UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nenad Teofanov **Milica Žigić**

Osnovi optimizacije

Novi Sad, 2018.

Naziv udžbenika:	"Osnovi optimizacije"
Autori:	Dr Nenad Teofanov, redovni profesor PMF–a u Novom Sadu
	Dr Milica Žigić, docent PMF–a u Novom Sadu
Rezenzenti:	Dr Ljiljana Gajić, redovni profesor PMF–a u Novom Sadu
	Dr Tijana Levajković, docent Saobraćajnog fakulteta u Beogradu
Lektor:	Radmila Brkić
Izdavač:	Prirodno–matematički fakultet
	Departman za matematiku i informatiku

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu od 26.02.2018. godine, odobreno je štampanje i upotreba ovog udžbenika.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

517.97(075.8)

ТЕОФАНОВ, Ненад
Osnovi optimizacije [Elektronski izvor] / Nenad Teofanov, Milica Žigić. - Novi Sad: Prirodno–matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2018

Način dostupa
(URL): https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/teofanov_zigic_osnovi_optimizacije.pdf. - Opis zasnovan na stanju na dan 27.3.2018. - Nasl. s naslovnog ekrana. - Napomene i objašnjenja u beleškama uz tekst. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-361-3
1. Жигић, Милица
a) Оптимизација - Варијациони рачун
COBISS.SR-ID 322361095

Predgovor

Udžbenik je namenjen prvenstveno studentima matematike na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, ali smatramo da može biti od koristi svima koji žele da se upoznaju sa osnovama nelinearne optimizacije. Sadržaj udžbenika u potpunosti pokriva program predmeta "Optimizacija" koji se, po programu za školsku 2018/19. godinu, predaje kao izborni predmet na višim godinama osnovnih akademskih studija matematičkih smerova.

Knjiga je plod višegodišnjeg iskustva koje su autori sticali kao predavači na predmetima iz oblasti matematičkog programiranja i teorije optimizacije na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

Autori se zahvaljuju recenzentima udžbenika dr Ljiljani Gajić, redovnom profesoru Prirodno–matematičkog fakulteta u Novom Sadu i dr Tijani Levajković, docentu Saobraćajnog fakulteta u Beogradu na korisnim primedbama i sugestijama. Takođe se zahvaljuju nekadašnjim asistentima Jeleni Nedeljković i Filipu Tomiću koji su učestvovali u pripremi zadataka za vežbu, kao i Svetlani Prodanov Malić koja je pripremila crteže.

Novi Sad, 2018.

Autori

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Optimizacija je reč latinskog porekla. Reč *optimas* se prevodi kao jedan od najboljih, a *optimus*, superlativ od bonus (komparativ je melior), znači najbolji, najprikladniji, najzgodniji. S obzirom na to da se problemi optimizacije najčešće formulišu kao problemi određivanja maksimuma ili minimuma određenih matematičkih objekata, navešćemo na ovom mestu i latinsku sentencu *Maximus in minimis deus.*[1] Pojam *ekstrem* podrazumeva istovremeno pojmove maksimuma ili minimuma, a nastao je od latinske reči *extremus* u značenju krajnji, poslednji, najveći, najviši, najslabiji, najgori, najniži.[2]

Problem optimizacije se formalizuje jezikom matematičke analize, što podrazumeva *određivanje funkcionele f definisane nad nekim skupom X* i *nekog podskupa $Q \subseteq X$*.[3] Skup X se obično naziva *prostor dopustivih elemenata*, a $x \in Q$ *je tačka dopustiva pri ograničenju.* Formalizacija problema glasi: Odrediti ekstremne vrednosti funkcionele f, dok $x \in Q$. Ako je $Q = X$, onda je to zadatak bez ograničenja. Tačka $x_0 \in Q$ jeste *tačka apsolutnog (globalnog) minimuma* funkcionele f nad Q ako (i samo ako) je

[1] Bog je u najmanjim stvarima najveći. Izreka se pripisuje Pliniju starijem (27–79), u delu Historia Naturalis.

[2] Extremus je superlativ prideva exter koji znači spoljašnji. Komparativ je exterior.

[3] Da je f funkcionela nad X znači da je svakom elementu $x \in X$ (originalu) pridružen tačno jedan realan broj $f(x)$.

$f(x) \geq f(x_0)$ za sve $x \in Q$. Ako gornji uslov važi za sve $x \in Q \cap U$, gde je U neka okolina tačke x_0, onda je x_0 *tačka lokalnog minimuma* funkcionele f. Slično važi i za maksimum.

S obzirom na to da je maksimum funkcionele f jednak suprotnoj vrednosti minimuma funkcionele $-f$, a zbog jednostavnosti izlaganja, trvđenja će se najčešće formulisati u vidu zadataka minimuma. Odgovarajuća tvrđenja za maksimum formulišu se i dokazuju analogno.

U istorijskom smislu, najpre su posmatrani matematički modeli s određivanjem ekstrema funkcije jedne promenljive, a zatim i zadaci s određivanjem uređenih $n-$torki relanih brojeva. Nasuprot takvim problemima, nakon otrića diferencijalnog računa i njegove primene u fizici (mehanici, pre svega) posmatraju se problemi čije rešenje je izvesna funkcija, koja pripada beskonačno-dimenzionom prostoru funkcija. Ova podela je uslovila i uslovnu podelu udžbenika na dva dela. U prvom se proučava konveksna analiza nad konačno-dimenzionim domenom, a u drugom delu se izlažu osnove varijacionog računa, gde se ekstrem traži u nekom prostoru funkcija.

U ovom poglavlju se uvode apstraktne matematičke strukture koje definišu ambijent u kojem se traže rešenja problema optimizacije u ovom kursu.

Prostor nad kojim će se tražiti rešenja biće neki podskup $n-$dimenzionog skupa realnih brojeva ili neki podskup klase neprekidnih ((dva puta) neprekidno diferencijabilnih) funkcija nad nekim zadatim intervalom.

U opštem slučaju, traganje za ekstremnim vrednostima se svodi na iznalaženje algoritma (iterativnog postupka) kojim se dobija preciznija informacija o rešenju nakon svake iteracije, što podrazumeva mogućnost merenja razlike između stvarnog i aproksimativnog rešenja generisanog algoritmom. U tu svrhu, uvode se *metrički prostori* u kojima je definisano rastojanje (međusobna udaljenost) posmatranih objekata, kao i konvergencija nizova. Pri kvantitativnoj analizi rešenja, potrebna je i informacija o "veličini" posmatranih objekata, pa se u metričku strukturu uvodi *norma*. S obzirom na to da se norma uvodi u vektorskom prostoru, u normiranim prostorima je moguće ispitivati konvergenciju redova. Na kraju, postojanje *skalarnog proizvoda* u posmatranoj strukturi otvara mogućnost konstrukcije "brzih" algoritama zasnovanih na upotrebi ortogonalnih sistema. U pozadini navedenih struktura potrebno je obezbediti i *kompletnost* koja, grubo govoreći, obezbeđuje da rešenje posmatranog problema pripada klasi posmatranih objekata.

Prostor realnih brojeva, kao i prostor $n-$torki realnih brojeva poseduje sva gore navedena svojstva. Da bi se navedena svojstva "prenela" na podskupove ($n-$dimenzionog) skupa realnih brojeva, a radi rešavanja problema s ograničenjima, uvodimo i *topološku strukturu.* Na taj način, većina teorema ima opšti karakter, odnosno, topološka struktura se ovde koristi kao prirodna/prigodna alatka za "bezbolan" prelaz sa konačno-dimenzionog slučaja na slučaj beskonačnodimenzionih prostora.

Takozvani klasični metod podrazumeva pretpostavku diferencijabilnosti posmatrane funkcionele, pa se navodi u posebnom poglavlju. Konačno, navodi se i uopštenje teoreme Vajerštrasa u slučaju kada je funkcionela f poluneprekidna u posmatranoj oblasti. Vajerštrasova teorema je ključna teorema o egzistenciji rešenja problema optimizacije. Takođe, poluneprekidne funkcije imaju značajnu ulogu u matematičkoj analizi, na primer, pojam integrabilnosti u Lebegovom smislu zasniva se na proučavanju graničnih vrednosti nizova poluneprekidnih funkcija.[4]

1.1 Hilbertovi prostori

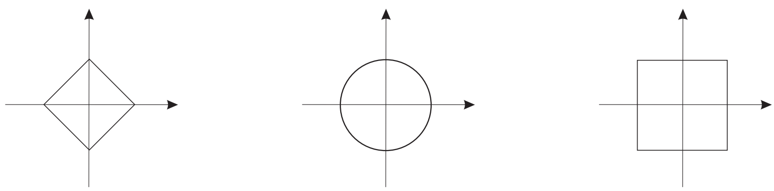
Metrički prostor je uređen par (X, d), gde je X neprazan skup, a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ je funkcionela za koju važi:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$,
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$.

[4] Niz neprekidnih funkcija nad kompaktnim skupom može da konvergira ka fukknciji koja ima prekid, dok je granična vrednost niza poluneprekidnih funkcija nad kompaktnim skupom uvek poluneprekidna funkcija nad tim skupom, videti [15].

Najznačajniji primer metričkog prostora u ovom kursu je $\mathbb{R}^n$ sa euklidskom metrikom $d(x,y) := \left[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right]^{1/2}$, gde je $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Može se pokazati da metrika d nad nekim skupom, ako postoji, ne mora biti jedinstvena. U $\mathbb{R}^n$ metrika može da se definiše i sledećim funkcionelama:

$$d_\infty(x,y) = \max_{k=1,\ldots,n}\{|x_k-y_k|\} \quad \text{ili} \quad d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}^n.$$



Slika 1.1. Različite metrike u $\mathbb{R}^2$: $d_1(x,0)=1,\ d(x,0)=1$ i $d_\infty(x,0)=1$.

Metrika je neprekidna funkcija kojom se meri rastojanje tačaka. Takođe, konvergencija niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$ ka elementu $x\in X$ definiše se na sledeći način

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ako i samo ako} \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0,$$

odnosno ako i samo ako

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_0\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon).$$

Granica niza u metričkom prostoru je jedinstvena. Ako niz konvergira u nekoj od navedenih metrika prostora $\mathbb{R}^n$ onda on konvergira i u preostale dve metrike.

Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ je Košijev niz u metričkom prostoru X ako važi

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n,m\in\mathbb{N})(n,m\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon).$$

Metrički prostor je *kompletan* ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.

Podsetimo se, struktura X je *vektorski prostor* nad poljem realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, ako je $(X, +)$ komutativna grupa i ukoliko je definisano preslikavanje $\mathbb{R} \times X \to X$, tako da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ važi:

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
4. $1x = x$,

pri čemu je slika para $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X$ označena sa $\alpha x \in X$. Vektorski prostor se obično definiše nad proizvoljnim poljem skalara, ali u ovom kursu će se radi transparentnijeg izlaganja gradiva uglavnom koristiti polje realnih brojeva.

Neutralni element operacije sabiranja, nula ili koordinatni početak, obično predstavlja referentnu tačku vektorskog prostora, a mera rastojanja od referentne tačke u vektorskom prostoru X određuje se normom.

Vektorski prostor $(X, \|\cdot\|)$ je normiran ako preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ispunjava sledeće uslove:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ i $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$.

Svaki normiran prostor je metrički, jer normom može da se definiše metrika na sledeći način: $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in X$. Kaže se da je ta metrika indukovana normom $\|\cdot\|$. U opštem slučaju, metrički prostor nije normiran. On čak ne mora biti ni vektorski prostor.

Na primer, $\mathbb{R}^n$ je normiran vektorski prostor gde je euklidska norma data sa $\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Takođe, prostor $C[a, b]$, neprekidnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je vektorski prostor sa normom

$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Slično, prostor $C^1[a,b]$, neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a,b]$ je vektorski prostor sa normom

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|.$$

U ovom prostoru norma može da se definiše i sa $x \mapsto \max_{t\in[a,b]}\{|x(t)|, |x'(t)|\}$.

Direktnim uopštenjem može se zaključiti da je prostor $C^n[a,b]$, n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a,b]$ takođe jedan normiran vektorski prostor.

Ako je normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ kompletan, onda se on naziva *Banahov prostor*. Može se pokazati da je svaki normiran prostor konačne dimenzije kompletan, videti [13].

U vektorskom prostoru X nad poljem realnih brojeva, preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ za koje važi:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in X$ i $\langle x, x\rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y, z \in X$,
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\forall x, y \in X$,

naziva se *skalarni proizvod*. Skalarni proizvod indukuje normu na sledeći način $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in X$. Vektorski prostor $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ zove se pred-Hilbertov prostor, ali i *unitarni vektorski prostor*. Hilbertov prostor je unitarni prostor, koji je kompletan.

Primer 1.1. Prostor $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je Hilbertov prostor, odnosno kompletan vektorski prostor sa skalarnim proizvodom

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

gde je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Štaviše, svaki konačno-dimenzioni Hilbertov prostor $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ dimenzije n je kongruentan[5] sa $\mathbb{R}^n$.

[5] Postoji preslikavanje $J : (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ koje je bijekcija, linearno i očuvava skalarni proizvod $\langle x, y\rangle = \langle J(x), J(y)\rangle_X$, (videti [13]).

Postavlja se pitanje da li u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ postoji preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tako da važi $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$, za sve $x \in X$? Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 1.2. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Potreban i dovoljan uslov za postojanje skalarnog proizvoda $\langle\cdot,\cdot\rangle$, koji generiše normu $\|\cdot\|$, dat je sa*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

Ova jednakost se naziva zakon paralelograma.

Jasno, u svakom unitarnom prostoru zakon paralelograma je ispunjen, ali on ne mora da važi u svakom normiranom prostoru, što se vidi iz zadatka 1.3.

U nastavku će se često koristiti Koši - Švarcova nejednakost. U normiranom prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ skalarni proizvod vektora je definisan sa

$$\langle x, y\rangle := \|x\|\|y\|\cos\gamma, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

gde je sa γ označen "ugao" između vektora x i y. Lako se proverava da je na ovaj način definisan skalarni proizvod. Jasno, iz $|\cos\gamma| \leq 1$, direktno sledi Koši - Švarcova nejednakost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ovaj "dokaz" u prvom redu služi za lako pamćenje nejednakosti. U suštini, ugao između ne-nula vektora x i y se definiše svojim kosinusom: $\cos\gamma := \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$.

Alternativni dokaz se zasniva na sledećem zadatku optimizacije.

Lema 1.3. *Neka je X vektorski prostor sa skalarnim proizvodom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i neka je sa $\|\cdot\|$ označena norma indukovana tim skalarnim proizvodom.*

1. *Za svako $x, y \in X$ postoji realan parametar λ, tako da je vrednost $\|x - \lambda y\|$ minimalna.*

2. *Dokazati Koši - Švarcovu nejednakost: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ x, y \in X$.*

Dokaz. 1. Pretpostavlja se da je $y \neq 0$. Važi:

$$\|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle.$$

To je kvadratna funkcija po λ sa minimalnom vrednošću u tački $\lambda_* = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$.

2. Jasno, iz $\|x - \lambda y\|^2 \geq 0$ direktno sledi da je odgovarajuća kvadratna funkcija pozitivna za sve vrednosti λ. Posebno, u tački λ_* važi

$$\langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle + \left(\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right)^2 \langle y, y\rangle \geq 0,$$

odakle sledi $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$, odnosno $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, što je i trebalo pokazati. □

1.2 Osnovni topološki pojmovi

Posmatra se metrički prostor (X, d). Otvorena lopta[6] sa centrom u $x_0 \in X$, poluprečnika $r > 0$, je data sa

$$L_r(x_0) = \{x \in X \ : \ d(x, x_0) < r\}.$$

Primećuje se da za svako $x \in L_r(x_0)$ može da se konstruiše $L_{r_1}(x)$ tako da je $L_{r_1}(x) \subset L_r(x_0)$. To je motivacija za sledeću definiciju.

Definicija 1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $\mathcal{O} \subset X$ je otvoren skup ako za svaki element $x \in \mathcal{O}$ postoji $r > 0$, tako da je $L_r(x) \subset \mathcal{O}$. Zatvoren skup je, po definiciji, komplement otvorenog skupa.*

Neka je sa τ označena kolekcija otvorenih skupova $\mathcal{O}$ metričkog prostora (X, d). Tada važi:

1. $X, \emptyset \in \tau$.

2. $\mathcal{O}_k \in \tau$, $k = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow \bigcap_{k=1}^m \mathcal{O}_k \in \tau$.

3. $\mathcal{O}_\lambda \in \tau$, $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda \in \tau$.

[6]Na engleskom jeziku "ball", što se često prevodi i sa kugla, sfera.

Za proizvoljan indeksni skup Λ, koriste se oznake

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda = \{x \in X \mid (\exists\lambda \in \Lambda)\ x \in \mathcal{O}_\lambda\},$$
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda = \{x \in X \mid (\forall\lambda \in \Lambda)\ x \in \mathcal{O}_\lambda\}.$$

Sa druge strane, svaka struktura (X, τ) sa navedenim svojstvima se naziva *topološki prostor*. U opštem slučaju, topološki prostor (X, τ) je struktura u kojoj kolekcija skupova τ ispunjava već navedene uslove, pri čemu se otvoren skup ne definiše metrikom, nego pripadnošću kolekciji τ. Dakle, metrički prostor (X, d) definiše topologiju τ generisanu kolekcijom otvorenih lopti $L_r(x)$, $x \in X$, $r > 0$. Topologija u $\mathbb{R}^n$ definisana pomoću lopti zove se uobičajena topologija.

Kolekcija zatvorenih skupova $\mathcal{F}$ topološkog prostora (X, τ) je po definiciji data sa $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid F = X \setminus O,\ O \in \tau\}$. Za kolekciju $\mathcal{F}$ važi da je $\emptyset, X \in \mathcal{F}$, zatim $F_\lambda \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$, kao i da je $F_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, 2, \dots, m \Rightarrow \bigcup_{k=1}^m F_k \in \mathcal{F}$.

Uvedimo sada pojmove i svojstva topoloških prostora neophodne za dalji rad.

Neka je (X, τ) topološki prostor i $A \subset X$.

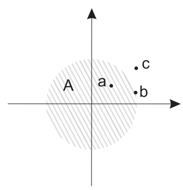
Tačka $x \in X$ je *unutrašnja tačka* skupa A, ako postoji otvoren skup $\mathcal{O}$, tako da važi $x \in \mathcal{O} \subset A$. Može se dokazati da je u metričkom prostoru izraz "postoji otvoren skup koji sadrži x" ekvivalentan sa "postoji otvorena lopta koja sadrži x". U tom smislu biće nekad korišćen pojam "otvoren skup", a nekad "otvorena lopta", iako se u opštem slučaju ovi pojmovi značajno razlikuju. (Jasno, svaka otvorena lopta je otvoren skup, ali obratno ne mora da važi.) Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A zove se *unutrašnjost skupa* A i označava sa A°.

Tačka x je *rubna tačka* skupa A, ako svaki otvoren skup koji je sadrži ima neprazan presek sa skupom A i sa njegovim komplementom. Skup rubnih tačaka, *rub skupa* A označava se sa ∂A.

Skup U je *okolina tačke* x, ukoliko on sadrži neki otvoren skup koji sadrži tačku x. Jasno, otvoren skup je okolina svake svoje tačke.

Tačka x je *adherentna tačka skupa* A, ukoliko svaka njena okolina seče skup A. Ako svaka okolina tačke x seče skup $A \backslash \{x\}$ onda se x zove *tačka nagomilavanja* skupa A. Svaka tačka nagomilavanja skupa A je i adherentna tačka tog skupa. Skup adherentnih tačaka skupa A zove se *adherencija* ili *zatvaranje skupa* A i označava se sa $\bar{A}$, a skup tačaka nagomilavanja skupa A označava se sa A'. Tačka x je *izolovana tačka* skupa A, ukoliko postoji njena okolina U, tako da je $U \cap A = \{x\}$.

Primer 1.5. Neka su date tačke $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ takve da je $\|a\| < \|b\| < \|c\|$, i skup $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < \|b\|\} \cup \{c\}$, videti sliku 1.2.



Slika 1.2. Odnos tačke i skupa u uobičajenoj topologiji u $\mathbb{R}^2$.

Važi:

	A	A°	∂A	A'	$\bar{A}$	izolovana
a	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
b	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
c	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

Sledeća teorema je od velikog značaja, jer su u njoj navedena značajna svojstva zatvorenih skupova koja će se koristiti u daljem radu. Dokaz Teoreme 1.6 se može naći u [16, str. 84], videti i zadatak 1.5.

Teorema 1.6. *Neka je (X, τ) topološki prostor i $A \subset X$. Važi:*

a) $\bar{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A.

b) A je zatvoren ako i samo ako je $A = \bar{A}$.

c) $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.

d) $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup A'$.

e) A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

Skup A je *gust podskup* skupa B, ako je $\bar{A} = B$. Topološki prostor (X, τ) je separabilan ako sadrži prebrojiv gust skup. Tako je $\mathbb{R}^n$ separabilan, jer $n-$torke racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^n$ čine njegov prebrojiv gust podskup.

U topološkom prostoru (X, τ) niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački x, ako za svaku okolinu U tačke x postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za sve $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Granica niza, u opštem slučaju, ne mora da bude jedinstvena, videti zadatak 1.6.

Ideja gustog skupa i konvergencije niza elemenata iz gustog skupa u separabilnom prostoru ima značajnu ulogu u teoriji aproksimacije i u osnovi je velikog broja numeričkih algoritama.

Podsetimo na još neke pojmove koji su od značaja za nastavak izlaganja. Neka je dat niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u topološkom prostoru (X, τ). Tačka x je tačka nagomilavanja tog niza ako postoji njegov podniz $\{x_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, koji konvergira ka x. Može se dokazati da je x tačka nagomilavanja skupa $U \subset X$, ako i samo ako postoji niz tačaka $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ skupa U, tako da je $x_k \neq x$, $k \in \mathbb{N}$, i da važi $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Podsetimo se $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je podniz niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ako je n_k, $k \in \mathbb{N}$ strogo rastući niz prirodnih brojeva.

Niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ograničen sa donje strane ako postoji $M \in \mathbb{R}^n$ za koje važi $M \leq x_k$, za sve $k \in \mathbb{N}$, pri čemu se oznaka $\leq$ odnosi na svaku koordinatu. Ako posmatrani niz nije ograničen sa donje strane onda postoji koordinatni podniz $\{x^l_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, za neko $l \in \{1, \ldots, n\}$, koji divergira ka $-\infty$. Dualno se definiše i ograničenost sa gornje strane.

U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ izdvaja se najmanja i najveća tačka nagomilavanja niza $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, i naziva limes inferior i limes superior niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, redom (videti zadatak 1.9).

Definicija 1.7. *Neka je niz realnih brojeva* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *ograničen sa donje strane. Broj a je limes inferior tog niza, u oznaci* $\liminf_{k\to\infty} x_k = a$, *ako važi:*

1. *postoji barem jedan podniz tog niza,* $\{x_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$*, koji kongergira ka* a*;*

2. *ne postoji tačka nagomilavanja tog niza koja je manja od* a*.*

Ako posmatrani niz nije ograničen sa donje strane, onda je, po definiciji, njegov limes inferior jednak sa $-\infty$, a ako je $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$, onda je i $\liminf_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Slično se definiše i najveća tačka nagomilavanja, limes superior, niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i označava sa $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

U topološkom prostoru (X,τ) klasa otvorenih skupova $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ zove se otvoreni pokrivač skupa $A \subset X$, ako je $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$. Potklasa otvorenog pokrivača koja je takođe otvoreni pokrivač skupa A zove se potpokrivač.

Definicija 1.8. *Skup* A *je kompaktan u* (X,τ)*, ako svaki njegov pokrivač sadrži konačan potpokrivač.*

Familija skupova ima osobinu konačnog preseka ukoliko svaka njena konačna potfamilija ima neprazan presek. Potreban i dovoljan uslov za kompaktnost jeste da svaka kolekcija zatvorenih skupova koja ima osobinu konačnog preseka ima neprazan presek. Može se pokazati da u prostoru $\mathbb{R}^n$ važi sledeća teorema (njen dokaz je dat u [27]).

Teorema 1.9. *Neka je* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Sledeći izrazi su ekvivalentni.*

1. *Svaki otvoreni pokrivač skupa* A *sadrži konačan potpokrivač (Hajne-Borelova osobina).*

2. *Svaki beskonačni podskup skupa* A *ima tačku nagomilavanja i ona pripada skupu* A *(Bolcano-Vajerštrasova osobina).*

3. *Svaki niz elemenata skupa* A *sadrži konvergentan podniz i granica tog podniza je element skupa* A*.*

4. A *je zatvoren i ograničen.*

5. *Svaka familija zatvorenih podskupova skupa* A*, koja ima osobinu konačnog preseka, ima neprazan presek (barem jednu zajedničku tačku).*

U metričkom prostoru (X, d) rastojanje tačke x od skupa A definiše se sa

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Ovom funkcijom definisaće se projekcija tačke na skup, što se koristi u kvalitativnoj analizi. Preciznije, pomoću projekcije tačke na skup definišu se mnogi numerički metodi minimizacije, kao, na primer, Galerkinov i Njutnov metod. Zbog toga će projekcija tačke na skup biti posebno ispitivana u nastavku.

Zatvaranje skupa i pojam rastojanja tačke od skupa su na prirodan način povezani, videti zadatak 1.8.

1.3 Neprekidnost i diferencijabilnost

Ideja neprekidnosti je tesno povezana sa stabilnošću. Intuitivno i neprecizno, može se reći da je neprekidnost svojstvo kod kojeg "male promene" domena imaju za posledicu "male promene" slike. Nešto slabiji pojam, poluneprekidnost, biće izložen naknadno.

Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori i x_0 proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je *neprekidna u tački* x_0, ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0) \in Y$ postoji okolina U tačke x_0, tako da je $f(u) \in V$ za sve $u \in U$. Jasno, u metričkim prostorima (X, d_X) i (Y, d_Y) funkcija $f : X \to Y$ je *neprekidna u tački* x_0, ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

U metričkom prostoru neprekidnost funkcije f u tački x_0 je ekvivalentna sekvencijalnoj neprekidnosti funkcije f, odnosno činjenici da za svaki niz koji konvergira ka x_0 odgovarajući niz slika konvergira ka $f(x_0)$. Ova karakterizacija će se često koristiti u nastavku.

Preslikavanje $J : U \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ je diferencijabilno u tački $u \in U^\circ$, ukoliko postoji vektor $v \in \mathbb{R}^n$ s osobinom

$$\Delta J(u) := J(u + h) - J(u) = \langle v, h \rangle + o_u(h),$$

pri čemu važi $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o_u(h)}{\|h\|} = 0$. Vektor h pripada nekoj okolini nule, tako da je $u + h \in U$. Za fiksirano h broj $\langle v, h\rangle$ zove se *diferencijal* funkcije J u tački u koji odgovara priraštaju h, a koji će se označavati sa $dJ(u)$. Vektor v označavaće se sa $J'(u)$. On se zove gradijent funkcije J u tački u i može se pokazati da je

$$J'(u) = \left(\frac{\partial J(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial J(u)}{\partial u_n}\right),$$

gde je $\dfrac{\partial J(u)}{\partial u_k} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{J(u + \alpha e^k) - J(u)}{\alpha}$, e^k je vektor čije su koordinate, osim $k-$te jednake nuli, a $k-$ta koordinata vektora e^k jednaka je sa 1, $k = 1, \dots, n$. *Prvi izvod* funkcije J u tački $u \in U^\circ$ je linearno preslikavanje koje vektoru h dodeljuje vrednost $\langle J'(u), h\rangle$. Naravno, iz diferencijabilnosti funkcije J u tački u sledi njena neprekidnost u toj tački.

Napomena. Za razliku od funkcija jedne realne promenljive, postojanje parcijalnih izvoda funkcije J u nekoj tački nije dovoljan uslov za neprekidnost funkcije u toj tački. Dovoljan uslov za neprekidnost u tački je neprekidnost svih parcijalnih izvoda u toj tački. Kada je reč o diferencijabilnosti, iz neprekidnosti parcijalnih izvoda u tački u sledi njena diferencijabilnost u toj tački. Ovaj uslov, međutim, nije i potreban. Postoje primeri funkcija diferencijabilnih u nekoj tački, čiji parcijalni izvodi nisu svi neprekidni u toj tački, videti [11, Glava 9].

Podsetimo se, kvadratna forma je funkcija $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j$ promenljive $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, koja je jednoznačno određena simetričnom matricom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}.$$

Ako se označi sa Au vektor kolona sa koordinatama $(Au)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}u_j$,

$i = 1, \dots, n$, kvadratna forma može da se zapiše u obliku $\langle Au, u\rangle$.

Definicija 1.10. *Neka je J funkcija definisana u nekoj okolini tačke $u \in \mathbb{R}^n$. Kaže se da je J dva puta diferencijabilna u tački u, ako, zajedno sa gradijentom $J'(u)$, postoji simetrična matrica $J''(u)$ reda $n \times n$ takva da se priraštaj funkcije J u tački u može predstaviti u obliku*

$$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h\rangle + \frac{1}{2}\langle J''(u)h, h\rangle + o_u(h), \tag{1.1}$$

gde je $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o_u(h)}{\|h\|^2} = 0.$

Za dato h (jasno, $u+h$ pripada okolini tačke u na kojoj je J definisana) veličina $d^2J(u) = \langle J''(u)h, h\rangle$ zove se drugi diferencijal funkcije J u tački u koji odgovara priraštaju h. Drugi izvod je bilinearno preslikavanje (kvadratna forma) određeno matricom drugog izvoda $J''(u)$. Može se pokazati da je

$$J''(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J(u)}{\partial (u_1)^2} & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_1 \partial u_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_n \partial u_1} & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_n \partial u_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_n \partial u_n} \end{pmatrix}.$$

Klasični metod traženja ekstremnih vrednosti zasniva se na pretpostavkama o diferencijabilnosti posmatrane funkcije.

Podsetimo se načina rešavanja problema određivanja bezuslovnog ekstrema na $\mathbb{R}^n$. Neka je J diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$ i neka se traže njene ekstremne vrednosti nad čitavim $\mathbb{R}^n$ (zato se kaže da se traži bezuslovni ekstrem). Ekstremne tačke tada mogu biti samo one tačke za koje važi $J'(u) = 0$, što može da se napiše u obliku sistema

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sve tačke koje ispunjavaju ovaj uslov zovu se stacionarne tačke funkcije J na $\mathbb{R}^n$. Ako je J dva puta diferencijabilna u nekoj okolini stacionarne tačke v i ukoliko su svi parcijalni izvodi drugog reda te funkcije neprekidni po v onda važi

a) Ako je $\langle J''(v)h, h\rangle > 0$ za sve $h \neq 0$ takve da $v + h$ pripada posmatranoj okolini tačke v onda je v tačka strogog lokalnog minimuma funkcije J nad $\mathbb{R}^n$. (Drugim rečima, kvadratna forma $\langle J''(v)h, h\rangle$ je pozitivno definitna. Podsetimo se, potreban i dovoljan uslov za pozitivnu definitnost jeste pozitivnost svih glavnih minora matrice $J''(v)$. Za negativnu definitnost, taj uslov je dat sa $(-1)^k J''_k(v) > 0$, gde su sa $J''_k(v)$, $k = 1, \dots, n$ označeni glavni minori matrice $J''(v)$.)

b) Ako je $\langle J''(v)h, h\rangle < 0$ za sve $h \neq 0$ takve da $v + h$ pripada posmatranoj okolini tačke v, onda je v tačka lokalnog maksimuma funkcije J nad $\mathbb{R}^n$.

c) Ako $\langle J''(v)h, h\rangle$ uzima i pozitivne i negativne vrednosti za različite izbore vektora h, onda v nije ekstremna tačka posmatrane funkcije.

U nastavku će biti navedene formule konačnog priraštaja za funkcije više realnih promenljivih. One će biti intenzivno korišćene pri dokazivanju teorema konveksne analize.

Definicija 1.11. *Funkcija J je neprekidno diferencijabilna ili glatka na skupu $U \in \mathbb{R}^n$, ako je diferencijabilna na U i pri tome*

$$\lim_{h\to 0} \|J'(u+h) - J'(u)\| = 0, \quad \forall u, u+h \in U.$$

Klasa glatkih funkcija nad skupom U biće označavana sa $C^1(U)$.

Definicija 1.12. *Funkcija J je dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu $U \subset \mathbb{R}^n$, ako je dva puta diferencijabilna na U i pri tome*

$$\lim_{h\to 0} \|J''(u+h) - J''(u)\| = 0, \quad \forall u, u+h \in U.$$

Klasa ovih funkcija označavaće se sa $C^2(U)$.

U prvoj definiciji norma se odnosi na normu vektora - gradijenta, a u drugoj definiciji se posmatra norma matrice drugog izvoda (gde je $\|A\| = \sup_{\|e\|=1} \|Ae\|$).

Pretpostavimo da je J definisana na U. Neka $u, u+h \in U$, i neka $u+th \in U$ za sve $t \in (0,1)$ (ovaj uslov je naravno ispunjen ako je U konveksan skup). Tada, za fiksirano u i $u+h$ može da se posmatra funkcija $f(t) = J(u+th)$, kao funkcija jedne realne promenljive $t \in [0,1]$. Ako je $J \in C^k(U)$, $k = 1,2$, onda je $f \in C^k([0,1])$, $k = 1,2$ pri čemu važi:

$$f'(t) = \langle J'(u+th), h\rangle, \quad f''(t) = \langle J''(u+th)h, h\rangle. \tag{1.2}$$

To sledi iz jednakosti (1.1).

Podsetimo se, teoreme srednje vrednosti za f glase:

$$f(t) - f(0) = f'(\theta_1 t)t = \int_0^t f'(\tau)d\tau = f'(0)t + \frac{1}{2}f''(\theta_2 t)t^2,$$

$$f'(t) - f'(0) = f''(\theta_3 t)t, \quad \text{za neke} \quad 0 \le \theta_1, \theta_2, \theta_3 \le 1.$$

Ako se u ovim formulama stavi $t = 1$ i iskoristi (1.2) dobijaju se formule konačnog priraštaja funkcije J :

$$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u+\theta_1 h), h\rangle = \int_0^1 \langle J'(u+\tau h), h\rangle d\tau, \tag{1.3}$$

$$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h\rangle + \frac{1}{2}\langle J''(u+\theta_2 h)h, h\rangle, \tag{1.4}$$

$$\langle J'(u+h) - J'(u), h\rangle = \langle J''(u+\theta_3 h)h, h\rangle, \tag{1.5}$$

za neke $0 \le \theta_1, \theta_2, \theta_3 \le 1$.

Dalje, pošto je $\frac{d}{dt}J'(u+th) = J''(u+th)\cdot h,\ 0 \le t \le 1$ integracijom po t na $[0,1]$ dobija se:

$$J'(u+h) - J'(u) = \int_0^1 J''(u+th)hdt = \left(\int_0^1 J''(u+th)dt\right)h.$$

Definicija 1.13. *Neka $J \in C^1(U)$. Kaže se da gradijent J' funkcije J ispunjava uslov Lipšica na skupu U sa konstantom $L \ge 0$, ako važi*

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le L\|u - v\|, \quad u, v \in U.$$

Klasa ovih funkcija označavaće se sa $C^{1,1}(U)$.

Lema 1.14. *Neka je U koveksan skup i neka $J \in C^{1,1}(U)$. Tada važi*

$$\left|J(u) - J(v) - \langle J'(u), u - v\rangle\right| \leq L\frac{\|u - v\|^2}{2}, \quad \forall u, v \in U.$$

Dokaz. Iz formule (1.3) sledi:

$$J(u) - J(v) - \langle J'(u), u - v\rangle = \int_0^1 \langle J'(u + \tau(u - v)) - J'(u), u - v\rangle d\tau,$$

a iz Koši -Švarcove nejednakosti $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\|\|b\|$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ i Lipšicovog uslova sledi:

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v) - \langle J'(u), u - v\rangle| &\leq \int_0^1 \left|J'(u + \tau(u - v)) - J'(u)\right| |u - v| d\tau \\ &\leq \int_0^1 L|u - v|^2 |\tau| d\tau = L\frac{\|u - v\|^2}{2}. \end{aligned}$$ □

Na kraju, navodi se i teorema o inverznoj funkciji koja će se koristiti u nastavku. Ovde će se po prvi put u izlaganju koristiti funkcija koja za kodomen ima $\mathbb{R}^n$. Funkcija $J = (J_1, J_2, \ldots, J_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiše se kao uređena $n-$torka funkcija $J_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, odnosno,

$$J(u) = (J_1(u), J_2(u), \ldots, J_n(u)), \quad u \in U.$$

Poznato je da je funkcija J neprekidna (neprekidno diferencijabilna) ako su funkcije J_i, $i = 1, \ldots, n$ neprekidne (neprekidno diferencijabilne).

Teorema 1.15. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, $J = (J_1, J_2, \ldots, J_n) : U \to \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna, $c \in U$ i*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial J_1}{\partial x_2}(c) & \ldots & \frac{\partial J_1}{\partial x_n}(c) \\ \frac{\partial J_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial J_2}{\partial x_2}(c) & \ldots & \frac{\partial J_2}{\partial x_n}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial J_n}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial J_n}{\partial x_2}(c) & \ldots & \frac{\partial J_n}{\partial x_n}(c) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.6}$$

Tada postoji otvorena okolina $V \subset U$ tačke c i otvorena okolina W tačke $J(c)$, tako da je $J[V] = W$ i $J|_V$ ima inverznu funkciju $J^{-1} : W \to V$, koja je takođe neprekidno diferencijabilna funkcija.

1.4 Poluneprekidnost, Vajerštrasova teorema i uopštenja

Osnovna Vajerštrasova teorema kaže da neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže svoj infimum i supremum. Cilj ovog poglavlja jeste da se pokaže na koji način se uslov neprekidnosti može zameniti slabijim uslovom poluneprekidnosti.

Zadatak ekstrema se sastoji u traženju ekstrema posmatrane funkcije. Definicija koja sledi govori preciznije o tome šta prethodna rečenica podrazumeva.

Definicija 1.16. *Tačka* $u_* \in U$ *je tačka apsolutnog (globalnog) minimuma funkcionele* J *nad skupom* $U \subseteq \mathbb{R}^d$*, ako je* $J(u_*) \leq J(u)$ *za sve* $u \in U$*. Veličina* $J(u_*)$ *naziva se minimalna vrednost funkcionele* J *nad* U*. Skup svih tačaka minimuma označava se sa* U_**. Tačka* $u_* \in U$ *je tačka lokalnog minimuma funkcionele* J *nad skupom* U*, ako postoji* $r > 0$*, tako da je* $J(u_*) \leq J(u)$ *za sve* $u \in U \cap L_r(u_*)$*.*

Dakle, kada se kaže minimum funkcije, nije baš uvek jasno da li se govori o tački minimuma, minimalnoj vrednosti ili o uređenom paru kojeg čine tačka minimuma i minimalna vrednost posmatrane funkcije. To će se uvek videti iz konteksta.

Sledeći primer ilustruje ulogu domena na problem egzistencije i jedinstvenosti rešenja zadatka ekstrema.

Primer 1.17. Odrediti minimalnu vrednost funkcije $\sin^2(\frac{\pi}{u})$ i U_* ako je domen: *a)* $[1,2]$, *b)* $[\frac{1}{3},1]$, *c)* $(0,1]$ i *d)* $[2,\infty)$.

Rešenje. Pošto minimalna vrednost date funkcije ne može biti manja od nule, rešavanje zadatka može da počne posmatranjem jednačine $\sin^2(\frac{\pi}{u}) = 0$ nad skupom pozitivnih realnih brojeva, a zatim posmatranjem njene restrikcije nad zadatim domenima. Rešenja jednačine su oblika $\frac{1}{k}$, gde je k prirodan broj. Dakle, važi: a) $U_* = \{1\}$; b) $U_* = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$; c) $U_* = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$; d) $U_* = \emptyset$. □

Zaključak. Za zadatu funkciju ekstremni zadatak ne mora da ima rešenje (slučaj d)), a ako ima rešenje, ono može biti jedinstveno (slučaj a)), a moguće je da postoji konačno mnogo (slučaj b)), prebrojivo mnogo (slučaj c)) ili čak neprebrojivo mnogo rešenja (nije teško konstruisati odgovarajući primer). Primećuje se da, u slučaju d) prethodnog primera, za niz $\{2,3,4,\dots\}$ elemenata domena važi da niz slika $\{\sin^2(\frac{\pi}{k})\}_{k\in\mathbb{N},k\geq 2}$ konvergira ka nuli kada k teži ka beskonačnosti.

Funkcionela J je ograničena sa donje strane na skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$, ako postoji $M \in \mathbb{R}$, tako da je $J(u) \geq M$ za sve $u \in U$. Funkcionela J nije ograničena sa donje strane na U, ako i samo ako postoji niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $u_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, tako da važi $\lim_{k\to\infty} J(u_k) = -\infty$.

Neka je $J_* = \inf_{u\in U} J(u)$. Ako funkcionela J nije ograničena sa donje strane na U onda je $J_* = -\infty$. Dakle, $J_* > -\infty$, ako i samo ako važi:

1. $J_* \leq J(u)$, za sve $u \in U$,

2. za svako $\varepsilon > 0$, postoji $u_\varepsilon \in U$, tako da važi $J(u_\varepsilon) < J_* + \varepsilon$.

Primećuje se da, ako je $U_* \neq \emptyset$, onda je $\inf_{u\in U} J(u) = \min_{u\in U} J(u)$.

Definicija 1.18. *Niz* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $u_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$ *je minimizirajući niz funkcionele* J *nad* U, *ako važi* $\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$.

Na osnovu definicije infimuma sledi da minimizirajući niz funkcionele J nad skupom U uvek postoji.

Definicija 1.19. *Niz* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $u_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$ *konvergira ka skupu* $\tilde{U}$, *ako važi da je* $\lim_{k\to\infty} d(u_k, \tilde{U}) = 0$, *gde je sa* $d(\cdot, \tilde{U})$ *označeno rastojanje tačke od skupa* $\tilde{U}$.

Konstrukcija minimizirajućeg niza ima značajnu ulogu pri rešavanju problema određivanja vrednosti J_*, ali, u opštem slučaju, ne i prilikom određivanja tačke $u_* \in U_*$. Dakle, pri numeričkom rešavanju problema određivanja vrednosti J_*, ona može da se aproksimira sa $J(u_k)$ za dovoljno veliko k i neki minimizirajući niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, a pri rešavanju problema određivanja približne vrednosti tačke minimuma $u_* \in U_*$, traži se minimizirajući niz

$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, koji konvergira ka U_*, pri čemu se u_* aproksimira vektorom u_k za dovoljno veliko $k \in \mathbb{N}$.

Na primer, ako je U zatvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^n$, a J neprekidna nad U, onda je J ograničena sa donje strane, $U_* \neq \emptyset$ i svaki minimizirajući niz konvergira ka U_*. To je posledica Teoreme 1.23. Međutim, u opštem slučaju ne mora svaki minimizirajući niz da konvergira ka U_* (videti zadatak 1.16).

Definicija 1.20. *Data je funkcionela J nad nepraznim skupom $U \subset \mathbb{R}^n$. Funkcionela J je poluneprekidna odozdo (sa donje strane) u tački $u \in U$, ako za svaki niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, koji konvergira ka u važi* $\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$. *Funkcionela J je poluneprekidna odozdo na skupu U, ako je poluneprekidna odozdo u svakoj tački tog skupa.*

Analogno se definiše poluneprekidnost odozgo (sa gornje strane). Direktno iz definicije se zaključuje da je svaka neprekidna funkcija istovremeno i poluneprekidna i sa gornje i sa donje strane.

Poluneprekidne funkcije imaju značajnu ulogu u teoriji verovatnoće. Naime, funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X, koja je osnovni pojam teorije verovatnoće, je poluneprekidna funkcija sa gornje strane.

Čitaocu se ostavlja da pokaže da je J poluneprekidna sa donje strane u tački $v \in U$, ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da za sve $u \in U \cap L_\delta(v)$ važi nejednakost $J(u) > J(v) - \varepsilon$.

Definicija 1.21. *Data je funkcionela J nad skupom U. Skup $M_c = \{u \in U \mid J(u) \leq c\}$ naziva se Lebegov skup funkcije J.*

Lema 1.22. *Neka je U zatvoren podskup u $\mathbb{R}^n$. Potreban i dovoljan uslov da $J : U \to \mathbb{R}$ bude poluneprekidna odozdo na U jeste da su svi Lebegovi skupovi M_α, $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcije J nad U zatvoreni.*

Štaviše, ako je J poluneprekidna odozdo na U onda je skup U_* tačaka minimuma funkcije J nad U zatvoren skup.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je J poluneprekidna sa donje strane i neka je α proizvoljan realan broj. Ako je M_α prazan skup, onda je on zatvoren. Ako se pretpostavi da je M_α neprazan skup, tada treba pokazati da sve tačke nagomilavanja skupa M_α pripadaju tom skupu. Neka je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u M_α, i $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$. Jasno, pošto je U zatvoren, $u_0 \in U$. Takođe, $J(u_n) \leq \alpha$, za sve $n \in \mathbb{N}$, pa iz poluneprekidnosti sledi $J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \leq \alpha$, odnosno $u_0 \in M_\alpha$.

