемо видети пример диграфа $D = (V, E)$, где $E = \{x, y, z, t\}$ и $V = \{x \to t, y \to x, t \to y, t \to x, t \to z\}$.



На слици десно је база диграфа D. $\triangle$

Напомена 9.2. Ми ћемо изучавати само графове чија је база прост граф (тј. само просте диграфове). $\diamondsuit$

излазни и улазни степен чвора

Излазни (улазни) степен чвора x у диграфу D једнак је броју грана које излазе (улазе) из x и означава се са $d^+(x)$ $(d^-(x))$.

извор
понор

Тотални степен чвора x у диграфу D је $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$. Ако важи $d^-(x) = 0$, чвор x се назива *извор*. Ако важи $d^+(x) = 0$, чвор x се назива *понор*.

Пример 9.3. Вредности излазног и улазног степена чворова диграфа D из примера 9.1 су: $d^+(x) = 1 = d^+(y)$, $d^+(z) = 0$, $d^+(t) = 3$; $d^-(x) = 2$, $d^-(y) = d^-(z) = d^-(t) = 1$; док су тотални степени чворова $d(x) = 3$, $d(y) = 2$, $d(z) = 1$, $d(t) = 4$. Диграф D има понор и то је чвор z, али извор нема. $\triangle$

Веза између суме излазних и суме улазних степена је дата у наредном тврђењу.

Теорема 9.4. *Нека је $D = (V, E)$ диграф са n чворова и m грана. Тада важи*

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = m.$$

Доказ. Једнакости важе с обзиром на то да свака грана има један почетак и један крај. Први од њих доприноси збиру излазних степена а други збиру улазних степена. $\square$

Наредна два тврђења нам дају услове за постојање оријентисане шетње, односно оријентисане контуре у диграфу.

Теорема 9.5. *Свака оријентисана $u - v$ шетња садржи оријентисан $u - v$ пут.*

Доказ. Ово тврђење је последица теореме 5.5. $\square$

Теорема 9.6. *Нека је D диграф са бар једном граном. Ако D нема понор (извор), онда D садржи оријентисану контуру.*

Доказ. Нека D нема понор. Уочимо произвољан чвор v који је инцидентан са бар једном граном. Како v није понор, постоји грана $v \to x_1$. Ни x_1 није понор, те постоји грана $x_1 \to x_2$. Пошто ниједан чвор није понор, сваки наредни чвор ће имати неки чвор који ће тући. С обзиром да је скуп чворова диграфа D коначан скуп, мора постојати неко i тако да важи

$$v \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_i \to x_{i+1} \to \cdots \to x_k \to x_i.$$

Тада је тражена оријентисана контура $x_i \to x_{i+1} \to \cdots \to x_i$.

Ако D нема извор, доказ је аналоган. □

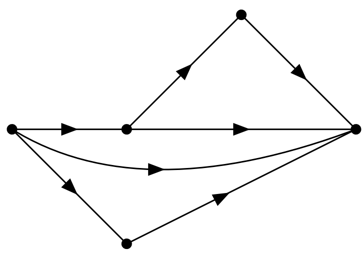
9.2 Неке врсте диграфова

Диграф је *ацикличан* ако не садржи оријентисану контуру. ацикличан

Теорема 9.7. *Ацикличан диграф са бар једном граном има и извор и понор.*

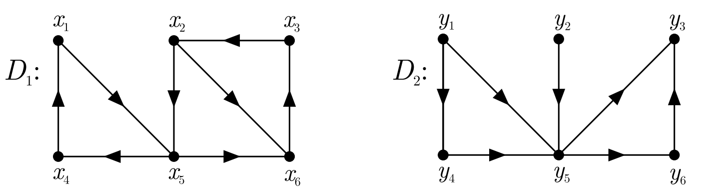
Доказ. Посматрајмо пут максималне дужине $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$. Тада је v_1 извор. Заиста, ако би постојала грана $x \to v_1$, онда посматрани пут не би могао бити максималне дужине. Аналогно се закључује да је v_k понор. □

Ацикличан диграф се назива и DAG (од енглеског израза *directed acyclic graph*). Ова класа диграфова је још једна од врста графова чије је изучавање и примена широка. На слици доле је приказан пример једног диграфа који је DAG.



Диграф је *слабо повезан* ако је његова база повезан граф, а *јако повезан*, ако за сваки пар чворова $x, y \in V$, $x \neq y$, постоји оријентисан $x - y$ пут. слабо и јако повезан диграф

Пример 9.8. На слици доле можемо видети пример диграфа D_1 који је јако повезан. Са десне стране се налази диграф D_2 који није јако повезан, јер не постоји оријентисан пут између свака два чвора (нпр. не постоји оријентисан $y_1 - y_2$ пут). Оба диграфа имају као базу граф који је повезан, те су и D_1 и D_2 слабо повезани.