Skup U_* je ili prazan skup, pa samim tim i zatvoren, ili je jedan od Lebegovih skupova funkcije J, $U_* = M_{J_*}$, pa je opet zatvoren.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da su svi Lebegovi skupovi funkcije J na U zatvoreni. Neka je u_0 proizvoljna tačka skupa U i neka je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u U, koji konvergira ka u_0. Treba da se pokaže da je $\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u_0)$. Označimo $\liminf_{n\to\infty} J(u_n)$ sa a. Ako je $a = -\infty$, onda za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $n_k \in \mathbb{N}$ takvo da je $J(u_{n_k}) < -k$, pa $u_{n_k} \in M_{-k}$. Jasno, za sve $l > k$ važi $M_{-l} \subseteq M_{-k}$, odnosno $u_{n_l} \in M_{-k}$ za sve $l > k$. Pošto je M_{-k} zatvoren i $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u_0$ sledi da $u_0 \in M_{-k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$, pa je $J(u_0) = -\infty$, što ne može biti. Dakle, $a > -\infty$. Po definiciji limes inferiora to znači da postoji podniz $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ niza $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tako da važi $\lim_{k\to\infty} J(u_{n_k}) = a$. Odavde sledi da za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $J(u_{n_k}) < a+\varepsilon$ za sve $k \geq k_0$. Prema tome, $u_{n_k} \in M_{a+\varepsilon}$ za sve $k \geq k_0$. Iz zatvorenosti skupa $M_{a+\varepsilon}$ i konvergencije posmatranog podniza sledi da $u_0 \in M_{a+\varepsilon}$, odnosno $J(u_0) \leq a+\varepsilon$ za sve $\varepsilon > 0$. Dakle, $J(u_0) \leq a = \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$, odnosno, J je poluneprekidna odozdo u u_0, što je i trebalo dokazati. $\square$

Sledeća teorema se često zove osnovna Vajerštrasova teorema.

Teorema 1.23. *Neka je U neprazan i kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $J : U \to \mathbb{R}$ poluneprekidna sa donje strane na U. Tada važi:*

1. $J_* = \inf_{u\in U} J(u) > -\infty$,

2. *Skup $U_* = \{u \in U \mid J(u) = J_*\}$ je neprazan, kompaktan i svaki minimizirajući niz konvergira ka U_*.*

Dokaz. Pokazaće se istovremeno prvi deo tvrđenja i $U_* \neq \emptyset$. Zna se da minimizirajući niz uvek postoji. Neka je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ proizvoljan minimizirajući niz, to jest, neka je $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J_*$. Pošto je U kompaktan, sledi da postoji konvergentan podniz $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ posmatranog niza. Neka je granica tog podniza označena sa $u_0 \in U$. Iz poluneprekidnosti funkcije J u tački $u_0 \in U$ sledi:

$$J(u_0) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = J_*.$$

Naravno, $J_* \leq J(u_0)$ uvek važi. Time je dokazan prvi deo tvrđenja i $U_* \neq \emptyset$.

Pokažimo da je U_* kompaktan skup, odnosno da svaki niz njegovih elemenata sadrži konvergentan podniz čija granica pripada U_*. Neka je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U_*$ proizvoljan niz. Kao niz elemenata kompaktnog skupa U on sadrži konvergentan podniz $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, koji konvergira u U. Neka je granica tog podniza u_0. Tada, $J(u_{n_k}) = J_*$, a iz poluneprekidnosti funkcije J sledi $\liminf_{k\to\infty} J(u_{n_k}) \geq J(u_0)$. Odavde je $J(u_0) = J_*$, odnosno $u_0 \in U_*$, što je i trebalo dokazati.

Preostaje još da se pokaže da svaki minimizirajući niz $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ konvergira ka skupu U_*. Jasno, $d(u_n, U_*) \geq 0$, pa je i $\liminf_{n\to\infty} d(u_n, U_*) \geq 0$. U nastavku će se pokazati da je $\limsup_{n\to\infty} d(u_n, U_*) = 0$.

Neka je $a := \limsup_{n\to\infty} d(u_n, U_*) \leq \infty$. Tada postoji podniz $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ kojim se dostiže a, odnosno, $a = \lim_{k\to\infty} d(u_{n_k}, U_*)$. Na osnovu kompaktnosti skupa U, iz tog podniza može da se izdvoji konvergentan podniz $\{u_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$. Neka je $\lim_{l\to\infty} u_{n_{k_l}} = u_* \in U$.

Iz poluneprekidnosti funkcije J sledi:

$$J(u_*) \leq \liminf_{l\to\infty} J(u_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} J(u_{n_{k_l}}) = J_*,$$

(jer je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ minimizirajući niz, tj. $J_* = \lim_{n\to\infty} J(u_n)$), pa $u_* \in U_*$. Iz neprekidnosti funkcije rastojanja tačke od skupa sledi:

$$\lim_{l\to\infty} d(u_{n_{k_l}}, U_*) = d\big(\lim_{l\to\infty} u_{n_{k_l}}, U_*\big) = d(u_*, U_*) = 0,$$

jer $u_* \in U_*$. Sa druge strane

$$0 = \lim_{l\to\infty} d(u_{n_{k_l}}, U_*) = \lim_{k\to\infty} d(u_{n_k}, U_*) = a,$$

jer se posmatra podniz $\{d(u_{n_{k_l}}, U_*)\}_{l\in\mathbb{N}}$ niza $\{d(u_{n_k}, U_*)\}_{k\in\mathbb{N}}$, koji je konvergentan. Odavde sledi:

$$0 = a = \limsup_{n\to\infty} d(u_n, U_*) \geq \liminf_{n\to\infty} d(u_n, U_*) \geq 0.$$

Time je teorema dokazana. $\square$

Naredne teoreme su uopštenja upravo dokazane osnovne Vajerštrasove teoreme.

Teorema 1.24. *Neka je U neprazan i zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$, neka je $J : U \to \mathbb{R}$ poluneprekidna sa donje strane na U i neka je, za neko $u_0 \in U$ Lebegov skup $M = \{u \in U \mid J(u) \leq J(u_0)\}$ ograničen. Tada važi:*

1. $J_* = \inf_{u \in U} J(u) > -\infty$,
2. *Skup $U_* = \{u \in U \mid J(u) = J_*\}$ je neprazan, kompaktan i svaki minimizirajući niz iz M konvergira ka U_*.*

Dokaz. Naravno, za $u \in U \backslash M$ važi $J(u) > J(u_0)$, pa J ne dostiže minimalnu vrednost nad skupom $U \backslash M$, što znači da može da se posmatra restrikcija $J_{|M}$ funkcije J na skup M. Na osnovu Leme 1.22 Lebegov skup M je zatvoren. Pošto je i ograničen, može da se primeni prethodna teorema na $J_{|M}$. Time je dokaz završen. □

Napomena. Za minimizirajuće nizove iz U, koji nisu elementi skupa M prethodno tvrđenje, u opštem slučaju, ne važi (videti zadatak 1.16).

Teorema 1.25. *Neka je U neprazan i zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$, neka je $J : U \to \mathbb{R}$ poluneprekidna sa donje strane na U i neka za svaki niz $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ za koji je $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty$ važi $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \infty$. Tada važi:*

1. $J_* = \inf_{u \in U} J(u) > -\infty$,
2. *Skup $U_* = \{u \in U \mid J(u) = J_*\}$ je neprazan, kompaktan i svaki minimizirajući niz konvergira ka U_*.*

Dokaz. Ako je U ograničen skup, tvrđenje se svodi na osnovnu Vajerštrasovu teoremu. Tada ne postoji niz $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takav da je $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty$. Pretpostavlja se, dakle, da U nije ograničen. Tada sigurno postoji barem jedan niz njegovih elemenata za koji važi $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty$. Prema pretpostavci, važi $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \infty$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $J(u_{n_0}) > J_*$. Stavimo $u_0 := u_{n_0}$. Posmatra se Lebegov skup

$$M = \{u \in U \mid J(u) \leq J(u_0)\}.$$

Pokažimo da je M ograničen. U suprotnom, postojao bi niz $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, za koji važi $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = \infty$. Tada je i $\lim_{n\to\infty} J(z_n) = \infty$, pa $z_n \notin M$ za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, što je kontradikcija. Sada tvrđenje sledi direktno iz prethodne teoreme. $\square$

Napomena. Način izbora tačke u_0, $J(u_0) > J_*$ implicira da za svaki ograničen minimizirajući niz $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $u_n \in M$ za sve $n \geq n_0$. Sa druge strane, iz uslova teoreme je jasno da nijedan neograničen niz ne može biti minimizirajući.

Posledica 1.26. *Ako je U neprazan i zatvoren u $\mathbb{R}^n$ onda za svako $x \in \mathbb{R}^n$ postoji $u \in U$, tako da važi $d(x, U) = d(x, u)$.*

Dokaz. Neka je x proizvoljan vektor. Posmatra se neprekidna funkcija $g(z) = \|z - x\|$, $z \in \mathbb{R}^n$. Za $\|z\|$ dovoljno veliko važi $g(z) \geq \|z\| - \|x\|$. To sledi iz nejednakosti $\|a - b\| \geq |\|a\| - \|b\||$, ako se, na primer, uzme $\|z\| \geq \|x\|$. Odavde je $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$ za svaki niz $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ za koji važi $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = \infty$. Dakle, posmatrana funkcija ispunjava uslove prethodne teoreme nad proizvoljnim nepraznim zatvorenim skupom U, pa je $U_* \neq \emptyset$ i $g_* > -\infty$. Prema tome, postoji $u \in U$ tako da je $d(x, U) = \inf_{z\in U} d(x, z) = d(x, u)$. $\square$

1.5 Zadaci za vežbu

Zadatak 1.1. Neka je X proizvoljan skup. Pokazati da je preslikavanje $d_{01} : X^2 \to \mathbb{R}$ dato sa $d_{01}(x, y) = 0$ za $x = y$ i $d_{01}(x, y) = 1$ za $x \neq y$, metrika na skupu X.

Zadatak 1.2. Neka je dat vektorski prostor neprekidnih funkcija

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ neprekidna}\}.$$

Pokazati da je preslikavanje $\|\cdot\| : C[a, b] \to \mathbb{R}$ dato sa

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} \{|f(x)|\},$$

norma na prostoru $C[a, b]$.

Zadatak 1.3. Pokazati da u prostoru $(C[0,1], \|\cdot\|)$, definisanom kao u prethodnom zadatku, ne važi zakon paralelograma.

Uputstvo. Lako se pokazuje da za funkcije $x(t) = t^2$ i $y(t) = 1,\ t \in [0,1]$ ne važi zakon paralelograma. $\square$

Zadatak 1.4. Pokazati da metrički prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nije kompletan.

Zadatak 1.5. Dokazati tvrđenja Teoreme 1.6.

Uputstvo. Za dokazivanje tvrđenja pod $a)$ treba pokazati da je

$$\overline{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda, \quad A \subseteq K_\lambda,\ K_\lambda \text{ zatvoren},$$

tj. da svaki zatvoren skup koji sadrži skup A sadrži i sve adherentne tačke skupa A. Tada će skup $\overline{A}$ biti zatvoren skup, kao presek familije zatvorenih skupova i to, naravno, najmanji koji sadrži A. $\square$

Zadatak 1.6. (Najgrublja topologija) Dat je topološki prostor $(\mathbb{R}, \tau)$, gde je $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Pokazati da je τ topologija. Pokazati da u ovoj topologiji proizvoljan niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka svakom $x \in \mathbb{R}$.

Uputstvo. Za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ jedina okolina U koja ga sadrži jeste $U = \mathbb{R}$, pa za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $x_n \in U$. $\square$

Zadatak 1.7. (Najfinija topologija) Posmatra se topološki prostor $(\mathbb{R}, \tau)$, gde je $\tau = \mathcal{P}(X)$, partitivni skup skupa X. Pokazati da je τ topologija. Pokazati da u ovoj topologiji niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je stacionaran niz, odnosno $x_n = x,\ n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 1.8. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$ neprazan. Tada je

$$\bar{A} = \{x \in X \mid\ d(x, A) = 0\}.$$

Rešenje. Označimo sa $A' = \{x \in X \mid\ d(x, A) = 0\}$.

Pokažimo prvo da je $\bar{A} \subset A'$. Neka je $x \in \bar{A}$. Tada u svakoj okolini tačke x postoji tačaka skupa A, odnosno za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\tilde{a} \in A$, tako da je $0 \leq d(x, \tilde{a}) < \varepsilon$. Jasno, za sve $a \in A$ važi $d(x, a) \geq 0$. Dakle, $0 = \inf_{a \in A} d(x, a) = d(x, A)$, te se dobija $x \in A'$.

Slično se pokazuje i obrnuta inkluzija $A' \subset \bar{A}$. Neka je $x \in A'$, odnosno neka je $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = 0$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\tilde{a} \in A$, tako da je $d(x, \tilde{a}) < \varepsilon$. Dakle, u svakoj $\varepsilon-$okolini tačke x ima elemenata skupa A, te je $x \in \bar{A}$. $\square$

Zadatak 1.9. Pokazati da ako je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ograničen sa donje strane onda je $\liminf_{k \to \infty} x_k = a$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$,

1. postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je $x_k > a - \varepsilon$ za sve $k > N$,

2. za sve $m \in \mathbb{N}$, postoji $k_m \in \mathbb{N}$, tako da je $x_{k_m} \leq a + \varepsilon$.

Zadatak 1.10. Neka su nizovi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ograničeni. Dokazati sledeća tvrđenja:

1. $\liminf\limits_{n \to \infty} c a_n = c \liminf\limits_{n \to \infty} a_n, \quad c = const > 0;$

2. $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n + \liminf\limits_{n \to \infty} b_n \leq \liminf\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n)$ i naći primer za strogu nejednakost;

3. $\limsup_{k \to \infty} a_k = - \liminf_{k \to \infty} (-a_k);$

4. $\liminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\limsup_{n \to \infty} a_n}, \quad a_n > 0.$

Zadatak 1.11. Pokazati da je funkcionela $J : U \to \mathbb{R}$ poluneprekidna sa donje strane u tački $v \in U$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da za sve $u \in U \cap L_\delta(v)$ važi nejednakost $J(u) > J(v) - \varepsilon$.

Zadatak 1.12. Neka je $U = \{u \mid u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq 1\}$ i $J(u) = \|u\|$ za $0 < \|u\| \leq 1$, a $J(0) = a$. Pokazati da je J poluneprekidna sa donje strane za $a \leq 0$, a za $a \geq 0$, J je poluneprekidna sa gornje strane.

Rešenje. Na skupu $U \setminus \{0\}$, funkcija J je neprekidna za sve $a \in \mathbb{R}$, pa samim tim i poluneprekidna (i sa gornje i sa donje strane).

Posmatra se šta se dešava u nuli. Neka je $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz tačaka iz U tako da je $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$. Onda je:

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = \lim_{k\to\infty} \|u_k\| = 0,$$

te se zaključuje da niz $\{J(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ima samo jednu tačku nagomilavanja.

Ako je $a \leq 0$, onda je:

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) = 0 \geq J(0) = a$$

i imamo poluneprekidnost sa donje strane.

Slično, za $a \geq 0$

$$\limsup_{k\to\infty} J(u_k) = 0 \leq J(0) = a$$

i imamo poluneprekidnost sa gornje strane. $\square$

Zadatak 1.13. Neka je $U = [-1, 1]$, a

$$J(u) = \begin{cases} u, & u \in (0,1] \\ a, & u = 0 \\ 1-u, & u \in [-1, 0) \,. \end{cases}$$

Pokazati da je za $a \leq 0$, J poluneprekidna sa donje strane, za $a \geq 1$ poluneprekidna sa gornje strane, a za $a \in (0,1)$ nije poluneprekidna ni sa gornje, niti sa donje strane.

Rešenje. Za sve $u \in [-1,1] \setminus \{0\}$ funkcija J je neprekidna, pa i poluneprekidna. Neka je $u = 0$ i $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz koji konvergira ka 0. Primećuje se da u tom slučaju, niz $\{J(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ može da ima dve tačke nagomilavanja: 0 i 1. Za $a \leq 0$, dobija se:

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq 0 \geq J(0) = a,$$

tj. poluneprekidnost sa donje strane.

Slično, za $a \geq 1$

$$\limsup_{k\to\infty} J(u_k) \leq 1 \leq a = J(0),$$

postoji poluneprekidnost sa gornje strane.

Izaberimo sad niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ koji teži u 0 tako da je $\liminf_{k\to\infty} J(u_k) = 0$ i $\limsup_{k\to\infty} J(u_k) = 1$. Za $a \in (0,1)$,

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) < a < \limsup_{k\to\infty} J(u_k),$$

te funkcija J ne može biti poluneprekidna ni sa donje, niti sa gornje strane.

$\square$

Zadatak 1.14. Neka je $U = \big\{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\big\}$ i

$$J(u) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Ova funkcija je na $U_1 = \{(x,y) \mid x > 0, y \geq 0\}$ neprekidna, a na U poluneprekidna sa donje strane. Pokazati.

Zadatak 1.15. U zavisnosti od parametara α i β komentarisati poluneprekidnost odozdo funkcije $J(u) = \alpha J_1(u) + \beta J_2(u),\ u \in U$ ako se zna da su funkcije J_1 i J_2 poluneprekidne odozdo na U.

Rešenje. Neka su $\alpha, \beta \geq 0$. Neka je $u \in U$ proizvoljno i neka je niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $\lim_{k\to\infty} u_k = u$. Tada, na osnovu osobina limesa inferiora, važi:

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} J(u_k) &= \liminf_{k\to\infty} \left(\alpha J_1(u_k) + \beta J_2(u_k)\right) \\
&\geq \liminf_{k\to\infty} \left(\alpha J_1(u_k)\right) + \liminf_{k\to\infty} \left(\beta J_2(u_k)\right) \\
&= \alpha \liminf_{k\to\infty} J_1(u_k) + \beta \liminf_{k\to\infty} J_2(u_k) \\
&\geq \alpha J_1(u) + \beta J_2(u) = J(u),
\end{aligned}$$

jer su J_1 i J_2 poluneprekidne odozdo na U. Dakle, J je poluneprekidna odozdo na U po definiciji.

Slučaj, kada je bar jedan od parametara negativan, na primer, $\alpha < 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$, ne obezbeđuje poluneprekidnost odozdo. Neka je $U = [0,1]$. Neka je $J_1(u) = u,\ u \in (0,1]$, $J_1(0) = -1$ i $J_2(u) = 0,\ u \in [0,1]$. Funkcionele J_1 i J_2 su poluneprekidne odozdo, međutim, funkcionela $J(u) = \alpha J_1(u) + \beta J_2(u) = \alpha u,\ u \in (0,1]$, $J(0) = -\alpha$ nije poluneprekidna odozdo u nuli. □

Zadatak 1.16. Za funkciju $J(u) = \dfrac{u^2}{1+u^4}$ na skupu $U = \mathbb{R}$ odrediti minimalnu vrednost, J_*, i skup tačaka minimuma, U_*. Zatim, primetiti da je niz $x_k = k,\ k \in \mathbb{N}$ minimizirajući niz za funcionelu J, ali da ne konvergira ka U_*.

Napomena. Lako se pokazuje da je za datu funkciju J mininmalna vrednost $J_* = 0$, a skup tačaka mininmuma $U_* = \{0\}$. Primećuje se zatim da je, s obzirom na Teoremu 1.24, jedini ograničen Lebegov skup $M = U_* = \{u \in U \mid J(u) \le J_*\}$. Dakle, posmatrani niz $\{k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ne pripada skupu M, te je primer minimizirajućeg niza, koji ne konvergira ka U_*. □

Zadatak 1.17. Odrediti tačku $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, čiji je zbir kvadrata rastojanja od l datih tačaka, $M^1, \dots, M^l \in \mathbb{R}^n$, minimalan.[7]

Rešenje. Neka su u prostoru $\mathbb{R}^n$ date tačke $M^1 = (m_1^1, \dots, m_n^1), \dots, M^l = (m_1^l, \dots, m_n^l)$. Posmatra se funkcija koja računa zbir kvadrata rastojanja tačke X od zadatih tačaka $M^1, \dots, M^l$ data sa

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= d^2(X, M^1) + \dots + d^2(X, M^l) = \sum_{i=1}^{l} d^2(X, M^i) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \Big((x_1 - m_1^i)^2 + \dots + (x_n - m_n^i)^2 \Big). \end{aligned}$$

[7] U XIX veku Štajner (Jakob Steiner (1796-1863)) je rešio zadatak određivanja tačke u ravni trougla, čiji je zbir rastojanja od temena datog trougla *minimalan.* Direktna uopštenja ovog problema su zadaci 1.17 i 1.18.

Izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda funkcije f sa nulom:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n) = 2\sum_{i=1}^{l}(x_1 - m_1^i) = 0,$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, \ldots, x_n) = 2\sum_{i=1}^{l}(x_n - m_n^i) = 0,$$

dobija se da je tačka potencijalnog ekstrema

$$X = \left(\frac{\sum_{i=1}^{l} m_1^i}{l}, \ldots, \frac{\sum_{i=1}^{l} m_n^i}{l}\right).$$

Na osnovu znaka drugog diferencijala funkcije f u tački X,

$$d^2 f(X) = 2l(dx_1)^2 + \cdots + 2l(dx_n)^2 > 0,$$

zaključuje se da je tačka X tačka minimuma funkcije f. □

Zadatak 1.18. Odrediti tačku $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a koja se nalazi na sferi $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, čiji je zbir kvadrata rastojanja od l datih tačaka, $M^1, \ldots, M^l \in \mathbb{R}^n$, minimalan.

Rešenje. Koriste se iste oznake kao u zadatku 1.17. Sad postoji i dodatni uslov da tražena tačka X pripada sferi, odnosno da zadovoljava uslov $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$. Konstruiše se odgovarajuća Lagranžova funkcija

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) &= f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \Big((x_1 - m_1^i)^2 + \cdots + (x_n - m_n^i)^2\Big) + \lambda(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1). \end{aligned}$$

Izjednačavajući prve parcijalne izvode funkcije L sa nulom,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1} L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 2\sum_{i=1}^{l}(x_1 - m_1^i) + 2\lambda x_1 = 0 \\
&\dots \\
&\frac{\partial}{\partial x_n} L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 2\sum_{i=1}^{l}(x_n - m_n^i) + 2\lambda x_n = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0,
\end{aligned}
$$

dobija se da je tačka potencijalnog ekstema funkcije L data sa

$$
X = \left(\frac{\sum_{i=1}^{l} m_1^i}{\mathcal{M}}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^{l} m_n^i}{\mathcal{M}} \right) = \frac{1}{\mathcal{M}}(M^1 + \dots + M^l),
$$

gde je $\lambda = \mathcal{M} - l$ i $\mathcal{M} = \|M^1 + \dots + M^l\|$. Konačno, na osnovu znaka drugog diferencijala funkcije L,

$$
d^2L(X) = 2\mathcal{M}(dx_1)^2 + \dots + 2\mathcal{M}(dx_n)^2 > 0,
$$

zaključuje se da je tačka X tačka minimuma funkcije f pod uslovom da X pripada sferi $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. $\square$

Glava 2

Konveksnost

2.1 Konveksni skupovi i konusi

Definicija 2.1. *Neka je $A \subset X$, gde je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Skup A je konveksan ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in (0,1)$ važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$. Ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$, kaže se da je A afin skup.*

Definicija 2.2. *Neka je dato m tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektorskog prostora X. Tačka $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ je konveksna kombinacija tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ako je $\alpha_k \geq 0$ za sve $k = 1, \ldots, m$ i $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.*

Dakle, A je konveksan skup ako sadrži konveksne kombinacije svake dve svoje tačke.

Primer 2.3. U skupu $\mathbb{R}^n$ prazan skup, čitav $\mathbb{R}^n$, kao i skup koji se sastoji od jedne tačke (singlton) su konveksni. U $\mathbb{R}^n$ kružnica nije, a lopta jeste konveksan skup. U stvari, iz nejednakosti trougla direktno sledi da je lopta konveksan skup u proizvoljnom normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Ako skup sadrži više od jedne tačke i bar jednu izolovanu tačku, on ne može biti konveksan.

Primer 2.4. Za fiksiran ne-nula vektor $c \in \mathbb{R}^n$ i zadati broj $\gamma \in \mathbb{R}$, *hiperravan* $H_{c,\gamma}$ se definiše sa

$$H_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle = \gamma\}.$$

Skup $H_{c,\gamma}$ nije prazan. Naime, iz $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq 0$ sledi da postoji indeks $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je $c_j \neq 0$. Vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definisan sa $x_j := \dfrac{\gamma}{c_j}$, a $x_k := 0$, $k \neq j$, pripada skupu $H_{c,\gamma}$. Ukoliko je $x_0 \in H_{c,\gamma}$, onda važi

$$H_{c,\gamma} = H_{c,x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - x_0, c\rangle = 0\}.$$

Pošto $\langle x - x_0, c\rangle = 0$ predstavlja ortogonalnost vektora $x - x_0$ i c, vektor c se naziva *normalni vektor hiperravni* $H_{c,\gamma}$.

Hiperravni u $\mathbb{R}$ su tačke, u $\mathbb{R}^2$ prave linije, a u $\mathbb{R}^3$ ravni. Lako se pokazuje da je hiperravan konveksan skup. Štaviše, kada je $\gamma = 0$, $H_{c,0}$ je potprostor dimenzije $n - 1$.

Skupovi

$$H^+_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle > \gamma\}$$

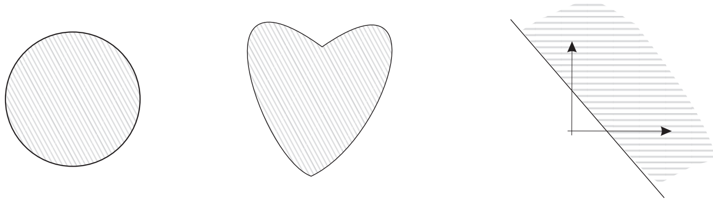
i

$$H^-_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle < \gamma\}$$

zovu se *otvoreni poluprostori*, koji će se takođe zvati i gornji, odnosno donji poluprostor respektivno. Njihova zatvaranja $\overline{H^+_{c,\gamma}}$ i $\overline{H^-_{c,\gamma}}$ su zatvoreni poluprostori. Svi navedeni skupovi su konveksni.

Predočimo da se u literaturi hiperravan H definiše kao potprostor u $\mathbb{R}^n$ za koji važi da, ako je Y neki potprostor u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži H, onda je $Y = H$ ili $Y = \mathbb{R}^n$. Jasno, ako je $\gamma \neq 0$ onda $H_{c,\gamma}$ ne može biti potprostor, pa se u tom slučaju $H_{c,\gamma}$ naziva afina hiperravan. U ovom kursu, kada se kaže hiperravan smatra se da je reč o afinoj hiperravni.

Primer 2.5. Za zadatu matricu A formata $m \times n$, i vektor $b \in \mathbb{R}^m$, *linearna mnogostrukost,* definisana sa $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ je konveksan skup.



Slika 2.1. "Srce" nije konveksan skup. Sasvim desno je jedan zatvoren poluprostor.

Primer 2.6. Klasa neprekidnih funkcionela f nad $[a,b] \subset \mathbb{R}$ za koje je $|f(x)| \le 1$, $x \in [a,b]$ je konveksan skup u vektorskom prostoru $C[a,b]$ svih neprekidnih funkcionela nad $[a,b]$.

Sledeće činjenice govore o odnosu konveksnosti i algebarskih operacija. Dokazi su jednostavni i ostaju čitaocima za vežbu.

1. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m,\ A, B$ konveksni podskupovi u vektorskom prostoru X i neka je λ realan broj. Tada su i skupovi $A_1 + A_2 + \cdots + A_m$, $A - B$ i λA takođe konveksni. Korišćene su oznake

$$A + B = \{x \mid x = a + b,\ a \in A,\ b \in B\};$$

$$\lambda A = \{x \mid x = \lambda a,\ a \in A\}.$$

2. Dekartov proizvod konveksnih skupova je konveksan skup.

3. Ako je A konveksan skup i ukoliko su λ i μ zadati pozitivni brojevi onda važi $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

4. Ako su A_1 i A_2 konveksni skupovi onda je i $A_1 \cap A_2$ konveksan skup, dok $A_1 \cup A_2$ ne mora biti konveksan skup. Važi i opštije, ako je $A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ familija konveksnih skupova onda je i $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ konveksan skup.

Definicija 2.7. *Konveksan poliedar P je presek konačnog broja zatvorenih poluprostora*

$$P = \overline{H^-_{c_1,\gamma_1}} \cap \overline{H^-_{c_2,\gamma_2}} \cap \cdots \cap \overline{H^-_{c_m,\gamma_m}}.$$

Poliedar je, kao presek konačnog broja zatvorenih konveksnih skupova, i sam zatvoren konveksan skup. Napominje se da po ovoj definiciji poliedar ne mora da bude ograničen skup; na primer, $\overline{H^-_{c,\gamma}}$ je neograničen poliedar. Dodatno, poliedar P može da se predstavi i u obliku $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq \gamma\}$, gde je $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$, a C je matrica reda $m \times n$ data sa

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Primer 2.8. Na ovom mestu, uvodi se oznaka $\mathbb{R}^n_+$ koja će se u nastavku često koristiti:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Skup $\mathbb{R}^n_+$ je jedan primer neograničenog zatvorenog poliedra, što se jasno vidi iz sledećeg zapisa

$$\mathbb{R}^n_+ = \overline{H^+_{e^1,0}} \cap \overline{H^+_{e^2,0}} \cap \cdots \cap \overline{H^+_{e^n,0}},$$

gde je sa $e^i,\ i = 1, \ldots, n$ obeležena standardna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Naredne teoreme dovode u vezu svojstva konveksnih skupova sa njihovom topološkom strukturom. Radi jednostavnosti, posmatraju se konveksni skupovi u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$.

Teorema 2.9. *Zatvaranje konveksnog skupa je konveksan skup.*

Dokaz. Prvo, primećuje se da, ako je $A = \emptyset$, onda je i $\overline{A} = \emptyset$, pa je $\overline{A}$ konveksan skup. Takođe, ako je $A = \{x\}$ onda je i $\overline{A} = \{x\}$, što je konveksan skup. Pretpostavka je zatim da skup A ima bar dva elementa. Neka

$a, b \in \overline{A}$, gde je A konveksan skup. Tačke a i b ne mogu biti izolovane, pa su one tačke nagomilavanja skupa A. To znači da postoje nizovi elemenata skupa A, $\{a_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_k\}_{n\in\mathbb{N}}$, koji konvergiraju ka tačkama a i b, respektivno. Za dato $\alpha \in (0,1)$ i svako $k \in \mathbb{N}$ važi $\alpha a_k + (1-\alpha)b_k \in A$. Za niz elemenata $c_k := \alpha a_k + (1-\alpha)b_k$, $k \in \mathbb{N}$ važi:

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha a_k + (1-\alpha)b_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} a_k + (1-\alpha)\lim_{k\to\infty} b_k = \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Prema tome, $\alpha a + (1-\alpha)b$ je tačka nagomilavanja skupa A, odnosno $\alpha a + (1-\alpha)b \in \overline{A}$, što je i trebalo dokazati. □

U vektorskom prostoru X, otvoreni, poluotvoreni i zatvoreni intervali (duži) se definišu na uobičajen način. Na primer, za zadate tačke (krajeve intervala) x i y, važi:

$$\begin{aligned}[x,y) &= \{z \in X \mid \exists \alpha \in (0,1] \quad z = \alpha x + (1-\alpha)y\} \\ &= \{z \in X \mid \exists \alpha \in [0,1) \quad z = (1-\alpha)x + \alpha y\}.\end{aligned}$$

Slično se definišu skupovi (x,y), $[x,y]$ i $(x,y]$. Navedeni skupovi su konveksni.

Sledeća teorema pokazuje da se proizvoljnom elementu zatvaranja konveksnog skupa neprazne unutrašnjosti može "približiti" pomoću unutrašnjih tačaka posmatranog skupa.

Teorema 2.10. *Neka je A konveksan skup neprazne unutrašnjosti. Tada za proizvoljne $x_0 \in A^\circ$ i $y \in \overline{A}$ važi $[x_0, y) \subseteq A^\circ$.*

Dokaz. Pošto je x_0 unutrašnja tačka skupa A sledi da postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $L_\varepsilon(x_0) \subset A$. Neka je, za proizvoljno $\alpha \in (0,1)$, $z := (1-\alpha)x_0 + \alpha y$. Pokazaće se da je tada $L_{(1-\alpha)\varepsilon}(z) \subset A$, tj. da je $z \in A^\circ$.

Radi lakšeg razumevanja dokaza, razlikovaćemo slučaj kada je $y \in A$ i kada je $y \in \overline{A} \setminus A$.

Neka je $y \in A$. Pokažimo da je $L_{(1-\alpha)\varepsilon}(z) \subset A$. Neka je $z_0 \in L_{(1-\alpha)\varepsilon}(z)$.

Posmatra se prvo tačka $\eta = \dfrac{1}{1-\alpha}(z_0 - \alpha y)$. Za nju važi:

$$\begin{aligned}\|\eta - x_0\| &= \|\frac{1}{1-\alpha}(z_0 - \alpha y) - x_0\| = \frac{1}{1-\alpha}\|z_0 - \alpha y - (1-\alpha)x_0\| \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\|z_0 - z\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

to jest, $\eta \in L_\varepsilon(x_0) \subset A$. Pošto je $z_0 = (1-\alpha)\eta + \alpha y$ i $\eta, y \in A$, koji je konveskan skup, sledi da je $z_0 \in A$, odnosno $L_{(1-\alpha)\varepsilon}(z) \subset A$.

Neka je sad $y \in \overline{A} \setminus A$. Tada u svakoj okolini tačke y postoje elementi skupa A, pa ako se definiše $\tilde{\varepsilon} := \dfrac{1}{\alpha}\left((1-\alpha)\varepsilon - \|z - z_0\|\right)$, sledi da postoji $y_0 \in L_{\tilde{\varepsilon}}(y) \cap A$, odnosno

$$\alpha\|y_0 - y\| < (1-\alpha)\varepsilon - \|z - z_0\|.$$

Neka je data tačka $z_0 \in L_{(1-\alpha)\varepsilon}(z)$. Za tačku $\xi = \dfrac{1}{1-\alpha}(z_0 - \alpha y_0)$ važi:

$$\begin{aligned}\|\xi - x_0\| &= \|\frac{1}{1-\alpha}(z_0 - \alpha y_0) - x_0\| = \frac{1}{1-\alpha}\|z_0 - \alpha y_0 - (1-\alpha)x_0\| \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}\Big(\|z_0 - \alpha y - (1-\alpha)x_0\| + \|\alpha y - \alpha y_0\|\Big) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\Big(\|z_0 - z\| + \alpha\|y - y_0\|\Big) < \varepsilon,\end{aligned}$$

odnosno $\xi \in L_\varepsilon(x_0) \subset A$. Pošto je $z_0 = (1-\alpha)\xi + \alpha y_0$ i $\xi, y_0 \in A$ i A je konveksan skup, sledi da je $z_0 \in A$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 2.11. *Unutrašnjost konveksnog skupa je konveksan skup.*

Dokaz. Primenom prethodne teoreme, dokaz ovog tvrđenja sledi direktno, jer je $A^\circ \subset \overline{A}$. Za vežbu dokazati ovo tvrđenje bez primene prethodne teoreme. $\square$

Teorema 2.12. *Neka je A konveksan skup neprazne unutrašnjosti. Tada je $\overline{(A^\circ)} = \overline{A}$ i $\left(\overline{A}\right)^\circ = A^\circ$.*

Dokaz. Unutrašnjost nekog skupa je uvek njegov podskup, pa je $\overline{(A^\circ)} \subset \overline{A}$. Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $y \in \overline{A}$ i x_0 proizvoljna tačka iz A°. Iz Teoreme 2.10 sledi $[x_0, y) \subset A^\circ$, pa je $y = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}x_0 + (1-\frac{1}{n})y\Big)$. Dakle, y je tačka nagomilavanja skupa A°, odnosno $y \in \overline{(A^\circ)}$.

Takođe, svaki skup je podskup svog zatvaranja, pa iz $A \subset \overline{A}$ sledi $A^\circ \subset \big(\overline{A}\big)^\circ$. Za obratnu inkluziju daje se "intuitivni" dokaz, koji se oslanja na primenu Teoreme 2.10. Neka je $y \in \big(\overline{A}\big)^\circ$ i x_0 proizvoljna tačka iz A°. Sa $p(x_0, y)$ označena je prava koja prolazi kroz tačke x_0 i y :

$$p(x_0, y) = \{z \in X \mid z = \lambda x_0 + (1-\lambda)y, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Iz $y \in \big(\overline{A}\big)^\circ$ sledi da postoji $\varepsilon > 0$, tako da je $L_\varepsilon(y) \subset \overline{A}$, pa je i $\overline{L_\varepsilon(y)} \subset \overline{A}$. Neka je z tačka preseka kružnice $\partial\overline{L_\varepsilon(y)}$ i prave $p(x_0, y)$, koja ne pripada duži $[x_0, y]$. Jasno, tada važi $y \in (x_0, z)$. Iz Teoreme 2.10 sledi $[x_0, z) \subset A^\circ$, pa $y \in A^\circ$, što je i trebalo dokazati. $\square$

U primenama se često javljaju skupovi koji nisu konveksni. Da bismo bili u mogućnosti da iskoristimo znanja o konveksnim skupovima, posmatraćemo konveksni skup koji je u izvesnom smislu "najbliži" datom skupu i ispitati njihov međusobni odnos.

Definicija 2.13. *Neka je $A \subset X$, gde je X vektorski prostor. Presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup A naziva se konveksni omotač skupa A i označava sa coA.*

Naravno, konveksni omotač nekog skupa je konveksan skup, a ako je posmatrani skup konveksan, on je jednak svom konveksnom omotaču.

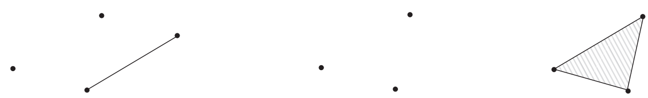
Primer 2.14. Konveksni omotač skupa $\{x_1, x_2\}$, gde su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, je duž koja ih spaja, a konveksni omotač tri nekolinearne tačke u $\mathbb{R}^n$ je trougao čija su temena date tačke, uključujući njegovu unutrašnjost. Konveksni omotač konačnog broja tačaka u ravni je odgovarajući konveksni mnogougao.

Za proizvoljne skupove $A, B \subset \mathbb{R}^n$ direktno se pokazuje da važi

1. $A \subset coA$,

2. $A \subset B \Rightarrow coA \subset coB$,

3. $co(coA) = coA$.



Slika 2.2. Konveksni omotači dve, odnosno tri tačke u ravni.

Teorema 2.15. *Konveksni omotač otvorenog skupa je otvoren skup. Konveksni omotač zatvorenog skupa ne mora biti zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je A neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Naravno, $A \subset coA$, pa je $A = A^\circ \subset (coA)^\circ$. Dakle, otvoren skup je sadržan u unutrašnjosti svog konveksnog omotača. Sa druge strane, $(coA)^\circ$ je konveksan skup (sledi iz Teoreme 2.11). Pošto je coA presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup A, sledi $coA \subset (coA)^\circ$. Obratna inkluzija je uvek tačna, pa je $coA = (coA)^\circ$, što je i trebalo dokazati.

Primerom se pokazuje da konveksni omotač zatvorenog skupa ne mora biti zatvoren skup. Skup

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}, \ \ x \geq 0\}$$

je zatvoren u $\mathbb{R}^2$ (lako se pokazuje da je njegov komplement otvoren skup). Njegov konveksni omotač

$$co\, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq \sqrt{x}, \ \ x > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

nije zatvoren skup, jer ne sadrži tačke nagomilavanja oblika $(x, 0)$, $x > 0$. $\square$

Ako je posmatrani zatvoren skup ograničen (to jest, kompaktan) u $\mathbb{R}^n$, onda se može dokazati da je njegov konveksni omotač takođe zatvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^n$.

Zatvoren konveksni omotač skupa A je najmanji zatvoren i konveksan skup koji sadrži skup A, u oznaci $\overline{co}A$.

Posledica 2.16. *Zatvaranje* coA *je* $\overline{co}A$.

Dokaz. Jasno, $\overline{co}A \subset \overline{coA}$. Sa druge strane, po definiciji je $coA \subset \overline{co}A$, pa važi $\overline{coA} \subset \overline{co}A$, što znači da je $\overline{coA} = \overline{co}A$. $\square$

Definicija 2.17. *Neka je dato* $m+1$ *tačaka u* $\mathbb{R}^n$, $x_0, x_1, \ldots, x_m$, *takvih da su vektori* $(x_k - x_0)$, $k = 1, \ldots, m$ *linearno nezavisni.*[1] *Konveksni omotač datih tačaka zove se* m *dimenzioni simpleks i označava se sa* S_m.

U nastavku će biti izložene tri važne teoreme koje ističu karakteristike konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$. Prva je Radonova teorema, jednostavan i bazičan geometrijski razultat o konveksnim skupovima.

Teorema 2.18. *(Radonova*[2] *teorema) Neka je* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\}$ *skup od* $n+2$ *tačke iz* $\mathbb{R}^n$ *i neka je sa* $X(S)$ *označen konveksni omotač tačaka* x_i, $i \in S \subset \{1, 2, \ldots, n+2\}$. *Tada postoje disjunktni skupovi* I *i* J, *neprazni podskupovi skupa* $\{1, 2, \ldots, n+2\}$, *takvi da je* $X(I) \cap X(J) \neq \emptyset$.

Dokaz. Translacijom skupa X, ako je potrebno, bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da je $x_{n+2} = 0$. Skup $X' = X \setminus \{x_{n+2}\}$ je skup od $n+1$ tačke u $\mathbb{R}^n$, te je linearno zavisan, pa postoje konstante $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, koje nisu sve jednake nuli, tako da je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0$. Dalje, uzimajući da je $\lambda_{n+2} = -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$, imamo da je $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = 0$ i da je $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0$, gde nisu svi λ_i istovremeno jednaki nuli.

Neka je $I = \{i \mid \lambda_i > 0\}$ i $J = \{j \mid \lambda_j < 0\}$. Jasno, $I \cap J = \emptyset$. Tada je $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ i $\sum_{i \in I} \lambda_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j = \lambda > 0$. Dakle, dobija se

[1] Linearna nezavisnost vektora se podrazumeva u uobičajenom smislu: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su linearno nezavisni ako iz $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k = 0$ sledi $\alpha_k = 0$, za sve $k = 1, \ldots, n$.

[2] J. K. A. Radon (1887–1956)

da je vektor

$$\sum_{i\in I}\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda}\Big)x_i = \sum_{j\in J}\Big(\frac{-\lambda_j}{\lambda}\Big)x_j \in X(I)\cap X(J). \qquad \square$$

Na osnovu definicije, lako se može pokazati (zadatak 2.5) da se konveksni omotač coX skupa X dobija kao konveksna kombinacija konačno mnogo elemenata skupa X, to jest,

$$coX = \Big\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i \mid x_i\in X,\ \lambda_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1,\ m=1,2,\dots\Big\}.$$

Naredna, Karateodorijeva teorema tvrdi da ako je $X\subset\mathbb{R}^n$ onda se konveksni omotač opisuje konveksnim kombinacijama najviše $n+1$ elementa skupa X.

Teorema 2.19. *(Karateodorijeva[3] teorema) Neka je $\emptyset\neq X\subset\mathbb{R}^n$. Tada se svaka tačka $x\in coX$ može prikazati kao konveksna kombinacija najviše $(n+1)$ elementa skupa X, to jest,*

$$coX = \Big\{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i \mid x_i\in X,\ \lambda_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1\Big\}.$$

Dokaz. Neka je $x\in coX$ konveksna kombinacija $x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i,\ x_i\in X,\ \lambda_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$, tako da je m minimalno. Ako se pretpostavi suprotno, da je $m\ge n+2$, tada, na osnovu Teoreme 2.18, postoje disjunktni skupovi $I,J\subset\{1,2,\dots,m\}$ i strogo pozitivne konstante $\mu_h,\ h\in I\cup J$, tako da je

$$\sum_{h\in I}\mu_h x_h = \sum_{h\in J}\mu_h x_h.$$

Prenumeracijom tačaka, ako je potrebno, može da se pretpostavi da je $I=\{1,2,\dots,k\},\ J=\{k+1,\dots,l\}$ i da je $t=\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\min_{i\in I}\frac{\lambda_i}{\mu_i}$. Tada je

$$x=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - t\mu_i)x_i + \sum_{j=k+1}^{l}(\lambda_j + t\mu_j)x_j + \sum_{h=l+1}^{m}\lambda_h x_h = \sum_{i=2}^{m}\nu_i x_i,$$

[3] C. Carathéodory (1873–1950)

gde su $\nu_i \geq 0$ i $\sum_{i=2}^{m} \nu_i = 1$. Ovom kontradikcijom je dokaz završen. $\square$

Karateodorijeva teorema važi i u opštijem obliku. Neka je X podskup afine $n-$dimenzionalne ravni u $\mathbb{R}^N$, tada je konveksni omotač skupa X dat sa

$$coX = \Big\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid x_i \in X,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \Big\}.$$

Teorema 2.20. *(Helijeva[4] teorema) Neka je $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ konačna familija konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ takva da je za svako $k \leq n+1$ presek k elemenata familije neprazan. Tada je presek svih elemenata familije neprazan, to jest, $\bigcap_{i=1}^{m} C_m \neq \emptyset$.*

Dokaz. Naravno, pretpostavlja se da familija $\mathcal{C}$ sadrži $m \geq n+1$ elemenata tako da je presek proizvoljnih $n+1$ skupova neprazan. Matematičkom indukcijom po m pokazaće se da je presek svih članova familije $\mathcal{C}$ neprazan.

U prvom koraku indukcije, za $m = n+1$, nema šta da se dokazuje, pa se prelazi na indukcijsku hipotezu. Neka je dato $m \geq n+2$. Pretpostavlja se da tvrđenje teoreme važi za sve familije sa najviše $m-1$ članova. Neka je $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$. Na osnovu indukcijske hipoteze zna se da je presek bilo kojih $m-1$ članova familije neprazan, i neka je $x_i \in \mathbb{R}^n$ takvo da je

$$x_i \in C_1 \cap \cdots \cap C_{i-1} \cap C_{i+1} \cap \cdots \cap C_m, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Dakle, važi $x_i \in C_j$ za $j \neq i$.

Pošto je $m \geq n+2$ na osnovu Teoreme 2.18, postoje disjunktni skupovi $I, J \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, tako da postoji tačka $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in co\{x_i \mid i \in I\} \cap co\{x_j \mid j \in J\}.$$

Može da se pretpostavi da I i J prave particiju indeksnog skupa, to jest, da je $I \cup J = \{1, 2, \ldots, m\}$.

[4] E. Helly (1884–1943)

Pokažimo da je tačka x u svim skupovima $C_i,\ i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Za sve $i \in I$ tačka x_i pripada svim konveksnim skupovima $C_j,\ j \in J$, te sledi $x_i \in \bigcap_{j\in J} C_j,\ i \in I$. Pošto je $\bigcap_{j\in J} C_j$ konveksan skup, dobija se da je

$$co\{x_i \mid i \in I\} \subset \bigcap_{j\in J} C_j.$$

Slično,

$$co\{x_j \mid j \in J\} \subset \bigcap_{i\in I} C_i.$$

Konačno,

$$x \in co\{x_i \mid i \in I\} \cap co\{x_j \mid j \in J\} \subset \Big(\bigcap_{j\in J} C_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in I} C_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{m} C_i,$$

što je trebalo dokazati. □

Napomena. Direktno uopštenje Helijeve teoreme na beskonačne familije konveksnih skupova ne važi. Na primer, posmatraju se skupovi $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq i\},\ i \in \mathbb{N}$. Proizvoljnih konačno mnogo skupova C_i ima neprazan presek, međutim $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i = \emptyset$. Uopštenje Helijeve teoreme važi za kompaktne konveksne skupove, tačnije:

Ako za beskonačnu familiju kompaktnih konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ važi da je presek proizvoljnih $n+1$ skupova neprazan, onda je i presek svih skupova familije neprazan.

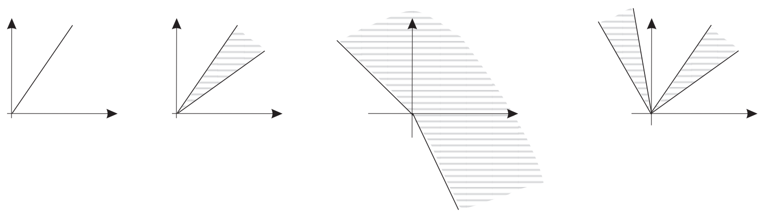
Osim konveksnih skupova, u teoriji optimizacije važnu ulogu imaju konusi. Posebno će se ispitati odnos konusa i konveksnih skupova.

Definicija 2.21. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konus sa vrhom u nuli ako za sve $x \in K$ i sve $t > 0$ važi $tx \in K$.*

Treba primetiti da, po ovoj definiciji, nula može ali ne mora da pripada konusu.

Ako je K konus sa vrhom u nuli, onda je skup $K_{x_0} = x_0 + K$, konus sa vrhom u x_0. Njegovi elementi su oblika $x_0 + \lambda(y - x_0)$, $y \in K_{x_0}$, $\lambda > 0$.

Konus K ne mora biti konveksan. Ako jeste zove se konveksan konus. Takođe, on ne mora biti otvoren (zatvoren) skup, ali ako jeste zove se otvoren (zatvoren) konus. Podrazumeva se da je prazan skup konveksan konus.



Slika 2.3. Primeri konusa u $\mathbb{R}^2$.

Propozicija 2.22. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konveksan konus sa vrhom u nuli ako i samo ako za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi $\alpha x + \beta y \in K$.*

Dokaz. Neka je K konveksan konus sa vrhom u nuli. Tada za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y \right) \in K,$$

odnosno $\alpha x + \beta y \in K$. Sa druge strane, iz $\alpha x + \beta y \in K$, za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$, birajući, za unapred zadato $\lambda > 0$, $\alpha = \beta = \lambda/2$ i $y = x$ dobija se $\lambda x \in K$, odnosno K je konus. Konveksnost se dobija birajući $\alpha \in (0, 1)$, i $\beta = 1 - \alpha$. $\square$

Konusi imaju sledeća značajna svojstva (videti zadatak 2.7):

1. Presek proizvoljne familije konusa s istim vrhom, ako nije prazan, je konus sa tim vrhom;

2. Ako su K_1 i K_2 konusi sa vrhom u x_0, onda je $\alpha K_1 + \beta K_2$ konus sa vrhom u $(\alpha + \beta)x_0$, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

3. Unutrašnjost, zatvaranje i konveksni omotač konusa je konus;
4. Suma konveksnih konusa sa zajedničkim vrhom je konveksan konus;
5. Unija konusa s istim vrhom je opet konus sa tim vrhom (ali unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan skup).

Posmatra se skup sledećeg oblika:

$$K^* = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x\rangle \geq 0, \ \ \forall x \in K\},$$

gde je K konus sa vrhom u nuli. Skup K^* nije prazan, jer $0 \in K^*$. Skup K^* je očigledno konus sa vrhom u nuli. Zvaće se ga *konjugovan (dualan) konus* konusa K. Za proizvoljan konus K, njemu konjugovan konus K^* je zatvoren i konveksan. Takođe, $(K^*)^* = K$ ako i samo ako je K zatvoren i konveksan konus.

Neka je dat skup $S \subset \mathbb{R}^n$. Presek svih konveksnih konusa sa vrhom u nuli koji sadrže S zove se konveksan konus generisan skupom S, što se označava sa $K(S)$. Ako se S sastoji od konačnog broja tačaka onda se $K(S)$ zove konveksan poliedarski konus.

Neka je $S = \{a^1, \ldots, a^m\} \subset \mathbb{R}^n$. Konstruišimo matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tako da su joj kolone dati vektori $a^1, \ldots, a^m$, odnosno

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \ldots & a^m \end{pmatrix}_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

Konus generisan matricom A dat je sa

$$\operatorname{cone}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ za neko } x \in \mathbb{R}^m_+\}. \tag{2.1}$$

Važi da $\operatorname{cone}(A) \neq \emptyset$, jer se primenom matrice A na jedinične vektore $e^j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m_+$ dobija da $Ae^j = a^j \in \operatorname{cone}(A)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Takođe, može se pokazati da je $\operatorname{cone}(A)$ zatvoren konveksan konus sa vrhom u nuli, pri čemu $0 \in \operatorname{cone}(A)$, videti zadatak 2.9.

Može se pokazati da je $\mathrm{cone}(A) \setminus \{0\} \subseteq K(S) \subseteq \mathrm{cone}(A)$. Jasno, $\mathrm{cone}(A)$ je konveksan konus koji sadrži S, te se direktno dobija da je $K(S) \subseteq \mathrm{cone}(A)$. Sa druge strane, primenom Propozicije 2.22 nije teško pokazati da je $K(S) \supseteq \mathrm{cone}(A) \setminus \{0\}$. Zaista, $K(S)$ mora da sadrži i sve vektore oblika $\alpha a^i + \beta a^j$, $\alpha, \beta > 0$, $i, j = 1, \dots, m$, a oni se dobijaju ako se matrica A primeni na vektore $\alpha e^i + \beta e^j$, $\alpha, \beta > 0$, $i, j = 1, \dots, m$ odnosno, ako se matrica A primeni na sve vektore $x \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$. Dodajmo, ako skup S, odnosno $K(S)$ sadrži nulu, onda je on zatvoren skup. Dakle, za zatvoren konveksan poliedarski konus generisan konačnim skupom S važi $\overline{K(S)} = \mathrm{cone}(A)$.

2.2 Projekcija tačke na skup, Risova teorema o reprezentaciji

Pojam projekcije tačke na skup, kao i zaključi koji slede iz njene egzistencije i jedinstvenosti se suštinski koriste pri opisivanju i ispitivanju značajnih numeričkih (iterativnih) metoda minimizacije, kao što su Galerkinov i Njutnov metod. Polazna tačka je pojam rastojanja tačke od zadatog skupa.

Lema 2.23. *Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Rastojanje tačke x od skupa A, $d(x, A) = \inf\limits_{z \in A} d(x, z)$ je neprekidna funkcija po x, i više od toga, ona je neekspanzivna, odnosno*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Dokaz. Prema definiciji infimuma, za svako $\varepsilon > 0$ postoje $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in A$ tako da važi:

$$d(x, A) \leq d(x, x_\varepsilon) < d(x, A) + \varepsilon,$$

$$d(y, A) \leq d(y, y_\varepsilon) < d(y, A) + \varepsilon.$$

Iz nejednakosti trougla sledi

$$d(x, y_\varepsilon) \leq d(x, y) + d(y, y_\varepsilon) \leq d(x, y) + d(y, A) + \varepsilon.$$

Pošto $y_\varepsilon \in A$, važi:

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) + \varepsilon,$$

pa je $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.

Analogno se dobija $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$, odakle sledi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Neprekidnost funkcije rastojanja tačke od skupa je jednostavna posledica ove nejednakosti. □

Podsetimo da je $f : X \to \mathbb{R}$ linearna funkcionela na vektorskom prostoru X, ako je $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, za sve skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $x, y \in X$.

Lema 2.24. *Ako je X normiran prostor, za linearnu funkcionelu f sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) f je neprekidna na X.

b) f je neprekidna u nuli.

c) f je ograničena, to jest, postoji $\gamma \geq 0$, tako da važi $|f(x)| \leq \gamma \|x\|$ za sve $x \in X$.

Dokaz. Pokazaće se da $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$. Prva implikacija je trivijalna. Za dokazivanje druge implikacije primeti se najpre da iz linearnosti funkcionele f sledi $f(0) = 0$. Dalje, iz neprekidnosti funkcionele f u nuli, sledi da za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$, tako da iz $\|x\| < \delta$ sledi

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| < 1.$$

Za proizvoljno $y \in X \setminus \{0\}$ posmatra se tačka $\overline{y} = \frac{\delta}{2\|y\|} y$. Iz $\|\overline{y}\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ sledi

$$|f(\overline{y})| = \left| f\Big(\frac{\delta}{2\|y\|} y\Big) \right| = \frac{\delta}{2\|y\|} |f(y)| < 1,$$

tj. $|f(y)| < \frac{2}{\delta} \|y\|$. Tražena nejednakost se dobija za $\gamma = \frac{2}{\delta} > 0$. Naravno, tvrđenje trivijalno važi za $y = 0$. Na kraju, pokazaće se da važi i implikacija

$c) \Rightarrow a)$. Neka je dato $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Uzima se da je $\delta = \frac{\varepsilon}{\gamma}$, $\gamma \neq 0$. Tada za proizvoljno $x \in X$ s osobinom $\|x - x_0\| < \delta$, iz linearnosti funkcionele f, važi da je

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leq \gamma\|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Ako je $\gamma = 0$, onda je $f(x) = 0$ za sve $x \in X$, a to je neprekidna funkcija. $\square$

Ako je X konačno-dimenzioni normiran prostor, onda je svaka linearna funkcionela i neprekidna (videti [13]).

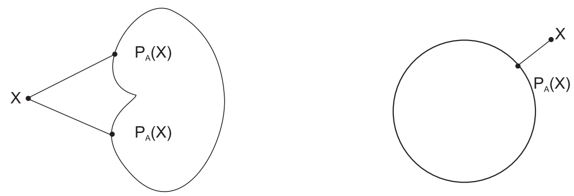
Primer 2.25. Neka je $c \in \mathbb{R}^n$ fiksiran vektor. Tada je sa $f(x) = \langle c, x\rangle = \langle x, c\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ definisana linearna funkcionela na $\mathbb{R}^n$. (Neprekidnost, to jest, ograničenost sledi iz Koši-Švarcove nejednakosti $|\langle c, x\rangle| \leq \|c\|\|x\|$.) Dokazaće se i obratno, odnosno da se bilo koja linearna funkcionela $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ može predstaviti u obliku $\langle c, \cdot\rangle$ za neki vektor $c \in \mathbb{R}^n$, videti Teoremu 2.30.

Postavlja se pitanje da li u normiranom prostoru X za svako $x \in X$ i dat skup $A \subset X$ uvek postoji tačka $a_0 \in A$ za koju važi $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| = \|x - a_0\|$, odnosno da li postoji tačka koja pripada skupu A i koja je "najbliža" tački x. Jasno, ako $x \in A$, onda je $a_0 = x$. U opštem slučaju, međutim, tačka a_0 ne mora da postoji, pa čak i kada postoji ne mora biti jedinstvena.

Definicija 2.26. *Dat je neprazan skup $A \subset \mathbb{R}^n$ i tačka $x \in \mathbb{R}^n$. Tačka $a_0 \in A$ je projekcija tačke x na skup A, u oznaci $a_0 = P_A(x)$, ako je $d(x, A) = \|x - a_0\|$.*

Ako $P_A(x)$ postoji za sve $x \in \mathbb{R}^n$ i ukoliko je jedinstvena, onda je sa $P_A : \mathbb{R}^n \to A$ definisana neprekidna (i neekspanzivna) funkcija. Egzistencija i svojstva ove funkcije zavise od svojstava skupa A.

Teorema 2.27. *Neka je A neprazan, zatvoren i konveksan podskup u $\mathbb{R}^n$. Tada za svako $x \in \mathbb{R}^n$ postoji njena projekcija na skup A i pri tome je ona jedinstvena.*



Slika 2.4. Projekcija tačke x na skup A, ako postoji, ne mora da bude jedinstvena.

Dokaz. Na osnovu definicije rastojanja tačke od skupa sledi da postoji niz elemenata skupa A, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tako da važi $d(x,A) = \lim_{n\to\infty} \|x - a_n\|$. Treba pokazati da je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz. Dovoljno je da se pokaže da je taj niz Košijev, jer je $\mathbb{R}^n$ kompletan prostor. Koristeći zakon paralelograma dobija se

$$\begin{aligned}\|a_n - a_m\|^2 &= \|(a_n - x) + (x - a_m)\|^2 \\ &= 2\|a_n - x\|^2 + 2\|a_m - x\|^2 - \|(a_n - x) - (x - a_m)\|^2 \\ &= 2\|a_n - x\|^2 + 2\|a_m - x\|^2 - \|a_n + a_m - 2x\|^2 \\ &= 2\|a_n - x\|^2 + 2\|a_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{a_n + a_m}{2} - x\right\|^2.\end{aligned}$$

Za proizvoljno $\tilde{\varepsilon} > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za sve $k \geq n_0$ važi

$$\|a_k - x\| \leq d(x,A) + \tilde{\varepsilon}.$$

Iz konveksnosti skupa A sledi da $\frac{a_n+a_m}{2} \in A$, pa je

$$\left\|\frac{a_n + a_m}{2} - x\right\|^2 \geq d^2(x,A).$$

Neka je dato $\varepsilon > 0$. Tada je, za dovoljno velike indekse $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|a_n - x\|^2 \leq d^2(x,A) + \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \|a_m - x\|^2 \leq d^2(x,A) + \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Prema tome

$$\|a_n - a_m\|^2 \leq 2d^2(x,A) + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2d^2(x,A) + \frac{\varepsilon^2}{2} - 4d^2(x,A) = \varepsilon^2.$$

Time je pokazano da je posmatrani niz Košijev, pa sledi da postoji $a \in \mathbb{R}^n$ tako da važi $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Pošto je A zatvoren skup, $a \in A$. Na kraju, iz neprekidnosti norme sledi

$$d(x,A) = \lim_{n\to\infty} \|x - a_n\| = \|x - a\|,$$

to jest, $a = P_A(x)$.

Preostaje da se pokaže jedinstvenost. Neka je $b = P_A(x) \in A$.

$$\|b-a\|^2 = 2\|a-x\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4\left\|\frac{a+b}{2} - x\right\|^2 \leq 4d^2(x,A) - 4d^2(x,A) = 0,$$

odakle sledi $b = a$. $\square$

Napomena. Primećuje se da je u prethodnoj teoremi dobijena i egzistencija i jedinstvenost projekcije tačke na skup, dok je iz Posledice 1.26, u kojoj nije pretpostavljena konveksnost skupa A, dobijena samo egzistencija projekcije.

Podsećanje: A je potprostor vektorskog prostora X ako i samo ako je $0 \in A$ i sve linearne kombinacije elemenata skupa A pripadaju tom skupu. Posebno, skupu A pripadaju sve konveksne kombinacije njegovih elemenata, pa je on konveksan skup. Takođe, svaki potprostor konačnodimenzionog vektorskog prostora je zatvoren. Dakle, direktna posledica prethodne teoreme je

Posledica 2.28. *Neka je A potprostor u $\mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Tada postoji jedinstvena projekcija tačke x na skup A.*

Teorema 2.29. *Neka je A neprazan potprostor u $\mathbb{R}^n$ i neka je data tačka $x \in \mathbb{R}^n$. Tada postoji jedinstveno razlaganje elementa $x = x_0 + x_1$, pri čemu važi:*

a) $x_0 \in A$.

b) $(\forall a \in A)\ \langle x_1, a\rangle = 0.$

Vektor x_0 se zove ortogonalna projekcija vektora x na potprostor A.

Dokaz. Najpre, dokazuje se jedinstvenost uz pretpostavku da važe a) i b). Neka je $x = x_0 + x_1 = \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1$. Pošto x_0 i $\tilde{x}_0$ pripadaju potprostoru A, sledi da $\tilde{x}_1 - x_1 = x_0 - \tilde{x}_0 \in A$. Na osnovu b), za sve $a \in A$ važi $\langle x_1, a\rangle = 0$ i $\langle \tilde{x}_1, a\rangle = 0$. Dakle, $\langle \tilde{x}_1 - x_1, a\rangle = 0$, pa birajući $a = \tilde{x}_1 - x_1$ konačno se dobija $\tilde{x}_1 = x_1$, odakle sledi i $\tilde{x}_0 = x_0$.

Na osnovu Posledice 2.28 sledi da postoji jedinstvena projekcija tačke x na potprostor A, neka je označena sa $x_0 = P_A(x)$. Definišimo $x_1 := x - x_0$. Preostaje da se pokaže da za sve $a \in A$ važi $\langle x_1, a\rangle = 0$. To važi za $a = 0$, pa se može smatrati da je $a \neq 0$. Pošto je A potprostor, za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ $x_0 + \lambda a \in A$. Prema tome $\|x - x_0\| \leq \|x - (x_0 + \lambda a)\|$, pa je

$$\|x - x_0\|^2 \leq \|x - x_0\|^2 - 2\lambda\langle x - x_0, a\rangle + \lambda^2\|a\|^2.$$

Za $\lambda = \frac{\langle x - x_0, a\rangle}{\|a\|^2}$ dobija se:

$$0 \leq -2\frac{\langle x - x_0, a\rangle^2}{\|a\|^2} + \frac{\langle x - x_0, a\rangle^2}{\|a\|^2},$$

odakle je $\langle x - x_0, a\rangle^2 \leq 0$, pa je $\langle x_1, a\rangle = 0$, čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.30. *(Risova[5] teorema o reprezentaciji) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearna funkcionela. Tada postoji jedinstveni vektor $c \in \mathbb{R}^n$, tako da važi $f(x) = \langle c, x\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Za $f(x) \equiv 0$, bira se $c = 0$. Neka je, dakle $f(x) \not\equiv 0$. Definiše se da je $A = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. (Ovaj skup se zove jezgro preslikavanja f.) Lako se pokazuje da je A zatvoren potprostor. Činjenica da je A potprostor sledi iz linearnosti funkcije f, a zatvorenost sledi iz neprekidnosti. Očigledno, $A \neq \mathbb{R}^n$. Neka $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Na osnovu prethodne teoreme $x = x_0 + x_1$, pri čemu $x_0 \in A$, a $\langle x_1, a\rangle = 0$, za sve $a \in A$. Pri

[5] Frigyes Riesz (1880–1956), mađarski matematičar

tome, $x_1 \notin A$ (jer bi inače $x \in A$), pa je $f(x_1) \neq 0$. Neka je $\tilde{x}$ proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^n$. Posmatra se razlika $\tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f(x_1)} x_1$. Jasno, $f(\tilde{x}) - \frac{f(\tilde{x})}{f(x_1)} f(x_1) = 0$, pa posmatrana razlika pripada skupu A. Stoga je njen skalarni proizvod sa x_1 jednak nuli:

$$\langle \tilde{x}, x_1 \rangle - \frac{f(\tilde{x})}{f(x_1)} \langle x_1, x_1 \rangle = 0,$$

odakle je

$$f(\tilde{x}) = \frac{f(x_1)}{\|x_1\|^2} \langle \tilde{x}, x_1 \rangle = \langle c, \tilde{x} \rangle,$$

za $c := \frac{f(x_1)}{\|x_1\|^2} x_1$. Time je dokazana egzistencija vektora c.

Pokažimo da je c jedinstveno određen. Neka je c_1 još jedan vektor za koji je $f(x) = \langle x, c_1 \rangle$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Tada je $\langle x, c - c_1 \rangle = \langle x, c \rangle - \langle x, c_1 \rangle = 0$. Posebno, za $x = c - c_1$ dobija se $\langle c - c_1, c - c_1 \rangle = 0$, odakle je $c = c_1$. $\square$

Sledeća teorema daje izvesne potrebne i dovoljne uslove za projekcije. Ona je korisna pri rešavanju konkretnih zadataka.

Teorema 2.31. *Neka je data tačka $x \in \mathbb{R}^n$ i neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Tada važi:*

a) ako je A konveksan i zatvoren skup onda za $z \in A$ važi $z = P_A(x)$ ako i samo ako je $\langle x - z, z - y \rangle \geq 0$, za sve $y \in A$;

b) ako je A konveksan i zatvoren konus sa vrhom u nuli onda za $z \in A$ važi $z = P_A(x)$ ako i samo ako je $\langle x - z, y \rangle \leq 0$, za sve $y \in A$ i $\langle x - z, z \rangle = 0$.

c) ako je A potprostor onda za $z \in A$ važi $z = P_A(x)$ ako i samo ako je $\langle x - z, y \rangle = 0$ za sve $y \in A$. Štaviše, $P_A(x)$ je linearna funkcija.

Dokaz. a) Posmatra se pomoćna funkcija $g(\theta) = \|x - ((1-\theta)z + \theta y)\|^2$, $\theta \in \mathbb{R}$, gde je $z = P_A(x)$, a $y \in A$. To je kvadratna funkcija po θ,

$$g(\theta) = \theta^2 \|z - y\|^2 + 2\theta \langle x - z, z - y \rangle + \|x - z\|^2,$$

koja ima minimum u tački $\theta_{\min} = -\frac{\langle x - z, z - y \rangle}{\|z - y\|^2}$, $z \neq y$. Za $z = P_A(x)$, iz konveksnosti skupa A dobija se $g(0) \leq g(\theta)$ za sve $\theta \in [0, 1]$, pa se zaključuje da je $\theta_{\min} \leq 0$. Odavde je $\langle x - z, z - y \rangle \geq 0$ za sve $y \in A$.

Obratno, ako je $\langle x-z, z-y\rangle \geq 0$ za sve $y \in A$, onda je $\theta_{\min} \leq 0$, pa je $g(0) \leq g(1)$, odnosno $\|x-z\|^2 \leq \|x-y\|^2$, za sve $y \in A$, odakle sledi $z = P_A(x)$.

b) Neka je $\langle x-z, z\rangle = 0$, i neka je $\langle x-z, y\rangle \leq 0$, za sve $y \in A$. Tada je $\langle x-z, z-y\rangle \geq 0$, pa tvrđenje sledi iz dela a). Dokažimo obratno. Neka je $z = P_A(x)$. Važi $\langle x-z, z-y\rangle \geq 0$, za sve $y \in A$. Pošto je A konus, $y = tz \in A$ za sve $t > 0$, pa je $\langle x-z, z-tz\rangle = (1-t)\langle x-z, z\rangle \geq 0$, za sve $t > 0$. Znak leve strane zavisi od izbora broja t, pa je, dakle, $\langle x-z, z\rangle = 0$. Dalje sledi:

$$\langle x-z, z-y\rangle = \langle x-z, z\rangle - \langle x-z, y\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x-z, y\rangle \leq 0.$$

c) Posmatra se sada pomoćna funkcija $h(\theta) = \|x-z-\theta y\|^2$, $\theta \in \mathbb{R}$, $y \in A \setminus \{0\}$. Ako je $z = P_A(x)$, s obzirom na to da je A potprostor, sledi da $h(\theta)$ ima minimum za $\theta = 0$. Sa druge strane, h je kvadratna funkcija po θ,

$$h(\theta) = \theta^2\|y\|^2 - 2\theta\langle x-z, y\rangle + \|x-z\|^2,$$

koja ima minimum u $\theta_{\min} = -\frac{\langle x-z,y\rangle}{\|y\|^2}$. Odavde sledi $\langle x-z, y\rangle = 0$.

Obratno, neka je $\langle x-z, y\rangle = 0$, za sve $y \in A$ i neko $z \in A$. To znači da je vektor $x-z$ ortogonalan na skup A. Tada za sve $y \in A$ važi:

$$\|x-y\|^2 = \langle x-z+z-y, x-z+z-y\rangle = \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2.$$

Dakle, sledi da je $\|x-y\|^2 \geq \|x-z\|^2$ za sve $y \in A$, odnosno, $z = P_A(x)$.

Preostaje da se dokaže linearnost, odnosno da važi $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$ za sve skalare α i β i sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Na osnovu linearnosti skalarnog proizvoda i upravo dokazanog, sledi da za sve $z \in A$ važi:

$$\langle x+y-(P_A(x)+P_A(y)), z\rangle = \langle x-P_A(x), z\rangle + \langle y-P_A(y), z\rangle = 0.$$

Konačno, iz jedinstvenosti projekcije sledi $P_A(x+y) = P_A(x)+P_A(y)$. Slično se dobija i $P_A(\alpha x) = \alpha P(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Posledica navedenih ispitivanja je rezultat o egzistenciji elementa minimalne norme, videti zadatak 2.11.

Projekcija P_A tačke na zatvoren i konveksan skup A je neekspanzivna, pa stoga i neprekidna funkcija, jer važi:

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \|x-y+(P_A(x)-P_A(y))-(P_A(x)-P_A(y))\|^2 \\
&= \|x-P_A(x)-(y-P_A(y))\|^2 \\
&+ 2\langle x-P_A(x)-(y-P_A(y)), P_A(x)-P_A(y)\rangle \\
&+ \|P_A(x)-P_A(y)\|^2 \geq \|P_A(x)-P_A(y)\|^2 \\
&+ 2\langle x-P_A(x), P_A(x)-P_A(y)\rangle + 2\langle y-P_A(y), P_A(y)-P_A(x)\rangle \\
&\geq \|P_A(x)-P_A(y)\|^2,
\end{aligned}$$

pri čemu je korišćena Teorema 2.31.

2.3 Teoreme separacije

Podsećanje: hiperravan $H = H_{c,\gamma}$ se definiše na sledeći način:

$$H_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle = \gamma\},$$

gde je $c \in \mathbb{R}^n$ fiksiran ne-nula vektor (vektor normale na hiperravan) i $\gamma \in \mathbb{R}$. Iz Risove teoreme (Teorema 2.30) sledi da se H može definisati i sa

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \gamma\},$$

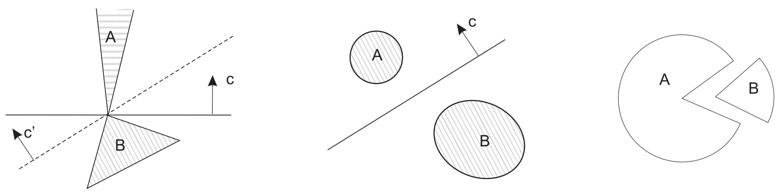
gde je f neka ne nula linearna funkcionela na $\mathbb{R}^n$.

Geometrijska interpretacija hiperravni u $\mathbb{R}^2$. Za fiksiran vektor (c_1, c_2) i $\gamma \in \mathbb{R}$ uslov hiperravni postaje $c_1x + c_2y = \gamma$. Ako je, na primer, $c_2 \neq 0$, onda se dobija $y = \frac{1}{c_2}\gamma - \frac{c_1}{c_2}x$. Pa je hiperravan u $\mathbb{R}^2$ prava linija. Slično se komentarišu i ostali mogući slučajevi. Jasno, takva hiperravan deli ravan na poluravni koje se mogu označiti sa $H^+_{c,\gamma}$ i $H^-_{c,\gamma}$. Slično je i u $\mathbb{R}^n$; svaka hiperravan deli prostor na dva poluprostora. To opravdava uvođenje sledeće definicije.

Definicija 2.32. *Neka su dati neprazni skupovi $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Kaže se da hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B ako je*

$$\sup_{b \in B} \langle c, b\rangle \leq \gamma \leq \inf_{a \in A} \langle c, a\rangle.$$

Ako je $\sup_{b \in B}\langle c, b\rangle < \inf_{a \in A}\langle c, a\rangle$ kaže se da su skupovi A i B jako razdvojeni, a ako je $\langle c, b\rangle < \langle c, a\rangle$ za sve $a \in A$ i sve $b \in B$, onda su A i B strogo razdvojeni skupovi.



Slika 2.5. Primeri razdvajanja skupova. Skupovi na desnom crtežu se ne mogu razdvojiti.

Dakle, ako $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B, onda ih razdvaja i hiperravan $H_{\mu c,\mu\gamma}$, za $\mu \neq 0$, jer je $H_{c,\gamma} = H_{\mu c,\mu\gamma}$. Posebno, ako je $\mu := \frac{1}{\|c\|}$, sledi da je uvek moguće koristiti hiperravni $H_{c,\gamma}$ za koje je $\|c\| = 1$. Takođe, skupovi A i B se tretiraju na simetričan način. Od posebnog interesa su uslovi pod kojima je moguće razdvojiti skupove A i B, a to su teoreme separacije.

Teorema 2.33. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Ako $y \notin \bar{A}$ onda se skupovi $\bar{A}$ i $\{y\}$ mogu jako razdvojiti. Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup neprazne unutrašnjosti tada za svako $y \notin A^\circ$ postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove A i $\{y\}$.*

Dokaz. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Neka je $y \notin \bar{A}$ i neka je $z = P_{\bar{A}}(y)$. Na osnovu Teoreme 2.31 a), imamo $\langle y - z, z - x\rangle \geq 0$ za sve $x \in \bar{A}$. Neka je $c := y - z$. Važi da je:

$$\langle c, y - x\rangle = \langle y - z, y - z\rangle + \langle y - z, z - x\rangle \geq \|c\|^2 > 0,$$

pa je $\langle c, y\rangle - \|c\|^2 \geq \langle c, x\rangle$ odakle je $\sup\limits_{x\in\bar{A}}\langle c, x\rangle < \langle c, y\rangle$. Izaberimo $\gamma \in (\sup\limits_{x\in\bar{A}}\langle c, x\rangle, \langle c, y\rangle)$. Jasno, hiperravan $H_{c,\gamma}$ jako razdvaja skupove $\bar{A}$ i $\{y\}$.

Pretpostavlja se sada da je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup neprazne unutrašnjosti. Pošto je $y \notin A^\circ$, moguće je da $y \notin \bar{A}$ i da $y \in \bar{A} \setminus A^\circ$. Slučaj kada $y \notin \bar{A}$ je urađen u prvom delu teoreme. Neka je sada $y \in \bar{A}$ i $y \in \partial A$. Neka je x_0 proizvoljna tačka unutrašnjosti skupa A. Posmatra se lopta sa centrom u y poluprečnika $r := d(y, x_0)$, $L_r(y)$. Može se primetiti da svaka tačka na duži $[x_0, y)$ pripada unutrašnjosti skupa A. Neka je $y_0 := 2y - x_0$. Posmatra se duž $[x_0, y_0]$ (prečnik lopte $L_r(y)$). Tačka y_0 nije element skupa $\bar{A}$, jer bi, u suprotnom, tačka $y \in [x_0, y_0)$ bila unutrašnja tačka skupa A. Na taj način može da se konstruiše niz tačaka $y_n = y + \frac{1}{2^n}(y - x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, koje ne pripadaju $\bar{A}$ i za koje je $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tada, na osnovu dokazanog dela teoreme (i činjenice da može uvek da se birati $\|c\| = 1$) sledi da za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji γ_k i c_k, $\|c_k\| = 1$, tako da hiperravan H_{c_k,γ_k} jako razdvaja skupove $\bar{A}$ i $\{y_k\}$. Niz $\{c_k\}$ pripada kompaktnom skupu u $\mathbb{R}^n$, pa sledi da postoji konvergentan podniz $\{c_{k_m}\}$ tog niza. Neka je $\lim\limits_{m\to\infty} c_{k_m} = c$. Važi $\|c\| = 1$. Pošto je $\langle c_{k_m}, x\rangle < \langle c_{k_m}, y_{k_m}\rangle$ za sve $x \in \bar{A}$ i $m \in \mathbb{N}$ sledi da je $\lim\limits_{m\to\infty}\langle c_{k_m}, x\rangle \leq \lim\limits_{m\to\infty}\langle c_{k_m}, y_{k_m}\rangle$, odnosno, na osnovu neprekidnosti skalarnog proizvoda, važi $\langle c, x\rangle \leq \langle c, y\rangle$ za sve $x \in \bar{A}$. Ako se stavi $\gamma = \langle c, y\rangle$ (ili $\gamma = \sup_{x\in\bar{A}}\langle c, x\rangle$) dobija se da hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove $\bar{A}$ i $\{y\}$. $\square$

U nastavku se dokazuje da se unutrašnja tačka nekog skupa ne može od njega razdvojiti.

Lema 2.34. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Ako $y \in A^\circ$ onda ne postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$, koja razdvaja skupove $\{y\}$ i A.*

Dokaz. Pretpostavlja se da postoji $c \neq 0$ tako da hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove $\{y\}$ i A. Tada hiperravan $H_{c,0}$ razdvaja skupove $\{0\}$ i

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n \,|\, s = a - y,\ a \in A\}.$$

Zaista, važi:

$$\begin{aligned}
\langle c, y\rangle \leq \gamma \leq \inf_{a\in A}\langle c, a\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \langle c, y\rangle \leq \langle c, a\rangle, \quad \forall a \in A \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq \langle c, a - y\rangle, \quad \forall a \in A \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq \inf_{s\in S}\langle c, s\rangle, \quad \forall s \in S \\
&\Leftrightarrow \quad \langle c, 0\rangle \leq 0 \leq \inf_{s\in S}\langle c, s\rangle.
\end{aligned}$$

Prema tome, hiperravan $H_{c,0}$ razdvaja skupove $\{0\}$ i S. Lako se pokazuje da je $0 \in S^\circ$.

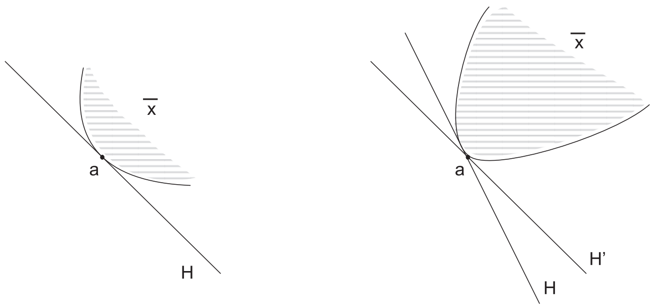
Dalje, neka je $\varepsilon > 0$ takav da je $L_\varepsilon(0) \subset S$. Jasno, $z \in L_\varepsilon(0)$ implicira $-z \in L_\varepsilon(0)$. Tada je $0 \leq \langle c, z\rangle$ i $0 \leq \langle c, -z\rangle$ odakle sledi da je $\langle c, z\rangle = 0$ za sve $z \in L_\varepsilon(0)$. Neka $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ proizvoljno i neka je $z = (0, 0, \ldots, \varepsilon/2, \ldots, 0, 0)$, gde je $\varepsilon/2$ na mestu j. Tada $z \in L_\varepsilon(0)$, pa iz $\langle c, z\rangle = c_j\varepsilon/2 = 0$ sledi $c_j = 0$. To važi za sve $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, što znači da je $c = 0$, a to je u suprotnosti sa pretpostavkom. Lema je dokazana. $\square$

Na osnovu Leme 2.34 direktno sledi sledeće tvrđenje.

Lema 2.35. *Ako za skupove A i B važi $A^\circ \cap B^\circ \neq \emptyset$ onda se oni ne mogu razdvojiti.*

Definicija 2.36. *Hiperravan $H_{c,\gamma}$ je potporna hiperravan za skup X u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ako je $\langle c, x\rangle \geq \gamma$ za sve $x \in X$ i $\langle c, x_0\rangle = \gamma$. Vektor c naziva se potporni vektor za skup X u tački x_0.*

Na osnovu prethodne teoreme, u svakoj rubnoj tački konveksnog skupa neprazne unutrašnjosti postoji barem jedna potporna hiperravan. U geometrijskom smislu, tangenta na konveksnu krivu u njenoj rubnoj tački definiše potpornu hiperravan za tu krivu. Prethodna teorema govori i više od toga. Naime, uslov diferencijabilnosti krive ∂X u tački $a \in \partial X$ nije neophodan za postojanje potporne hiperravni konveksnog skupa X u toj tački. Takva hiperravan postoji iako tangenta na ∂X nije definisana u tački a. Diferencijabilnost, ipak, garantuje jedinstvenost potporne hiperravni.



Slika 2.6. Skupovi i potporne hiperravni.

Teorema 2.37. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunktni konveksni skupovi nepraznih unutrašnjosti. Tada postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove A i B, kao i skupove $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Ako pri tome $y \in \bar{A} \cap \bar{B}$ onda je $\gamma = \langle c, y\rangle$.*

Dokaz. Posmatra se skup $X = A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Na osnovu osobina konveksnih skupova zna se da je X konveksan skup, a može se pokazati i da je neprazne unutrašnjosti. Takođe, $0 \notin X$, jer su A i B disjunktni. Iz prethodne teoreme sledi da postoji hiperravan $H_{c,\tilde{\gamma}}$ koja razdvaja X i $\{0\}$. Dakle, $\langle c, 0\rangle \leq \langle c, x\rangle$ za sve $x \in X$, odnosno $0 \leq \langle c, a - b\rangle$, za sve $a \in A$ i $b \in B$, odakle je $\langle c, b\rangle \leq \langle c, a\rangle$ za sve $a \in A$ i $b \in B$. Dakle, $\sup_{b\in B}\langle c, b\rangle \leq \langle c, a\rangle$ za svako $a \in A$, pa je $\sup_{b\in B}\langle c, b\rangle \leq \inf_{a\in A}\langle c, a\rangle$. Ako se izabere γ tako da važi $\sup_{b\in B}\langle c, b\rangle \leq \gamma \leq \inf_{a\in A}\langle c, a\rangle$, onda $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B.

Treba još pokazati da ta hiperravan razdvaja i skupove $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Neka $a \in \bar{A}$ i $b \in \bar{B}$. Tada postoje nizovi $\{a_m\} \subset A$ i $\{b_m\} \subset B$ takvi da je $\lim_{m\to\infty} a_m = a$ i $\lim_{m\to\infty} b_m = b$. Pošto je $\langle c, a_m\rangle \geq \gamma \geq \langle c, b_m\rangle$, važi $\lim_{m\to\infty}\langle c, a_m\rangle \geq \gamma \geq \lim_{m\to\infty}\langle c, b_m\rangle$, odnosno $\langle c, a\rangle \geq \gamma \geq \langle c, b\rangle$, za sve $a \in \bar{A}$ i $b \in \bar{B}$. $\square$

Sledeća teorema daje dovoljne uslove za jako razdvajanje skupova.

Teorema 2.38. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zatvoreni disjunktni konveksni skupovi,* *pri čemu je barem jedan od njih ograničen. Tada se oni mogu jako razdvojiti.*

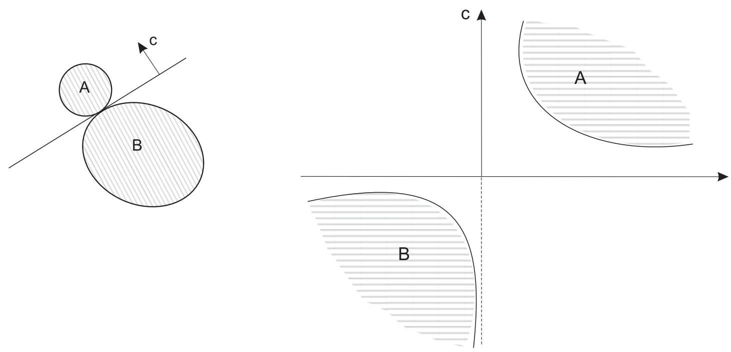
Dokaz. Posmatra se skup $X = A - B$. On je konveksan skup koji ne sadrži nulu. Takođe, skup X je zatvoren jer sadrži sve svoje tačke nagomilavanja (da bi se ovo pokazalo, potreban je uslov ograničenosti, zapravo kompaktnosti, jednog od skupova A ili B). Stoga postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja jako razdvaja $\{0\}$ i X. Podsetimo se, imali smo $\langle c, 0\rangle \geq \langle c, x\rangle + \|c\|^2 > \langle c, x\rangle$, $\forall x \in X$, odnosno $0 \geq \langle c, a - b\rangle + \|c\|^2$ za sve $a \in A$ i $b \in B$, pa je $\langle c, b\rangle \geq \langle c, a\rangle + \|c\|^2$. Odavde je

$$\langle c, b\rangle \geq \sup_{a \in A}\langle c, a\rangle + \|c\|^2 > \sup_{a \in A}\langle c, a\rangle,$$

kao i

$$\inf_{b \in B}\langle c, b\rangle \geq \sup_{a \in A}\langle c, a\rangle + \|c\|^2 > \sup_{a \in A}\langle c, a\rangle.$$

Neka je $\gamma \in (\sup_{a \in A}\langle c, a\rangle, \inf_{b \in B}\langle c, b\rangle)$. Jasno, hiperravan $H_{c,\gamma}$ jako razdvaja skupove A i B. $\square$



Slika 2.7. Razdvajanje i jako razdvajanje konveksnih skupova.

Neka je dat skup X takav da je $X = \overline{coX} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Korišćenjem prethodne teoreme, može se lako pokazati da postoji vektor $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i $\alpha > 0$, tako da važi $\langle p, x\rangle > \alpha$ za sve $x \in X$.

Lema 2.39. *Neka je K konus sa vrhom u nuli i $p \in \mathbb{R}^n$. Ako je skup $\{\langle p, x\rangle \mid x \in K\}$ ograničen odozdo, onda je $\langle p, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in K$.*

Dokaz. Neka je $\langle p, x\rangle \geq \alpha$ za sve $x \in K$ i neko $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je i $\langle p, \theta x\rangle \geq \alpha$ za sve $\theta > 0$, pa je $\langle p, x\rangle \geq \frac{\alpha}{\theta}$, odakle, kada $\theta \to \infty$, sledi $\langle p, x\rangle \geq 0$.

Sa druge strane, Lema je direktna posledica zadatka 2.16 a). □

Naredna teorema, teorema Minkovski - Farkaša, je od značaja u linearnom programiranju (teoreme dualnosti), teoriji igara i nelinearnom programiranju (teoreme tipa Kuna – Takera).

Teorema 2.40. *(Minkovski - Farkaš, 1894) Data je matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Neka je*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^m_+ \mid Ax = b\} \ i$$

$$G = \{y \in \mathbb{R}^n \mid yA \in \mathbb{R}^m_+ \ \wedge \ \langle y, b\rangle < 0\}.$$

Tada je $F \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ G = \emptyset$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $F \neq \emptyset$ i neka $x \in F$. Tada za proizvoljno $y \in \mathbb{R}^n$ takvo da je $yA \in \mathbb{R}^m_+$ važi:

$$\langle y, b\rangle = \langle y, Ax\rangle = \langle yA, x\rangle \geq 0,$$

tj. $G = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Druga implikacija $G = \emptyset \Rightarrow F \neq \emptyset$ dokazaće se kontrapozicijom, tj. $F = \emptyset \Rightarrow G \neq \emptyset$. Neka je za date $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i $b \in \mathbb{R}^n$ skup $F = \emptyset$. To znači da $b \notin \text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ za neko } x \in \mathbb{R}^m_+\}$ (videti (2.1)). Pošto je $\text{cone}(A)$ zatvoren i konveksan konus i $b \notin \text{cone}(A)$ na osnovu Teoreme 2.33 zna se da postoje $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ tako da $H_{y,\gamma}$ jako razdvaja $\text{cone}(A)$ i $\{b\}$, to jest,

$$\langle y, b\rangle < \gamma < \langle y, z\rangle, \text{ za sve } z \in \text{cone}(A).$$

Pošto je $0 \in \text{cone}(A)$ i $\langle y, 0\rangle = 0$ vidi se da je $\gamma \leq 0$, pa je $\langle y, b\rangle < 0$.