△

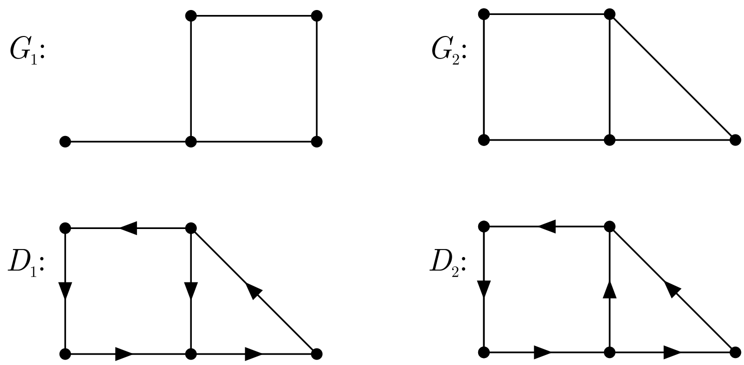
Имајући у виду претходни пример и како након брисања оријентација грана чворови остају повезани, важи наредно тврђење.

Теорема 9.9. *Сваки јако повезан диграф је и слабо повезан. Обрнуто не важи.*

оријентабилан граф

Граф (прост или мултиграф) је *оријентабилан* ако је повезан и ако се његове гране могу оријентисати тако да добијени диграф буде јако повезан. Диграф који је настао оријентисањем грана графа G означавамо са $\overrightarrow{G}$.

Пример 9.10. На слици доле можемо видети пример графа који није оријентабилан. То је граф G_1. Овај граф има висећи чвор, те ако висећу грану оријентишемо ка висећем чвору, онда неће постојати ниједан оријентисани пут који креће од посматраног висећег чвора. Слично и ако висећу грану оријентишемо обрнуто.



Граф G_2 са слике горе јесте оријентабилан, један пример оријентисања грана тако да добијени диграф буде јако повезан јесте D_1. Ово није јединствено такво оријентисање, диграф D_2 је још један такав пример који се од G_1 разликује само у оријентацији једне гране. Дакле, и D_1 и D_2 бисмо могли означити са $\overrightarrow{G_2}$. Наравно, када један од њих означимо тако, онда онај други не можемо означавати на тај начин, јер су ова два диграфа међусобно различита. △

Теорема 9.11. *Сваки Ојлеров и сваки Хамилтонов граф је оријентабилан.*

Доказ. Нека је G Ојлеров граф и нека је $v_1 v_2 \dots v_k$ његова затворена Ојлерова стаза. Ако гране оријентишемо на следећи начин: $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$, онда је овако оријентисан граф $\overrightarrow{G}$ јако повезан.

Нека је сада G Хамилтонов граф и $v_1 v_2 \dots v_n$ његова Хамилтонова контура. Ако гране ове контуре оријентишемо $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$, док преостале гране оријентишемо на произвољан начин, добијамо јако повезан диграф. □

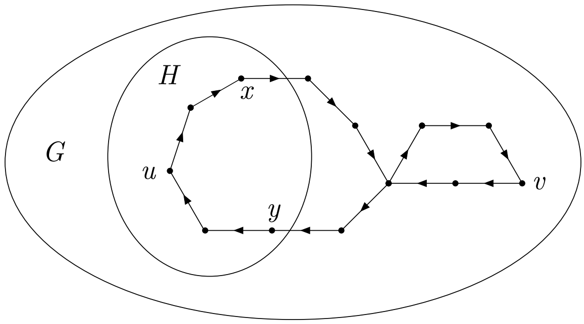
Теорема 9.12. *Нека је G повезан граф са бар 2 чвора. Граф G је оријентабилан ако и само ако нема мостове.*

Доказ. Ако претпоставимо да је G оријентабилан, онда је $\overrightarrow{G}$ јако повезан. Уколико би постојала грана $e = x \to y$ која је мост, онда не би постојао $y - x$ пут, пошто би се y и x налазили у различитим компонентама графа $G - e$.

Нека сада граф G нема мостове и нека је H максималан подграф графа G по броју грана који је оријентабилан. (Такав подграф увек постоји, јер граф којег чини један чвор јесте оријентабилан.) Разликујмо два случаја:

1. $\underline{V(H) = V(G)}$. У овом случају је G оријентабилан, јер гране из $E(G) \setminus E(H)$ можемо оријентисати произвољно.