Potrebno je još pokazati da je $yA \in \mathbb{R}^m_+$, tj. da je $\langle y, a^j\rangle \geq 0$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, gde su sa a^j obeležene kolone matrice A. Pretpostavlja se suprotno, neka je $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takvo da je $\langle y, a^j\rangle < 0$. S obzirom na to da $a^j \in \text{cone}(A)$, onda i za svako $\lambda > 0$ vektori $\lambda a^j \in \text{cone}(A)$. Ali tada iz $\langle y, \lambda a^j\rangle > \gamma$ dobija se da za λ mora da važi da je $\lambda < \dfrac{\gamma}{\langle y, a^j\rangle}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\lambda > 0$ proizvoljno dato. Dakle, sledi da je $yA \in \mathbb{R}^m_+$, tj. $G \neq \emptyset$. $\square$

Primer 2.41. Može se pokazati da sistem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ima rešenje $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$. Umesto da se pokazuje da je $F \neq \emptyset$, pokazaće se da je $G = \emptyset$. Zaista, neka važi suprotno, odnosno da postoji $(u, v) \in G$. Tada se iz $(u, v)A \in \mathbb{R}^3_+$ dobija da je $4u + v \geq 0$, $u \geq 0$ i $-5u + 2v \geq 0$, odakle se zaključuje da, između ostalog, mora da važi da su $u, v \geq 0$. Međutim, tada je $\langle (u, v), (1, 1)\rangle \geq 0$, pa je $G = \emptyset$.

Teorema Minkovski - Farkaš se u literaturi pojavljuje sa mnogo različitih formulacija, a sledeća teorema je njena ekvivalentana formulacija, koja otkriva i geometrijsku interpretaciju.

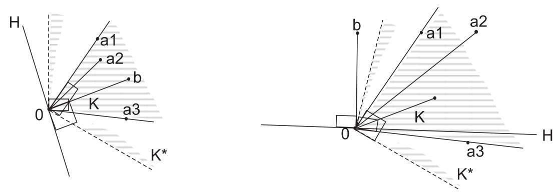
Teorema 2.42. *Neka je dato m tačaka u $\mathbb{R}^n$, $a^1, a^2, \ldots, a^m$ i vektor $b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Tada, važi tačno jedna od mogućnosti:*

ili postoje brojevi $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, od kojih je barem jedan različit od nule tako da je $b = \sum_{k=1}^m x_k a^k$,

ili postoji $y \in \mathbb{R}^n$ tako da važi $\langle b, y\rangle < 0$ i $\langle a^k, y\rangle \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Geometrijska interpretacija. Neka je K konveksan poliedarski konus generisan vektorima $a^1, a^2, \ldots, a^m$. Podsetimo se, $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$, gde je θ ugao između datih vektora, pa je $\langle u, v\rangle > 0$, ako je $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, a $\langle u, v\rangle < 0$, ako je $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Dakle, $\langle y, a_k\rangle \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ znači da $y \in K^*$, a $\langle y, b\rangle \geq 0$ znači da je y element onog poluprostora određenog sa

$H_{b,0}$ u kojem je i b (jer je $\langle b, b\rangle > 0$). Teorema Minkovski - Farkaš kaže da postoje dve isključive mogućnosti: ili $b \in K$ (to jest, $b = \sum_{k=1}^{m} x_k a^k$), onda je $\langle b, y\rangle \geq 0$ za sve y za koje je $\langle y, a_k\rangle \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, odnosno K^* je u onom poluprostoru u kojem je i tačka b; ili $b \notin K$, onda postoji $y \in K^*$ koji nije u poluprostoru u kojem je b.



Slika 2.8. Teorema Minkovski - Farkaš, geometrijska interpretacija.

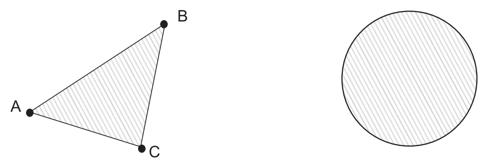
2.4 Ekstremne tačke

Posmatraće se posebne tačke konveksnih skupova, ekstremne tačke, i pokazaće se da se njihov konveksni omotač poklapa sa datim konveksnim skupom.

Definicija 2.43. *Tačka x_0 konveksnog skupa $K \subset \mathbb{R}^n$ je ekstremna tačka tog skupa ako ne postoje tačke $x, y \in K$, $x \neq y$, niti $t \in (0, 1)$, takve da je $x_0 = (1 - t)x + ty$.*

Ekstremna tačka, dakle, ne pripada nijednom intervalu čije su krajnje tačke u K. Jasno, unutrašnja tačka skupa nikad nije ekstremna tačka tog skupa, pa otvoren skup nema ekstremne tačke. Pokazaće se da svaki neprazan, konveksan i kompaktan podskup skupa $\mathbb{R}^n$ ima ekstremnu tačku.

Definicija 2.44. *Neka je K neprazan konveksan podskup u $\mathbb{R}^n$. Podskup $A \subset K$ je ekstremni (pod)skup skupa K ako i samo ako iz $\{a, b\} \subset K$, $a \neq b$ i $(a, b) \cap A \neq \emptyset$ sledi $\{a, b\} \subset A$.*



Slika 2.9. Trougao ima tri ekstremne tačke. Sve tačke na rubu zatvorene lopte su njene ekstremne tačke.

Naravno, $\emptyset$ i ceo skup K su ekstremni podskupovi bilo kojeg konveksnog skupa K.

Lema 2.45. *Neka je K neprazan konveksan podskup u $\mathbb{R}^n$. Presek proizvoljne familije ekstremnih podskupova skupa K je ekstremni podskup skupa K.*

Dokaz. Pretpostavlja se da je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$, gde je $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familija ekstremnih podskupova skupa K. Tada za svako $\lambda \in \Lambda$ važi: $\{a,b\} \subset K$ i iz $(a,b) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ sledi da $\{a,b\} \subset A_\lambda$. Pošto je:

$$(a,b) \cap (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} ((a,b) \cap A_\lambda),$$

iz $(a,b) \cap (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \neq \emptyset$ sledi da $\{a,b\} \subset A_\lambda$, za svako $\lambda \in \Lambda$, pa je $\{a,b\} \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, te je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ekstremni skup skupa K. $\square$

Lema 2.46. *Neka je K neprazan konveksan podskup u $\mathbb{R}^n$ i neka je A singlton (jednočlan) ekstremni podskup skupa K. Tada je (jedini) element skupa A ekstremna tačka skupa K.*

Dokaz. Neka je $A = \{a\}$. Ako a nije ekstremna tačka skupa K onda postoje $k_1, k_2 \in K$ i $t \in (0,1)$, tako da važi $a = (1-t)k_1 + tk_2$. Tada $(k_1, k_2) \cap A \neq \emptyset$, pa $k_1, k_2 \in A$, što je kontradikcija. $\square$

Lema 2.47. *Neka je K neprazan konveksan podskup u $\mathbb{R}^n$ i neka je A konveksan ekstremni podskup skupa K. Ako je skup B ekstremni podskup skupa A onda je B ekstremni podskup skupa K.*

Dokaz. Neka $k_1, k_2 \in K$ i $(k_1, k_2) \cap B \neq \emptyset$. Pošto $B \subset A$, sledi $(k_1, k_2) \cap A \neq \emptyset$, pa, pošto je A ekstremni skup skupa K važi $k_1, k_2 \in A$. Sada, iz činjenice da je B ekstremni skup skupa A sledi da $k_1, k_2 \in B$, odnosno, B je ekstremni skup skupa K. □

U dokazu sledeće leme, koristiće se sledeće činjenice teorije skupova:

- Relacija "biti podskup" je relacija poretka, pa u familiji skupova $\mathcal{A}$ postoji parcijalno uređenje $(\mathcal{A}, \subset)$.
- Minimalni element parcijalnog uređenja $(\mathcal{A}, \subset)$ je $A \in \mathcal{A}$, ako ne postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subset A$, $B \neq A$.
- Potklasa $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ je lanac ako i samo ako za svako $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$ važi $A_1 \subset A_2$ ili $A_2 \subset A_1$.
- Lema Corna[6] glasi: Ako je $(\mathcal{A}, \subset)$ parcijalno uređenje u kojem svaki lanac ima donje ograničenje onda u $\mathcal{A}$ postoji minimalni element.

Podsetimo se, dati skup K je kompaktan u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako važi da svaka kolekcija zatvorenih skupova u topologiji prostora $(K, \mathcal{O}_K)$, koja ima svojstvo konačnog preseka, ima neprazan presek.

Lema 2.48. *Neka je K neprazan, konveksan i kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\mathcal{A}$ familija zatvorenih, konveksnih i nepraznih ekstremnih podskupova skupa K. Tada familija $\mathcal{A}$ ima minimalni element.*

Dokaz. Prvo, vidi se da je $\mathcal{A} \neq \emptyset$, jer $K \in \mathcal{A}$. Posmatra se proizvoljan lanac $\mathcal{L} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ u $\mathcal{A}$. Pokažaće se da je $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ donje

[6] Max Zorn (1906–1993) američki matematičar nemačkog porekla. Lema Corna je ekvivalentna aksiomi izbora koja kaže da za svaku familiju nepraznih skupova $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ postoji barem jedna funkcija izbora $x : \Lambda \mapsto \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, takva da za svako $\lambda \in \Lambda$ važi $x(\lambda) \in X_\lambda$.

ograničenje lanca $\mathcal{L}$ u $\mathcal{A}$. Jasno, za sve $\lambda \in \Lambda$ važi $A \subset A_\lambda$, pa je A donje ograničenje lanca $\mathcal{L}$, te ostaje još da se pokaže da je $A \in \mathcal{A}$. Pošto su svi A_λ, $\lambda \in \Lambda$ zatvoreni i konveksni onda je to i skup A, kao njihov presek. Na kraju, pokazuje se da je $A \neq \emptyset$. Za bilo koji konačan skup indeksa $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \subset \Lambda$, bez umanjenja opštosti, neka važi $A_{\lambda_1} \supset A_{\lambda_2} \supset \cdots \supset A_{\lambda_m}$, pa je A_{λ_m} donje ograničenje ove podfamilije. Iz svojstva kompaktnosti sledi da je presek čitave familije $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ neprazan. Dakle, svaki lanac u $\mathcal{A}$ ima donje ograničenje u $\mathcal{A}$, pa na osnovu leme Corna sledi da i čitava familija $\mathcal{A}$ ima minimalni element. $\square$

Zaključak. Za dati neprazan, konveksan i kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ postoji minimalni ekstremni podskup skupa K koji je neprazan, zatvoren i konveksan.

Teorema 2.49. *Neka je K neprazan, konveksan i kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$. Skup K ima ekstremnu tačku.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ familija zatvorenih, konveksnih i nepraznih ekstremnih podskupova skupa K. Tada, na osnovu prethodne leme, postoji skup A, minimalni element familije $\mathcal{A}$. Pokazuje se da je A jednočlan skup. Pretpostavlja se da postoje $p, q \in A$, $p \neq q$. Tada, na osnovu Teoreme 2.33, sledi da postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja jako razdvaja skupove $\{p\}$ i $\{q\}$. Bez umanjenja opštosti, pretpostavlja se da je $\langle c, p\rangle < \gamma < \langle c, q\rangle$. Drugim rečima, postoji neprekidna linearna funkcionela f definisana sa $f(x) = \langle c, x\rangle$, $x \in A$, tako da je $f(p) < f(q)$. Označimo sa A_* skup tačaka minimuma funkcionele f, $A_* := \{x \in A \mid f(x) = \min_{a \in A} f(a)\}$. Jasno, A_* je neprazan skup, jer neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom dostiže svoj infimum (i supremum), odnosno ima (barem jednu) tačku minimuma (i maksimuma).[7] Takođe, A_* je pravi podskup skupa A, jer, u suprotnom, iz $p, q \in A_*$ sledi $f(p) = f(q)$, kontradikcija. Primećuje se još da se iz linearnosti i neprekidnosti funkcije f i konveksnosti i zatvorenosti skupa A dobija i konveksnost i zatvorenost skupa A_*.

[7] Navedena činjenica je poznata Vajerštrasova teorema iz osnovnih kurseva matematičke analize. Ova teorema je uopštena u Poglavlju 1.4.

Treba dokazati da je A_* ekstremni skup skupa A. Pretpostavlja se suprotno. Tada postoje $x, y \in A$, tako da je $(x, y) \cap A_* \neq \emptyset$, ali $\{x, y\}$ nije podskup skupa A_*. Pošto je $(x, y) \cap A_* \neq \emptyset$ sledi da postoji $t \in (0,1)$ tako da $z = tx+(1-t)y \in A_*$. Tada je $f(z) = tf(x)+(1-t)f(y) = \min_{a\in A} f(a)$. S obzirom na to da $\{x, y\}$ nije podskup skupa A_* važi $f(x) > \min_{a\in A} f(a)$ ili $f(y) > \min_{a\in A} f(a)$. Stoga je:

$$\min_{a\in A} f(a) = tf(x) + (1-t)f(y) > t\min_{a\in A} f(a) + (1-t)\min_{a\in A} f(a) = \min_{a\in A} f(a),$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da A_* nije ekstremni skup skupa A. Međutim, pošto je A_* pravi podskup skupa A, sledi da A nije minimalni ekstremni skup skupa K. To je kontradikcija sa pretpostavkom da postoje barem dva različita elementa skupa A. Dakle, A je jednočlan skup, pa je njegov jedini element ekstremna tačka skupa K. □

Teorema 2.50. *Neka je A neprazan i konveksan podskup skupa $\mathbb{R}^n$ i neka je f linearna funkcionela nad A.*

a) Ako je x_0 tačka strogog globalnog minimuma funkcije f nad A onda je x_0 ekstremna tačka skupa A.

b) Ako je A kompaktan, onda se među tačkama minimuma funkcionele f nalaze ekstremne tačke skupa A.

Dokaz. a) Neka je $f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$. Ako x_0 nije ekstremna tačka skupa A onda postoje $a_1, a_2 \in A \setminus \{x_0\}$ i $t \in (0,1)$ tako da je $x_0 = ta_1 + (1-t)a_2$. Tada je:

$$f(x_0) = tf(a_1) + (1-t)f(a_2) > tf(x_0) + (1-t)f(x_0) = f(x_0),$$

što je kontradikcija. Dakle, x_0 je ekstremna tačka skupa A.

b) Neka je sa B označen skup tačaka minimuma funkcionele f nad A. (Već pomenuta Vajerštrasova teorema tvrdi da B nije prazan skup.) Iz linearnosti funkcionele f i konveksnosti skupa A sledi da je B konveksan skup. Iz neprekidnosti funkcionele f (linearna funkcija u konačno-dimenzionalnom prostoru je uvek neprekidna) i zatvorenosti skupa A sledi da je B zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Jasno, B je kompaktan skup pa, na osnovu Teoreme 2.49, ima ekstremnu tačku, neka je označena sa x_0.

Preostaje da se pokaže da je x_0 ekstremna tačka skupa A. Ako x_0 nije ekstremna tačka skupa A onda postoje tačke $x_1, x_2 \in A \setminus \{x_0\}$, $x_1 \neq x_2$ i postoji broj $t \in (0,1)$, tako da važi $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$. Tada, iz $f(x_0) \leq f(x_1)$ i $f(x_0) \leq f(x_2)$ sledi:

$$f(x_0) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq tf(x_0) + (1-t)f(x_2),$$

odnosno $(1-t)f(x_0) \geq (1-t)f(x_2)$, pa je $f(x_0) = f(x_2)$. Slično se pokazuje da je i $f(x_0) = f(x_1)$. Odavde, $x_1, x_2 \in B$, odnosno x_0 je konveksna kombinacija elemenata iz B, te nije ni ekstremna tačka skupa B, što je kontradikcija. Dakle, x_0 je ekstremna tačka skupa A. $\square$

Napomena. Problemi *optimalne raspodele* i *linearnog programiranja* formulisani su i rešavani od sredine XX veka. Na prethodnoj teoremi se zasnivaju metode njihovog rešavanja. Teorema, da ponovimo, kaže da se traženje ekstrema linearne funkcionele nad konveksnim i kompaktnim skupom $A \subset \mathbb{R}^n$ može ograničiti na ispitivanje vrednosti posmatrane funkcionele u ekstremnim tačakama skupa A. Kao što je poznato, linearno programiranje i optimalna raspodela se koriste u teoriji upravljanja i pri rešavanju raznih ekonomskih problema (videti zadatke 2.19 i 2.20).

Primer 2.51. Zalihe nekog proizvoda koje su raspoređene u nekoliko skladišta treba da se dostave u nekoliko prodavnica. Poznata je cena prevoza jednog proizvoda od svakog skladišta do svake prodavnice, kao i količina proizvoda koju treba dostaviti svakoj prodavnici. Transportni problem se sastoji u određivanju optimalnog plana prevoza, to jest, u organizaciji transporta traženih količina robe u odgovarajuće prodavnice tako da ukupni troškovi transporta budu *minimalni.* Slično, problem određivanja plana ishrane (jelovnika) ima za cilj da se iz datog asortimana proizvoda sa poznatim sadržajem hranljivih materija, sastavi onaj koji zadovoljava dnevne potrebe za hranljivim materijama, a pri tome ima minimalnu cenu.

Svaki konveksan i kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je potpuno određen svojim ekstremnim tačkama. Naime, važi sledeća teorema.

Teorema 2.52. *(Krein – Milman) Neka je K neprazan, konveksan i kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je B skup njegovih ekstremnih tačaka. Tada važi $K = \overline{coB}$.*

Dokaz. Jasno, $\overline{coB} \subset K$ jer je K konveksan i kompaktan skup koji sadrži skup B. Pretpostavlja se da postoji $x_0 \in K \backslash \overline{coB}$. Tada postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja jako razdvaja skupove $\{x_0\}$ i $\overline{coB}$, ili, što je isto, postoji f, linearna funkcionela tako da važi $f(x_0) < \gamma < f(x)$ za sve $x \in \overline{coB}$. Iz prethodne teoreme sledi da se među tačkama minimuma funkcionele f nalazi ekstremna tačka skupa K, odnosno postoji $b \in B$ tako da važi:

$$f(b) = \min_{x \in K} f(x) \leq f(x_0),$$

pa za tačku b ne važi $f(b) > f(x_0)$. Dakle, $K \subset \overline{coB}$, čime je teorema dokazana. $\square$

2.5 Zadaci za vežbu

Zadatak 2.1. Dokazati da je skup X konveksan ako i samo ako sadrži sve konveksne kombinacije bilo kojeg konačnog broja svojih tačaka.

Rešenje. Ako skup X sadrži sve konveksne kombinacije bilo kojeg konačnog broja svojih elemenata, onda sadrži i konveksne kombinacije bilo koja dva svoja elementa, te je X konveksan skup.

Obratno, pretpostavlja se da je X konveksan skup. Neka su dati proizvoljni $x_1, \ldots, x_n$ iz skupa X i neka je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \in [0,1],\ i = 1, \ldots, n$$

njihova proizvoljna konveksna kombinacija. Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokazuje se da je $x \in X$. Ako je $n = 2$, onda iz konveksnosti skupa X direktno sledi da $x \in X$. Pretpostavlja se da za proizvoljnjih $n-1$ elemenata skupa X svaka njihova konveksna kombinacija pripada skupu X. Sada treba pokazti da tvrđnje važi i za n datih tačaka. Data konveksna kombinacija može da se zapiše u obliku

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\Big(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_1}x_n\Big).$$

Izraz u zagradi je konveksna kombinacija $n-1$ elemenata skupa X, te po indukcijskoj pretpostavci pripada skupu X. Zaista:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} = 1, \qquad \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} \in [0,1],\ i = 2, \dots, n.$$

Konačno, sada je jasno da je x predstavljen kao konveksna kombinacija dva elementa iz X, koji je konveksan, pa je $x \in X$. $\square$

Zadatak 2.2. Pokazati da ako je A konveksan skup i ako su $\lambda, \mu \geq 0$, onda je $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Zadatak 2.3. Neka je $c \in \mathbb{R}^n$ ne-nula vektor i $\gamma \in \mathbb{R}$. Pokazati da su hiperravan

$$H_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c \rangle = \gamma\}$$

i otvoreni poluprostor

$$H_{c,\gamma}^{+} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c \rangle > \gamma\}$$

konveksni skupovi.

Zadatak 2.4. Pokazati da je skup neprekidnih funcionela f nad $[a,b] \subset \mathbb{R}$ takvih da je $|f(x)| \leq 1,\ x \in [a,b]$ konveksan u prostoru $C[a,b]$ svih neprekidnih funckionela nad $[a,b]$.

Zadatak 2.5. Neka skup Y sadrži sve konveksne kombinacije proizvoljnog konačnog broja tačaka skupa X. Pokazati da je $coX = Y$.

Rešenje. Neka je $Z = coX$. Cilj je da se pokaže da je $Y = Z$. Naravno, $X \subset Z$ i Z je konveksan, te se na osnovu zadatka 2.1 dobija da Z sadrži sve konačne konveksne kombinacije svojih elemenata pa i elemenata svog podskupa X. Dakle, $Y \subset Z$. Dalje, vidi se da je $X \subset Y$, te ako pokaže da je Y konveksan, onda je $Y = Z$.

Neka su $a, b \in Y$ proizvoljni. Tada:

$$a = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, l,$$
$$b = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j, \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1,\ \beta_j \geq 0,\ j = 1, \dots, k,$$

gde $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_k \in X$. Neka je $\theta \in (0, 1)$ proizvoljno, posmatra se konveksna kombinacija

$$c = \theta a + (1 - \theta) b = \sum_{i=1}^{l} \theta \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k} (1 - \theta) \beta_j b_j.$$

Može se primetiti da je

$$\sum_{i=1}^{l} \theta \alpha_i + \sum_{j=1}^{k} (1 - \theta) \beta_j = \theta + (1 - \theta) = 1, \quad \theta a_i \geq 0,\ i = 1, \dots, l,$$
$$(1 - \theta) b_j \geq 0,\ j = 1, \dots, k.$$

Konačno, c kao konveksna kombinacija konačnog broja elemenata iz X pripada skupu Y, pa se zaključuje da je Y konveksan. $\square$

Zadatak 2.6. Pokazati da se pri linearnom preslikavanju $f : X \to Y$ konveksan skup $A \subset X$ slika u konveksan skup $f[A] \subset Y$ i obrnuto, da je inverzna slika konveksnog skupa $B \subset Y$ konveksan skup $f^{-1}[B] \subset X$.

Zadatak 2.7. Pokazati:

1. Presek proizvoljne familije konusa s istim vrhom, ako nije prazan, je konus s istim vrhom;

2. Ako su K_1 i K_2 konusi sa vrhom u x_0, onda je $\alpha K_1 + \beta K_2$ konus sa vrhom u $(\alpha+\beta)x_0$, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

3. Suma konveksnih konusa sa zajedničkim vrhom je konveksan konus;

4. Unija konusa sa vrhom u x_0 je konus sa vrhom u x_0 (ali unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan skup);

5. Unutrašnjost, zatvaranje i konveksni omotač konusa je konus.

Rešenje. 1. Neka su $K_i, i \in I$ konusi sa vrhom u x_0, tj. $K_i = x_0 + K_i^0, i \in I$, gde su $K_i^0, i \in I$ odgovarajući konusi sa vrhom u nuli. Tada je $K = \bigcap_{i\in I} K_i = \bigcap_{i\in I}(x_0 + K_i^0) = x_0 + \bigcap_{i\in I} K_i^0$. Dakle, ostaje samo još da se pokaže da je $K^0 = \bigcap_{i\in I} K_i^0$ konus sa vrhom u nuli.

Neka je $K^0 = \bigcap_{i\in I} K_i^0$, $x \in K^0$ i $t > 0$. Ako x pripada preseku, onda x pripada svim konusima, $x \in K_i^0, i \in I$. Tada i $tx \in K_i^0, i \in I$, za sve $t > 0$, jer je svaki K_i^0 konus sa vrhom u nuli. Onda $tx \in \bigcap_{i\in I} K_i^0 = K^0$, pa je K^0 konus sa vrhom u nuli.

2. K_1 i K_2 su konusi sa vrhom u x_0, pa je:

$$K_1 = x_0 + K_1^0,$$
$$K_2 = x_0 + K_2^0,$$

gde su K_1^0, K_2^0 konusi sa vrhom u nuli. Pošto je

$$\alpha K_1 + \beta K_2 = (\alpha + \beta)\, x_0 + \alpha K_1^0 + \beta K_2^0,$$

još treba pokazati da je $\alpha K_1^0 + \beta K_2^0$ konus sa vrhom u nuli.
Neka je $z \in \alpha K_1^0 + \beta K_2^0$ proizvoljno i $t > 0$ dato. Onda je $z = \alpha z_1 + \beta z_2$, za neke $z_1 \in K_1^0$ i $z_2 \in K_2^0$. Pošto je

$$tz = t\,(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha\,(tz_1) + \beta\,(tz_2)\,,$$

a $tz_1 \in K_1^0$, $tz_2 \in K_2^0$, jer su u pitanju konusi sa vrhom u nuli, dobija se:

$$tz \in \alpha K_1^0 + \beta K_2^0.$$

Pokazano je da je $\alpha K_1^0 + \beta K_2^0$ konus sa vrhom u nuli.

3. Neka je $K = K_1 + \ldots + K_n$, gde su $K_i = x_0 + K_i^0, i = 1, \ldots, n$ konveksni konusi sa vrhom u x_0, a K_i^0 odgovarajući konusi sa vrhom u nuli. Lako se vidi da i $K_i^0, i = 1, \ldots, n$ moraju biti konveksni. Na osnovu zadatka pod b), zna se da je $K = nx_0 + \sum_{i=1}^{n} K_i^0$. Ostaje još da se pokaže i da je $K^0 = \sum_{i=1}^{n} K_i^0$ konveksan konus sa vrhom u nuli. Biće korišćena Propozicija 2.22.

   Neka je $K^0 = K_1^0 + \ldots + K_n^0$, gde su $K_1^0, \ldots, K_n^0$ konveksni konusi sa vrhom u nuli, $x, y \in K^0$ i $\alpha, \beta > 0$. Zna se da je:

$$\begin{aligned} x =& x_1 + \ldots + x_n,\ x_i \in K_i^0, \\ y =& y_1 + \ldots + y_n,\ y_i \in K_i^0,\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

   Svi $K_i^0, i = 1, \ldots, n$ su konveksni konusi sa vrhom u nuli, pa za sve $i = 1, \ldots, n$ važi $z_i = \alpha x_i + \beta y_i \in K_i^0$. Odavde se dobija:

$$\alpha x + \beta y = \alpha\left(x_1 + \ldots x_n\right) + \beta\left(y_1 + \ldots y_n\right) = z_1 + \ldots + z_n \in K^0.$$

4. Neka je $K = \bigcup_{i \in I} K_i$, gde su $K_i, i \in I$ konusi sa vrhom u nuli. Za neko $x \in K$ i $t > 0$, zna se da postoji $j \in I$ tako da $x \in K_j$. K_j je konus sa vrhom u nuli, pa $tx \in K_j$. Pošto je $K_j \subset K$, $tx \in K$. Kao i do sada, ovo se lako uopštava na konus sa vrhom u x_0.
   Kontraprimerom će se pokazati da unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan skup. Neka je:

$$\begin{aligned} K_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, x \geq 0\right\}, \\ K_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x, x \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

   U pitanju su konveksni konusi sa vrhom u nuli. Međutim, $K = K_1 \cup K_2$ nije konveksan konus. Za $z_1 = (1, 1) \in K_1$, $z_2 = (-1, 1) \in K_2$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha z_1 + \beta z_2 = (0, 1) \notin K$.

5. Neka je dat konus sa vrhom u nuli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (dobijeni rezultati se lako uopštavaju na proizvoljan konus). Neka je $K \neq \emptyset$.

   Prvo treba pokazati da je K° konus. Neka je $x \in K^\circ$ i $t > 0$. Dokazaće se da je $tx \in K^\circ$. Za tačku $x \in K^\circ$ postoji $\varepsilon > 0$, tako da je $L_\varepsilon(x) \subset K$. Tada je $L_{t\varepsilon}(tx) \subset K$. Zaista, za proizvoljno $y \in L_{t\varepsilon}(tx)$ važi $\|y - tx\| < t\varepsilon$. Jasno, važi $y = t(\frac{1}{t}y)$, te ako se pokaže da je $\frac{1}{t}y \in L_\varepsilon(x) \subset K$ dokaz je završen, jer je K konus. Važi $\|\frac{1}{t}y - x\| = \frac{1}{t}\|y - tx\| < \varepsilon$.

   Dalje, treba pokazati da je $\overline{K}$ konus. Neka su dati proizvoljni $t > 0$ i $k \in \overline{K}$. Tada postoji niz $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, tako da je $\lim_{n\to\infty} k_n = k$. Pošto je K konus i niz $\{tk_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, te se njegova granica nalazi u $\overline{K}$. Jasno, $tk = \lim_{n\to\infty} tk_n \in \overline{K}$, pa je $\overline{K}$ konus.

   Ostaje još da se pokaže da je konveksni omotač coK konus. Neka je $t > 0$ i $x \in coK$. Tada se, na osnovu zadatka 2.5, zna da postoje $k_1, \dots, k_n \in K$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ tako da je $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i$. Konačno, važi $tx = t\sum_{i=1}^n \alpha_i k_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (tk_i) \in coK$, jer je K konus te $tk_i \in K$, $i = 1, \dots, n$. $\square$

Zadatak 2.8. Dokazati da ako je S konveksan skup onda je

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda y, \ \ \lambda \geq 0, \ y \in S\}$$

konveksan konus sa vrhom u nuli.

Rešenje. Korišćenjem Propozicije 2.22 pokazaće se da je K konveksan konus sa vrhom u nuli. Neka je $x_1, x_2 \in K$ i α, $\beta > 0$. Tada je:

$$\begin{aligned} &x_1 = \lambda_1 y_1, \\ &x_2 = \lambda_2 y_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \ y_1, y_2 \in S. \end{aligned}$$

Dobija se da je:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 &= \alpha\lambda_1 y_1 + \beta\lambda_2 y_2 \\ &= (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)\left[\frac{\alpha\lambda_1}{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} y_1 + \frac{\beta\lambda_2}{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} y_2\right]. \end{aligned}$$

Koristeći da je S konveksan skup,

$$y = \frac{\alpha\lambda_1}{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} y_1 + \frac{\beta\lambda_2}{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} y_2 \in S,$$

za $\lambda = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \geq 0$, dobija se:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \lambda y \in K,$$

pa je K konveksan konus sa vrhom u nuli. $\square$

Zadatak 2.9. Neka je data matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pokazati da je

$$\text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ za neko } x \in \mathbb{R}^m_+\}$$

zatvoren konveksan konus sa vrhom u nuli, pri čemu $0 \in \text{cone}(A)$.

Rešenje. Lako se pokazuje da je $\text{cone}(A)$ konveksan konus sa vrhom u nuli. Pokazaće se da je on i zatvoren.

Dokaz će se izvesti indukcijom po broju kolona matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Neka je prvo $m = 1$ i neka je jedina kolona matrice A označena sa a^1. Tada je:

$$\text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = a^1 x = b \text{ za neko } x \geq 0\}.$$

Neka je dat proizvoljan konvergentan niz $\{b^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u $\text{cone}(A)$ i neka je njegova granica $\tilde{b}$. Pokažimo da $\tilde{b} \in \text{cone}(A)$, odnosno da postoji $\tilde{x} \geq 0$, tako da je $\tilde{b} = a^1\tilde{x}$. Ako je $a^1 = 0$, onda je $\text{cone}(A) = \{0\}$, a to je zatvoren skup. Neka je $a^1 \neq 0$. Tada postoji $k \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $a^1_k \neq 0$. S obzirom na to da je $\lim_{i\to\infty} b^i = \lim_{i\to\infty} a^1 x^i = \tilde{b}$, gde su $x^i \geq 0$, onda je i niz $k-$tih koordinata konvergentan, pa važi $\lim_{i\to\infty} b^i_k = \lim_{i\to\infty} x^i a^1_k = \tilde{b}_k$. Odavde se dobija da je niz $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergentan i da teži ka $\frac{\tilde{b}_k}{a^1_k}$. Jasno, $\tilde{x} = \frac{\tilde{b}_k}{a^1_k} \geq 0$, jer su svi $x^i \geq 0$. Konačno se zaključuje da je $\lim_{i\to\infty} b^i = \lim_{i\to\infty} a^1 x^i = a^1\tilde{x} = \tilde{b} \in \text{cone}(A)$.

Pretpostavimo da je

$$\bar{S} = \text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ za neko } x \in \mathbb{R}^{m-1}_+\}$$

zatvoren skup za bilo koji izbor matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times(m-1)}$.

Treba dokazati da je

$$S = \text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ za neko } x \in \mathbb{R}^m_+\}$$

zatvoren skup. Sa $a^1, a^2, \dots, a^m$ biće oznčene kolone matrice A. Razlikuju se dva slučaja: slučaj kada S sadrži sve vektore $-a^1, -a^2, \dots, -a^m$ i slučaj kada postoji $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, tako da $-a^k \notin S$. U prvom slučaju S je potprostor, jer je S konus i svakako sadrži sve vektore kolona $a^1, a^2, \dots, a^m$, a potprostor konačno-dimenzionog prostora je uvek zatvoren skup (videti [13], str.144).

Posmatra se sada slučaj kada $-a^k \notin S$, za neko $k \in \{1, \dots, m\}$. Skup S može da se zapiše i na sledeći način:

$$S = \text{cone}(A) = \Big\{b \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{j=1}^{m} a^j x_j = b \text{ gde je } x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, m\Big\}.$$

Neka je dat konvergentan niz $\{b^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u S i neka je $\lim_{i\to\infty} b^i = \tilde{b}$. Treba da se utvrdi da je $\tilde{b} \in S$. Za svako $i \in \mathbb{N}$, vektori b^i su oblika:

$$b^i = \sum_{j=1}^{m} a^j x^i_j = \sum_{j\neq k} a^j x^i_j + a^k x^i_k = c^i + a^k x^i_k,$$

gde su $x^i_k \geq 0$, za sve $i \in \mathbb{N}$ i $c^i \in \bar{S}$, $i \in \mathbb{N}$. Podsetimo se, $\bar{S}$ je po indukcijskoj pretpostavci zatvoren i može da se zapiše u obliku

$$\bar{S} = \Big\{b \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} a^j x_j = b \text{ gde je } x_j \geq 0,\ j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}\Big\}.$$

Prvo treba dokazati da je niz $\{x^i_k\}_{i\in\mathbb{N}}$ ograničen. Pretpostavimo suprotno da postoji podniz $\{x^{i_l}_k\}_{l\in\mathbb{N}}$ takav da je $\lim_{l\to\infty} |x^{i_l}_k| = \infty$, odnosno da je granična vrednost $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{x^{i_l}_k} = 0$. Tada važi da je $\lim_{l\to\infty} \frac{b^{i_l}}{x^{i_l}_k} = 0$. Dakle, važi $\lim_{l\to\infty} \frac{c^{i_l} + a^k x^{i_l}_k}{x^{i_l}_k} = 0$ odakle se dobija da je $\lim_{l\to\infty} \frac{c^{i_l}}{x^{i_l}_k} = -a^k$. Na taj način dobijen je niz $\left\{\frac{c^{i_l}}{x_k^{i_l}}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$, koji konvergira, a pripada zatvorenom skupu $\bar{S}$, te je $-a^k \in \bar{S}$. Očigledno, ako $-a^k \in \bar{S}$ onda važi i $-a^k \in S$ (uzimajući da je odgovarajući $x_k = 0$). To dovodi do kontradikcije, te je niz $\{x_k^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ograničen. Sada se zna da postoji njegov podniz $\{x_k^{i_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$, koji je konvergentan i neka je $\lim_{p\to\infty} x_k^{i_p} = \tilde{x}_k \geq 0$. Važi da je:

$$\tilde{b} = \lim_{p\to\infty} b^{i_p} = \lim_{p\to\infty} (c^{i_p} + a^k x_k^{i_p}) = \lim_{p\to\infty} c^{i_p} + a^k \tilde{x}_k.$$

Odavde se vidi da je $\{c^{i_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i pripada skupu $\bar{S}$ koji je zatvoren, te je $\tilde{c} = \lim_{p\to\infty} c^{i_p} \in \bar{S}$. Tako je dobijeno da je $\tilde{b} = \tilde{c} + a^k\tilde{x}_k \in S$. □

Zadatak 2.10. Neka je $c \in \mathbb{R}^n$ fiksiran vektor. Dokazati da je sa $f(x) = \langle c, x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ definisana linearna funkcionela na $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 2.11. Neka je A konveksan i zatvoren podskup u $\mathbb{R}^n$. Tada postoji jedinstven element $a_0 \in A$ takav da je $\|a_0\| = \min\limits_{a\in A} \|a\|$. Dokazati.

Zadatak 2.12. Neka je $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$, $r > 0$. Pokazati da je

$$P_A(x) = \begin{cases} r \cdot \frac{x}{\|x\|}, & \|x\| > r \\ x, & \|x\| \leq r \end{cases}$$

Rešenje. Čitaocu se ostavlja da pokaže da je A zatvoren i konveksan skup. Neka je $y \in A$ i $\|x\| > r$. Koristeći potreban i dovoljan uslov za projekciju tačke na skup (Teorema 2.31 a)) i Koši - Švarcovu nejednakost, dobija se da važi:

$$\begin{aligned}\langle x - P_A(x), &P_A(x) - y\rangle = \\ &= \langle x - r\cdot\frac{x}{\|x\|}, r\cdot\frac{x}{\|x\|} - y\rangle = (1 - \frac{r}{\|x\|})\langle x, r\cdot\frac{x}{\|x\|} - y\rangle \\ &= (1 - \frac{r}{\|x\|})(r\|x\| - \langle x, y\rangle) \geq (1 - \frac{r}{\|x\|})(r\|x\| - \|x\|\|y\|) \\ &= (1 - \frac{r}{\|x\|})\|x\|(r - \|y\|) \geq 0.\end{aligned}$$

Dakle, ovako definisana funkcija $P_A(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ je zaista projekcija tačke x na skup A. $\square$

Zadatak 2.13. Neka je $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\},\ r > 0$. Odrediti $P_B(x)$, projekciju proizvoljne tačke $x \in \mathbb{R}^n$ na skup B.

Zadatak 2.14. Odrediti projekciju tačke na hiperravan $H_{c,\gamma}$ definisanu sa $H_{c,\gamma} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, a\rangle = \gamma\}$, za zadato $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Neka je $z \in H_{c,\gamma}$ projekcija tačke x na skup $H_{c,\gamma}$. Pretpostavlja se da je $z \in H_{c,\gamma}$ oblika $z = x + \alpha c$, za neko $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada mora da važi $\langle x+\alpha c, c\rangle = \gamma$, odakle je $\alpha = (\gamma - \langle c, x\rangle)\frac{1}{\|c\|^2}$. Dalje, na osnovu Teoreme 2.31, za $z \in H_{c,\gamma}$, mora da važi da je $\langle x - z, z - y\rangle \geq 0$, za sve $y \in H_{c,\gamma}$. Zaista, pošto je $z = x + \alpha c \in H_{c,\gamma}$ onda je $\langle x - z, z - y\rangle = -\alpha(\langle c, z\rangle - \langle c, y\rangle) = 0$, za sve $y \in H_{c,\gamma}$. Prema tome:

$$P_{H_{c,\gamma}}(x) = x + (\gamma - \langle c, x\rangle)\frac{1}{\|c\|^2} \cdot c.$$

Napomena. Na sličan način se određuje projekcija tačke na zatvoren poluprostor $\{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, a\rangle \leq \gamma\}$, za zadato $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$. $\square$

Zadatak 2.15. Neka je U zatvoren i konveksan skup u $\mathbb{R}^n$. Neka je, za proizvoljno $u \in \mathbb{R}^n$, sa $P_U(u)$ označena projekcija tačke u na skup U. Dokazati da tada važi

$$\|v - P_U(u)\|^2 \leq \langle v - u, v - P_U(u)\rangle\,,$$

kao i

$$\|v - P_U(u)\|^2 + \|u - P_U(u)\|^2 \leq \|v - u\|^2\,,$$

za sve $v \in U$.

Rešenje. Koristiće se Teorema 2.31 pod a). Pošto je $P_U(u)$ projekcija tačke u na zatvoren i konveksan skup U, za proizvoljno $v \in U$ važi:

$$\langle u - P_U(u), P_U(u) - v\rangle \geq 0, \quad \text{odnosno,}$$
$$\langle u - P_U(u), v - P_U(u)\rangle \leq 0.$$

U prvom delu zadatka,

$$\begin{aligned}
&\|v - P_U(u)\|^2 = \langle v - u + u - P_U(u), v - P_U(u)\rangle \\
&= \langle v - u, v - P_U(u)\rangle + \langle u - P_U(u), v - P_U(u)\rangle \le \langle v - u, v - P_U(u)\rangle .
\end{aligned}$$

U drugom delu,

$$\begin{aligned}
&\|v - P_U(u)\|^2 + \|u - P_U(u)\|^2 \\
&= \langle v - u + u - P_U(u), v - P_U(u)\rangle + \langle u - v + v - P_U(u), u - P_U(u)\rangle \\
&= \langle v - u, v - P_U(u)\rangle + \langle u - P_U(u), v - P_U(u)\rangle + \langle u - v, u - P_U(u)\rangle \\
&+ \langle v - P_U(u), u - P_U(u)\rangle \le \langle v - u, v - P_U(u)\rangle + \langle u - v, u - P_U(u)\rangle \\
&= \langle v - u, v - P_U(u) - u + P_U(u)\rangle = \|v - u\|^2 ,
\end{aligned}$$

što je trebalo pokazati. □

Zadatak 2.16. Pokazati:

1. Neka je K konus sa vrhom u x_0 i neka je $H_{c,\gamma}$ potporna hiperravan za K, odnosno $\langle c, x\rangle \ge \gamma$, $\forall x \in K$. Tada je $\langle c, x\rangle \ge \langle c, x_0\rangle$.

2. Ako $H_{c,\gamma}$ razdvaja skup A i konus K sa vrhom u x_0 onda ih razdvaja i hiperravan $H_{c,\langle c,x_0\rangle}$.

3. Neka je K zatvoren i konveksan konus. Tada se on može razdvojiti od svake poluprave, koja polazi iz vrha konusa i seče ga samo u vrhu.

4. Ako hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja konuse K_1 i K_2 sa vrhom u nuli onda je $\gamma = 0$. Ako je jedan od konusa potprostor onda on leži u toj hiperravni.

Rešenje. 1. Elementi konusa K su oblika $x_0 + t(x - x_0)$, $t > 0$, $x \in K$. Pretpostavlja se da postoji $x \in K$, tako da važi $\langle c, x\rangle < \langle c, x_0\rangle$. Tada je:

$$\langle c, x_0 + t(x - x_0)\rangle = \langle c, x_0\rangle + t(\langle c, x\rangle - \langle c, x_0\rangle).$$

Kada $t \to \infty$ iz pretpostavke sledi da $t(\langle c, x\rangle - \langle c, x_0\rangle)$ teži ka $-\infty$, pa za svako M postoji t, tako da je $\langle c, x_0 + t(x - x_0)\rangle < M$. Posebno, za $M = \gamma$, postoji t_γ tako da je $\langle c, x_0 + t_\gamma(x - x_0)\rangle < \gamma$, ali to je kontradikcija, jer $x_0 + t_\gamma(x - x_0) \in K$. Prema tome, $\langle c, x\rangle \geq \langle c, x_0\rangle$ za sve $x \in K$.

Zaključak. Sa $H_{c,\langle c,x_0\rangle}$ je definisana hiperravan koja je potporna za konus K, a prolazi kroz njegov vrh.

2. Neka je $\sup_{a\in A}\langle c, a\rangle \leq \gamma \leq \inf_{k\in K}\langle c, k\rangle$. Treba pokazati da važi $\sup_{a\in A}\langle c, a\rangle \leq \langle c, x_0\rangle \leq \inf_{k\in K}\langle c, k\rangle$. Desna nejednakost direktno sledi iz dela zadatka pod a). Leva nejednakost dobija se na osnovu činjenice da je $\gamma \leq \langle c, x_0\rangle$. Zaista, pošto je $\gamma \leq \langle c, k\rangle$, $\forall k \in K$, pa i za $k_n := x_0 + \frac{1}{n}(x - x_0) \in K, n \in \mathbb{N}$ važi $\gamma \leq \langle c, k_n\rangle$, odakle je $\gamma \leq \lim_{n\to\infty}\langle c, k_n\rangle = \langle c, x_0\rangle$.

3. Neka je sa A označena zadata poluprava. Ako $a \in A$, onda je poluprava data sa

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + t(a - x_0), \quad \forall t \geq 0\}.$$

Fiksirajmo jednu tačku $a \in A$. Ona se može razdvojiti od K sa nekom hiperravni $H_{c,\gamma}$. Iz dela zadatka pod b) sledi da i hiperravan $H_{c,\langle c,x_0\rangle}$ razdvaja K i $\{a\}$. Neka je, na primer, $\inf_{x\in K}\langle c, x\rangle \geq \langle c, x_0\rangle \geq \langle c, a\rangle$. Dokažimo da je $\langle c, y\rangle \leq \langle c, x_0\rangle$ za sve $y \in A$. Neka je dato proizvoljno $y \in A$, tada postoji $t > 0$, tako da je $y = x_0 + t(a - x_0)$. Sada sledi da je:

$$\langle c, y\rangle = \langle c, x_0 + t(a - x_0)\rangle = \langle c, x_0\rangle + t(\langle c, a\rangle - \langle c, x_0\rangle) \leq \langle c, x_0\rangle.$$

Dakle, $\sup_{y\in A}\langle c, y\rangle \leq \langle c, x_0\rangle \leq \inf_{x\in K}\langle c, x\rangle$.

4. Neka je $\sup_{x\in K_1}\langle c, x\rangle \leq \gamma \leq \inf_{y\in K_2}\langle c, y\rangle$. Iz prvog zadatka sledi $\langle c, x\rangle \leq 0$ za sve $x \in K_1$, kao i $\langle c, y\rangle \geq 0$ za sve $y \in K_2$, odnosno $\gamma = 0$. (Jasno, ne može biti $\sup_{x\in K_1}\langle c, x\rangle < 0$, jer je onda i $\sup_{t>0}\langle c, tx\rangle < 0$, ali $\lim_{t\to 0^+}\langle c, tx\rangle = 0$).

Neka je, na primer, K_1 potprotstor. Važi $\langle c, x\rangle \leq 0$ za sve $x \in K_1$. Pošto je i $-x \in K_1$ imamo $\langle c, -x\rangle = -\langle c, x\rangle \leq 0$, odnosno $\langle c, x\rangle \geq 0$. Odavde sledi $\langle c, x\rangle = 0$ za sve $x \in K_1$, odnosno $K_1 \subset H_{c,0}$. $\square$

Zadatak 2.17. Za skupove A i B proveriti da li ih razdvaja, odnosno jako razdvaja, hiperravan $H_{c,\gamma}$ gde je $c = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, ako je:

1. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}$ i
   $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 \geq 2 \ \wedge \ x_1 - x_2 \geq 0\}$;

2. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max\{x_i \mid i = 1, \ldots, n\} \leq 1\}$ i
   $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 \geq 2 \ \wedge \ x_1 - x_2 \geq -1\}$;

3. $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \ \wedge x_2 \geq \frac{1}{x_1}\}$ i
   $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < -1 \ \wedge x_2 \geq -\frac{1}{x_1+1}\}$.

Zadatak 2.18. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ konveksni poliedarski konusi u $\mathbb{R}^3$ generisani matricama A i B, redom. Neka je $\mathcal{A}^* \cap \mathcal{B}^* = \{0\}$. Pokazati da je tada $\mathbb{R}^3 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Zadatak 2.19. Proizvođač proizvodi dve vrste betona. Svaka vreća visokokvalitetnog betona sadrži 10 kg šljunka i 5 kg cementa, dok svaka vreća niskokvalitetnog betona sadrži 12 kg šljunka i 3 kg cementa. U skladištu postoji 1920 kg šljunka i 780 kg cementa. Proizvođač ostvaruje zaradu od 1,2 \$ za svaku vreću visokokvalitetnog, a 1 \$ za svaku vreću niskokvalitetnog betona. Odrediti koliko vreća jednog i drugog treba proizvesti iz dostupnih sirovina za najveću zaradu.

Rešenje. Podaci su uneti u tabelu:

	šljunak	cement	zarada (u \$)
niskokvalitetni (x)	12	3	1
visokokvalitetni (y)	10	5	1,2

Linearno programiranje se bavi traženjem minimuma ili maksimuma linearne funkcije cilja, uz linearna ograničenja data u obliku jednakosti ili nejednakosti.

U ovom zadatku se maksimizira funkciju cilja

$$J(x, y) = x + 1,2y,$$

uz ograničenja

$$12x + 10y \leq 1920, \quad 3x + 5y \leq 780, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

i ona nam daju dopustiv skup.

Na osnovu Teoreme 2.50 zna se da ako funkcija cilja dostiže svoj minimum ili maksimum na dopustivom skupu, koji je u ovom slučaju poliedar dobijen na osnovu datih ograničenja, onda ga dostiže u nekom od temena poliedra.

temena	J (zarada u \$)
$A(0,0)$	0
$B(160,0)$	160
$C(0,156)$	187,2
$D(60,120)$	204

Dakle, $J_{max} = J(60,120) = 204$, te je maksimalna zarada 204 \$, i ostvaruje se ako se proizvede 60 vreća niskokvalitetnog i 120 vreća visokokvalitetnog betona. □

Zadatak 2.20. 1. Odrediti maksimum funkcije f, gde je

$$f(x,y) = 2005 + x + 2y,$$

pod uslovima

$$-4x + y \leq -4, \quad 3x + 4y \leq 24, \quad x + y \geq 2,$$
$$3x - 5y \leq 15, \quad x, y \geq 0.$$

2. Odrediti minimum funkcije f, gde je $f(x,y) = x - y + 9$, ako je

$$x + y \geq 1, \quad -x + y \leq 2, \quad x + y \leq 3 \quad x, y \geq 0.$$

3. Odrediti maksimum funkcije f, gde je $f(x,y) = 2y + x$, pod uslovima

$$y \geq 2, \quad y \geq x, \quad y \leq 3, \quad x, y \geq 0.$$

Glava 3

Konveksne funkcije i konveksno programiranje

U ovoj glavi navode se osnovne teoreme o konveksnim funkcijama. Konveksnost je najznačajniji kriterijum globalne optimalnosti. Pri tome, za razliku od klasičnog metoda, neophodni uslovi (prvog reda) su i dovoljni (videti Teoremu 3.3). U slučaju jake konveksnosti, ako postoji rešenje ono je jedinstveno. Konveksne funkcije ne moraju da budu diferencijalbilne, a teoreme separacije obezbeđuju *linearizaciju* pomoću subdiferencijala, na sličan način kao što se linearizuje funkcija koja je diferencijabilna. Problemi s ograničenjima se posmatraju u posebnom poglavlju i tretiraju na uobičajen način, Lagranžovom metodom eliminacije ograničenja. Lagranžovi množitelji mere osteljivost optimalne vrednosti s obzirom na male promene u ograničenjima (videti zadatak 16).

3.1 Konveksne funkcije

Definicija 3.1. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Funkcionela J definisana nad U je konveksna na U ako za sve $u, v \in U$ i sve $\alpha \in (0,1)$ važi:*

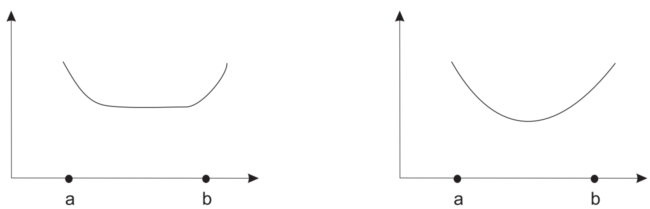
$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v).$$

Ako za sve $u, v \in U$, $u \neq v$ i sve $\alpha \in (0,1)$ važi:

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v),$$

onda se kaže da je J strogo konveksna funkcija.

Geometrijska interpretacija ove definicije je očigledna. Tačke na sečici krive koja spaja $J(u)$ i $J(v)$ nalaze se "iznad" tačaka na grafiku krive J s odgovarajućim argumentom.



Slika 3.1. Grafici konveksne i strogo konveksne funkcije.

Bez dokaza se usvajaju sledeće činjenice o konveksnim funkcijama nad podskupovima skupa realnih brojeva. U njima se prepliću svojstva konveksnosti funkcionele J, monotonosti njenog prvog izvoda i nenegativnosti njenog drugog izvoda, na način kao što se ona tretiraju u osnovnim kursevima realne analize.

1. Konveksna funkcija J nad intervalom $[a,b]$ je neprekidna na (a,b) i u svakoj tački $u \in (a,b)$ ima konačan levi izvod $J'_{-}(u)$, konačan desni izvod $J'_{+}(u)$ i važi $J'_{-}(u) \leq J'_{+}(u)$.

2. Neka je J diferencijabilna na $[a,b]$. Potreban i dovoljan uslov za konveksnost funkcije J na $[a,b]$ je da J' ne opada na $[a,b]$.

3. Da bi dva puta diferencijabilna funkcija J na $[a,b]$ bila na tom intervalu konveksna, potrebno je i dovoljno da je $J''(u) \geq 0$, za sve $u \in [a,b]$.

4. Neka je J konveksna funkcija na $[a, b]$ i neka je $\lim_{x\to a+} J(x) = J(a)$, kao i $\lim_{x\to b-} J(x) = J(b)$. Tada je skup tačaka minimuma funkcije J nad $[a, b]$ neprazan i sve tačke lokalnog minimuma su tačke globalnog minimuma.

Sledi dokaz dela poslednjeg tvrđenja u slučaju kada je domen podskup skupa $\mathbb{R}^n$: Svaki lokalni minimum konveksne funkcije je istovremeno i globalni minimum.

Dokaz. Neka je J konveksna funkcija nad $D \subset \mathbb{R}^n$ i neka je u_* tačka lokalnog minimuma funkcije J. To znači da postoji okolina te tačke, $L_\delta(u_*) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - u_*\| < \delta\}$, tako da za sve $u \in L_\delta(u_*) \cap D$ važi $J(u_*) \leq J(u)$. Jasno, za proizvoljno $u \in D$ postoji $\alpha \in (0, 1)$ tako da je tačka $v = \alpha u + (1 - \alpha)u_* \in L_\delta(u_*)$. Evo zašto: ako $u \in L_\delta(u_*)$, onda v očigledno pripada tom skupu, jer je on konveksan. Ako pak $u \in D \backslash L_\delta(u_*)$, onda, birajući $\alpha := \frac{\delta}{2\|u-u_*\|}$ dobija se:

$$\|v - u_*\| = \|\alpha u + (1 - \alpha)u_* - u_*\|$$

$$= \left\| \frac{\delta}{2\|u - u_*\|} u + u_* - \frac{\delta}{2\|u - u_*\|} u_* - u_* \right\| = \frac{\delta}{2\|u - u_*\|} \|u - u_*\| < \delta,$$

odakle $v \in L_\delta(u_*)$. Iz konveksnosti funkcije J sledi

$$J(u_*) \leq J(v) = J(\alpha u + (1 - \alpha)u_*) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(u_*),$$

pa je $\alpha J(u_*) \leq \alpha J(u)$, za sve $u \in D$, odnosno u_* je tačka globalnog minimuma. $\square$

Nije teško pokazati da konveksna funkcija ne može da ima strogi maksimum u $u^* \in D^\circ$.

Dokaz. Neka je $u^* \in D^\circ$ tačka strogog maksimuma funkcije $J : D \to \mathbb{R}$. Tada postoje $u_1, u_2 \in D^\circ$ takve da je $u^* = \frac{u_1+u_2}{2}$ (jer postoji lopta u D sa centrom u u^*, pa za u_1 i u_2 mogu da se izaberu krajnje tačke prečnika posmatrane lopte D). Iz konveksnosti funkcije J sledi:

$$J(u^*) = J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) < \frac{1}{2}J(u^*) + \frac{1}{2}J(u^*) = J(u^*),$$

što je kontradikcija. $\square$

Takođe, skup tačaka minimuma konveksne funkcije je konveksan, a ako je J strogo konveksna onda je taj skup jednočlan ili prazan (videti zadatak 3.9).

U nastavku se ispituje konveksnost na skupu $U \subset \mathbb{R}^n$, uz pretpostavke o diferencijabilnosti posmatrane funkcije. Koristiće se uobičajene oznake:

$$C^1(U) = \{J \mid J \quad \text{je neprekidno diferencijabilna funkcija na} \quad U\},$$

$$C^2(U) = \{J \mid J \quad \text{je dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na} \quad U\}.$$

Teorema 3.2. *Neka je U neprazan i konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, i neka je $J : U \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcionela na U $(J \in C^1(U))$. Potreban i dovoljan uslov za konveksnost funkcije J na U je dat sa*

$$J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle, \quad \forall u, v \in U.$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka je J konveksna i neprekidno diferencijabilna na U. Iz konveksnosti sledi:

$$J(v + \alpha(u - v)) - J(v) \leq \alpha(J(u) - J(v)), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \ \ u, v \in U.$$

Iz formule konačnog priraštaja (Lagranžova teorema srednje vrednosti) sledi:

$$\alpha\langle J'(v + \theta\alpha(u - v)), u - v\rangle \leq \alpha(J(u) - J(v)), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \ \ u, v \in U,$$

za neko $\theta \in (0, 1)$. Odavde je $\langle J'(v + \theta\alpha(u - v)), u - v\rangle \leq J(u) - J(v)$, pa iz neprekidnosti prvog izvoda, kada $\alpha \to 0$, dobija se tražena nejednakost.

$(\Leftarrow)$ Neka je $J \in C^1(U)$ i neka važi $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle$, $\forall u, v \in U$. Neka su date tačke $u, v \in U$, i $\alpha \in (0, 1)$. Neka je, dalje, $w = \alpha u + (1-\alpha)v$. Važi:

$$J(u) - J(w) \geq \langle J'(w), u - w\rangle, \quad J(v) - J(w) \geq \langle J'(w), v - w\rangle.$$

Ako se prva nejednakost pomnoži sa α, a drugu sa $1-\alpha$ i saberu se, dobija se:

$$\alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - J(w) \geq \langle J'(w), \alpha u + (1-\alpha)v - w\rangle = 0,$$

odnosno $\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v) \geq J(\alpha u+(1-\alpha)v)$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Sledeća teorema, kriterijum optimalnosti za konveksne funkcije, daje potreban i dovoljan uslov minimuma glatkih konveksnih funkcija.

Teorema 3.3. *Neka je U neprazan i konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, neka je $J \in C^1(U)$, a U_* skup tačaka minimuma funkcije J nad U.*

1. *Za sve $u_* \in U_*$ i sve $u \in U$ važi $\langle J'(u_*), u-u_*\rangle \geq 0$.*
2. *Ako $u_* \in U^\circ \cap U_*$ onda je $J'(u_*) = 0$.*
3. *Za $u_* \in \partial U \cap U_*$ ne mora da važi $J'(u_*) = 0$.*
4. *Ako je J konveksna funkcija onda iz $\langle J'(u_*), u-u_*\rangle \geq 0$, za sve $u \in U$ i neko $u_* \in U$, sledi $u_* \in U_*$.*

Dokaz.

1. Neka $u_* \in U_*$. Iz definicije gradijenta sledi:

   $$0 \leq J(u_* + \alpha(u-u_*)) - J(u_*) = \alpha\langle J'(u_*), u-u_*\rangle + o(\alpha).$$

   Dakle, za $\alpha > 0$ važi $0 \leq \langle J'(u_*), u-u_*\rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha}$. Odavde, kada $\alpha \to 0^+$, dobija se traženo tvrđenje.

2. Ako je u_* unutrašnja tačka skupa U, onda postoji $\varepsilon_0 > 0$, tako da $u := u_* + h \in U$ za sve $h \in \mathbb{R}^n$ za koje je $\|h\| < \varepsilon_0$. Iz prethodno dokazanog tvrđenja sledi $\langle J'(u_*), u_* + h - u_*\rangle \geq 0$, odnosno $\langle J'(u_*), h\rangle \geq 0$, a takođe i $\langle J'(u_*), -h\rangle \geq 0$, odakle sledi $J'(u_*) = 0$.

3. Kontraprimer je funkcija $J(u) = u^2$, nad skupom $U = [1,2]$. Jasno $J'(u) = 2u > 0$, za sve $u \in U$, a posebno, $J'(u_*) = J'(1) = 2$. Ovde je $U_* = \{1\}$.

4. Na osnovu prethodne teoreme zna se da je $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u-v\rangle$, za sve $u, v \in U$. Posebno, ako se stavi $v = u_*$ iz $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle \geq 0$, sledi $J(u) \geq J(u_*)$, za sve $u \in U$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 3.4. *Neka je U neprazan i konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, i neka je $J \in C^1(U)$. Funkcija J je konveksna na U ako i samo ako važi*

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle \geq 0, \quad \textit{za sve} \quad u, v \in U.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Iz konveksnosti funkcije J sledi $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle$, kao i $J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v - u\rangle$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$0 \geq \langle J'(v), u - v\rangle + \langle J'(u), v - u\rangle = \langle J'(v) - J'(u), u - v\rangle,$$

odnosno $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle \geq 0$, za sve $u, v \in U$.

($\Leftarrow$) Neka je $J \in C^1(U)$ i neka važi $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle \geq 0$, za sve $u, v \in U$. Koristiće se sledeća formula konačnog priraštaja[1] $J(u+h) - J(u) = \int_0^1 \langle J'(u + th), h\rangle dt$. Za proizvoljne $u, v \in U$ i $\alpha \in (0, 1)$ važi:

$$\alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) - J(\alpha u + (1 - \alpha)v)$$

$$= \alpha\left[J(u) - J(\alpha u + (1 - \alpha)v)\right] + (1 - \alpha)\left[J(v) - J(\alpha u + (1 - \alpha)v)\right]$$

$$= \alpha \int_0^1 \Big\langle J'(\alpha u + (1 - \alpha)v + t(1 - \alpha)(u - v)), (1 - \alpha)(u - v)\Big\rangle\, dt$$

$$+(1 - \alpha) \int_0^1 \langle J'(\alpha u + (1 - \alpha)v + t(v - \alpha u - (1 - \alpha)v)), v - \alpha u - (1 - \alpha)v\rangle dt$$

$$= \alpha(1 - \alpha) \int_0^1 \langle J'(\alpha u + (1 - \alpha)v + t(1 - \alpha)(u - v))$$

$$-J'(\alpha u + (1 - \alpha)v + t\alpha(v - u)), u - v\rangle dt$$

$$= \alpha(1 - \alpha) \int_0^1 \langle J'(u_1) - J'(v_1), u_1 - v_1\rangle \frac{1}{t} dt \geq 0,$$

po uslovu zadatka, gde je $u_1 = \alpha u + (1 - \alpha)v + t(1 - \alpha)(u - v)$, a $v_1 = \alpha u + (1 - \alpha)v + t\alpha(v - u)$. Dakle, J je konveksna funkcionela. $\square$

[1] Videti Poglavlje 1.3.

Navedimo još jednu formulu konačnog priraštaja:

$$\langle J'(u+h) - J'(u), h\rangle = \langle J''(u+\theta h)h, h\rangle, \quad \text{za neko} \quad \theta \in (0,1).$$

Teorema 3.5. *Neka je U konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ neprazne unutrašnjosti i neka je $J \in C^2(U)$. Funkcija J je konveksna na U ako i samo ako važi $\langle J''(u)\xi, \xi\rangle \geq 0$, za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$ i sve $u \in U$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Za proizvoljno $u \in U^\circ$ i $\xi \in \mathbb{R}^n$ postoji $\varepsilon > 0$, tako da je $u + \varepsilon\xi \in U$. Iz prethodne teoreme sledi $\langle J'(u+\varepsilon\xi) - J'(u), \varepsilon\xi\rangle \geq 0$, pa se iz formule konačnog priraštaja dobija:

$$\langle J'(u+\varepsilon\xi) - J'(u), \varepsilon\xi\rangle = \langle J''(u+\theta\varepsilon\xi)\xi, \xi\rangle\varepsilon^2 \geq 0,$$

za neko $\theta \in (0,1)$. Odavde je $\langle J''(u+\theta\varepsilon\xi)\xi, \xi\rangle \geq 0$, pa se, kada $\varepsilon \to 0$, dobija traženo tvrđenje.

Neka je sada $u \in \partial U$. Tada postoji niz unutrašnjih tačaka $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ skupa U koji konvergira ka u, pa iz neprekidnosti drugog izvoda sledi:

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \langle J''(u_m)\xi, \xi\rangle = \langle J''(u)\xi, \xi\rangle.$$

$(\Leftarrow)$ Neka su u i v proizvoljne tačke skupa U. Tada postoji $\theta \in (0,1)$, tako da važi:

$$\langle J'(u) - J'(v), u-v\rangle = \langle J''(v+\theta(u-v))(u-v), u-v\rangle.$$

Ako se stavi $\xi = u - v$, iz uslova zadatka sledi $\langle J'(u) - J'(v), u-v\rangle \geq 0$, pa je J konveksna funkcija na osnovu prethodne teoreme. $\square$

Primer 3.6. Funkcionela $J(x,y) = x^2 - y^2$ je konveksna nad skupom $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$. Zaista, $J(x,y) = x^2 - y^2|_{(x,y)\in U} = x$' što je konveksna funkcija na celom $\mathbb{R}$. Međutim, uslov $\langle J''((x,y))\xi, \xi\rangle \geq 0$ nije ispunjen za sve $\xi \in \mathbb{R}^2$. Zaista, dobija se da je:

$$\big\langle J''(x,y)\xi, \xi\big\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2,$$

što je u tačkama oblika $\xi = (0, \xi_2)$ negativno. Prethodna teorema ne može da se primeni na funkciju J, jer je U° prazan skup.

Napomena. Uslov $\langle J''(u)\xi, \xi\rangle \geq 0$ za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$ i sve $u \in U$ ekvivalentan je uslovu nenegativnosti svih glavnih[2] minora matrice drugog izvoda. Navedeno svojstvo se zove pozitivna semidefinitnost bilinearne forme definisane matricom $J''(u)$.

Podsetimo se dovoljnog uslova za strogi minimum dva puta neprekidno diferencijabilne funkcionele J, definisane nad $\mathbb{R}^n$. Potreban uslov da funkcionela J ima ekstrem u tački $x_* \in \mathbb{R}^n$ je $J'(x_*) = 0$. Ako u toj tački matrica drugog izvoda definiše pozitivno definitnu kvadratnu formu[3], odnosno ako je $\langle J''(x_*)\xi, \xi\rangle > 0$, za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, onda je x_* tačka strogog minimuma funkcije J. Potreban i dovoljan uslov za gornju nejednakost jeste da postoji $\gamma > 0$, tako da važi $\langle J''(x_*)\xi, \xi\rangle \geq \gamma\|\xi\|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ (videti zadatak 3.11).

Na osnovu gore navedenog lako može da se pokaže sledeći dovoljan uslov za lokalni minimum funkcionele (videti zadatak 3.10).

Teorema 3.7. *Neka je U konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ neprazne unutrašnjosti i neka je $J \in C^2(U)$ u nekoj okolini tačke $x_* \in U^\circ$, u kojoj je $J'(x_*) = 0$. Ako je $\langle J''(x)\xi, \xi\rangle \geq 0$, za sve x iz posmatrane okoline tačke x_* i sve $\xi \in \mathbb{R}^n$ onda je x_* tačka lokalnog minimuma funkcije J.*

Dokaz. Uslov zadatka implicira konveksnost funkcionele J na posmatranoj okolini tačke x_*. Odatle je $J(x) \geq J(x_*) + \langle J'(x_*), x - x_*\rangle$, za sve x iz posmatrane okoline. Dakle, iz $J'(x_*) = 0$ dobija se $J(x) \geq J(x_*)$, odnosno x_* je tačka lokalnog minimuma. □

Posmatra se funkcija $J(u) = \frac{1}{u}$, $u \in [1, \infty)$. Ona je konveksna, neprekidna (i diferencijablina) nad zatvorenim i konveksnim skupom U, ali ipak ne dostiže svoj infimum ni u jednoj tački skupa U. Ovakve funkcije su motivisale uvođenje potklase konveksnih funkcija kod kojih navedena situacija nije moguća. To su *jako konveksne funkcije.* Proučavanje jako konveksnih funkcija izlazi izvan okvira knjige, a radi potpunosti izlaganja

[2] Glavni minori su minori kod kojih su izabrane vrste i kolone jednake. Minori kojima se ispituje pozitivna definitnost zvaće se "ugaoni minori".

[3] potreban i dovoljan uslov za pozitivnu definitnost jeste pozitivnost "ugaonih" minora

navešće se definicija i zadatak, koji se rešava primenom već savladanih tehnika.

Definicija 3.8. *Funkcija J je jako konveksna na konveksnom skupu U, ako postoji konstanta $\chi > 0$, tako da važi:*

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \alpha(1-\alpha)\chi\|u-v\|^2,$$

za sve $u, v \in U$ i $0 \le \alpha \le 1$.

Iz ove definicije sledi jedinstvenost globalnog minimuma.

Teorema 3.9. *Neka je $J \in C^1(U)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *J je jako konveksna na skupu U;*
2. *postoji konstanta $\chi > 0$, tako da važi:*

$$J(u) - J(v) \ge \langle J'(v), u-v\rangle + \chi\|u-v\|^2, \quad u, v \in U;$$

3. *postoji konstanta $\nu > 0$, tako da važi:*

$$\langle J'(u) - J'(v), u-v\rangle \ge \nu\|u-v\|^2, \qquad u, v \in U.$$

Dodatno, ako za jako konveksnu funkciju J na skupu U važi:

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le L\|u-v\|,$$

za neko $L \ge 0$ i sve $u, v \in U$, onda je $2\chi \le L$.

3.2 Konveksno programiranje

U primenama se najčešće sreću sa ekstremni zadaci kod kojih promenljive ispunjavaju izvesne dodatne uslove, odnosno ograničenja. Matematički rečeno, u ovom poglavlju biće posmatran zadatak uslovnog ekstrema. Ograničenja koja će biti posmatrana izražena su linearnim i konveksnim funkcijama.

Neka je dat konveksan skup $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ i neka je J konveksna funkcija nad skupom U_0. Neka su, dalje, g_k, $k = 1, \dots, m$ konveksne funkcije na U_0, a g_k, $k = m+1, \dots, s$ linearne funkcije, $g_k(x) = \langle a_k, x\rangle - b_k$, $a_k \in \mathbb{R}^n$, $b_k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Zadatak (*) glasi: Odrediti infimum funkcionele J nad skupom U, pri čemu je $U = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_m \cap U_{m+1} \cap \cdots \cap U_s$, gde je U_0 zadat konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, a

$$U_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) \leq 0, \}, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$U_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) = 0\}, \quad k = m+1, \dots, s.$$

Ako tačka $u \in U_k$, za neko $k \in \{1, \dots, s\}$, kaže se da je *u dopustiva pri ograničenju* U_k (ili ograničenju g_k, ako to ne narušava preciznost).

Može se primetiti da su skupovi $U_k,\ k = 1, 2, \dots, s$ konveksni, pa je i U konveksan skup.

Neka je $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^s \mid \lambda_k \geq 0, \ \text{ za sve } \ k = 1, \dots, m\}$. Dakle, λ_k može biti proizvoljan realan broj za $k \in \{m+1, \dots, s\}$.

Definicija 3.10. *Funkcija Lagranža $L : U_0 \times \Lambda \to \mathbb{R}$ zadatka (*) se definiše na sledeći način*

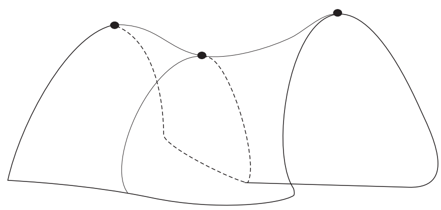
$$L(u, \lambda) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \cdots + \lambda_s g_s(u).$$

Tačka $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ je sedlasta tačka Lagranžove funkcije $L(u, \lambda)$, ako za sve $u \in U_0$ i sve $\lambda \in \Lambda$ važi:

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*).$$

U nastavku će biti uspostavljen odnos između rešenja zadatka (*) i sedlaste tačke odgovarajuće Lagranžove funkcije, a zatim će biti formulisana teorema tipa Kuna-Takera.

Lema 3.11. *Ako je $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ sedlasta tačka funkcije $L(u, \lambda)$, onda $u_* \in U$.*



Slika 3.2. Sedlasta tačka je srednja od označenih tačaka.

Dokaz. Treba pokazati da je tačka u_* dopustiva pri svim ograničenjima. Iz definicije sedlaste tačke, odnosno iz nejednakosti $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*)$, sledi $0 \leq \sum_{k=1}^{s} (\lambda_k^* - \lambda_k) g_k(u_*)$. Za proizvoljno fiksirano $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ bira se $\lambda_{j_0} := \lambda_{j_0}^* + 1$, a za sve preostale indekse $k \neq j_0$ bira se $\lambda_k := \lambda_k^*$. Jasno, vektor λ, izabran na navedeni način, pripada skupu Λ, i dobija se da je $0 \leq (-1) g_{j_0}(u_*)$, odakle sledi $u_* \in U_{j_0}$. Analogno tome se pokazuje da je u_* dopustiva pri svakom ograničenju U_j, $j \in \{1, \dots, m\}$.

Pokažimo sada da $u_* \in U_j$, $j \in \{m+1, \dots, s\}$. Neka je j_0 proizvoljan fiksiran indeks iz skupa $\{m+1, \dots, s\}$. Bira se $\lambda_{j_0} := \lambda_{j_0}^* + g_{j_0}(u_*)$, a za sve preostale indekse $k \neq j_0$ bira se $\lambda_k := \lambda_k^*$. Vektor λ s ovako izabranim koordinatama pripada skupu Λ i važi $0 \leq -g_{j_0}^2(u_*)$, odakle sledi $g_{j_0}(u_*) = 0$, odnosno $u_* \in U_{j_0}$. Na taj način se pokazuje da je u_* dopustiva pri svakom ograničenju U_j, $j \in \{m+1, \dots, s\}$.

Zaključak: $u_* \in U$. $\square$

Lema 3.12. *Ako je tačka $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ sedlasta tačka funkcije $L(u, \lambda)$, dokazati da je onda $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$, za sve $k = 1, \dots, s$.*

Dokaz. Iz prethodne leme sledi da je $g_j(u_*) = 0$ za svako $j \in \{m+1, \dots, s\}$, pa je i $\lambda_j^* g_j(u_*) = 0$ za svako $j \in \{m+1, \dots, s\}$. Preostaje da se pokaže da je $\lambda_j^* g_j(u_*) = 0$ za svako $j \in \{1, \dots, m\}$. Neka je j_0 proizvoljan fiksiran indeks iz skupa $\{1, \dots, m\}$. Moguće je da je $\lambda_{j_0}^* = 0$, pa je $\lambda_{j_0}^* g_{j_0}(u_*) = 0$. Pretpostavlja se zatim da je $\lambda_{j_0}^* \neq 0$. Koristeći ponovo nejednakost $0 \leq \sum_{k=1}^{s}(\lambda_k^* - \lambda_k)g_k(u_*)$, i birajući $\lambda_{j_0} = 0$, a za sve preostale indekse $k \neq j_0$ birajući $\lambda_k := \lambda_k^*$, dobija se $0 \leq \lambda_{j_0}^* g_{j_0}(u_*)$. Pošto je $\lambda_{j_0}^* > 0$, sledi da je $0 \leq g_{j_0}(u_*)$. Sa druge strane, iz Leme 3.11 sledi da je $u_* \in U$, pa važi $0 \geq g_{j_0}(u_*)$, odakle je $\lambda_{j_0}^* g_{j_0}(u_*) = 0$. Pošto je j_0 proizvoljan indeks iz skupa $\{1, \ldots, m\}$ sledi traženo tvrđenje. □

Lema 3.13. *Ako je $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$, za sve $k = 1, \ldots, s$ pri čemu $u_* \in U$, dokazati da je onda $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*)$ za sve $\lambda \in \Lambda$.*

Dokaz. Iz uslova $u_* \in U$ sledi $g_k(u_*) \leq 0$, za sve $k = 1, \ldots, m$, kao i $g_k(u_*) = 0$, za sve $k = m+1, \ldots, s$. Odatle je $(\lambda_k^* - \lambda_k)g_k(u_*) = 0$ za sve $k = m+1, \ldots, s$, kao i za one indekse $k \in \{1, \ldots, m\}$ za koje je $g_k(u_*) = 0$. Neka je k_0 proizvoljan fiksiran indeks, $k_0 \in \{1, \ldots, m\}$, tako da je $g_{k_0}(u_*) < 0$. Tada iz uslova $\lambda_{k_0}^* g_{k_0}(u_*) = 0$ sledi $\lambda_{k_0}^* = 0$. Sa druge strane $\lambda_{k_0} \geq 0$ za sve $\lambda \in \Lambda$, pa je $(\lambda_{k_0}^* - \lambda_{k_0})g_{k_0}(u_*) \geq 0$.

Prema tome $\sum_{k=1}^{s}(\lambda_k^* - \lambda_k)g_k(u_*) \geq 0$, odakle direktno sledi $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*)$ za sve $\lambda \in \Lambda$. □

Na osnovu dokazanih lema može da se formuliše i lako dokaže potreban i dovoljan uslov da neka tačka bude sedlasta tačka.

Teorema 3.14. *Potreban i dovoljan uslov da tačka $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ bude sedlasta tačka Lagranžove funkcije, $L(u, \lambda)$, za posmatrani problem je dat sa:*

i) $L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*)$, $\forall u \in U_0$,

ii) $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$, *za sve* $k = 1, \ldots, s$, *pri čemu* $u_* \in U$.

Dokaz. Neka je $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ sedlasta tačka Lagranžove funkcije. Tada je i) trivijalno ispunjeno, a ii) sledi na osnovu Leme 3.11 i Leme 3.12.

Pretpostavimo sada da važi i) i ii). Jasno i) je desna strana nejednakosti u definiciji sedlaste tačke, pa preostaje da se dokaže leva strana nejednakosti, odnosno $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*)$. Ova nejednakost je ispunjena na osnovu ii) i Leme 3.13. □

U sledećoj teoremi data je veza između sedlaste tačke Lagranžove funkcije i rešenja posmatranog problema.

Teorema 3.15. *Neka je* $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *sedlasta tačka Lagranžove funkcije. Tada* $u_* \in U_*$ *i* $J_* = L(u_*, \lambda^*) = J(u_*)$*, odnosno* u_* *je rešenje posmatranog problema.*

Dokaz. Iz Leme 3.11 sledi $u_* \in U$, a iz Leme 3.12 se dobija $L(u_*, \lambda^*) = J(u_*)$. Preostaje da se pokaže da $u_* \in U_*$, pa je onda i $J_* = J(u_*)$. Iz $L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*)$, $\forall u \in U_0$, (pa, dakle i za sve $u \in U$) sledi:

$$J(u_*) = L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*) = J(u) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^* g_k(u).$$

Pošto je $\lambda_k^* g_k(u) \leq 0$, za sve $k = 1, \ldots, m$ i $\lambda_k^* g_k(u) = 0$, za sve $k = m+1, \ldots, s$ dobija se $J(u_*) \leq J(u)$, za sve $u \in U$, odnosno $u_* \in U_*$. $\square$

Prethodna teorema je formulisala dovoljan uslov za rešenje posmatranog problema. Ona, međutim, ne kazuje ništa o egzistenciji sedlaste tačke. Iz definicije sedlaste tačke se vidi da se ona traži među stacionarnim tačkama Lagranžove funkcije. Očigledno, da bi se obezbedila egzistencija stacionarnih tačaka, moraju da se nametnu neki dodatni uslovi na funkciju J i ograničenja U_k, $k = 1, \ldots, s$. Sledeći primer pokazuje da nije dovoljno pretpostaviti konveksnost funkcije J.

Primer 3.16. Neka je $J(u) = -u$, $U_0 = [0, \infty)$ i neka je zadato jedno ograničenje $g(u) = u^2$, $U = \{u \in U_0 \mid g(u) \leq 0\}$. Jasno, $J_* = J(0) = 0$, ali Lagranžova funkcija $L(u, \lambda) = -u + \lambda u^2$, $u \in U_0$, $\lambda \geq 0$, nema sedlastu tačku.

Teoreme u kojima se daju dodatni uslovi koji obezbeđuju egzistenciju sedlaste tačke zovu se teoreme tipa Kuna-Takera.

Definicija 3.17. *Posmatra se polazni problem (*) samo s ograničenjima tipa nejednakosti. Ograničenje* $g(u) \leq 0$ *je regularno na skupu* $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$*, ako postoji tačka* $u \in \tilde{U}$*, tako da važi* $g(u) < 0$*. Skup* $\tilde{U} = \bigcap_{k=1}^{m} U_k$ *je regularan ako su sva ograničenja u njemu regularna, odnosno ako je ograničenje* g_k*,* $k = 1, \ldots, m$ *regularno na skupu* $\tilde{U}$*.*

U nastavku će se pretpostaviti da je $U_k \subset U_0,\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}$; to jest, da je $U = \tilde{U}$, gde je skup U definisan u zadatku (*).

Lema 3.18. *Neka je U_0 konveksan skup i neka su g_k konveksne funkcije na U_0, $k = 1, \ldots, m$. Neka je $\tilde{U}$ regularan skup. Tada postoji tačka $u_0 \in U_0$, tako da je $g_k(u_0) < 0$ za sve $k = 1, \ldots, m$.*

Dokaz. Jasno, $\tilde{U}$ je konveksan skup. Neka su tačke $u_k \in \tilde{U}$ izabrane tako da je $g_k(u_k) < 0$, $k = 1, \ldots, m$. Neka je, dalje, $u_0 := \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$. Primećuje se da je $u_0 \in \tilde{U} \subset U_0$. Za proizvoljno $j = 1, \ldots, m$ važi $g_j(u_k) \leq 0$, za sve u_k, $k = 1, \ldots, m$, pa iz konveksnosti funkcije g_j sledi:

$$g_j(u_0) = g_j(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) \leq \alpha_1 g_j(u_1) + \cdots + \alpha_m g_j(u_m) < 0,$$

jer je $g_j(u_j) < 0$. $\square$

Uslov postojanja tačke $u_0 \in U_0$ za koju je $g_j(u_0) < 0$, $j = 1, \ldots, m$ naziva se *uslov Slejtera.* Slejterov uslov obezbeđuje regularnost (što se u dokazu naredne Teoreme označava sa $\lambda_0^* \neq 0$), nenegativnost Lagranžovih množitelja i implicira da su uslovi Kuna-Takera potrebni i dovoljni.

Sledeća teorema daje dovoljan uslov za postojanje sedlaste tačke. U njoj se posmatraju ograničenja tipa nejednakosti.

Teorema 3.19. *Neka je dat konveksan skup U_0, i neka su funkcije J i g_k konveksne na U_0, $k = 1, \ldots, m$. Neka je $\tilde{U}$ regularan skup. (Dakle, ispunjen je uslov Slejtera.) Neka je, dalje, $\tilde{U}_*$ neprazan skup. Tada postoje Lagranžovi množitelji $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, $\lambda_k^* \geq 0$, $k = 1, \ldots, m$, takvi da za svaku tačku $u_* \in \tilde{U}_*$ važi da je (u_*, λ^*) sedlasta tačka funkcije Lagranža za posmatrani problem.*

Dokaz. Primetimo prvo da je $\tilde{U}_* \neq \emptyset$, to jest, da postoji $u_* \in \tilde{U}_*$ tako da je $J_* = \inf_{u \in \tilde{U}} J(u) = J(u_*)$. Podsetimo se da, ako je (u_*, λ^*) sedlasta tačka, onda je u_* dopustiva tačka pri svim ograničenjima. Takođe, $J(u_*) = L(u_*, \lambda^*) = J_*$.

Ideja dokaza je da se u nekoliko koraka konstruiše $\lambda^* \in \Lambda$, tako da za proizvoljno $u_* \in \tilde{U}_*$ važi da je (u_*, λ^*) sedlasta tačka odgovarajuće Lagranžove funkcije.

Posmatraće se sledeći skupovi:

$$A = \bigcup_{u \in U_0} A_u = \bigcup_{u \in U_0} \{a \in \mathbb{R}^{m+1} \mid a_0 \geq J(u), \;\; a_k \geq g_k(u), \;\; k = 1, \ldots, m\},$$

i skup B dat sa

$$B = \{b \in \mathbb{R}^{m+1} \mid b_0 < J_*, \;\; b_k < 0, \;\; k = 1, \ldots, m\}.$$

1. korak. $A \cap B = \emptyset$. Ostavlja se čitaocu za vežbu. Pokazuje se da iz $a \in A$ sledi $a \notin B$. Takođe, lako se vidi da je $A^\circ, B^\circ \neq \emptyset$.

2. korak. A i B su konveksni skupovi. Pokažimo, recimo, da je A konveksan skup. Neka su $a^1, a^2 \in A$ i neka je dato $\alpha \in (0,1)$. Iz $a_0^1 \geq J(u_1)$ i $a_0^2 \geq J(u_2)$, za neke $u_1, u_2 \in U_0$, i konveksnosti funkcije J sledi $\alpha a_0^1 + (1-\alpha) a_0^2 \geq J(u)$, gde je $u = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \in U_0$. Analogno tome sledi da konveksne kombinacije ostalih koordinata vektora a^1 i a^2 ispunjavaju odgovarajuće nejednakosti, pa je $\alpha a^1 + (1-\alpha) a^2 \in A$. Slično se pokazuje i da je B konveksan skup.

3. korak. Iz teorema separacije sledi da postoji hiperravan koja razdvaja skupove A i B, odnosno, postoji $c \in \mathbb{R}^{m+1}$, $c \neq 0$, i postoji $\gamma \in \mathbb{R}$, tako da važi $\sup_{b \in B} \langle c, b \rangle \leq \gamma \leq \inf_{a \in A} \langle c, a \rangle$. Označimo koordinate vektora c sa λ_k^*, $k = 0, 1, \ldots, m$, odnosno, $c := (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$.

4. korak. Jasno, zatvaranje skupa B dato je sa $\bar{B} = \{b \in \mathbb{R}^{m+1} \mid b_0 \leq J_*, \;\; b_k \leq 0, \;\; k = 1, \ldots, m\}$. Odavde sledi da $(J_*, 0, \ldots, 0) \in A \cap \bar{B}$. Već pomenuta teorema separacije kaže da je tada $\gamma = \langle c, (J_*, 0, \ldots, 0) \rangle = \lambda_0^* J_*$, pa je

$$\lambda_0^* b_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* b_k \leq \lambda_0^* J_* \leq \lambda_0^* a_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* a_k,$$

za sve $b \in \bar{B}$ i sve $a \in A$.

5. korak. Pokazuje se da je $\lambda_k^* \geq 0$ za sve $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Birajući $b = (J_* - 1, 0, \ldots, 0) \in \bar{B}$ dobija se $\lambda_0^*(J_* - 1) \leq \lambda_0^* J_*$, odakle je $\lambda_0^* \geq 0$.

Takođe, $b = (J_*, -1, 0, \ldots, 0) \in \bar{B}$, pa je $\lambda_0^* J_* - \lambda_1^* \leq \lambda_0^* J_*$, odakle je $\lambda_1^* \geq 0$. Na sličan način se pokazuje $\lambda_k^* \geq 0$ za sve $k \in \{2, \ldots, m\}$.

Pokažimo sada da je $\lambda_0^* \neq 0$. Pretpostavlja se suprotno, odnosno $\lambda_0^* = 0$. Iz uslova regularnosti zna se da postoji $\tilde{u} \in \tilde{U}$, tako da je $g_k(\tilde{u}) < 0$ za sve $k = 1, \ldots, m$. Tačka $(J(\tilde{u}), g_1(\tilde{u}), \ldots, g_m(\tilde{u}))$ pripada skupu A, pa je $\lambda_0^* J_* \leq \lambda_0^* J(\tilde{u}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* g_k(\tilde{u})$, odakle je $0 \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* g_k(\tilde{u})$. Sa druge strane, pošto je barem jedan od brojeva λ_k^*, $k = 1, \ldots, m$ različit od nule (jer je $c \neq 0$), dobija se $0 \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* g_k(\tilde{u}) < 0$.

Dakle, $\lambda_0^* > 0$, pa može da se bira $\lambda_0^* = 1$.[4]

6. korak. Sada može da se pokaže da je (u_*, λ^*) sedlasta tačka Lagranžove funkcije, pri čemu je $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, a $u_* \in \tilde{U}_*$. Biće korišćena Teorema 3.14.

Neka je $j \in \{1, \ldots, m\}$ proizvoljno izabran indeks. Pošto je

$$(J_*, 0, \ldots, 0, g_j(u_*), 0, \ldots, 0) \in A \cap \bar{B},$$

sledi

$$\lambda_0^* J_* + \lambda_j^* g_j(u_*) \leq \lambda_0^* J_* \leq \lambda_0^* J_* + \lambda_j^* g_j(u_*),$$

odakle sledi $\lambda_j^* g_j(u_*) = 0$ za sve $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Neka je sada data tačka $u \in U_0$ i neka je $a = (J(u), g_1(u), \ldots, g_m(u))$. Jasno $a \in A$, pa važi $J_* \leq J(u) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* g_k(u)$. Iz upravo dokazanog sledi $J_* = J_* + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* g_k(u_*)$, pa je, konačno, $L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*)$, za proizvoljno $u \in U_0$, odnosno, (u_*, λ^*) je sedlasta tačka Lagranžove funkcije. $\square$

Napomena. Pravilo Lagranžovog množitelja formulisao je Lagranž u "Analitičkoj mehanici", objavljenoj 1788. godine. U tom delu opisan je beskonačnodimenzioni slučaj. Lagranž je, 1797. godine, u delu "Teorija

[4] Videti odgovarajući komentar u teoremama separacije.

analitičkih funkcija" opisao konačno dimenzioni slučaj, bez dokaza. Teorema je dokazana stotinak godina nakon što je objavljena, korišćenjem teoreme o implicitnim funkcijama, videti [6].