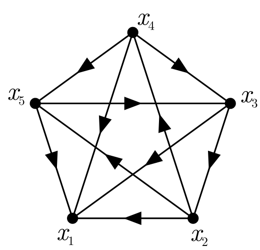
2. $\underline{V(H) \neq V(G)}$. Нека су $u \in V(H)$ и $v \in V(G) \setminus V(H)$ произвољни. Како G нема мостова, постоје бар два грански дисјунктна $u - v$ пута. Нека су чворови x и y „последњи“ на овим путевима који се налазе у H. Како је H оријентабилан, постоји оријентисан $u - x$ пут. Сада део $u - v$ пута који садржи x и који се налази ван H, тј. део $x - v$, оријентишемо тако да се добије оријентисан $x - v$ пут. Тада од описана два пута добијамо оријентисан $u - v$ пут у G.



Аналогно, у H постоји оријентисан $y - u$ пут, па се део другог $u - v$ пута оријентише тако да на крају добијемо оријентисан $v - u$ пут у G. На овај начин подграф који се добија од H и ових додатних оријентисаних грана заједно са свим чворовима који су инцидентни са додатим гранама даје оријентабилан подграф графа G који је већи од H. Према томе, долазимо до контрадикције са претпоставком да је H максималан оријентабилан подграф. $\square$

Турнир је диграф $T = (V, E)$ са особином да за сваки пар различитих чворова $x, y \in V$ важи тачно једно од: $x \to y$ и $y \to x$. турнир

Пример 9.13. На слици доле је приказан један пример турнира који има пет чворова.



$\triangle$

Напомена 9.14. База сваког турнира је комплетан граф. $\diamondsuit$

Турнири се јављају као модели спортских турнира у којима нема нерешених мечева. Грана представља један меч и усмерена је од победника ка губитнику, па се $d^+(x)$ назива и *скор* и означава са $s(x)$.

Турнир је *транзитиван* ако за свака три различита чвора $x, y, z \in V$ важи

$$(x \to y \wedge y \to z) \Rightarrow x \to z.$$

Пример 9.15. Скорови турнира из примера 9.13 су: $s(x_1) = 0$, $s(x_2) = 3$, $s(x_3) = 2$, $s(x_4) = 3$, $s(x_5) = 2$. Овај турнир није транзитиван, јер $x_4 \to x_3$ и $x_3 \to x_2$ и при томе не важи $x_4 \to x_2$. △

Наредно тврђење важи с обзиром на то да је база турнира комплетан граф.

Теорема 9.16. *Ако је T турнир са n чворова, онда:*

1. $d^+(v) + d^-(v) = n - 1$ *за све* $v \in V(T)$,
2. $\sum_{v \in V(T)} d^+(v) = \sum_{v \in V(T)} d^-(v) = |E(T)| = \binom{n}{2}$.

Тврђење у наставку даје везу међу транзитивним и ацикличним турнирима са степенима скоровима чворова.

Теорема 9.17. *Нека је T турнир са n чворова. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *T је ацикличан турнир.*
2. *T је транзитиван турнир.*
3. *Скорови чворова турнира T су* $0, 1, \ldots, n - 1$.

Доказ. ($1 \Rightarrow 2$) Нека је T ацикличан и претпоставимо да за неке x, y, z важи $x \to y$ и $y \to z$. Турнир мора садржати тачно једну од грана $x \to z$ и $z \to x$. Ако садржи другу грану, онда имамо оријентисану контуру $x \to y \to z \to x$, што је немогуће јер је T ацикличан. Дакле, садржи грану $x \to z$, те је T транзитиван.

($2 \Rightarrow 3$) Нека је T транзитиван турнир. Како има n чворова и њихови скорови могу имати вредности од 0 до $n - 1$, довољно је показати да не постоје два чвора са истим скором. Претпоставимо супротно, нека за два чвора x и y важи $s(x) = s(y)$ и нека $x \to y$. За свако z за које важи $y \to z$, због транзитивности важи и $x \to z$. Због тога имамо $s(x) \geqslant s(y) + 1$, што нас доводи до контрадикције.

($3 \Rightarrow 1$) Означимо чворове турнира T са $v_1, v_2, \ldots, v_n$ тако да важи $s(v_i) = i - 1$. Тада за $i > j$ мора важити $v_i \to v_j$. Докажимо да је тада T ацикличан. Уколико би T имало оријентисану контуру, онда би морала постојати грана $v_j \to v_i$ за $i > j$, али то је немогуће. □

Пошто у претходном тврђењу добијамо да у транзитивном турниру постоје чворови чији су скорови 0 и $n - 1$, као последицу добијамо наредно тврђење.

Теорема 9.18. *Сваки транзитиван турнир има извор и понор.*

Још једна особина турнира јесте постојање Хамилтоновог пута.