Teorema 3.20. *Posmatra se problem određivanja ekstrema funkcije* J, *koji zadovoljava ograničenja tipa jednakosti,* $g_k(u) = 0$, *za sve* $k \in \{1, \dots, m\}$. *Pretpostavlja se da su funkcije* J *i* g_k, $k = 1, \dots, m$, *neprekidno diferencijabilne u nekoj okolini tačke* u_*, *lokalnog ekstrema funkcije* J, *pri čemu su vektori* $g_k'(u_*)$, $k = 1, \dots, m$, *međusobno linearno nezavisni. Tada postoje Lagranžovi množitelji* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$, $k = 1, \dots, m$, *tako da važi* $\frac{\partial}{\partial \lambda} L(u_*, \lambda^*) = 0$, *gde je sa* L *označena Lagranžova funkcija za posmatrani problem.*

Navedeni potreban uslov stacionarnosti se koristi pri određivanju kandidata za rešenje problema uslovnog ekstrema posmatranog zadatka. Da bi se dao odgovor na pitanje da li je ovaj uslov dovoljan moraju da se obave dodatna ispitivanja. Dakle, kod rešavanja zadataka uslovnog ekstrema s ograničenjima tipa jednakosti, po pravilu se dobija $n+m$ jednačina $\frac{\partial}{\partial u_j} L(u, \lambda) = 0$, $j = 1, \dots, n$, $\frac{\partial}{\partial \lambda_k} L(u, \lambda) = 0$, $k = 1, \dots, m$. Poslednjih m jednačina reprodukuje uslov $g_k(u) = 0$, za sve $k \in \{1, \dots, m\}$.

Dovoljan uslov za ekstrem, za minimum, na primer, dat je sa:

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial u^2} L(u_*, \lambda^*)h, h \right\rangle > 0,$$

za sve $h \neq 0$ za koje je $\left\langle \frac{\partial}{\partial u} g(u_*), h \right\rangle = 0$, $j = 1, \dots, n$.

3.3 Zadaci za vežbu

Zadatak 3.1. Dokazati da je funkcija $J : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna nad $[a, b]$ ako i samo ako važi

$$\frac{J(u) - J(v)}{u - v} \leq \frac{J(w) - J(v)}{w - v}, \tag{3.1}$$

za sve $a \leq v < u < w \leq b$.

Rešenje. ($\Rightarrow$) Neka je J konveksna. Po definiciji konveksnosti, za sve $\alpha \in (0,1)$ važi:

$$J\left(\alpha v + (1-\alpha)w\right) \leq \alpha J(v) + (1-\alpha)J(w).$$

Ako se uzme da je $\alpha = \dfrac{w-u}{w-v} \in (0,1)$, onda je $1-\alpha = \dfrac{u-v}{w-v} \in (0,1)$. Iz

$$\frac{w-u}{w-v}v + \frac{u-v}{w-v}w = u,$$

sledi

$$J(u) \leq \frac{w-u}{w-v}J(v) + \frac{u-v}{w-v}J(w).$$

Odavde se dobija da je

$$\begin{aligned} J(u)(w-v) &\leq (w-v+v-u)J(v) + (u-v)J(w) \\ \left(J(u)-J(v)\right)(w-v) &\leq (u-v)\left(J(w)-J(v)\right), \end{aligned}$$

odnosno,

$$\frac{J(u)-J(v)}{u-v} \leq \frac{J(w)-J(v)}{w-v}.$$

($\Leftarrow$) Neka su $v, w \in \mathbb{R}$, $v < w$ i $\alpha \in (0,1)$, i da pri tome važi osobina (3.1). Neka je $u = (1-\alpha)w + \alpha v \in (v,w)$. Odavde sledi da je $\alpha \in (0,1)$ oblika

$$\alpha = \frac{u-w}{v-w} = \frac{w-u}{w-v}.$$

Iz (3.1) se dobija:

$$J(u) \leq \frac{w-u}{w-v}J(v) + \frac{u-v}{w-v}J(w),$$

tj.

$$J(u) \leq \alpha J(v) + (1-\alpha)J(w). \qquad \square$$

Zadatak 3.2. Neka je funkcija $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna i neka je $\Phi(x) \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Dokazati da je tada i funkcija $J(x) = \Phi^2(x)$ konveksna nad $\mathbb{R}^n$.

Rešenje. Neka je $\alpha \in (0,1)$ i $x, y \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni. Tada se iz konveksnosti funkcije Φ i činjenice $\Phi(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n$ dobija:

$$\begin{aligned}
J\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) &= \Phi^2\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \left(\alpha\Phi(x) + (1-\alpha)\Phi(y)\right)^2 \\
&= \alpha^2\Phi^2(x) + 2\alpha(\alpha-1)\Phi(x)\Phi(y) + (1-\alpha)^2\Phi^2(y) \\
&\pm \alpha\Phi^2(x) \pm (1-\alpha)\Phi^2(y) \\
&= \alpha J(x) + (1-\alpha)J(y) - \alpha(1-\alpha)\Phi^2(x) \\
&- \alpha(1-\alpha)\Phi^2(y) - 2\alpha(1-\alpha)\Phi(x)\Phi(y) \\
&= \alpha J(x) + (1-\alpha)J(y) - \alpha(1-\alpha)\left(\Phi(x) + \Phi(y)\right)^2 \\
&\leq \alpha J(x) + (1-\alpha)J(y).
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija J je konveksna nad $\mathbb{R}^n$. $\square$

Zadatak 3.3. Ispitati za koje vrednosti realnih parametara a, b, c je funkcija $J(x,y,z) = x^2 + 2axy + by^2 + cz^2$ konveksna na $\mathbb{R}^3$.

Rešenje. Treba pronaći parametre za koje su svi glavni minori matrice J'' nenegativni. Pošto je:

$$J'(u) = \begin{pmatrix} 2x + 2ay \\ 2ax + 2by \\ 2cz \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 0 \\ 2a & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix},$$

dobija se da je za

$$b - a^2 \geq 0 \quad \text{i} \quad c \geq 0$$

funkcija J konveksna nad $\mathbb{R}^3$. $\square$

Zadatak 3.4. Ispitati konveksnost funkcionele $J(u) = cu^r$, na $[a,b]$, $0 < a < b < +\infty$, u zavisnosti od realnih parametara c i r.
Dokazati nejednakost $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$ za sve $n \geq 1, \ x, y \geq 0$.

Zadatak 3.5. Neka je $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz konveksnih funkcija nad konveksnim skupom $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Definišimo funkcije

1. $F(u) = \alpha_1 J_1(u)+\alpha_2 J_2(u)+\ldots+\alpha_m J_m(u),\ m \in \mathbb{N}$ i $\alpha_j \geq 0$ za sve $j = 1,\ldots,m$;

2. $G(u) = \sup_{i\in\mathbb{N}} J_i(u)$.

Dokazati da su F i G konveksne funkcije nad U.

Zadatak 3.6. Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup.

1. Ako je $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna i neopadajuća funkcija i $g : U \to [a,b]$ konveksna, dokazati da je tada funkcija $\varphi(g(u))$ konveksna nad U.

2. Ako je funkcija $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna i nerastuća i $g : U \to [a,b]$ konkavna, dokazati da je tada funkcija $\varphi(g(u))$ konveksna na U.

3. Dokazati da je $e^{x^3+x^2+1}$ konveksna na $[0,\infty)$.

4. Dokazati da je $-\ln(1-x^3)$ konveksna na $[0,1)$.

Zadatak 3.7. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, za sve $\alpha > 0$. Dokazati:

1. $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ za sve $x,y \in \mathbb{R}^n$;

2. $f(0) \geq 0$ i $f(-x) \geq -f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$;

3. $f(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_m x_m) \leq \alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_m f(x_m)$ za sve $\alpha_k > 0,\ x_k \in \mathbb{R}^n,\ k = 1,\ldots,m$.

Zadatak 3.8. Neka je J konveksna funkcija nad konveksnim skupom $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokazati da je tada skup $M_c = \{u \in U \mid J(u) \leq c\}$ konveksan za svako $c \in \mathbb{R}$.
Na primeru funkcije $J(u) = u^3,\ u \in \mathbb{R}$ pokazati da obratno ne važi.

Zadatak 3.9. Neka je $J : U \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, gde je $U \subset \mathbb{R}^n$. Pokazati da je skup tačaka minimuma, U_* konveksan. Pokazati da ako je J strogo konveksna funkcija onda je U_* prazan ili jednočlan skup.

Resenje. Neka je U_* neprazan skup i $u, v \in U_*$. Treba pokazati da tada i $\alpha u + (1-\alpha)v \in U_*$. Skup U_* je skup tačaka minimuma, pa je

$$J(u) = J(v) = J_* = \inf_{x \in U} J(x).$$

Pošto je:

$$J\left(\alpha u + (1-\alpha)v\right) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) = J_*,$$

zaključuje se da je $J\left(\alpha u + (1-\alpha)v\right) = J_*$ i da je U_* konveksan skup.

Dalje, neka je J strogo konveksna i $U_* \neq \emptyset$. Pretpostavlja se da U_* ima bar dva elementa $u, v \in U_*,\ u \neq v$. Tada, pošto je U_* konveksan skup sledi da je za $\alpha \in (0,1)$ tačka $\alpha u + (1-\alpha)v \in U_*$ i da je:

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) = J_*,$$

što je kontradikcija. □

Zadatak 3.10. Data je funkcionela $g\,(x,y) = x^2 - \sin y$.

1. Odrediti stacionarne tačke funkcije g, tj. odrediti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tako da je $g'(x,y) = 0$.

2. Pokazati da je funkcija g konveksna u trakama $T_{2k} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)\},\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Odrediti lokalne minimume funkcije g.

4. Pokazati da je svaki lokalni minimum i globalni.

Rešenje. 1. Iz sistema

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\cos y = 0,$$

dobijaju se stacionarne tačke

$$A_k = (x_k, y_k) = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

2. Pošto je

$$g''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sin y \end{pmatrix},$$

za proizvoljno $\xi = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ važi:

$$\langle g''(x,y)\xi, \xi\rangle = \xi^T g''(x,y)\xi = 2h^2 + 2k^2 \sin y \geq 0,$$

za sve $(x,y) \in T_{2k},\ k \in \mathbb{Z}$. Dakle, na osnovu Teoreme 3.5, funkcija g je konveksna na svim trakama $T_{2k},\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Pošto su konveksni skupovi $T_{2k},\ k \in \mathbb{Z}$ okoline tačaka $A_{2k},\ k \in \mathbb{Z}$, na osnovu Teoreme 3.7 zaključuje se da su tačke

$$A_{2k} = \left(0, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z},$$

tačke lokalnih minimuma funkcije g.

4. Prvo, primećuje se da je $g(A_{2k}) = g(0, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$. Međutim, za proizvoljno $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ važi:

$$g(x,y) = x^2 - \sin y \geq -\sin y \geq -1.$$

Dakle, svaka tačka lokalnog minimuma je i tačka globalnog minimuma. □

Zadatak 3.11. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $J(x,y) = xe^x - (1+e^x)\cos y,\ x,y \in \mathbb{R}^2$.

Rešenje. Potreban uslov za ekstrem je

$$\frac{\partial J}{\partial x} = e^x\,(1 + x - \cos y) = 0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial y} = (1+e^x)\sin y = 0.$$

Rešenja ovog sistema i potencijalni ekstremi su tačke:

$$(x_k, y_k) = \left((-1)^k - 1, k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Matrica drugog izvoda u ovom slučaju je:

$$J''(x, y) = \begin{pmatrix} e^x (2 + x - \cos y) & e^x \sin y \\ e^x \sin y & (1 + e^x) \cos y \end{pmatrix}.$$

Neka je $\xi = (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ proizvoljno. Tada je:

$$\begin{aligned} \langle J''(x_k, y_k)\xi, \xi\rangle &= \xi^T J''(x_k, y_k)\,\xi \\ &= \xi^T \begin{pmatrix} e^{x_k} (2 + x_k - \cos y_k) & e^{x_k} \sin y_k \\ e^{x_k} \sin y_k & (1 + e^{x_k}) \cos y_k \end{pmatrix} \xi \\ &= \xi^T \begin{pmatrix} e^{x_k} & 0 \\ 0 & (1 + e^{x_k})(-1)^k \end{pmatrix} \xi \\ &= e^{x_k} h^2 + (-1)^k (1 + e^{x_k})\, k^2. \end{aligned}$$

Za parno $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, važi $\langle J''(x_{2m}, y_{2m})\xi, \xi\rangle > 0$, te u tačkama

$$(x_{2m}, y_{2m}) = (0, 2m\pi), \quad m \in \mathbb{Z},$$

postoje strogi lokalni minimumi funkcije J. $\square$

Zadatak 3.12. Neka je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija data sa

$$F(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle 2b, x\rangle + c, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gde je A (realna) regularna, simetrična i pozitivno definitna matrica, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ su fiksirani.

1. Dati potreban uslov za lokalni minimum funkcionele F.

2. Da li je zadovoljen i dovoljan uslov za minimum funkcionele F?

Rešenje. 1. Posmatraće se prvo priraštaj funkcije F u tački $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\triangle F_x(h) &= F(x+h) - F(x) \\ &= \langle A(x+h), x+h\rangle + \langle 2b, x+h\rangle + c \\ &- (\langle Ax, x\rangle + \langle 2b, x\rangle + c) \\ &= \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle 2b, h\rangle , \quad h \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Pošto je A simetrična matrica, važi da je $\langle Ah, x\rangle = \left\langle h, A^T x\right\rangle = \langle Ax, h\rangle$. Te se dobija da je

$$\begin{aligned}\triangle F_x(h) &= 2\,\langle Ax, h\rangle + \langle Ah, h\rangle + \langle 2b, h\rangle , \\ &= \langle 2(Ax+b), h\rangle + \langle Ah, h\rangle , \quad h \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Odavde se zaključuje da je diferencijal funkcije F, kao linearni deo priraštaja, dat sa $dF(h) = \langle 2(Ax+b), h\rangle$, $h \in \mathbb{R}^n$, te je prvi izvod (odnosno, gradijent) jednak $F'(x) = 2\,(Ax+b)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dakle, potreban uslov za minimumum funkcionele F je

$$Ax + b = 0.$$

Pošto je matrica A regularna, dobija se da je potencijalni ekstrem tačka $x_* = -A^{-1}b$.

2. Direktno se dobija da je $F''(x) = 2A$. Pošto je matrica A pozitivno definitna, konačno se zaključuje da je x_* tačka lokalnog minimuma funkcionele F. □

Zadatak 3.13. Zarada proizvodnje tri proizvoda data je sa $u(x,y,z) = xy+yz+xz$, uz ograničenja resursa izražena relacijama $x+y=2$, $y+z=1$. Odrediti obim proizvodnje koji obezbeđuje maksimalnu dobit pri zadatim uslovima.

Zadatak 3.14. Među svim trouglovima obima $2d$, $d > 0$ naći onaj koji ima najveću površinu.

Zadatak 3.15. Broj 60 predstaviti u obliku zbira, $60 = \sum_{i=1}^{6} x_i$, tako da proizvod, $\prod_{i=1}^{6} x_i^i$ bude maksimalan.

Zadatak 3.16. Teorija ponašanja potrošača sa zasniva na problemu optimalne alokacije ograničenog raspoloživog dohotka y_0 na kupovinu robe i usluga, pri čemu potrošač nastoji da obezbedi maksimalno zadovoljenje U svojih raznovrsnih potreba. Drugim rečima, maksimizuje se funkcija korisnosti, uz ograničenje budžeta, pa se problemi ovog tipa rešavaju primenom Lagranžove funkcije.

Pretpostavimo, jednostavnosti radi, da potrošač kupuje dva proizvoda. Neka su q_1 i q_2 količine tih proizvoda, a p_1 i p_2 odgovarajuće cene po jedinici proizvoda. Stepen zadovoljenja potreba potrošača je funkcija količina tih proizvoda $U = f(q_1, q_2)$. Ograničenje budžeta je dato sa

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y_0,$$

gde je sa y_0 označen deo dohotka potrošača koji se koristi za kupovinu navedenih proizvoda. Analizirati dati problem u zavisnosi od svih pomenutih parametara.

Rešenje. Posmatraće se funkcija Lagranža

$$L(q_1, q_2, \lambda) = f(q_1, q_2) + \lambda(y_0 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)).$$

Pomoću nje je moguće obaviti kvantitativnu analizu, odnosno moguće je odrediti u kojem pravcu će se menjati ravnotežna pozicija potrošača ako se promeni njegov dohodak, ili cene proizvoda, ili i jedno i drugo.

Kao i obično, parcijalni izvodi funkcije L se izjednačavaju sa nulom i dobijaju se sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} f &= \lambda p_1 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} f &= \lambda p_2 \\ y_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Totalni diferencijal ovih jednačina je

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_1} f dq_1 + \frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_1} f dq_2 - p_1 d\lambda = \lambda dp_1 \\
&\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} f dq_1 + \frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_2} f dq_2 - p_2 d\lambda = \lambda dp_2 \\
&\qquad\qquad\qquad -p_1 dq_1 - p_2 dq_2 = -dy_0 + q_1 dp_1 + q_2 dp_2,
\end{aligned}
$$

pri čemu se dozvoljava da se veličina y_0 menja, odnosno $dy_0 \neq 0$. Može, na primer, da se smatra da su nepoznate veličine sistema: promene dq_1, dq_2 i $d\lambda$, te ga rešavati nekom od poznatih metoda (Kramerovo pravilo). Iz dobijenog rešenja može se komentarisati, na primer, promena kupovine proizvoda dq_1 s obzirom na promenu cene dp_1 kada se p_2 i y_0 ne menjaju ($dp_2 = dy_0 = 0$). Tako se dobija

$$
\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{p_2 \lambda}{2p_1} - \frac{q_1}{2p_1}, \quad \text{(proveriti)}.
$$

Lagranžov množitelj se, dakle, pojavljuje pri efektu supstitucije, zamene količine jednog proizvoda drugim, uz isti nivo zadovoljenja potreba.

Na sličan način izvodi se efekat dohotka i efekat cena. Jednačine navedenog tipa nazivaju se jednačine Slutskog.

Analogno navedenom, u teoriji proizvođača određuje se, na primer, maksimiziranje proizvodnje, uz zadate troškove. U tom slučaju, množitelj λ predstavlja recipročnu vrednost graničnih troškova u tački optimuma. Naravno, na isti način se postupa kada se modelira minimiziranje troškova za datu proizvodnju. Za dodatne informacije čitalac se upućuje na [24]. $\square$

Glava 4

Varijacioni račun

Za razliku od do sada izložene teorije, u zadacima optimizacije koji se posmatraju u nastavku tražiće se ekstrem funkcionele čiji argument pripada nekom prostoru funkcija. Funkcionela će biti data u obliku određenog integrala,[1] a rešenje će se tražiti primenom varijacionog računa. Varijacioni princip se zasniva na ideji da se uporedo sa stvarnim procesom posmatra varirani proces koji se od njega malo razlikuje, pri čemu se zahteva da je stvarni proces jedini koji kriterijumu optimalnosti saopštava ekstremnu vrednost.

Sledeći primeri ilustruju kako se konstruiše funkcionela J, data u vidu određenog integrala, čija je tačka ekstrema rešenje posmatranog problema. Naime, traži se funkcija $\tilde{y}$, rešenje problema formulisanog sa

$$J(\tilde{y}) = \min_{y \in Y} J(y) = \min_{y \in Y} \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx,$$

gde je Y unapred zadat skup dopustivih rešenja. Za funkciju $\tilde{y} \in Y$ važi da mora da zadovoljava Ojler-Lagranžovu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \right) = 0.$$

[1] U mehanici se kriterijum optimalnosti u okviru takozvanog Hamiltonovog principa uvek formuliše u obliku određenog integrala.

Ova činjenica predstavlja suštinu varijacionog računa i biće naknadno dokazana.

Primer 4.1. Odrediti u ravni krivu minimalne dužine, čiji su krajevi zadate tačke.

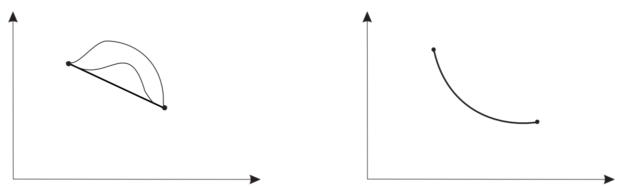
Poznato je da je rešenje ovog problema duž čiji su krajevi date tačke, pa je dovoljno ispisati odgovarajuću formulu analitičke geometrije. Ako su krajevi duži dati sa (x_1, y_1) i (x_2, y_2), lako se dobija rešenje

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{4.1}$$

Sa druge strane, problem može da se izrazi i jezikom varijacionog računa. Dužina luka krive $y = y(x)$ za koju važi $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$ je data sa

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

Prema tome, traži se (diferencijabilna) funkcija $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, tako da je $J(\tilde{y}) \leq J(y)$ za sve (diferencijabilne) funkcije $y = y(x)$ za koje je $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$. Rešenje ovog varijacionog problema je dato u zadatku 4.2.



Slika 4.1. Ilustracije primera 4.1 i 4.2

Primer 4.2. *Brahistohrona.* Date su tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u vertikalnoj ravni. Odrediti glatku krivu po kojoj će materijalna tačka stići iz tačke A u tačku B za najkraće vreme. Kretanje se odvija pod dejstvom sile teže, bez trenja i bez početne brzine.

Navedeni problem se vezuje za nastanak varijacionog računa. Formulisao ga je Johan Bernuli, 1696. godine, a poznat je kao problem *brahistohrone.*

Kretanje materijalne tačke u vertikalnoj ravni biće predstaljeno funkcijom $y = y(x),\ x \in [x_1, x_2]$, tako da promenljiva y opisuje visinu na kojoj se nalazi posmatrana materijalna tačka u ravni. Pošto se brzina kretanja duž tražne krive opisuje sa:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\,\frac{dx}{dt},$$

dobija se da je vreme za koje tačka prelazi deo luka ds dato sa

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} dx.$$

Neka je m masa materijalne tačke, a g ubrzanje homogenog polja sile zemljine teže. Na osnovu zakona o održanju totalne mehaničke energije, $m\frac{v^2}{2} - mgy = 0$, sledi da je $v = \sqrt{2gy}$. Konačno, dobija se da je ukupno vreme potrebno da materijalna tačka, krećući se putanjom $y = y(x)$, stigne iz tačke (x_1, y_1) u tačku (x_2, y_2) dato sa

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx.$$

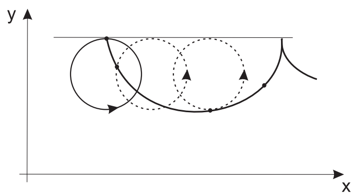
Zadatak je da se odredi kriva $y \in C^1[x_1, x_2]$ u kojoj formulisana funkcionela J ima minimalnu vrednost tako da je $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$. Konačno, primenom varijacionog računa dobija se rešenje u parametarskom obliku

$$x(t) = c(t - \sin t) + d,$$

$$y(t) = c(1 - \cos t),$$

pri čemu se konstante c i d određuju iz zadatih početnih uslova (za detalje videti zadatak 4.3).

Dobijena kriva naziva se i *cikloida.* Cikloida je kriva u ravni koja opisuje kretanje tačke fiksirana na kružnici, dok se ona kreće duž neke prave.



Slika 4.2. Cikloida.

Zanimljivo je da materijalna tačka koja se u gravitacionom polju kreće po cikloidi (pa i brahistohroni) dostiže najnižu tačku za vreme koje ne zavisi od njenog polaznog položaja. Zato se ova kriva naziva i tautohrona. Pomenuto svojstvo cikloide iskoristio je Hajgens, pri konstrukciji časovnika sa klatnom.[2]

Uopštenje prethodnog problema jeste problem brahistohrone kroz Zemlju. Zamislimo da je Zemlja sfernog oblika. Neka su A i B zadate tačke na površini Zemlje i neka je γ kriva u ravni određenoj sa A, B i centrom Zemlje. Traži se tunel, konstruisan po krivoj γ tako da materijalna tačka koja se kreće pod dejstvom sile Zemljine teže, stigne od tačke A do tačke B za najkraće vreme. Ovaj problem se, takođe, rešava primenom varijacionog računa, a njegovo rešenje je *hipocikloida.* Na primer, tunel oblika hipocikloide koji bi spojio San Diego i San Francisko imao bi najveću dubinu od oko 260 kilometara ispod Zemljine površine i bio bi dugačak oko 1100 kilometara. Sa druge strane, tunel koji bi kroz Zemlju pravom linijom povezao ove gradove imao bi maksimalnu dubinu od 13 kilometara, a bio bi dugačak 805 kilometara. Materijalna tačka bi, krećući se po hipocikloidi, stigla od San Diega do San Franciska za 12 minuta, a prolazak kroz prav tunel trajao bi 42 minuta.[3]

Primer 4.3. *Prostiranje svetlosti u nehomogenoj sredini.* U svakoj tački

[2]Hajgensovom konstrukcijom krivolinijskog rama (1673. godine) pomoću kojeg se klatno kreće lukom cikolide umesto kružnim lukom tačnost časovnika se povećala sa ± 15 minuta na ± 15 sekundi dnevno.

[3]Ovaj primer je preuzet iz [24, str.126–138]

nehomogene sredine brzina rasprostiranja svetlosti je funkcija $v(x, y, z)$ koordinata te tačke. Na osnovu Fermaovog principa (XVII vek), svetlost se prostire od jedne tačke do druge po krivoj po kojoj je vreme prostiranja najkraće. Diferencijalne jednačine linija rasprostiranja svetlosti od tačke $(a, y(a), z(a))$ do tačke $(b, y(b), z(b))$ u nehomogenoj sredini su jednačine koje proizilaze iz potrebnog uslova za ekstrem funkcionele

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx.$$

Posmatra se kretanje Sunčeve svetlosti kroz Zemljinu atmosferu. Radi jednostavnosti, ovde se pretpostavlja da se problem posmatra u oblasti u kojoj je Zemlja "ploča"[4], to jest, u dvodimenzionalnoj ravni, kao i da brzina prostiranja svetlosti zavisi samo od visine tačke iznad površine Zemlje, odnosno $v = v(y)$. Ojlerova jednačina u ovom specijalnom slučaju postaje $F - y' \frac{\partial}{\partial y'} F = const$,[5] odnosno

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} - y' \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2} v} y' = const.$$

Nakon odgovarajućeg množenja i diferenciranja dobija se sledeća veza

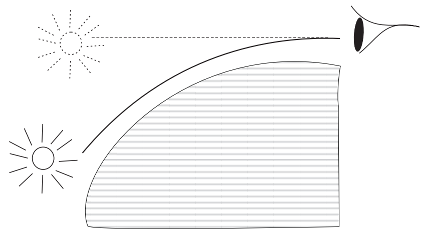
$$y'' = -(1 + y'^2) \frac{v'(y)}{v(y)}.$$

S obzirom na to da je brzina prostiranja v rastuća funkcija visine, sledi da je $y'' < 0$, odnosno kriva prostiranja Sunčeve svetlosti je konkavna. Time se objašnjava činjenica da se sa površine Zemlje Sunce "vidi" nekoliko minuta nakon zalaska. Takođe, zanimljivo je da je na osnovu Fermaovog principa Hamilton[6] izveo analogiju između mehanike i optike.

[4]Kažemo da je Zemlja ploča ako se radijus oblasti kretanja može zanemariti u odnosu na radijus Zemlje.

[5]Videti poglavlje 4.4.1

[6]Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)



Slika 4.3. Ilustracija uz primer 4.3

Primer 4.4. *Funkcija troška.* Posmatra se problem planiranja proizvodnje preduzeća koje proizvodi i prodaje izvesni proizvod. Pretpostavlja se da postoji dugoročna porudžbina tako da je moguće sa sigurnošću predvideti obim prodaje $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t)$ u nekom zadatom vremenskom periodu, recimo $t \in [0, T]$. Takođe, pretpostavlja se da su nivo zaliha gotovih proizvoda I i obim proizvodnje P u posmatranom vremenskom intervalu vezani jednačinom $I' = P - \mathcal{S}$, koja kaže da je promena količine robe na zalihama jednaka razlici između proizvedene i prodate količine robe. Preciznije, uz gubitke usled neispravnosti ili kvara, pretpostavlja se da važi

$$I'(t) = P(t) - (\mathcal{S}(t) + \alpha I(t)), \quad t \in [0, T],$$

pri čemu je α unapred poznata konstanta koja predstavlja nivo proporcionalnosti gubitka.

Konačno, pretpostavlja se da je preduzeće, s obzirom na poznati obim prodaje, odredilo željeni nivo zaliha $\mathcal{I}$, koji za rezultat ima željeni nivo proizvodnje $\mathcal{P}$ zadat sa

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{I}'(t) + \mathcal{S}(t) + \alpha \mathcal{I}(t), \quad t \in [0, T].$$

Neka je nivo zaliha, usled nekog razloga, u početnom trenutku $t = 0$ različit od željenog nivoa. Dakle, neka je $I(0) = I_0 \neq \mathcal{I}(0)$. Cilj je da se odredi novi obim proizvodnje koji će dovesti nivo zaliha na željeni nivo u unapred određenom vremenu T, pri čemu se zahteva minimizacija funkcije troška C, koja zavisi od odstupanja nivoa zaliha I i obima proizvodnje P od željenog nivoa $\mathcal{I}$ i obima proizvodnje $\mathcal{P}$. Radi jednostavnosti, pretpostavlja se da je funkcija troška data sa:

$$C = \int_0^T (\beta^2 (I(t) - \mathcal{I}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt,$$

gde je β fiksirana konstanta koja opisuje relativnu težinu neželjenih odstupanja nivoa zaliha i obima proizvodnje od željenih nivoa.

S obzirom na to da je:

$$I(t) = e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int_0^t e^{\alpha s}(P(s) - \mathcal{S}(s))ds\Big),$$

vidi se da I zavisi samo od obima proizvodnje, pa može da se napiše $I = I_P$. Konačno, kriterijum optimalnosti se u ovom slučaju svodi na određivanje takvog obima proizvodnje P da funkcionela

$$C = \int_0^T (\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{I}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt,$$

ima minimalnu vrednost. Jasno, funkcionela troška može da se napiše i u obliku $C = \displaystyle\int_0^T F(t, I(t), I'(t))dt$.

4.1 Prostori funkcija

Neka je dat integral

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt, \quad x(a) = A, \ \ x(b) = B. \tag{4.2}$$

Podelimo interval $[a, b]$ na $n+1$ jednakih delova,

$$a = t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n+1} = b, \quad h := t_j - t_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

i posmatra se, umesto krive $x = x(t)$, razlomljena kriva koja se sastoji od duži sa temenima $(t_{j-1}, x(t_{j-1}))$ i $(t_j, x(t_j))$, $j = 1, \ldots, n+1$. Radi jednostavnijeg zapisivanja pisaće se x_j umesto $x(t_j)$, $j = 0, \dots, n+1$. Neka je sa

$$J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n+1} F(t_j, x_j, \frac{x_j - x_{j-1}}{h})h \tag{4.3}$$

definisana funkcija od n realnih promenljivih. Na osnovu Vajerštrasove teoreme ova funkcionela dostiže svoju ekstremnu vrednost, ako promenljive $x_1, \dots, x_n$ pripadaju zatvorenom i ograničenom podskupu skupa $\mathbb{R}^n$.

Očigledno, kada n teži ka beskonačnosti funkcionele date sa (4.2) i (4.3) postaju ekvivalentne, pa se u tom smislu varijacioni račun može posmatrati kao izvesno uopštenje problema matematičkog programiranja navedenog u prvom delu knjige. Koristeći do sada savladane tehnike, može da se konstruiše niz tačaka minimuma x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, funkcionele J date sa (4.3). Postavlja se pitanje da li on konvergira ka tački minimuma funkcionele date u (4.2) i kakav smisao ima ta konvergencija, s obzirom na to da su x_n^* tačke u $\mathbb{R}^n$, a tačka minimuma u (4.2) je funkcija. Dalje, ako se želi da se formuliše Vajerštrasova teorema za problem (4.2), potrebno je znati šta znači zatvoren i ograničen skup u klasi funkcija.[7] Iz navedenih razloga treba bliže upoznati neke prostore (skupove) čiji su elementi (tačke) funkcije.

Pri posmatranju funkcija n nezavisnih (realnih) promenljivih domen je uvek bio podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$. U slučaju kada su nezavisne promenljive funkcije, ne postoji "univerzalni" skup kojem odgovarajući domen pripada. Prostor funkcija se bira u zavisnosti od prirode zadatka. Ako se, na primer, posmatra funkcionela oblika $\int_a^b F(t, x(t), x'(t), x''(t))dt$, onda je logično posmatrati klasu funkcija koje su dva puta neprekidno diferencijabilne na (a, b). U klasi posmatranih funkcija prvi zadatak jeste definisati rastojanje između elemenata klase, da bi se zatim definisala neprekidnost funkcionele. Kao i do sada, od posebnog značaja su *normirani* prostori funkcija.

Podsećanja radi, prostor $C[a, b]$, neprekidnih funkcija nad intervalom

[7]Prostori u kojima su tačke funkcije ili opštiji objekti proučavaju se u okviru funkcionalne analize.

$[a, b]$ je kompletan vektorski prostor u odnosu na normu:

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Prostor $C^1[a, b]$, neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je kompletan vektorski prostor u odnosu na normu:

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|.$$

Prema tome, ako se funkcije x_1 i x_2 po normi $\|\cdot\|_1$ razlikuju jedna od druge za veličinu koja je manja od ε, $\|x_1 - x_2\|_1 < \varepsilon$ onda je

$$\max_{t \in [a,b]} |x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon \quad \text{i} \quad \max_{t \in [a,b]} |x_1'(t) - x_2'(t)| < \varepsilon.$$ [8]

U prostoru $C^1[a, b]$ norma može ekvivalentno da se definiše i preslikavanjem $x \mapsto \max_{t \in [a,b]}\{|x(t)|, |x'(t)|\}$.

Po analogiji, nije teško definisati normu u prostoru $C^n[a, b]$, n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$.

Sledeća napomena će biti od značaja za uočavanje razlike pojmova "jakog" i "slabog" ekstrema u varijacionom računu.

Napomena. Jasno, $C^1[a, b] \subset C[a, b]$, pa norma elementa $x \in C^1[a, b]$ može da se meri u oba prostora. Po definiciji norme, za zadato $\varepsilon > 0$ iz $\|x\|_1 < \varepsilon$ sledi $\|x\| < \varepsilon$, a obratno ne mora da važi. Dakle, ako se posmatra $x_1, x_2 \in C^1[a, b]$ i ako je njihovo međusobno rastojanje u normi $\|\cdot\|_1$ manje od $\varepsilon > 0$, onda je i $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$. Sa druge strane, postoje neprekidno diferencijabilne funkcije za koje je $\|x_1 - x_2\| < \eta$, za proizvoljno unapred zadato $\eta > 0$, i važi $\|x_1 - x_2\|_1 > \eta$.[9] U geometrijskom smislu, ako važi $\|x_1 - x_2\| < \eta$, grafik funkcije x_1 se nalazi u traci širine η oko grafika funkcije x_2, to jest:

$$x_2(t) - \eta < x_1(t) < x_2(t) + \eta, \quad t \in [a, b],$$

[8]Preciznije, barem jedna od veličina $\max_{t \in [a,b]} |x_1(t) - x_2(t)|$ i $\max_{t \in [a,b]} |x_1'(t) - x_2'(t)|$ je manja od $\varepsilon/2$.

[9]Na primer, ako je $\|x_1 - x_2\| = \eta/2$, i $\max_{t \in [a,b]} |x_1'(t) - x_2'(t)| > \eta/2$.

ali ova norma ne oseća u kojoj meri se nagibi krivih x_1 i x_2 međusobno razlikuju. Sa druge strane, ako je $\|x_1 - x_2\|_1 < \eta$, s obzirom na to da je tada i $\max_{t\in[a,b]} |x_1'(t) - x_2'(t)| < \eta$, pogodnim izborom veličine $\eta > 0$ razlika u nagibima[10] x_1 i x_2 može da se ograniči unapred zadatom veličinom.

Izbor norme je u tesnoj vezi sa problemom koji se posmatra jer, između ostalog, direktno utiče na svojstvo neprekidnosti posmatrane funkcionele. Neka je $(X, \|\cdot\|)$ dat normiran prostor. Podsetimo se, funkcionela $J : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x \in X$ iz $\|x - x_0\| < \delta$ sledi da je $|J(x) - J(x_0)| < \varepsilon$. Kaže se da je funcionela J ograničena na X ako postoji $M > 0$, tako da za sve $x \in X$ važi da je $|J(x)| \leq M\|x\|$. Ako je, dodatno, funkcionela J linearna onda je neprekidnost funkcionele J nad X ekvivalentna njenoj ograničenosti (videti [13]). Lako se pokazuje da je sa $J(x) = \displaystyle\int_a^b \big[f(t)x(t) + g(t)x'(t)\big]\,dt$, definisana linearna i neprekidna funkcionela nad $C^1[a, b]$, pri čemu su f i g proizvoljne apsolutno integrabilne funkcionele nad $[a, b]$ (videti zadatak 4.1).

4.2 Diferencijal funkcionele

Pojam diferencijabilnosti funkcionele nad zadatim normiranim prostorom uvodi se po analogiji sa teorijom funkcija definisanih nad $\mathbb{R}^n$ (ili nad nekim podskpom od $\mathbb{R}^n$).

Neka je dat normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ i funkcionela $J : X \to \mathbb{R}$. Priraštaj funkcionele J u tački $x \in X$ je dat sa

$$\Delta J_x(h) = J(x + h) - J(x),$$

gde je $h \in X$ priraštaj "nezavisno promenljive" $x \in X$. Koristiće se i skraćene oznake $\Delta J_x(h) = \Delta J(h) = \Delta J$.

Definicija 4.5. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor i neka je $J : X \to \mathbb{R}$. Funkcionela J je diferencijabilna u tački $x_0 \in X$ ako njen priraštaj ΔJ_{x_0}*

[10] Ako se nagibi krivih "malo" razlikuju onda se "malo" razlikuju i dužine njihovih lukova.

može da se napiše u obliku

$$\Delta J_{x_0}(h) = \mathcal{L}_{x_0}(h) + r_{x_0}(h),$$

gde je $\mathcal{L}_{x_0}(h)$ *neprekidna linearna funkcionela po* $h \in X$, *a* $r_{x_0}(h) = o(\|h\|)$, *kada* $\|h\| \to 0$.

Linearna funkcionela $\mathcal{L}_{x_0}$ *(glavni deo priraštaja* ΔJ_{x_0}*) zove se diferencijal ili varijacija funkcionele* J, *a označava se i sa* δJ_{x_0}.

Lako se pokazuje da je granična vrednost $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$ u $\mathbb{R}$ ekvivalentan sa graničnom vrednošću $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$ u X, što će se koristiti u nastavku.

Lema 4.6. *Neka je* δJ_{x_0} *varijacija funkcionele* $J : X \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne u tački* x_0. *Ako je* $\delta J_{x_0}(h) = o(\|h\|)$, *kada* $\|h\| \to 0$ *onda je* $\delta J_{x_0} \equiv 0$. *Takođe, varijacija* δJ_{x_0} *je jedinstveno određena u tački* x_0.

Dokaz. Pretpostavlja se da postoji $h_0 \in X$, $h_0 \neq 0$, tako da je $\delta J_{x_0}(h_0) = \lambda$, za neko $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jasno, za niz $h_n := \dfrac{1}{n} h_0$, $n \in \mathbb{N}$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n\| = 0$, pa je

$$\frac{\delta J_{x_0}(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{\delta J_{x_0}(\frac{1}{n}h_0)}{\|\frac{1}{n}h_0\|} = \frac{\delta J_{x_0}(h_0)}{\|h_0\|} = \frac{\lambda}{\|h_0\|} \neq 0,$$

odakle sledi da $\delta J_{x_0}(h) \neq o(\|h\|)$, kada $\|h\| \to 0$, što protivreči pretpostavci.

Dokaz drugog tvrđenja je direktna posledica upravo dokazanog svojstva varijacije δJ_{x_0}. □

Primer 4.7. Neka je ν linearna neprekidna funkcionela nad normiranim prostorom X. Tada je $\nu(x + h) - \nu(x) = \nu(h)$, za sve $x, h \in X$, pa je za proizvoljno $x \in X$ varijacija $\delta\nu_x(h) = \nu(h)$, $h \in X$, a $r_x(h) \equiv 0$. Prema tome, linearna neprekidna funkcionela nad normiranim prostorom je diferencijabilna u svakoj tački. Ako je normiran prostor konačne dimenzije, onda je, automatski, svaka linearna funkcionela diferencijabilna.

Primer 4.8. Neka je preslikavanje $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ dato sa $F(x) = x(\xi)$, gde je $\xi \in [a,b]$ fiksiran. Izraz $\Delta F_x(h) = h(\xi)$ je linearan i neprekidan po h (i ovde je $r \equiv 0$), pa je F diferencijabilna na $C[a,b]$.

Primer 4.9. Neka je $J : C[a,b] \to \mathbb{R}$ data sa $J(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x(t))dt$, gde je f dovoljno glatka funkcionela po t i x. Dovoljno je, recimo, da ima neprekidne prve izvode po t i x. Koristeći diferencijabilnost funkcionele f po drugoj promenljivoj dobija se

$$\begin{aligned}
\Delta J_x(h) &= \int_a^b [f(t,(x+h)(t)) - f(t,x(t))]dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t))h(t) + r(t,x(t),h(t))\right] dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)h(t)dt + \int_a^b r(t,x(t),h(t))dt,
\end{aligned}$$

pri čemu važi $r(t,x,h) = o(\|h\|)$, kada $\|h\| \to 0$. Tada važi

$$\int_a^b r(t,x(t),h(t))dt = o(\|h\|) \quad \text{kada} \quad \|h\| \to 0.$$

Naime, važi da je

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|} \int_a^b r(t,x(t),h(t))dt = \lim_{\|h\|\to 0} \int_a^b \frac{r(t,x(t),h(t))}{\|h\|} dt = 0.$$

Funkcionela $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t))h(t)dt$ je linearna i neprekodna po h. Prema tome, J je diferencijabilna u svakoj tački $x \in C[a,b]$ i važi

$$\delta J_x(h) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t))h(t)dt.$$

Koristeći ovaj rezultat može da se odredi diferencijal funkcionele $J : C^n[a,b] \to \mathbb{R}$ zadate sa $J(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x,x',\ldots,x^{(n)})ds.$

4.3 Potrebni uslovi za ekstrem funkcionele

Neka je dat normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ i funkcionela $J : X \to \mathbb{R}$. Jasno, funkcionela J dostiže lokalnu ekstremnu vrednost u tački $x_0 \in X$, ako njen priraštaj $\Delta J_{x_0} = J(x) - J(x_0)$ ne menja znak u nekoj okolini tačke x_0, odnosno ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve $x \in X$ za koje je $\|x - x_0\| < \varepsilon$ važi $\Delta J_{x_0} \geq 0$ ili $\Delta J_{x_0} \leq 0$.

Teorema 4.10. *Da bi funkcionela $J : X \to \mathbb{R}$ imala lokalni ekstrem u tački x_0 normiranog prostora $(X, \|\cdot\|)$ potrebno je da njen diferencijal u tački x_0 (ako postoji) bude jednak nuli, to jest, potrebno je da je $\delta J_{x_0}(h) = 0$ za sve $h \in X$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ tačka lokalnog minimuma funkcionele J i neka je J diferencijabilna u toj tački. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da važi:

$$J(x_0 + \tilde{h}) - J(x_0) \geq 0 \quad \text{za sve } \tilde{h} \text{ za koje je } \|\tilde{h}\| < \varepsilon.$$

Diferencijabilna funkcionela može da se napiše u obliku:

$$J(x_0 + \tilde{h}) - J(x_0) = \delta J_{x_0}(\tilde{h}) + r_{x_0}(\tilde{h}),$$

pri čemu je $r_{x_0}(\tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$ kada $\|\tilde{h}\| \to 0$.

Neka je $h \in X$ proizvoljno. Tada postoji $a > 0$, tako da je $\tilde{h} = ah \in X$ takvo da je $\|\tilde{h}\| < \varepsilon$. Pošto je x_0 tačka lokalnog minimuma i $a > 0$, sledi da je:

$$\frac{J(x_0 + ah) - J(x_0)}{a\|h\|} \geq 0.$$

Iz uslova diferencijabilnosti funkcionele J i linearnosti varijacije dobija se da je:

$$\frac{\delta J_{x_0}(ah) + r_{x_0}(ah)}{a\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) + \frac{r_{x_0}(ah)}{\|ah\|} \geq 0.$$

Kada $a \to 0^+$, tada i $\|ah\| \to 0$, te se dobija da je:

$$0 \leq \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) + \frac{r_{x_0}(ah)}{\|ah\|} \right) = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h),$$

to jest, $\delta J_{x_0}(h) \geq 0$. Slično, za vektor $\hat{h} = -ah \in X,\ a > 0$ važi da je $\|\hat{h}\| < \varepsilon$, pa se dobija da je sada:

$$\frac{J(x_0 - ah) - J(x_0)}{-a\|h\|} \leq 0.$$

Opet, iz uslova diferencijabilnosti funkcionele J i linearnosti varijacije δJ_{x_0} sledi:

$$\frac{\delta J_{x_0}(-ah) + r_{x_0}(-ah)}{-a\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) - \frac{r_{x_0}(-ah)}{\|-ah\|} \leq 0.$$

Kada $a \to 0^+$ važi da je:

$$0 \geq \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) - \frac{r_{x_0}(-ah)}{\|-ah\|}\right) = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h),$$

to jest, $\delta J_{x_0}(h) \leq 0$. Dakle, $\delta J_{x_0}(h) = 0$. [11] □

Ako je ν neprekidna linearna funkcionela nad X, njena varijacija je data sa $\delta\nu(h) = \nu(h)$, odakle sledi da je potreban uslov za ekstrem neprekidne linearne funkcionele dat sa $\nu \equiv 0$.

4.4 Ojlerova jednačina

Ojler-Lagranžova jednačina (ili, kraće, Ojlerova jednačina)[12] je u tesnoj vezi sa potrebnim uslovom za slab ekstrem funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt.$$

[11] Alternativni dokaz se zasniva na lemi

Lema 4.11. *Ako je funkcionela ν diferencijabilna u $x_0 \in X$ onda je, za fiksirano $h \in X$, funkcija $f(t) = \nu(x_0 + th)$, kao funkcija po $t \in \mathbb{R}$, diferencijabilna u $t = 0$, a njen izvod je $f'(0) = \delta\nu_{x_0}(h)$.*

[12] Ojler je izveo ovu jednačinu 1741. godine, a Lagranž 1755. godine, sa jednostavnijim dokazom, ali nepotpunim. Konačno, Di Bua Rejmon daje precizan dokaz 1879. godine.

Najpre treba pojasniti razliku između slabog i jakog ekstrema.

U nastavku se pretpostavlja da je podintegralna funkcija dovoljno glatka[13]. Funkcionela $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$ je definisana nad prostorom neprekidno diferencijabilnih funkcija, $C^1[a, b]$. Da bi se odredio lokalni ekstrem funkcionele J potrebno je precizirati u kojoj normi se definiše okolina nekog elementa $x_0 \in C^1[a, b]$. Lako se uočava da važi:

$$\{x \in C^1[a, b] \mid \|x - x_0\|_1 < \varepsilon\} \subset \{x \in C^1[a, b] \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Pojmovi jakog i slabog ekstrema su zasnovani na ovoj primedbi.

Ako za $x_0 \in C^1[a, b]$ važi $J(x_0) \leq J(x)$ za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje je $\|x - x_0\|_1 < \varepsilon$, onda J ima u tački x_0 *slab lokalni ekstrem*, a ako je $J(x_0) \leq J(x)$ za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje je $\|x - x_0\| < \varepsilon$ onda je reč o *jakom lokalnom ekstremu*. Naravno, jaki ekstremi su uvek i ekstremi u slabom smislu, a obrnuto ne mora biti tačno. Odavde sledi da je potreban uslov za slab ekstrem takođe i potreban uslov za jak ekstrem.

Pri određivanju globalnih ekstrema, jak ekstrem se posmatra u prostoru $(C[a, b], \|\cdot\|)$, a slab ekstrem se posmatra u prostoru $(C^1[a, b], \|\cdot\|_1)$.

Posmatra se problem određivanja slabog ekstrema funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt,$$

pri čemu su unapred zadati granični uslovi $x(a) = A$, $x(b) = B$.

Da bi priraštaj $x(t)+h(t),\ t \in [a, b]$ nezavisno promenljive $x(t),\ t \in [a, b]$ ispunjavao navedene granične uslove, pretpostavlja se da važi $h(a) = h(b) = 0$.

Na osnovu prethodnog poglavlja sledi da je potreban uslov za ekstrem funkcionele J dat sa $\delta J = 0$, pa preostaje da se odredi varijacija funkcionele J. Pošto je

$$\Delta J_x(h) = \int_a^b \left[f(t, (x + h)(t), (x + h)'(t)) - f(t, x(t), x'(t))\right] dt,$$

[13] Drugim rečima, pretposavlja se da f ima bar neprekidne izvode drugog reda po svakoj promenljivoj.

iz diferencijabilnosti podintegralne funkcije sledi:

$$f(t, x+h, x'+h') - f(t, x, x') = \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h'\right) + r(t, x, x', h, h'),$$

pri čemu važi $r(t, x, x', h, h') \to 0$, kada $\|h\|_1 \to 0$. Odavde je

$$\delta J_x(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h'\right) dt.$$

Prema tome, potreban uslov za slab ekstrem funkcionele J je dat sa

$$\delta J_x(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h'\right) dt = 0. \tag{4.4}$$

Funkcije x za koje važi (4.4) su rešenja izvesne diferencijalne jednačine drugog reda, što je posledica narednih razmatranja.

Lema 4.12. [14]

a) Neka je data funkcija $f \in C[a,b]$ i neka važi $\int_a^b f(t)h(t)dt = 0$, za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Dokazati da je tada $f \equiv 0$.

b) Neka je data funkcija $g \in C[a,b]$ i neka važi $\int_a^b g(t)h'(t)dt = 0$, za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Dokazati da je tada $g \equiv const$.

Dokaz. a) Pretpostavlja se da postoji $t_0 \in (a,b)$ tako da je $f(t_0) \neq 0$. Neka je, na primer, $f(t_0) > 0$. Iz neprekidnosti funkcije f sledi da postoji interval $(c,d) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku t_0, tako da važi $f(t) > 0$ za sve $t \in (c,d)$. Neka je $h(t) := (c-t)^2(d-t)^2$, $t \in (c,d)$, a $h(t) = 0$ za $t \in [a,b] \setminus (c,d)$. Čitaocu se ostavlja da proveri da funkcija h ispunjava uslove leme. Lako se proverava da je $\int_a^b f(t)h(t)dt > 0$, što je u kontradikciji sa uslovom zadatka.

[14] U literaturi se ova lema naziva osnovnom lemom varijacionog računa, a deo pod a) se zove Lagranžova lema.

b) Iz teoreme o srednjoj vrednosti za integral sledi da postoji $c \in \mathbb{R}$, tako da važi:

$$\int_a^b (g(t) - c)dt = 0.$$

Treba da se pokaže da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $u(t),\ t \in [a,b]$, važi:

$$\int_a^b (g(t) - c)u(t)dt = 0.$$

Neka je $u \in C[a,b]$. Tada, ako je $\alpha = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b u(t)dt$, za funkciju $\lambda(t) = u(t) - \alpha,\ t \in [a,b]$, važi $\displaystyle\int_a^b \lambda(t)dt = 0$.

Vidi se da funkcija $h(t) = \displaystyle\int_a^t \lambda(\tau)d\tau,\ t \in [a,b]$ ispunjava uslove zadatka $(h'(t) = \lambda(t),\ t \in [a,b])$. Dakle,

$$\int_a^b (g(t) - c)u(t)dt = \int_a^b g(t)\lambda(t)dt - c\int_a^b \lambda(t)dt + \alpha\int_a^b (g(t) - c)dt = 0$$

za proizvoljnu funkciju $u \in C[a,b]$. Za funkciju $u(t) = g(t) - c,\ t \in [a,b]$ dobija se:

$$\int_a^b (g(t) - c)^2 dt = 0,$$

odnosno $g(t) = c,\ t \in [a,b]$. $\square$

Lema 4.13. [15] *Neka su date funkcije $f, g \in C[a,b]$ i neka važi*

$$\int_a^b (f(t)h(t) + g(t)h'(t))dt = 0,$$

za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je g diferencijabilna i važi $f(t) - g'(t) = 0,\ t \in [a,b]$.

[15] Paul du Bois-Reymond (1831–1889)

Dokaz. Neka je $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(\tau)d\tau,\ t \in [a,b]$. Parcijalnom integracijom dobija se:

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = h(t)F(t)\Big|_a^b - \int_a^b F(t)h'(t)dt = -\int_a^b F(t)h'(t)dt.$$

Prema tome

$$\int_a^b [f(t)h(t) + g(t)h'(t)]dt = \int_a^b [g(t) - F(t)]h'(t)dt = 0.$$

Na osnovu Leme 4.12 pod a) dobija se $g(t) = F(t) + c$, za neko $c \in \mathbb{R}$ i sve $t \in [a,b]$. S obzirom na to da je desna strana ove jednakosti diferencijabilna ($F'(t) = f(t),\ t \in [a,b]$), sledi $g \in C^1[a,b]$ i $g'(t) = f(t),\ t \in [a,b]$. $\square$

Na osnovu leme Di Boa Rejmonda, iz (4.4) sledi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0. \tag{4.5}$$

Jednačina (4.5) zove se *Ojlerova jednačina.* Dakle, potreban uslov koji funkcija x_0 mora da ispunjava da bi bila ekstrem funkcionele J jeste da x_0 bude rešenje Ojlerove jednačine.

Teorema 4.14. *Neka je data funkcionela* $J(x) = \displaystyle\int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$, *pri čemu* $x \in C^1[a,b]$ *i važi* $x(a) = A,\ x(b) = B$. *Ako funkcionela* J *ima ekstrem u* $x_0 \in C^1[a,b]$, *onda je* x_0 *rešenje Ojlerove jednačine*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}f(t, x(t), x'(t))\right) = 0,$$

sa graničnim uslovima $x(a) = A,\ x(b) = B$.

Dokaz. Dokaz direktno sledi na osnovu prethodnih razmatranja. Naime, ako je x_0 ekstrem funkcionele J onda, na osnovu Teoreme 4.10, važi $\delta J_{x_0} \equiv$

0, odnosno x_0 zadovoljava jednakost (4.4). Konačno, na osnovu Leme 4.13, da bi važilo (4.4), x_0 mora biti rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = \frac{\partial f}{\partial x},$$

što je tačno Ojler-Lagranžova jednačina (4.5). $\square$

Integralne krive koje zadovoljavaju Ojlerovu jednačinu nazivaju se *ekstremale.* Ojlerova jednačina je jednačina drugog reda i u razvijenom obliku glasi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x'} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}x' - \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}x'' = 0.$$

Proizvoljne konstante koje figurišu u rešenju određuju se iz uslova $x(a) = A$ i $x(b) = B$.

Iako je Ojlerova jednačina diferencijalna jednačina drugog reda, ekstremala ne mora biti dva puta diferencijabilna funkcija. Ipak, moguće je dati dovoljan uslov koji podintegralna funkcija $f(t, x, x')$ treba da zadovoljava da bi ekstremala imala (neprekidan) drugi izvod.

Naredni primeri ilustruju činjenicu da je određivanje ekstremale, odnosno rešavanje Ojlerove jednačine, samo prvi korak pri određivanju ekstrema zadate funkcionele i da je potrebno obaviti dodatna ispitivanja da bi se shvatila priroda dobijene ekstremale.

Primer 4.15. Odrediti ekstrem funkcionele $J(x) = \displaystyle\int_0^1 x'^2 dt$ koja zadovoljava granične uslove $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Ojlerova jednačina za ovu funkcionelu je data sa $-2x'' = 0$. Njeno opšte rešenje je $x(t) = C_1 t + C_2$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, a rešenje koje zadovoljava zadate granične uslove je $x(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Direktnom proverom se dobija da je dobijena ekstremala globalni minimum u slabom smislu. Za $h \in C^1[0, 1]$ za koje je $h(0) = h(1) = 0$ i za $x(t) = t$, $t \in [0, 1]$

važi:

$$\begin{aligned} J(t+h(t)) - J(t) &= \int_0^1 (t+h(t))'^2 dt - \int_0^1 t'^2 dt \\ &= 2\int_0^1 h'(t)dt + \int_0^1 h'(t)^2 dt = \int_0^1 h'(t)^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Primer 4.16. Odrediti ekstrem funkcionele $J(x) = \displaystyle\int_0^1 x'^3 dt$ koja zadovoljava granične uslove $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Lako se proverava da je rešenje Ojlerove jednačine koje zadovoljava zadate granične uslove dato sa $x(t) = t$, $t \in [0,1]$. Za $h \in C^1[0,1]$ za koje je $h(0) = h(1) = 0$ i za $x(t) = t,\ t \in [0,1]$ važi:

$$J(t+h(t)) - J(t) = 3\int_0^1 h'(t)^2 \left(1 + \frac{1}{3}h'(t)\right) dt.$$

Priraštaj je nenegativan za sve $h \in C^1[0,1]$ za koje je $h(0) = h(1) = 0$ i $\|h\|_1 \leq 3$, pa je dobijena ekstremala lokalni minimum u slabom smislu.[16]

Primer 4.17. Odrediti ekstrem funkcionele $J(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{2/3} x'^2 dt$ koja zadovoljava granične uslove $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Ojlerova jednačina za ovu funkcionelu je data sa

$$-\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}2x' - 2t^{\frac{2}{3}}x'' = 0,$$

odnosno $\dfrac{2}{3}x' + tx'' = 0$. Rešenje Ojlerove jednačine koje zadovoljava zadate granične uslove je dato sa $x(t) = t^{1/3}$, $t \in [0,1]$. Ova funkcija, međutim, ne pripada prostoru $C^1[0,1]$, te funkcionela J ne dostiže ekstremnu vrednost.

[16] U ovom slučaju može da se konstruiše niz neprekidnih funkcija $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji u normi $\|\ \|$ prostora $C[0,1]$ konvergira ka ekstremali i za koji je $\lim_{n\to\infty} J(x_n) = -\infty$. Dakle, $x(t) = t,\ t \in [0,1]$ nije ekstrem u jakom smislu.

Primer 4.18. Odrediti ekstrem funkcionele $J(x) = \int_0^{3\pi/2} ({x'}^2 - x^2)dt$ koja zadovoljava granične uslove $x(0) = x(3\pi/2) = 0$.

Iz Ojlerove jednačine dobija se da je ekstremala data sa $x(t) = 0,\ t \in [0, 3\pi/2]$. Međutim, u ovom slučaju iako ekstremala postoji i jedinstvena je, u njoj J ne dostiže ekstrem. Naime, pokazaće se da postoje nizovi neprekidno diferencijabilnih funkcija $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, koji uniformno teže ka x, tako da je $J(x_n) < J(x)$ i $J(y_n) > J(x)$. Zaista, za niz

$$x_n(t) = 1/n \cdot \sin(2t/3),\ t \in [0, 3\pi/2], \quad \text{takav da} \quad x_n \rightrightarrows 0,\ n \to \infty$$

važi $J(0) = 0 > -\frac{5\pi}{12n^2} = J(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, dok za niz

$$y_n(t) = 1/n \cdot \sin(4t/3),\ t \in [0, 3\pi/2], \quad \text{takav da} \quad y_n \rightrightarrows 0,\ n \to \infty$$

važi $J(0) = 0 < \frac{7\pi}{12n^2} = J(y_n),\ n \in \mathbb{N}$.

Elementarno uopštenje prethodnih razmatranja je slučaj kada podintegralna funkcija zavisi od više funkcija, odnosno kada je fukcionela zadata sa

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^b f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))dt,$$

$$x_1(a) = A_1, \ldots, x_n(a) = A_n, \quad x_1(b) = B_1, \ldots, x_n(b) = B_n,$$

to jest,

$$J(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))dt,\ \ \mathbf{x}(a) = \mathbf{A},\ \mathbf{x}(b) = \mathbf{B}, \qquad (4.6)$$

gde je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ i $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Nije teško pokazati da je sa

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max_{a\le t\le b}\{|x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots, |x_n(t)|, |x_1'(t)|, |x_2'(t)|, \ldots, |x_n'(t)|\}$$

definisana norma u $n-$dimenzionalnom prostoru neprekidno diferencijabilnih funkcija definisanih na $[a, b]$.

Potreban uslov za slab ekstrem funkcionele J date sa (4.6) se određuje po analogiji sa slučajem kada funkcionela zavisi od jedne funkcije. Ako su sa h_k označeni priraštaji funkcija x_k, $k = 1, \ldots, n$, onda je priraštaj funkcionele J dat sa

$$\int_a^b \big(f(t, x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n, x_1' + h_1', \ldots, x_n' + h_n') - f(t, x_1, \ldots, x_n')\big)\, dt.$$

Iz formula konačnog priraštaja[17] sledi da podintegralna funkcija može da se napiše u obliku:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} h_k + \frac{\partial f}{\partial x_k'} h_k' \right) + r(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{h}, \mathbf{h}'),$$

gde je $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, a $r = o(\|\mathbf{h}\|_1)$ kada $\|\mathbf{h}\|_1 \to 0$. Prema tome, varijacija funkcionele J je data sa

$$\delta J_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} h_k + \frac{\partial f}{\partial x_k'} h_k' \right) dt.$$

Iz graničnih uslova sledi $\mathbf{h}(a) = \mathbf{h}(b) = \mathbf{0}$. Pošto su funkcije $h_k, k = 1, \ldots, n$, međusobno nezavisne, mogu da se biraju tako da samo jedna od njih bude različita od nule, na primer, h_1. Tada potreban uslov za ekstrem glasi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0.$$

Dakle, variranjem po jedne od funkcija x_k, za svako $k = 1, \ldots, n$, dobija se sistem od $n-$diferencijalnih jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_k'} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

U rešenju figuriše $2n$ konstanti koje se određuju iz zadatih graničnih uslova. Dakle, da bi funkcija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bila tačka ekstrema funkcionele (4.6) neophodno je da ona ispunjava uslov (4.7).

[17]Videti poglavlje 1.3.

4.4.1 Ojlerova jednačina, neki specijalni slučajevi

U opštem slučaju ne postoji "recept" za rešavanje Ojlerove jednačine u zatvorenoj formi. Stoga se posmatraju samo neki specijalni slučajevi koji se često sreću u praksi.

1. Ako podintegralna funkcija ne zavisi od t, odnosno ako je

$$J(x) = \int_a^b f(x(t), x'(t))dt,$$

onda se iz Ojlerove jednačine dobija prvi integral

$$f - x' f_{x'} = const.$$

Naime, s obzirom na to da f ne zavisi od t, razvijeni oblik Ojlerove jednačine glasi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} x' - \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} x'' = 0.$$

Množeći ovu jednakost sa x' dobija se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} (x')^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} x' x'' = 0.$$

Lako se pokazuje da je gornja jednakost jednaka sa

$$\frac{d}{dt}(f - x' f_{x'}) = 0,$$

odakle direktno sledi prvi integral Ojlerove jednačine.

2. Ako podintegralna funkcija ne zavisi od x, odnosno ako je $J(x) = \int_a^b f(t, x'(t))dt$, onda iz Ojlerove jednačine sledi $f_{x'} = const$, pa se iz ove jednačine određuje x'.

3. Ako podintegralna funkcija ne zavisi od x', odnosno ako je $J(x) = \int_a^b f(t, x(t))dt$, onda Ojlerova jednačina nije diferencijalna jednačina, pa egzistencija ekstremale zavisi od graničnih uslova.

   Na primer, funkcionela $J(x) = \int_a^b x^2 dt$, uz uslove $x(a) = A$, $x(b) = B$ ima ekstremalu samo ako je $A = B = 0$.

4.4.2 Granični uslovi opšteg karaktera I

Do sada je proučavan problem traženja ekstrema funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')dt,$$

pri čemu je dejstvo funkcionele J bilo ograničeno na funkcije x, koje zadovoljavaju granične uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$. Praksa često zahteva posmatranje opštih slučajeva. Posmatraju se najpre najjednostavnija uopštenja kada se pretpostavlja da su funkcije x definisane na intervalu $[a, b]$, ali same vrednosti $x(a)$ i $x(b)$ nisu unapred determinisane.

Podsetimo se, uslov stacionarnosti je dat sa $\delta J = 0$, odnosno

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) dt = 0,$$

to jest, primenom parcijalne integracije

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} \right) h dt + \frac{\partial f}{\partial x'} h \bigg|_a^b = 0.$$

Pošto navedena jednakost mora da važi za sve h, pa i za funkcije sa svojstvom $h(a) = h(b) = 0$, sledi, na osnovu Leme 4.12 pod a), da je

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0.$$

Da bi navedena jednakost važila i za sve ostale izbore funkcije h, postoji i dodatni uslov

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t=b} h(b) - \left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t=a} h(a) = 0. \tag{4.8}$$

Biće razmotrene neke mogućnosti.

a) Za zadate granične uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$, jednakost (4.8) je trivijalno ispunjena. Taj slučaj je detaljno komentarisan u prethodnom poglavlju.

b) Ako x nije zadato ni u a, niti u b, njena varijacija ne mora biti jednaka nuli u tim tačkama, pa iz (4.8) sledi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t=b} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t=a} = 0.$$

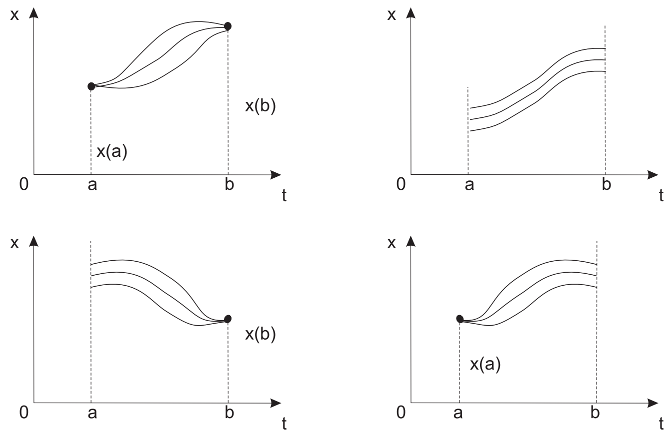
c) Ako x nije zadato u tački a, a $x(b) = B$, onda iz (4.8) sledi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t=a} = 0.$$

d) Ako je $x(a) = A$, a za $t = b$ funkcija x nije zadata onda važi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t=b} = 0.$$

Na primer, potrebno je odrediti krivu $y(x),\ x \in [0, b]$ date dužine l koja će u odnosu na $x-$osu omeđiti najveću površinu. Dati zadatak je poznat kao problem Didone, i ekstremala, dobijena iz Ojlerove diferencijalne jednačine, je $y(x) = \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2$, $x \in [0, b]$, za neko $b > 0$. Konstante c_1 i c_2 se određuju i iz uslova (4.8), videti zadatak 4.9.



Slika 4.4. Granični uslovi a), b), c) i d).

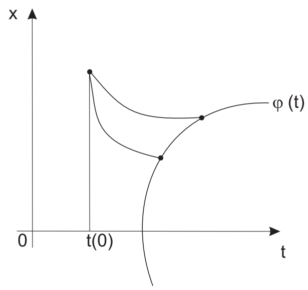
4.4.3 Granični uslovi opšteg karaktera II

U velikom broju praktičnih situacija neophodno je varirati i nezavisno promenljivu koja figuriše u zadatku, što se često javlja u slučaju kada jedna ili obe granice određenog integrala, kriterijuma optimalnosti, nisu unapred određene.

Radi jednostavnosti, posmatraće se problem nalaženja ekstrema funkcionele J, ako je $x(a) = A$, a drugi granični uslov je tačka na grafiku funkcije φ. Neka je x proizvoljna funkcija iz dopustivog skupa i neka ona seče grafik funkcije φ u tački $(\xi_x, \varphi(\xi_x))$, tada je zadatak određivanja minimuma dat sa

$$J(x) = \int_a^{\xi_x} f(t, x, x')dt \to \min, \quad x(a) = A, \quad x(\xi_x) = \varphi(\xi_x).$$

Neka je x_0 minimum funkcionele J i neka seče grafik funkcije φ u tački $(\xi, \varphi(\xi))$. Variranjem x_0, dobijena funkcija $x_0 + h$ seče grafik funkcije φ u tački $(\xi+\tau, \varphi(\xi+\tau))$, te se automatski varira i vrednost ξ. Ovakvi problemi nazivaju se problemima sa pokretnim granicama.



Slika 4.5. Problem sa pokretnom granicom.

Ovde se pretpostavlja da je granična funkcija φ neprekidno diferencijabilna i da je $\varphi'(\xi) \neq x_0'(\xi)$, odnosno da se grafici funkcija φ i x_0 zaista seku u tački ξ, a ne dodiruju.

Radi lakšeg praćenja teksta, potreban uslov za ekstrem izvodi se u nekoliko etapa.

1. korak Koristeći istu argumentaciju kao u poglavlju 4.4.2 zaključuje se da ekstremala x_0 mora da zadovoljava Ojlerovu jednačinu, jer se x_0 varira i funkcijama h, takvima da je $h(a) = h(\xi) = 0$.

2. korak Zatim se pretpostavlja da je $h(a) = 0$ i $h(\xi) \neq 0$. Pošto to implicira da je varirana i vrednost ξ, funkcije x_0 i $x_0 + h$ će biti definisane na različitim domenima $[a, \xi]$ i $[a, \xi + \tau]$, redom, te se i smisao same funkcije h gubi. Taj problem se prevazilazi tako što se pretpostavlja da su funkcije x_0 i $x_0 + h$ definisane na dovoljno velikom intervalu I, koji sadrži oba pomenuta domena ili, ako je potrebno, da su definisane na celoj polupravi $[a, \infty)$. Dalje, pošto vrednosti funkcije x_0 na intervalu $[\xi, \xi + \tau]$ ne utiču na vrednost funkcionele J, udaljenost između funkcija x_0 i $x_0 + h$, odnosno norma funkcije h, biće posmatrana na sledeći način:

$$\|h\|_\rho = \|h\|_1 + \sqrt{\tau^2 + [x_0(\xi) - (x_0 + h)(\xi + \tau)]^2},$$

gde $\|h\|_1$ predstavlja normu funkcije h na interval $[a, \xi + \tau]$. Drugi sabirak je rastojanje između krajnjih tačaka grafika funkcija x_0 i $x_0 + h$. Na taj način je izbegnuta i dodatna diskusija o karakteristikama granične funkcije φ.

3. korak Posmatra se priraštaj ΔJ

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_a^{\xi+\tau} f(t, x+h, x'+h')dt - \int_a^{\xi} f(t, x, x')dt \\ &= \int_a^{\xi} \big(f(t, x+h, x'+h') - f(t, x, x')\big)\, dt + \int_{\xi}^{\xi+\tau} f(t, x+h, x'+h')dt \\ &= \Delta J_1 + \Delta J_2.\end{aligned}$$

4. korak Analogno, kao u Poglavlju 4.4.2, varijacija dobijena iz prvog integrala ΔJ_1 je data sa

$$\delta J_1(x) = \int_a^{\xi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'}\right) hdt + \frac{\partial f}{\partial x'}h\bigg|_{t=\xi}.$$

5. korak Posmatra se sada drugi integral ΔJ_2. Iz teoreme o srednjoj vrednosti sledi:

$$\int_{\xi}^{\xi+\tau} f(t, x+h, x'+h')dt = \tau f(t, x+h, x'+h')\bigg|_{t=\xi+\theta\tau},$$

za neko $\theta \in (0, 1)$. Dalje, primenom teoreme o razvoju funkcije u Tejlorov polinom dobija se $f(t, x+h, x'+h') = f(t, x, x') + \dfrac{\partial f}{\partial x}h + \dfrac{\partial f}{\partial x'}h' + r$, gde je $r = o(\|h\|_1)$, odakle je

$$\int_{\xi}^{\xi+\tau} f(t, x+h, x'+h')dt = \tau\left(f(t, x, x') + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h' + r\right)\bigg|_{t=\xi+\theta\tau}.$$

S obzirom na to da $\|h\|_\rho \to 0$ implicira $\|h\|_1 \to 0$ i $\tau \to 0$, dobija se:

$$\tau\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h' + r\right)\bigg|_{t=\xi+\theta\tau} = o(\|h\|_\rho).$$

Ponovnom primenom teoreme o razvoju u Tejlorov polinom dobija se:

$$f(\xi+\theta\tau, x(\xi+\theta\tau), x'(\xi+\theta\tau)) = \big(f + f_t\theta\tau + f_x x'\theta\tau + f_{x'}x''\theta\tau + o(\theta\tau)\big)\,|_{t=\xi}.$$

Kada $\|h\|_\rho \to 0$, sledi $\tau \to 0$ i

$$\tau \left(f_t \theta\tau + f_x x' \theta\tau + f_{x'} x'' \theta\tau + o(\theta\tau) \right) |_{t=\xi} = o(\|h\|_\rho),$$

odnosno,

$$\Delta J_2 = \tau f(\xi, x(\xi), x'(\xi)) + o(\|h\|_\rho).$$

Zatim, na osnovu $(x+h)(\xi+\tau) = \varphi(\xi+\tau)$ sledi:

$$h(\xi+\tau) = (x+h)(\xi+\tau) - x(\xi+\tau) = \varphi(\xi+\tau) - x(\xi+\tau),$$

što uz razvoj funkcije u Tejlorov polinom daje

$$h(\xi) + h'(\xi)\tau = \varphi'(\xi)\tau - x'(\xi)\tau + o(\tau),$$

jer je $x(\xi) = \varphi(\xi)$. Opet, $\|h\|_\rho \to 0$ implicira $\|h\|_1 \to 0$, pa je $h'(\xi)\tau = o(\tau)$ i važi:

$$\tau = \frac{h(\xi) + o(\tau)}{\varphi'(\xi) - x'(\xi)}.$$

Konačno, odavde se dobija:

$$\delta J_2(h) = \frac{h(\xi)}{\varphi'(\xi) - x'(\xi)} f(\xi, x(\xi), x'(\xi)),$$

jer je

$$o(\tau) \, \frac{f(\xi, x(\xi), x'(\xi))}{\varphi'(\xi) - x'(\xi)} = o(\|h\|_\rho).$$

6. korak Iz $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0$, sledi:

$$\int_a^\xi \left(f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right) h dt + \left(f_{x'} + \frac{f}{\varphi' - x'} \right) h \bigg|_{t=\xi} = 0.$$

Iz Ojlerove jednačine sledi da je prvi sabirak jednak nuli. Konačno, pošto je $h(\xi) \neq 0$ dobija se $(\varphi' - x') f_{x'} + f|_{t=\xi} = 0$.

Jednačina

$$f + (\varphi' - x') f_{x'} \big|_{t=\xi} = 0$$

naziva se *uslov transverzalnosti.*

U slučaju kada se i početna tačka nalazi na nekoj krivoj $\psi(t)$, to jest, $x(\eta) = \psi(\eta)$, na sličan način se izvodi još jedan uslov transverzalnosti:

$$f + (\varphi' - x')f_{x'}\big|_{t=\eta} = 0.$$

Dakle, u slučaju problema sa pokretnim granicama, osim Ojlerove jednačine, mora biti ispunjen i uslov transverzalnosti.

4.4.4 Granični uslovi opšteg karaktera III

U granične uslove opštijeg karaktera spada i slučaj kada je funkcionela zadata u obliku zbira određenog integrala i vanintegralnog člana, koji je funkcija vrednosti ekstremale u granicama intervala nezavisno promenljive. Takvi problemi nazivaju se problemima Bolcinog[18] tipa. Motivacija za proučavanje problema Bolcinog tipa leži u činjenici da rešenje diferencijalne jednačine koja opisuje izvesni fizički proces može biti ekstremala funkcionele u kojoj, osim integrala, postoji i vanintegralni član. Na primer, posmatra se fizički proces opisan jednačinom $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \phi(t) = 0$, uz zadate granične uslove $-\dfrac{dx}{dt} + \alpha x\Big|_{t=0} = 0$ i $x(\theta) = B$, pri čemu su α, B i θ poznate konstante, a ϕ zadata funkcija. (Uz odgovarajuće pretpostavke, ova jednačina može biti model jednodimenzionalnog provođenja toplote kroz čvrsto telo.)

Lako se pokazuje da se ovaj proces može izvesti iz varijacionog problema, čiji je kriterijum optimalnosti dat izrazom:

$$J(x) = \int_0^\theta \left[\frac{1}{2}x'^2 - x\phi(t)\right] dt + \frac{\alpha}{2}x^2\Big|_{t=0}.$$

Neka je data funkcionela

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')dt + \Psi(x(a), x(b)).$$

[18] Oskar Bolza (1857–1942)

Bez dokaza usvaja se činjenica da je potreban uslov za ekstrem funkcionele J dat sa $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$,

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x(a)} + \frac{\partial f}{\partial x'}\right) h\Big|_{t=a} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x(b)} + \frac{\partial f}{\partial x'}\right) h\Big|_{t=b} = 0. \qquad (4.9)$$

Odavde sledi da, jednačinama (4.9), sama varijaciona formulacija nameće određene granične uslove, koji se nazivaju *prirodni granični uslovi.* Jednačine (4.9) su, u opštem slučaju, nelinearne algebarske jednačine.

4.5 Izoperimetrijski zadatak

U varijacionom računu, a naročito u teoriji optimalnog upravljanja, funkcije stanja često su međusobom vezane izvesnim, unapred zadatim ograničenjima. Ograničenja mogu biti izražena u vidu određenih integrala, algebarskih jednačina i diferencijalnih jednačina ili neke njihove kombinacije. Po analogiji s odgovarajućim konačnodimenzionim problemom, uslovni ekstremi će se tražiti metodom neodređenih Lagranžovih množitelja.

Karakterističan primer je Didonin problem: Od svih zatvorenih ravnih krivih koje imaju zadatu dužinu, odrediti onu koja obuhvata najveću površinu.

Rešenje je kružnica (videti zadatak 4.9), a ovaj zadatak se često dovodi u vezu sa legendom o feničanskoj carici Didoni (IX vek pre Hrista),[19] a u modifikovanoj verziji sa načinom na koji je Hasan Sabah, prijatelj čuvenog arapskog matematičara Omara Hajjama, zauzeo legendarnu tvrđavu Alamut.[20] Evo šta o Didoni kaže "Leksikon religija i mitova drevne Evrope":

"...U rimskim predanjima Didona je kraljica Kartagine, kći feničanskog kralja Muta, Pigmalionova sestra. Kad je Pigmalion ubio Didoninog supruga Siharba, ili Aharba, ona je sa svojim pristalicama napustila Tir i otplovila za Libiju.... Kad su se iskrcali u Libiji, domoroci su ih srdačno

[19] videti: Vergilije: Eneide, knjiga prva, 367. stih

[20] videti: Vladimir Bartol, Alamut, Svjetlost, Sarajevo 1990., Deni Geđ, Papagajeva teorema, Geopoetika, Beograd 2000., Amin Maluf, Samarkand, Laguna, Beograd, 2004.

prihvatili i ponudili su Didoni u vlasništvo onoliko zemlje koliko može da obuhvati jedna volujska koža. Mudra Didona isekla je kožu na sasvim tanke trake i njima omeđila prostranu površinu. Kolonisti su odlučili da tu podignu grad. Na mestu gde su u zemlji našli povoljno znamenje - glavu konja kao predznak ratničke sreće - podigli su Kartaginu..."[21]

Da je Didona želela da ima izlaz na more sa unapred utvrđenom dužinom obale koju, na primer, opisuje duž između dve zadate tačke, najpovoljnije rešenje bilo bi kružni luk čija tetiva je utvrđeni deo obale.

Slika 4.6. Problem Didone.

Ako se rešenje Didoninog problema traži u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, T]$, navedeni zadatak se matematički modeluje na sledeći način:

$$J(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt \to \max .$$

Ako je data dužina krive l, onda rešenje mora da ispunjava uslov

$$\int_0^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = l.$$

Dakle, radi se o problemu uz ograničenje u vidu integrala. Prema grčkoj reči perimetron koja znači obim, zadaci ovog tipa nazivaju se izoperimetrijski zadaci.

[21] Aleksandrina Cermanović-Kuzmanović, Dragoslav Srejović, Leksikon religija i mitova drevne Evrope, Savremena administracija, Beograd, 1996.

Pre nego što se formuliše teorema o potrebnom uslovu za rešenje izoperimetrijskog problema, dokazaće se teorema o Lagranžovom množitelju opštijeg karaktera. Neka je X Banahov prostor i $D \subset X$. Za datu funkcionelu $K(x)$, $x \in X$, biće korišćena oznaka $D[K = k_0] = \{x \in D \mid K(x) = k_0\}$, gde je k_0 proizvoljan realan broj.

Teorema 4.19. *Neka su J i K funkcionele koje su definisane i diferencijabilne na otvorenom skupu $D \subset X$ i neka je x^* lokalni ekstrem funkcionele J u skupu $D[K = k_0]$, gde je k_0 bilo koji dat broj za koji je $D[K = k_0]$ neprazan. Pretpostavlja se da su diferencijali od J i K neprekidni u nekoj okolini tačke x^*.*[22] *Tada je tačno bar jedno od tvrđenja:*

a) Diferencijal funkcionele K se anulira u tački x^*, odnosno,

$$\delta K_{x^*}(h) = 0$$

za sve $h \in X$, ili

b) Diferencijal funkcionele J je konstantni umnožak diferencijala funkcionele K u tački x^*, odnosno postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\delta J_{x^*}(h) = \lambda \delta K_{x^*}(h)$$

za sve $h \in X$.

Dokaz. Neka tvrđenje pod a) nije zadovoljeno, odnosno neka postoji $\bar{h} \in X$, tako da je

$$\delta K_{x^*}(\bar{h}) \neq 0. \tag{4.10}$$

Treba dokazati da tada važi tvrđenje pod b) za sve $h \in X$. Tvrđenje pod b) direktno sledi iz (4.10) i jednakosti

$$\begin{vmatrix} \delta J_{x^*}(h) & \delta J_{x^*}(l) \\ \delta K_{x^*}(h) & \delta K_{x^*}(l) \end{vmatrix} = 0, \tag{4.11}$$

[22] Može se pokazati da je dovoljno pretpostaviti slabu neprekidnost diferencijala datih funkcionela, videti [24, Poglavlje 3].

za sve $h, l \in X$. Zaista, ako važi (4.11) za sve $h, l \in X$ i ako se uzme da je $l = \bar{h}$ na osnovu (4.10) dobija se:

$$\delta J_{x^*}(h)\delta K_{x^*}(\bar{h}) - \delta J_{x^*}(\bar{h})\delta K_{x^*}(h) = 0;$$

odnosno, da za sve $h \in X$ važi:

$$\delta J_{x^*}(h) - \lambda \delta K_{x^*}(h) = 0, \quad \text{gde je} \quad \lambda = \frac{\delta J_{x^*}(\bar{h})}{\delta K_{x^*}(\bar{h})}.$$

Dakle, ostaje još da se pokaže da važi (4.11). Pošto su diferencijali δJ_{x^*} i δK_{x^*} linearne funkcionele, jednakost (4.11) je trivijalno zadovoljena ako je h ili l jednako nuli, te će se pretpostaviti da je $h, l \neq 0$.

Pošto je $x^* \in D$, gde je D otvoren skup, za dovoljno male $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektor $x^* + \alpha h + \beta l \in D$. Posmatraju se sad funkcije

$$J(x^* + \alpha h + \beta l) \quad \text{i} \quad K(x^* + \alpha h + \beta l),$$

kao funkcije po $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, definisane nad otvorenom loptom

$$U = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha^2 + \beta^2 < r^2\}$$

u $(\alpha, \beta)-$ravni. Poluprečnik $r > 0$ bira se tako da su diferencijali od J i K neprekidni na skupu

$$\mathcal{U} = \{x^* + \alpha h + \beta l \mid (\alpha, \beta) \in U\}.$$

Koristiće se oznake:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\alpha, \beta) &= J(x^* + \alpha h + \beta l), \\ \mathcal{K}(\alpha, \beta) &= K(x^* + \alpha h + \beta l), \quad (\alpha, \beta) \in U \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Konačno, posmatra se preslikavanje $F = (\mathcal{J}, \mathcal{K}) : (\alpha, \beta) \mapsto (j, k)$, gde je

$$\begin{aligned} j &= \mathcal{J}(\alpha, \beta), \\ k &= \mathcal{K}(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

koje otvorenu loptu U u $(\alpha, \beta)-$ravni preslikava u $(j, k)-$ravan. Koordinatni početak u $(\alpha, \beta)-$ravni se slika u $F(0,0) = (J(x^*), K(x^*)) = (J(x^*), k_0)$ u $(j, k)-$ravni, jer $x^* \in D[K = k_0]$.

Posmatra se sad mogućnost inverzije fukcije $F : U \to \mathbb{R}^2$ u okolini tačke $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ da bi se dobili α i β, kao funkcije od j i k u okolini tačke $(j, k) = (J(x^*), k_0)$. Na osnovu teoreme o inverznoj funkciji (videti Teoremu 1.15), to je moguće, ako su $\mathcal{J}$ i $\mathcal{K}$ neprekidno diferencijabilne u okolini tačke $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ i ako za odgovarajući Jakobijan važi:

$$\left. \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{J}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \end{vmatrix} \right|_{(\alpha,\beta)=(0,0)} \neq 0. \tag{4.12}$$

Zatim se izračunavaju parcijalni izvodi koji se pojavljuju u (4.12).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\alpha + \varepsilon, \beta) - \mathcal{J}(\alpha, \beta)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x^* + \alpha h + \beta l + \varepsilon h) - J(x^* + \alpha h + \beta l)}{\varepsilon} \\ &= \delta J_{x^*+\alpha h+\beta l}(h). \end{aligned}$$

Preostali parcijalni izvodi dobijaju se na isti način. Pošto su diferencijali funkcionela J i K neprekidni na $\mathcal{U}$, zaključak je i da su parcijalni izvodi od $\mathcal{J}$ i $\mathcal{K}$ takođe neprekidni na skupu U. Dakle, teorema o inverznoj funkciji važi ukoliko je zadovoljena nejednakost (4.12), odnosno

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}(0,0)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{J}(0,0)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{K}(0,0)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{K}(0,0)}{\partial \beta} \end{vmatrix} &= \left. \begin{vmatrix} \delta J_{x^*+\alpha h+\beta l}(h) & \delta J_{x^*+\alpha h+\beta l}(l) \\ \delta K_{x^*+\alpha h+\beta l}(h) & \delta K_{x^*+\alpha h+\beta l}(l) \end{vmatrix} \right|_{(\alpha,\beta)=(0,0)} \\ &= \begin{vmatrix} \delta J_{x^*}(h) & \delta J_{x^*}(l) \\ \delta K_{x^*}(h) & \delta K_{x^*}(l) \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Neka važi (4.13), odnosno, pretpostavlja se da ne važi jednakost (4.11) koja želi da se dokaže. U nastavku dokaza videće se da to dovodi do kontradikcije sa pretpostavkama teoreme.

Na osnovu prethodnih razmatranja vidi se da ako važi (4.13), onda funkcija F ima inverznu, odnosno postoje funkcije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takve da je:

$$\alpha = \mathcal{A}(j,k) \quad \text{i} \quad \beta = \mathcal{B}(j,k),$$

gde su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ neprekidne u svakoj tački $(j,k) \in V$, a V je otvorena lopta u okolini tačke $(J(x^*), k_0)$ u $(j,k)-$ravni. Tada za sve $(j,k) \in V$ važi:

$$j = \mathcal{J}(\mathcal{A}(j,k), \mathcal{B}(j,k)) \quad \text{i} \quad k = \mathcal{K}(\mathcal{A}(j,k), \mathcal{B}(j,k)),$$

i $\mathcal{A}(J(x^*), k_0) = \mathcal{B}(J(x^*), k_0) = 0$. Ako se posmatraju proizvoljni $(j, k_0) \in V$ i odgovarajuće $(\alpha, \beta) \in U$, tako da je $\alpha = \mathcal{A}(j, k_0)$ i $\beta = \mathcal{B}(j, k_0)$, tada je:

$$j = \mathcal{J}(\mathcal{A}(j,k_0), \mathcal{B}(j,k_0)) = \mathcal{J}(\alpha, \beta) = J(x^* + \alpha h + \beta l) \tag{4.14}$$

$$k_0 = \mathcal{K}(\mathcal{A}(j,k_0), \mathcal{B}(j,k_0)) = \mathcal{K}(\alpha, \beta) = K(x^* + \alpha h + \beta l). \tag{4.15}$$

Iz jednakosti (4.15) sledi da tačka $x^* + \alpha h + \beta l \in D[K = k_0]$ za sve $(j, k_0) \in V$, odnosno za odgovarajuće $(\alpha, \beta) \in U$. Dalje, pošto je V okolina tačke $(J(x^*), k_0)$, onda postoje $(j_1, k_0) \in V$ tako da je $j_1 > J(x^*)$ i $(j_2, k_0) \in V$ tako da je $j_2 < J(x^*)$. Konačno, to dovodi do kontradikcije, jer na osnovu (4.14) sledi da u okolini tačke x^* postoje tačke $x^* + \alpha_1 h + \beta_1 l$ i $x^* + \alpha_2 h + \beta_2 l$ tako da važi:

$$j_1 = J(x^* + \alpha_1 h + \beta_1 l) > J(x^*) \quad \text{i} \quad j_2 = J(x^* + \alpha_2 h + \beta_2 l) < J(x^*),$$

a prema pretpostavci je x^* tačka lokalnog ekstrema funkcionele J. $\square$

U ovoj lekciji posmatra se poseban slučaj izoperimetrijskog zadatka, odnosno problem određivanja ekstremnih vrednosti funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')dt$$

ako rešenje $x = x(t)$, $t \in [a,b]$, ispunjava uslove $x(a) = A, x(b) = B$, i

$$K(x) = \int_a^b g(t, x, x')dt = k_0,$$

gde je k_0 unapred zadat broj.

Pretpostavlja se da su f i g dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije po svim promenljivim i da traženo rešenje nije ekstrem funkcionele K, odnosno da je ograničenje K nezavisno od problema određivanja ekstrema funkcionele J.