Теорема 9.19. *Сваки турнир има оријентисан Хамилтонов пут.*

Доказ. Доказ радимо индукцијом по броју чворова n у турниру. Јасно, за турнире са једним или два чвора тврђење важи. Претпоставимо да сваки турнир са $n-1$ чворова има оријентисан Хамилтонов пут и докажимо да тада овакав пут има и турнир T са n чворова. Уочимо произвољан чвор v у турниру T. Граф $T-v$ је турнир са $n-1$ чворова, те на основу индукцијске хипотезе он садржи оријентисан Хамилтонов пут. Нека је то $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{n-1}$. Уколико турнир T садржи грану $v \to v_1$ или $v_{n-1} \to v$, онда је јасно да и T има оријентисан Хамилтонов пут. Нека сада T садржи гране $v_1 \to v$ и $v \to v_{n-1}$. Тада мора постојати $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ тако да су $v_i \to v$ и $v \to v_{i+1}$ гране турнира T (ако не би постојало, то би значило да или v туче све чворове или је тучен од свих, што је немогуће због тога што важи $v_1 \to v$ и $v \to v_{n-1}$). Тада је тражени Хамилтонов пут $v_1 \to \cdots \to v_i \to v \to v_{i+1} \to \cdots \to v_{n-1}$. $\square$

Чвор x турнира T је *кинг* ако за сваки чвор $y \neq x$ постоји оријентисан пут из x у y дужине највише 2. кинг

Теорема 9.20. *Сваки турнир има бар једног кинга.*

Доказ. За турнир са једним чвором тривијално важи да има кинга. Стога разматрајмо T са n чворова, где $n \geqslant 2$. Нека је v чвор турнира T са максималним скором и нека је $u \in V(T) \setminus \{v\}$ произвољно. Уколико важи $v \to u$, то је оријентисан пут из v у u дужине 1. Нека сада $u \to v$. Ако би за свако w такво да $v \to w$ важило да $u \to w$, онда би било $s(u) \geqslant s(v) + 1$, међутим то нас доводи до контрадикције јер је v са максималним скором, тј. важи $s(v) \geqslant s(u)$. Према томе, постоји неко w тако да $v \to w$ и $w \to u$. Сада је $v \to w \to u$ оријентисан $v-u$ пут дужине 2, те можемо закључити да је v кинг турнира T. $\square$

Турнир може имати јединственог кинга, али не мора. У примеру 9.13 дати турнир има три кинга, то су чворови x_2, x_3 и x_4. Потребан и довољан услов када турнир има јединственог кинга је дат у наредном тврђењу.

Теорема 9.21. *Турнир има јединственог кинга ако и само ако има извор.*

Доказ. Нека је x јединствен кинг турнира T. Пошто x има највећи скор, онда је његов улазни степен најмањи и јединствен је такав. Стога је он једини чвор у турниру који може бити извор. Претпоставимо да x није извор. Тада је скуп чворова V_x који туку x непразан. Посматрајмо подграф индукован овим скупом чворова. Он је турнир, те има кинга. Нека је то чвор y. Покажимо да је тада y кинг турнира T, тј. да и за све чворове z из $V(T) \setminus V_x$ важи да постоји оријентисан $y-z$ пут дужине највише 2. Пошто $y \in V_x$, важи $y \to x$. А како су у V_x сви они чворови који туку x, у $V(T) \setminus (V_x \cup \{x\})$ се налазе сви они које x туче, тј. за $z \in V(T) \setminus (V_x \cup \{x\})$ важи $x \to z$. Дакле, за овакве z имамо оријентисан пут $y \to x \to z$. На овај начин долазимо до закључка да је y кинг турнира T различит од x, што је у супротности са претпоставком да T има јединственог кинга.

Обрнуто, нека турнир има извор x. Тада x туче све остале чворове, па је и једини такав. Дакле, x мора бити кинг који је јединствен. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory*, Series: Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 2008.

[2] И. Бошњак, Д. Машуловић, В. Петровић, Р. Тошић, *Збирка задатака из теорије графова*, Универзитет у Новом Саду, 2005.

[3] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[4] G. Chartrand, L. Lesniak, P. Chang, *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall, London, 2016.

[5] D. I. A. Cohen, *Basic techniques of combinatorial theory*, John Willey and Sons, New York, 1978.

[6] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 1 (3rd Ed.): Fundamental Algorithms*, Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., Redwood City, 1997.

[7] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2008.

[8] П. Младеновић, *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2013.

[9] В. Петровић, *Теорија графова*, Универзитет у Новом Саду, 1998.

[10] Р. Тошић, *Комбинаторика*, Универзитетски уџбеник, Нови Сад, 1999.

[11] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2001.

ИНДЕКС