Teorema 4.20. *Ako je kriva $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, ekstremna vrednost integrala $J(x) = \int_a^b f(t, x, x')dt$ koja ispunjava uslove*

$$K(x) = \int_a^b g(t, x, x')dt = k_0, \quad x(a) = A,\ x(b) = B$$

i ako ona nije ekstrem integrala K, onda postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je ta kriva x ekstrem funkcionele $\int_a^b (f - \lambda g)dt$, odnosno kriva x je rešenje Ojlerove-Lagranžove diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x'}\right) = f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} - \lambda(g_x - \frac{d}{dt} g_{x'}) = 0. \quad (4.16)$$

Dokaz. Primećuje se da su funkcionele J i K definisane preko integrala te se njihovi diferencijali određuju kao što je opisano u Poglavlju 4.4. Uslov da su f i g dva puta diferencijabilne obezbeđuje neprekidnost dobijenih diferencijala, kao i dobru definisanost Ojler-Lagranžove jednačine (4.16). Pretpostavka da kriva x nije ekstrem funkcionele K znači da $\delta K_x \neq 0$, odnosno da uslov pod a) u Teoremi 4.19 nije ispinjen. Dakle, da bi kriva x bila rešenje posmatranog problema potrebno je da bude ispunjen uslov pod b). To znači, potrebno je da je

$$\delta J_x(h) - \lambda \delta K_x(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x} h + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x'} h'\right) dt = 0,$$

za sve $h \in C^1[a, b]$. Na osnovu Teoreme 4.14, ovo je potreban uslov da je kriva x ekstremala funkcionala $\int_a^b (f - \lambda g)dt$, te i da zadovoljava Ojler-Lagranžovu jednačinu (4.16). □

Zaključak. Izoperimetrijski zadatak se rešava na sledeći način. Iz jednačine (4.16) određuje se opšte rešenje, koje će zavisiti od parametra λ i dve konstante. Te tri veličine se zatim određuju iz uslova $x(a) = A$, $x(b) = B$ i $K(x) = k_0$.

Direktno uopštenje navedenih razmatranja primenjuje se na slučaj kada J zavisi od više funkcija i ograničenja. Naime, za problem

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b f(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n')dt, \tag{4.17}$$

pri uslovima

$$x_i(a) = A_i, \quad x_i(b) = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{i} \tag{4.18}$$

$$\int_a^b g_j(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n')dt = l_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \tag{4.19}$$

potreban uslov ekstrema je dat sistemom od n jednačina

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}(f - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j)\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Zatim se $2n$ proizvoljnih konstanti i k brojeva $\lambda_1, \dots \lambda_k$ određuju iz graničnih uslova (4.18) i ograničenja (4.19).

4.6 Dodatni primeri zadataka s uslovnim ekstremima

Osim ograničenja u vidu integrala, u praksi se često sreću ograničenja u vidu diferencijalnih jednačina kao i ograničenja u vidu algebarskih jednačina. Teorema o egzistenciji Lagranžovih množitelja za zadatak s ograničenjima u vidu diferencijalnih jednačina je u izvesnom smislu najopštija, jer je modifikacijom njenog dokaza moguće dokazati odgovarajuće teoreme s algebarskim ograničenjima, kao i s ograničenjima u vidu integrala. Sa druge strane, dokaz teoreme za poseban slučaj izoperimetrijskog zadatka je najjednostavniji za izlaganje i praćenje, pa je izabran za detaljnije razmatranje.

Za razliku od izoperimetrijskog zadatka, gde broj ograničenja ne zavisi od broja nepoznatih funkcija, kod zadatka uslovnog ekstrema s algebarskim ograničenjima, kao i s ograničenjima u vidu diferencijalnih jednačina, broj ograničenja mora biti manji od broja nepoznatih funkcija.

Posmatra se sledeći zadatak uslovnog ekstrema:

$$\int_a^b f(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')dt \qquad \mathbf{x} = (x_1, \dots x_n) \tag{4.20}$$

$$\mathbf{x}(a) = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{x}(b) = \mathbf{B} \tag{4.21}$$

$$g_j(t, \mathbf{x}) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots k, \tag{4.22}$$

gde je $k < n$. Dakle, posmatraju se samo one krive koje ispunjavaju uslov (4.21) i leže na mnogostrukosti dimenzije $n - k$, koja je definisana *algebarskim jednačinama* (4.22). Zadaci ovog tipa nazivaju se Lagranžovi zadaci. Naredna teorema precizira rešavanje jednog posebnog slučaja.

Teorema 4.21. *Ako je kriva data sa*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b] \tag{4.23}$$

tačka minimuma ili maksimuma funkcionele

$$J(x, y) = \int_a^b f(t, x, x', y, y')dt \tag{4.24}$$

u klasi krivih koje pripadaju površi $g(t, x, y) = 0$, pri čemu ni u jednoj tački na krivoj parcijalni izvodi g_x i g_y nisu istovremeno jednaki nuli, onda postoji funkcija $\lambda(t)$ takva da je kriva (4.23) *ekstremala funkcionele*

$$\int_a^b (f - \lambda g)dt, \tag{4.25}$$

to jest, važi

$$f_x - \lambda g_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0, \quad f_y - \lambda g_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0. \tag{4.26}$$

Napomena. Lagranžov zadatak se, u izvesnom smislu, može posmatrati kao granični slučaj izoperimetrijskog zadatka. Pretpostavlja se da je u Lagranžovom zadatku uslov $g(t,x,y)=0$ ispunjen samo u nekoj fiksiranoj tački t_0. Tada je g funkcionela od x i y, pa opšti uslov $g(t,x,y)=0$ može da se posmatra kao skup beskonačno mnogo uslova tipa funkcionele. Lagranžovi množitelji izoperimetrijskog zadatka u tom graničnom slučaju postaju funkcija od $t \in (a,b)$, videti zadatak 4.15.

Posmatra se sledeći zadatak uslovnog ekstrema, gde su uslovi dati u vidu *diferencijalnih jednačina*:

$$\int_a^b f(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')dt \qquad \mathbf{x}=(x_1,\ldots x_n) \tag{4.27}$$

$$\mathbf{x}(a)=\mathbf{A}, \qquad \mathbf{x}(b)=\mathbf{B} \tag{4.28}$$

$$g_j(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')=0, \qquad j=1,2,\ldots k, \tag{4.29}$$

gde je $k<n$. Smatra se da su jednačine (4.28) takve da su ispunjeni uslovi za primenu teoreme o implicitnim funkcijama.

Pošto je na n nepoznatih funkcija x_j, $j=1,\ldots,n$ nametnuto k ograničenja, to će $n-k$ od tih funkcija biti nezavisne, a preostalih k će biti određeno iz diferencijalnih jednačina (4.29). Slično kao i u prethodnom paragrafu, odgovarajuća teorema kaže da postoji k funkcija $\lambda_j(t)$, $j=1,\ldots,k$, $t\in[a,b]$, takvih da je kriva $\mathbf{x}(t)$, $t\in[a,b]$, ekstremala funkcionele

$$\int_a^b \Big(f(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')-\sum_{j=1}^k \lambda_j(t)g_j(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')\Big)dt.$$

Dokaz je analogan dokazu opisanom u prethodnom paragrafu, a ekstremala se dobija rešavanjem sistema Ojlerovih jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^k \lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j'}-\sum_{j=1}^k \lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial x_j'}\right)=0, \quad j=1,\ldots,n. \tag{4.30}$$

Ove jednačine obrazuju sistem od $n+k$ jednačina za određivanje $n+k$ nepoznatih

$$x_1(t),\ldots,x_n(t),\lambda_1(t),\ldots,\lambda_k(t), \quad t\in[a,b].$$

Uz oznaku

$$\Phi = \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \lambda) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) g_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$

$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t)),\ t \in [a, b]$ sistem (4.30) može da se napiše u obliku

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j'} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

4.7 Zadaci za vežbu

Zadatak 4.1. Pokazati da je funkcionela

$$J(x) = \int_a^b \Big(f(t)x(t) + g(t)x'(t)\Big)dt, \quad x \in C^1[a, b]$$

neprekidna na $C^1[a, b]$, ako su f i g date apsolutno integrabilne funkcije nad $[a, b]$.

Rešenje. Neka je $x \in C^1[a, b]$ proizvoljno. Tada je:

$$\begin{aligned} |J(x)| &= \Big|\int_a^b \Big(f(t)x(t) + g(t)x'(t)\Big)dt\Big| \le \int_a^b \Big|f(t)x(t) + g(t)x'(t)\Big|dt \\ &\le \int_a^b \Big(|f(t)||x(t)| + |g(t)||x'(t)|\Big)dt \\ &\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \int_a^b |f(t)|dt + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \int_a^b |g(t)|dt \\ &\le \|x\|_1 \int_a^b |f(t)|dt + \|x\|_1 \int_a^b |g(t)|dt \\ &= \|x\|_1 \Big(\int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)dt\Big). \end{aligned}$$

Ako se izabere da je $M = \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)dt > 0$ dobija se ograničenost funkcionele J. Pošto je J i linearna funkcionela zaključak je da je neprekidna nad $C^1[a, b]$. $\square$

Zadatak 4.2. (Najkraća putanja) Odrediti u ravni krivu minimalne dužine, čiji su krajevi zadate tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

Rešenje. Primer 4.1 pokazuje da se posmatrani problem jezikom varijacionog računa formuliše na sledeći način: Odrediti funkciju $y \in C^1[x_1, x_2]$, koja minimizira integral

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

tako da je $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$. U ovom slučaju, Ojler-Lagranžova diferencijalna jednačina se svodi na

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = 0,$$

odnosno $\dfrac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = const$, odakle je $y'(x) = const$, pa je rešenje oblika $y(x) = Ax + B$, pri čemu se konstante A i B određuju iz početnih uslova, čime se dobija da je y dato sa:

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2]. \qquad \square$$

Zadatak 4.3. (Brahistohrona) Date su tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u vertikalnoj ravni. Odrediti glatku krivu po kojoj će materijalna tačka stići iz tačke A u tačku B za najkraće vreme. Kretanje se odvija pod dejstvom sile teže, bez trenja i bez početne brzine.

Rešenje. Primer 4.2 pokazuje da je traženo rešenje funkcija $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, koja minimizira integral

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx.$$

tako da je $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$. Može da se primeti, da konstanta $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ne utiče na određivanje ekstremale y, te će se u nastavku posmatrati podintegralna funkcija $f(x, y, y') = \sqrt{\dfrac{1 + y'^2(x)}{y(x)}}$.

Odgovarajuća Ojler-Lagranžova jednačina je:

$$-\frac{1+y'^2(x)+2y''(x)y(x)}{2y^{3/2}(x)(1+y'^2(x))^{3/2}}=0.$$

Odavde sledi da je $1+y'^2(x)+2y(x)y''(x)=0$. Snižavanjem reda diferencijalne jednačine, odnosno uvođenjem smene $w(y)=y'$, odakle je $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dw}{dy}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dw}{dy}w$, dobija se

$$\frac{2w}{1+w^2}\,dw=-\frac{dy}{y}.$$

Nakon integracije gornje jednakosti sledi $\ln(1+w^2)=\ln\dfrac{c}{y}$, odnosno vraćanjem smene $w=y'$ dobija se $y(1+y'^2)=2c=const$. Uvođenjem parametra t (odnosno, $x=x(t)$ i $y=y(t)$) i smene $y'(t)=\mathrm{ctg}\dfrac{t}{2}$ iz poslednje jednačine dobija se da je:

$$y(t)=2c\sin^2\frac{t}{2}=c(1-\cos t).$$

Iz formule za izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=y',$$

dobija se da je $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{y'}=\dfrac{c\sin t}{\mathrm{ctg}\frac{t}{2}}=2c\sin^2\dfrac{t}{2}=c(1-\cos t)$, što nakon integracije po t daje rešenje

$$x(t)=c(t-\sin t)+d$$

$$y(t)=c(1-\cos t),$$

pri čemu se konstante c i d određuju iz zadatih početnih uslova.

Napomena. Ako se pretpostavi da je početna tačka A u koordinatnom početku, lako se dobija da je konstanta $d=0$. Konstanta c se određuje iz uslova da kriva, brahistohrona prolazi kroz tačku $B(x_2, y_2)$. Takođe, može se pokazati da ako je $0 < x_2 < 2c\pi$ onda je dobijeno rešenje jaki minimum funkcionele J (za više informacija videti dovoljne uslove za ekstrem funkcionele, na primer, u [9]). $\square$

Zadatak 4.4. Odrediti tačke ekstrema funkcionele

$$J(x) = \int_0^1 (x'^2 + 12tx)\, dt,$$

koja zadovoljava uslove $x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

Rešenje. Ojlerova jednačina svodi se na

$$\begin{aligned} 12t - 2x'' &= 0, \\ x'' &= 6t, \\ x' &= 3t^2 + c_1, \\ x &= t^3 + c_1 t + c_2. \end{aligned}$$

Iz graničnih uslova, dobija se ekstremala $x(t) = t^3,\ t \in [0, 1]$. Proverava se da li je reč o ekstremu.

Neka je $h \in C^1[0, 1]$ i $h(0) = h(1) = 0$.

$$\begin{aligned} J(t^3 + h) - J(t^3) &= \int_0^1 \big((3t^2 + h')^2 + 12t(t^3 + h)\big)\, dt \\ &- \int_0^1 \big((3t^2)^2 + 12t^4\big)\, dt \\ &= \int_0^1 \big(6t^2 h' + h'^2 + 12th\big)\, dt. \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom prvog sabirka podintegralne funkcije i uvršćavanjem graničnih uslova za funkciju h dobija se da je

$$J(t^3 + h) - J(t^3) = \int_0^1 h'^2 dt \geq 0,$$

pa je $x(t) = t^3,\ t \in [0, 1]$ globalni ekstrem u slabom smislu. $\square$

Zadatak 4.5. Odrediti tačke ekstrema funkcije $J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2)dt$, koja zadovoljava uslove $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Rešenje. Ojlerova diferencijalna jednačina za funkcionelu J je

$$\begin{aligned} -2x - 2x'' &= 0 \\ x'' + x &= 0 \end{aligned}$$

i njeno rešenje je $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$. Kada se uključe granični uslovi $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1$, dobija se kandidat za ekstrem $x(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$.

Neka je $h \in C^1[0, \pi/2]$ i $h(0) = h(\pi/2) = 0$. Primenom parcijalne integracije i graničnih uslova za funkciju h dobija se da je:

$$\begin{aligned} J(\sin t + h(t)) - J(\sin t) &= \int_{\pi/2}^{1} ((\cos t + h'(t))^2 - (\sin t + h(t))^2)dt \\ &- \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (h'^2(t) - h^2(t))dt. \end{aligned}$$

Može se pokazati da je poslednji integral pozitivan za sve funkcije $h \in C^1[0, \pi/2]$, te je ekstremala x slab globalni minimum funkcionele J.

Napomena. Neka je data funkcionela $I(h) = \int_0^a (h'^2(t) - h^2(t))dt$, uz uslov $h(0) = h(a) = 0$. Opšte rešenje $h(t) = K \sin t,\ t \in [0, a]$ zadovoljava *Jakobijevu jednačinu*, ako je $a < \pi$. Dodatno, zadovoljen je i dovoljan uslov, $\frac{\partial(h'^2 - h^2)}{\partial h'} = 2 \geq 0$, za minimum. Ako je $a = \pi/2$, tada je $h(t) = 0,\ t \in [0, \pi/2]$ minimum funkcionele I, te za sve $h \in C^1[0, \pi/2]$ važi $I(h) \geq I(0) = 0$. Dakle, u prethodnom zadatku ekstremala x je slab globalni minimum funkcionele J. Nasuprot ovome, pogledati Primer 4.18 u kojem je $a = 3\pi/2 > \pi$. Za detaljnije informacije o potrebnim i dovoljnim uslovima za postojanje ekstrema funkcionele I čitalac se upućuje na [9] i [12]. $\square$

Zadatak 4.6. Odrediti tačke ekstrema integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2 - xy)\, dx$, uz uslove $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Rešenje. Ojlerova jednačina u ovom zadatku je:

$$y'' + y = -\frac{1}{2}x.$$

Najpre se rešava homogena jednačina $y'' + y = 0$:

$$\begin{aligned} r^2 + 1 &= 0, \\ r_{1,2} &= \pm i, \\ y_h(x) &= c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad x \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

Da bi se rešila nehomogena jednačina, koristi se pogađačka metoda. Kada se pretpostavi da je partikularno rešenje oblika $y_p = Ax + B$, dobija se $y_p = -\frac{1}{2}x$ i

$$y(x) = -\frac{1}{2}x + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad x \in [0, \pi/2].$$

Konstante c_1 i c_2 određuju se iz graničnih uslova, pa je konačno

$$y(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \sin x, \quad x \in [0, \pi/2]\,.$$

Može se pokazati da je dobijena ekstremala y tačka minimuma posmatrane integralne funkcionele J. Zaista, za proizvoljno $h \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ takvo da je $h(0) = h(\frac{\pi}{2}) = 0$ posle parcijalne integracije dobija se da je

$$J(y + h) - J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h'^2(x) - h^2(x))dx,$$

što je pozitivno za sve funkcije $h \in C^1[0, \pi/2]$, te je y slab globalni minimum funkcionele J (videti Napomenu uz zadatak 4.5). $\square$

Zadatak 4.7. Odrediti tačke ekstrema funkcionele

$$\int_0^1 \left(y^2 + y'^2 + 2ye^x\right)\, dx,$$

uz uslove $y(0) = 0,\ y(1) = \dfrac{e}{2}$.

Rešenje. Neka je $f(x, y, y') = y^2 + y'^2 + 2ye^x$. Potreban uslov za ekstrem dat je sa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} &= 0, \\ 2y + 2e^x - 2y'' &= 0, \\ y'' - y &= e^x. \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$, njena rešenja su 1 i -1, pa je

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Nehomogeni deo u jednačini je e^x. Pošto 1 jeste koren karakteristične jednačine, partikularno rešenje je oblika $y_p = Ae^x x$. Kada se zameni u polaznu jednačinu, koristeći

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^x(x + 1), \\ y_p'' &= Ae^x(x + 2), \end{aligned}$$

dobija se:

$$Ae^x(x + 2) - Ae^x x = e^x.$$

Odavde se zaključuje da je $A = \frac{1}{2}$ i $y_p = \frac{1}{2}e^x x,\ x \in [0, 1]$. Iz graničnih uslova dobija se $c_1 = c_2 = 0$, pa je

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x x, \quad x \in [0, 1].$$

Dobijena ekstemala je tačka globalnog minimuma funkcionele J u slabom smislu. Naime, za proizvoljno $h \in C^1[0,1]$ takvo da je $h(0) = h(1) = 0$, nakon parcijalne integracije, sledi da je

$$J(y+h) - J(y) = \int_0^1 (h^2(t) + h'^2(t))dt \geq 0. \qquad \square$$

Zadatak 4.8. Odrediti tačke ekstrema funkcionele

$$J(y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx,$$

uz uslove $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ z(0) = 0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

Rešenje. U slučaju kada postoji više zavisnih promenljivih, formira se sistem koji čine Ojlerove jednačine za svaku od njih:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial z'} &= 0, \quad \text{tj.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z - 2y'' &= 0 \\ 2y - 2z'' &= 0 \end{aligned}$$

Pošto je $z = y''$, sistem se svodi na diferencijalnu jednačinu četvrtog reda:

$$z^{(4)} - z = 0.$$

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x, \quad x \in [0, \pi/2],$$

pa je

$$y(x) = z''(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x, \quad x \in [0, \pi/2].$$

Iz graničnih uslova dobija se sistem

$$\begin{array}{rrrrl} c_1 & +c_2 & +c_3 & & =0 \\ e^{\frac{\pi}{2}}c_1 & +e^{-\frac{\pi}{2}}c_2 & & +c_4 & =-1 \\ c_1 & +c_2 & -c_3 & & =0 \\ e^{\frac{\pi}{2}}c_1 & +e^{-\frac{\pi}{2}}c_2 & & -c_4 & =1, \end{array}$$

čije je rešenje $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = -1$. Konačno, ekstremale su

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin x, \\ z(x) &= -\sin x, \quad x \in [0, \pi/2]\,. \end{aligned}$$

Dobijena ekstremala je tačka minimuma funkcionele J. Za proizvoljne $h, k \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ takve da je $h(0) = h(\frac{\pi}{2}) = k(0) = k(\frac{\pi}{2}) = 0$ dobija se da je:

$$J(y+h, z+k) - J(y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h'^2(x) + k'^2(x) + 2h(x)k(x))dx,$$

što je, može se pokazati, pozitivno nezavisno od izbora funkcija h i k. Na primer, za $h = -k$ dobija se integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(h'^2(x) - h^2(x))dx$ za koji je već pokazano da je pozitivan (videti Napomenu uz zadatak 4.5). □

Zadatak 4.9. (Didonin problem) Od svih zatvorenih krivih u ravni bez samopresečnih tačaka i zadatog obima odrediti onu koja omeđuje najveću površinu.

Rešenje. Prvo se primećuje da ako tačke A i B polove obim, one polove i površinu. U suprotnom, ako na mesto one polovine krive koja omeđuje manju površinu preslikamo, simetrično u odnosu na duž AB, onaj deo krive koji omeđuje veću površinu, dobija se kriva iste dužine, koja omeđuje veću ukupnu površinu. Dakle, u nastavku će biti određena jednačina polovine tražene krive.

Dalje, treba pretpostaviti da je koordinatni sistem postavljen tako da je $A(0,0)$ a $B(b,0)$, za neko $b > 0$ i da se tražena kriva (odnosno njena polovina) nalazi iznad $x-$ose. Jasno je da posmatrana polovina krive ne može da seče $x-$osu, jer bi nakon preslikavanja u odnosu na $x-$osu to postala tačka samopreseka.

Zadatak se sada svodi na određivanje krive $y = y(x),\ x \in [0, b]$, koja je takva da je $y(x) \geq 0,\ x \in [0, b]$ i da je površna između nje i $x-$ose maksimalna, odnosno da je ona maksimum funkcionele

$$\int_0^b y(x)dx$$

i to tako da joj je dužina zadati broj l, to jest,

$$l = \int_0^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

i da zadovoljava granične uslove $y(0) = 0$ i $y(b) = 0$. Konstruiše se funkcionela:

$$J(x, y, y'; \lambda) = \int_0^b \Big(y(x) + \lambda\sqrt{1 + (y'(x))^2}\Big)dx.$$

Odgovarajuća Ojlerova jednačina je

$$\begin{aligned} 1 - \lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\right) &= 0 \\ \lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Poslednju jednačinu integralimo po promenljivoj x i dobija se:

$$\lambda\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\right) = x - c_1.$$

Kvadriranjem poslednje jednačine i rešavanjem dobijene algebarske jednačine po promenljivoj y' dobija se:

$$y'(x) = \frac{x - c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}}.$$

Konačno, nakon integracije poslednje jednakosti po promenljivoj x sledi:

$$y(x) = \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2,$$

odnosno,

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2.$$

Dalje, može da se pokaže da dobijena kriva ispunjava i specijalni oblik *uslova transverzalnosti* (za detalje videti Poglavlje 4.4.2), ako je $y'(0) = y'(b) = 0$, odnosno ako u tačkama $x = 0$ i $x = b$ seče $x-$osu pod pravim uglom. Dakle, rešenje je gornja polukružnica čija je dužina l, te joj je poluprečnik $\frac{l}{\pi}$. Odavde se dobija i da je $b = \frac{2l}{\pi}$, a tražene konstante $c_1 = \frac{l}{\pi}$ i $c_2 = 0$. Konačno, rešenje je

$$\left(x - \frac{l}{\pi}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2.$$

Napomena. Primećuje se da je u uvodu Poglavlja 4.5, Izoperimetrijski zadatak, Didonin problem modelovan funkcionelom koja računa površinu unutar zatvorene krive $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$ upotrebom Grinove teoreme,

$$J(x, y) = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt \to \max,$$

uz uslov o dužini same krive $\displaystyle\int_0^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = l$ i pretpostavkom da je kriva zatvorena, odnosno da je $(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$. U prethodnom zadatku je malo pojednostavljena funkcionela J, radi jednostavnijeg rešavanja Ojlerove diferencijalne jednačine, ali se zato moralo baviti graničnim uslovima, odnosno ponašanjem rešenja u njegovim krajnjim tačkama. $\square$

Zadatak 4.10. Odrediti ekstrem funkcionele $J(x) = \displaystyle\int_1^2 tx^2(t)dt$, uz uslov $\displaystyle\int_1^2 x(t)dt = \ln 2$.

Rešenje. Traži se prvo ekstremala funkcionele $\tilde{J}$ date sa

$$\tilde{J}(x) = \int_1^2 (tx^2(t) + \lambda x(t))dt.$$

Podintegralna funkcija je označena sa $F(t, x, x'; \lambda) = tx^2 + \lambda x$. Odgovarajuća Ojlerova jednačina je $2tx(t) + \lambda = 0$, odakle se direktno dobija da je $x(t) = -\frac{\lambda}{2t}$, $t \in [1, 2]$. Dobijena ekstremala funkcionele $\tilde{J}$ jeste i ekstremala od J. Kada se opšti oblik ekstremale x uvrsti u uslov zadatka, dobija se:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(-\frac{\lambda}{2t}\right)dt = -\frac{\lambda}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} &= -\frac{\lambda}{2}\ln 2, \\ -\frac{\lambda}{2}\ln 2 &= \ln 2, \\ \Rightarrow \lambda &= -2. \end{aligned}$$

Dakle, kandidat za ekstrem je $x \in C[1, 2]$, dato sa $x(t) = \dfrac{1}{t}$, $t \in [1, 2]$.

Proverava se da li je dobijeno $x \in C[1, 2]$ tačka ekstrema funkcionele J. Neka je sada $h \in C[1, 2]$ takvo da je $\displaystyle\int_1^2 h(t)dt = 0$. Formira se priraštaj funkcije J i dobija se:

$$\begin{aligned} J\left(\frac{1}{t} + h\right) - J\left(\frac{1}{t}\right) &= \int_1^2 t\left(\frac{1}{t} + h(t)\right)^2 dt - \int_1^2 \frac{1}{t}dt \\ &= 2\int_1^2 h(t)dt + \int_1^2 th^2(t)dt = \int_1^2 th^2(t)dt \geq 0, \end{aligned}$$

jer je podintegralna funkcija pozitivna na intervalu integracije. Dakle, funkcija $x(t) = \dfrac{1}{t}$, $t \in [1, 2]$ je (globalni) uslovni minimum funkcionele J u jakom smislu. $\square$

Zadatak 4.11. Odrediti ekstremnu vrednost integrala $\displaystyle\int_0^\pi x'^2(t)dt$, uz uslove $x(0) = 0$, $x(\pi) = 1$ i $\displaystyle\int_0^\pi x(t)\sin t dt = 0$.

Rešenje. Posmatra se integral

$$\int_0^\pi \big(x'^2(t) + \lambda x(t)\sin t\big)\, dt.$$

Za $f(t,x,x';\lambda) = x'^2 + \lambda x \sin t$, iz potrebnog uslova za ekstrem dobija se da je ekstremala data sa:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} &= 0,\\
\lambda \sin t - \frac{d}{dt}(2x') &= 0,\\
\frac{d}{dt}(2x') &= \lambda \sin t,\\
2x' &= -\lambda \cos t + c_1,\\
x(t) &= -\frac{\lambda}{2}\sin t + \frac{c_1}{2}t + c_2, \quad t \in [0,\pi].
\end{aligned}$$

Iz graničnih uslova $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$, određuje se $c_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $c_2 = 0$, pa je

$$x(t) = -\frac{\lambda}{2}\sin t + \frac{1}{\pi}t, \quad t \in [0,\pi].$$

Ostaje još da se odredi vrednost λ. Koristi se uslov $\displaystyle\int_0^\pi x(t)\sin t dt = 0$. Pošto je

$$\int_0^\pi \left(-\frac{\lambda}{2}\sin t + \frac{1}{\pi}t\right)\sin t dt = 1 - \frac{\lambda\pi}{4},$$

biće $\lambda = \dfrac{4}{\pi}$ i konačno, sledi da je ekstremala $x(t) = \dfrac{1}{\pi}t - \dfrac{2}{\pi}\sin t,\ t \in [0,\pi]$.

Proverava se da li je dobijena ekstremala i ekstrem funkcionele J. Neka je $h \in C^1[0,\pi]$, takva da je $h(0) = h(\pi) = 0$ i da je $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\sin t dt = 0$.

Tada je

$$\begin{aligned} J(x+h)-J(h) &= \int_0^\pi \Big[2\Big(\frac{1}{\pi}t-\frac{2}{\pi}\sin t\Big)' h'(t)+h'^2(t)\Big]dt \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{\pi}h'(t)dt-\int_0^\pi \frac{4}{\pi}h'(t)\cos t dt+\int_0^\pi h'^2(t). \end{aligned}$$

Koristeći da je $h(0)=h(\pi)=0$ za prvi integral dobija se da je

$$\int_0^\pi \frac{2}{\pi}h'(t)dt=\frac{2}{\pi}h(t)\Big|_0^\pi=0.$$

Drugi integral se takođe anulira. Zaista, koristeći parcijalnu integraciju i osobine funkcije h dobija se:

$$\int_0^\pi h'(t)\cos t dt=h(t)\cos t\Big|_0^\pi+\int_0^\pi h(t)\sin t dt=0.$$

Konačno, pošto važi da je za sve $h\in C^1[0,\pi]$, koje zadovoljavaju odgovarajuće uslove,

$$J(x+h)-J(x)=\int_0^\pi h'^2(t)dt\geq 0$$

dobijena ekstremala $x\in C^1[0,\pi]$ je (globalni) uslovni minimum funkcionele J u slabom smislu. $\square$

Zadatak 4.12. Odrediti ekstrem funkcionele $\displaystyle\int_0^1 \big(x'^2(t)+x^2(t)\big)\,dt$ za granične uslove $x(0)=0,\ x(1)=\dfrac{1}{e}$ i uz uslov $\displaystyle\int_0^1 x(t)e^{-t}dt=\frac{1-3e^{-2}}{4}$.

Rešenje. Za $F(t,x,x';\lambda)=x'^2+x^2+\lambda xe^{-t}$ formira se odgovarajuća Ojlerova jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}=0,$$

$$2x+\lambda e^{-t}-2x''=0,$$

$$x''-x=\frac{\lambda}{2}e^{-t}.$$

Rešenje poslednje diferencijalne jednačine je:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{\lambda}{4} e^{-t} t, \quad t \in [0, 1]$$

a ono koje zadovoljava granične uslove glasi:

$$x(t) = \frac{4+\lambda}{4(e^2-1)} e^t + \frac{4+\lambda}{4(e^2-1)} e^{-t} - \frac{\lambda}{4} e^{-t} t, \quad t \in [0, 1].$$

Iz uslova $\int_0^1 x(t) e^{-t} dt = \frac{1 - 3e^{-2}}{4}$, određuje se $\lambda = -4$, i konačno ekstremala je:

$$x(t) = t e^{-t}, \quad t \in [0, 1].$$

Dalje, neka je $h \in C^1[0, 1]$ takva da je $h(0) = h(1) = 0$ i $\int_0^\pi h(t) e^{-t} = 0$. Tada, primenom parcijalne integracije i osobina funkcije h dobija se

$$\begin{aligned} J(x+h) - J(x) &= \int_0^1 \Big(2(e^{-t} - te^{-t})h'(t) + h'^2(t) + 2te^{-t}h(t) + h^2(t)\Big) dt \\ &= \int_0^1 (h'^2(t) + h^2(t)) dt \geq 0, \end{aligned}$$

te je dobijena ekstremala $x \in C^1[0, 1]$ (globalni) uslovni minimum funkcionele J u slabom smislu. □

Zadatak 4.13. Odrediti ekstremalu integrala $\int_0^\pi x(t) \sin t \ dt$, uz uslov $\int_0^\pi x'^2(t) dt = \frac{3\pi}{2}$ i granične uslove $x(0) = 0, \ x(\pi) = \pi$.

Rešenje. Rešavajući kao i dosad dobijaju se dve ekstremale funkcionele J uz date uslove:

$$x_1(t) = -\sin t + t; \quad x_2(t) = \sin t + t, \quad t \in [0, \pi].$$

Uzmima se proizvoljna funkcija $h \in C^1[0,\pi]$ tako da je $h(0) = h(\pi) = 0$ i da je $\int_0^\pi (x_i + h)'^2 = \frac{3\pi}{2}$, $i = 1, 2$. Za ekstremalu x_1 integralni uslov se svodi na

$$\int_0^\pi 2h'(t)\cos t dt = \int_0^\pi h'^2(t)dt \geq 0,$$

odnosno, primenom parcijalne integracije

$$\int_0^\pi h(t)\sin t \geq 0.$$

Sada na osnovu priraštaja funkcionele J

$$J(x_1 + h) - J(x_1) = \int_0^\pi h(t)\sin t dt \geq 0,$$

sledi da je $x_1 \in C^1[0,\pi]$ (globalni) uslovni minimum u slabom smislu. Slično se za ekstremalu $x_2 \in C^1[0,\pi]$ pokazuje da je (globalni) uslovni maksimum u slabom smislu. □

Zadatak 4.14. Odrediti ekstremale integrala

$$\int_0^1 \big(y'^2(x) + z'^2(x) - 4xz'(x) - 4z(x)\big)\,dx,$$
$$y(0) = z(0) = 0,$$
$$y(1) = z(1) = 1,$$

uz uslov $\int_0^1 \big(y'^2(x) - xy'(x) - z'^2(x)\big)\,dx = 2.$

Rešenje. Koristi se oznaka:

$$f(x, y, y', z, z') = y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z,$$
$$g(x, y, y', z, z') = y'^2 - xy' - z'^2.$$

Posmatra se integral: $\displaystyle\int_0^1 F dx = \int_0^1 (f + \lambda g) dx$, gde je

$$F(x, y, y', z, z'; \lambda) = y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda\left(y'^2 - xy' - z'^2\right).$$

Pravi se sistem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} &= 0, \text{ tj.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(2y' + 2\lambda y' - \lambda x\right) &= 0, \\ -4 - \frac{d}{dx}\left(2z' - 4x - 2\lambda z'\right) &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine dobija se veza

$$2y'(x)(1 + \lambda) - \lambda x = c_1, \tag{4.31}$$

a iz druge jednačine

$$z''(x)(\lambda - 1) = 0, \quad \lambda \neq 1,$$

čije je rešenje $z(x) = c_2 x + c_3,\ x \in [0, 1]$. Iz (4.31), dobija se

$$y'(x) = \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}x + \frac{c_1}{2(1+\lambda)}, \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \neq -1,$$

pa je

$$y(x) = \frac{\lambda}{4(1+\lambda)}x^2 + \frac{c_1}{2(1+\lambda)}x + c_4, \quad x \in [0, 1].$$

Iz graničnih uslova za y i z određuju se konstante

$$c_1 = 2 + \frac{3\lambda}{2}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0.$$

Sada sledi:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\lambda}{4(1+\lambda)}x^2 + \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}x, \\ z(x) &= x, \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Na kraju biće iskorišćen i uslov $\displaystyle\int_0^1 \big(y'^2(x) - xy'(x) - z'^2(x)\big)\,dx = 2$ da bi se odredilo λ.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \big(y'^2(x) - xy'(x) - z'^2(x)\big)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}x + \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}\right)^2 - x\left(\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}x + \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}\right) - 1\right) dx \\ &= \left(\frac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2} - \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}\right)\int_0^1 x^2dx - \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)^2}\int_0^1 xdx \\ &+ \left(\left(\frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}\right)^2 - 1\right)\int_0^1 dx \\ &= \frac{\lambda^2 - 2\lambda(1+\lambda)}{12(1+\lambda)^2} - \frac{4+3\lambda}{8(1+\lambda)^2} + \frac{(4+3\lambda)^2 - 16(1+\lambda)^2}{16(1+\lambda)^2} = 2. \end{aligned}$$

Posle sređivanja, dobija se kvadratna jednačina $\lambda^2 + 2\lambda + \dfrac{120}{121} = 0$, čija su rešenja

$$\lambda_1 = -\frac{12}{11}, \quad \lambda_2 = -\frac{10}{11}.$$

Dakle, dobijene su dve ekstremale:

$$\begin{aligned} (y_1(x), z(x)) &= (3x^2 - 2x, x), \quad x \in [0,1] \\ (y_2(x), z(x)) &= (-\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x, x), \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Proverava se da li su dobijene ekstremale i ekstremne vrednosti posmatrane funkcionele J. Naime, uzmaju se proizvoljne $h, k \in C^1[0,1]$, takve da je $h(0) = h(1) = k(0) = k(1) = 0$ i da je

$$\int_0^1 \left((y_i' + h')^2 - x(y_i' + h') - (z' + k')^2\right) dx = 2.$$

Integralni uslov se dalje svodi na

$$\int_0^1 \left(2y_i'(x)h'(x) + h'^2(x)\right) dx = \int_0^1 \left(xh'(x) + k'^2(x)\right) dx.$$

Koristeći parcijalnu integraciju i granične i integralne uslove za funkcije h i k, dobija se da je prirastaj dat sa

$$\begin{aligned} J(y_i + h, z + k) - J(y_i, z) &= \int_0^1 \left(2y_i'(x)h'(x) + h'^2(x) + k'^2(x)\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(xh'(x) + 2k'^2(x)\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-h(x) + 2k'^2(x)\right) dx. \end{aligned}$$

Može se pokazati da kriva $(y_1(x), z(x)),\ x \in [0,1]$ nije ekstremna vrednost funkcionele J, dok $(y_2(x), z(x)),\ x \in [0,1]$ jeste ekstremna vrednost, no ovo istraživanje prevazilazi okvire ovog udžbenika. □

Zadatak 4.15. Odrediti krivu na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ minimalne dužine, koja spaja tačke $S(x_1, y_1, z_1)$ i $T(x_2, y_2, z_2)$ sa date sfere.

Rešenje. Dužina luka krive $k(x) = (x, y(x), z(x)),\ x \in [x_1, x_2]$ u prostoru koja spaja tačke S i T data je formulom

$$J(k) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx,$$

dok je uslov da tačke krive f pripadaju sferi dat jednačinom $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Granični uslovi su dati sa

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ z(x_1) = z_1 \text{ i } z(x_2) = z_2.$$

Formira se funkcionela $L = \int_{x_1}^{x_2} F dx$, gde je

$$F(x, y, z, y', z'; \lambda) = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda(x)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2).$$

Odgovarajuće Ojlerove jednačine su date sa

$$-2\lambda y - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0 \quad \text{i} \quad -2\lambda z - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0.$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa z, a druga sa $-y$ i saberu se, dobija se:

$$z\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = y\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Označavajući sa $t = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$, dobija se

$$z\left(y''t + y'\frac{dt}{dx}\right) = y\left(z''t + z'\frac{dt}{dx}\right),$$

odnosno,

$$\frac{y''z - yz''}{y'z - yz'}dx = -\frac{dt}{t}.$$

Integraljenjem obe strane dobija se $\ln(y'z - yz') = \ln\frac{A}{t}$, odnosno

$$y'z - yz' = A\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Zbir kvadrata gornje jednakosti i kvadrata diferencijala uslova zadatka $-x = yy' + zz'$ jednak je

$$(y^2 + z^2)(y'^2 + z'^2) = x^2 + A^2(1 + y'^2 + z'^2).$$

Odavde se, uz upotrebu uslova $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$, dobija

$$1 + y'^2 + z'^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2 - A^2},$$

odnosno, $y'z - yz' = \dfrac{Ar}{\sqrt{r^2 - x^2 - A^2}}$ što, nakon deljenja sa $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$ daje

$$\frac{y'z - yz'}{y^2 + z^2} = \frac{Ar}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2 - A^2}}.$$

Integracije po x leve i desne strane jednakosti daju:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{z} + \operatorname{arctg} \frac{r\sqrt{r^2 - x^2 - A^2}}{Ax} = B,$$

odnosno, ako se iskoristi formula za tangens zbira

$$\frac{\frac{y}{z} + \frac{r\sqrt{r^2-x^2-A^2}}{Ax}}{1 - \frac{y}{z}\frac{r\sqrt{r^2-x^2-A^2}}{Ax}} = \operatorname{tg} B.$$

Odavde je

$$\frac{r\sqrt{r^2 - x^2 - A^2}}{Ax} = \frac{z \operatorname{tg} B - y}{y \operatorname{tg} B + z}.$$

Ako se obe strane jednakosti kvadriraju i svakoj doda 1, dobija se:

$$\frac{(r^2 - A^2)(r^2 - x^2)}{A^2 x^2} = \frac{(y^2 + z^2)(1 + \operatorname{tg}^2 B)}{(y \operatorname{tg} B + z)^2}.$$

Konačno, koristeći trigonometrijske formule i uslov zadatka $r^2 - x^2 = y^2 + z^2$ dobija se da rešenje $(y(x), z(x)),\ x \in [x_1, x_2]$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{Ax}{\sqrt{r^2 - A^2}} = y\ \sin B + z\ \cos B.$$

Ovo je jednačina ravni koja sadrži koordinatni početak, pa samim tim i centar sfere. Konstante A i B se izračunavaju iz uslova $y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ z(x_1) = z_1$ i $z(x_2) = z_2$, čime se obezbeđuje da dobijena ravan prolazi kroz tačke $S(x_1, y_1, z_1)$ i $T(x_2, y_2, z_2)$. Dakle, kriva na sferi koja spaja tačke S i T najmanje dužine je (manji) deo luka velikog kruga (krug čiji je centar centar sfere), koji prolazi kroz date tačke.

Napomena. Ovim zadatkom postojala namera da se ilustruje teorema o uslovnim ekstremima u slučaju kada je uslov dat u obliku algebarske jednačine. Međutim, zadatak uslovnog ekstrema ponekad može i jednostavnije da se reši uvršćavanjem jednačine uslova u funkcionelu koja se minimizira. Naime, korišćenjem sfernih koordinata:

$$(\rho, \phi, \theta),\ \rho \geq 0,\ \phi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi],$$

uslov da se tačke S i T nalaze na sferi, kao i da tražena kriva pripada sferi se svodi na jednačinu $\rho = r$. Tačke, dakle, imaju koordinate $S(r, \phi_1, \theta_1)$ i $T(r, \phi_2, \theta_2)$, a tražena kriva je oblika:

$$x = r \sin\theta \cos\phi,\ y = r \sin\theta \sin\phi,\ z = r\cos\theta,\ \phi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi].$$

Dalje, pošto je kriva od S do T funkcija jedne promenljive, može se pretpostaviti da je $\phi = \phi(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Konačno, problem se svodi na određivanje funkcije $\phi = \phi(\theta)$, tako da je kriva

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi(\theta) \\ y &= r \sin\theta \sin\phi(\theta) \\ z &= r\cos\theta, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2], \end{aligned}$$

minimalne dužine, odnosno određivanja minimuma funkcionele

$$J(\phi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta) + z'^2(\theta)}\, d\theta = r \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \phi'^2(\theta)\sin^2\theta}\, d\theta,$$

gde je $\phi(\theta_1) = \phi_1$ i $\phi(\theta_2) = \phi_2$. $\square$

Literatura

[1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное Управление*, Наука, Москва, 1979.

[2] В. М. Алексеев, Е. М. Галеев, В. М. Тихомиров, *Сборник задач по оптимизации*, Наука, Москва, 1984.

[3] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, New Jersey, 1957.

[4] R. Bellman, R. Kalaba, *Dynamical programming and Modern Control Theory*, Academic Press, New York and London, 1965.

[5] A. Bilimović, *Racionalna mehanika II*, Naučna knjiga, Beograd, 1951.

[6] J. Brinkuis, V. Tikhomirov, *Optimization: Insights and Applications*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2005.

[7] A. K. Dixit, *Optimization in Economic Theory*, Oxford University Press, 1990.

[8] Л. Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и варијационное исчисление,* Наука, Москва, 1965.

[9] S. Fempl, *Elementi varijacionog računa*, Građ. Knjiga, Beograd, 1965.

[10] Lj. Gajić, *Teorija optimizacije*, Novi Sad, 1988.

[11] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis,* Dover Publications Inc., 2003.

[12] И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, *Варијационное исчисление,* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.

[13] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalanu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1996.

[14] M. D. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1977.

[15] J. Jost, *Postmodern Analysis, third edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[16] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitetski udžbenik 73, Univerzitet u Novom Sadu, 1998.

[17] D. Laidler, S. Estrin, *Introduction to Microeconomics*, Philip Allan, 1989.

[18] S. M. Lee, L. J. Moore, B. W. Taylor III, *Management Science*, Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto, 1990.

[19] H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York, 1968.

[20] M. Petković, *Zanimljivi matematički problemi velikih matematičara,* Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

[21] Л. С. Понтрјагин, *Математическая теория оптимальныих процессов,* Наука, Москва, 1976.

[22] Đ. Popov, F. Stanković, *Osnovi ekonomije*, Službeni glasnik, Beograd, 2002.

[23] E. Silberberg, W. Suen, *The Structure of Economics, a Mathematical Analysis*, Irwin McGraw-Hill, 2001.

[24] D. R. Smith, *Variational Methods in Optimization*, Dover Publications Inc., 1998.

[25] R. Talman, *Geometric Mechanics,* Wiley-Vch Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2007.

[26] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Prirodno–matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2006.

[27] N. Teofanov, *Elementarna matematika 2, skripte sa predavanja*, https://personal.pmf.uns.ac.rs/nenad.teofanov/teaching/elementarna-matematika-2/

[28] Ф. П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач,* Наука, Москва, 1980.

[29] B. D. Vujanović, D. T. Spasić, *Metodi optimizacije*, Novi Sad, 1997.