[1] Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Vojnović

Uvod u napredne teme funkcionalne analize

Novi Sad, 2022.

Naziv udžbenika: Uvod u napredne teme funkcionalne analize
Autor: dr Ivana Vojnović, docent PMF–a u Novom Sadu
Rezenzenti: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor PMF–a u Novom Sadu
dr Nenad Teofanov, redovni profesor PMF–a u Novom Sadu
dr Ivan Ivec, docent Metalurškog fakulteta Univerziteta u Zagrebu
Izdavač: Prirodno–matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu
Za izdavača: prof. dr Milica Pavkov Hrvojević, dekan PMF–a u Novom Sadu

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, broj 0602-07-177/22-7 od 04.07.2022. godine, odobreno je štampanje i upotreba ovog udžbenika.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

517.98(075.8)

ВОЈНОВИЋ, Ивана, 1987-
Uvod u napredne teme funkcionalne analize [Elektronski izvor] / Ivana Vojnović. - Novi Sad: Prirodno–matematički fakultet, 2022

Način pristupa (URL):
https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/vojnovic_uvod_napredne_teme_funkcionalne_analize.pdf. - Opis zasnovan na stanju na dan 14.7.2022. – Nasl. sa naslovnog ekrana. – Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-483-2
a) Функционална анлиза
COBISS.SR-ID 70848265

Predgovor

Udžbenik je namenjen lakšem savladavanju gradiva predmeta Napredne teme funkcionalne analize. Predmet je izborni za studente master studija matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerziteta u Novom Sadu. Pored studenata udžbenik mogu da koriste i svi koji žele više da znaju o topološko-vektorskim prostorima i teoriji distribucija.

Materija je organizovana u dve celine. U prvom delu se bavimo pojmovima koji su nam potrebni da bismo u drugom delu mogli da definišemo prostor distribucija. Uvodimo topološko-vektorske prostore i bavimo se specijalnom klasom ovih prostora, lokalno-konveksnim prostorima. Pokazuje se da se lokalno-konveksni prostor može zadati preko familije semi-normi, ali da važi i obrat. Naime, ako je data neka lokalno-konveksna topologija, onda postoji familija semi-normi koja opisuje upravo datu topologiju.

Zatim dajemo karakterizaciju neprekidnih linearnih preslikavanja između dva prostora na kojima su date lokalno-konveksne topologije. Uvodimo i pojmove normabilnih i metrizablinih prostora, dajemo primere takvih prostora i navodimo njihove osnovne osobine.

U narednom poglavlju definišemo finalne topologije, prostor test funkcija snabdevamo finalnom topologijom i tako dolazimo do pojma distribucija kao neprekidnih, linearnih preslikavanja čiji domen je odgovarajući prostor test funkcija.

U drugom delu uvodimo pojmove množenja distribucija, izvoda i nosača distribucija. Analiziramo i osnovne osobine Furijeove transformacije i na kraju dajemo definiciju i osnovna svojstva Soboljevljevih prostora kao i odnosa među njima (teoreme o utapanju).

Nakon nekih poglavlja su dati zadaci koji su namenjeni za samostalni rad studenata i doprinose boljem razumevanju gradiva.

Zahvaljujem se recenzentima dr Marku Nedeljkovu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, dr Nenadu Teofanovu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu i dr Ivanu Ivecu, docentu Metalurškog fakulteta, Sveučilista u Zagrebu na veoma detaljnom čitanju udžbenika i davanju korisnih sugestija. Primedbe recenzenata su značajno doprinele preglednosti i boljoj organizaciji teksta i u velikoj meri su uticale na krajnju formu teksta. Dodatno se zahvaljujem i Milici Lučić, asistentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu na pažljivom čitanju i predlozima koji su omogućili da tekst bude jasniji. Svima veliko hvala.

Najveće hvala upućujem svom ocu na brizi i podršci bez koje ne bi bilo ovog teksta.

Novi Sad, 2022.

Ivana Vojnović

Sadržaj

Glava 1

Uvod

U ovom poglavlju ćemo izložiti osnovne pojmove i tvrđenja, da bismo u narednim poglavljima mogli da uvedemo topološko-vektorske prostore i da se bavimo njihovim svojstvima.

1.1 Topološki i vektorski prostori - definicije i osobine

Podsetimo se definicija i osobina u vezi sa vektorskim i topološkim prostorima koje ćemo koristiti u nastavku. Za dokaze navedenih tvrđenja upućujemo čitaoca na [9].

Prvo navodimo definiciju vektorskog prostora.

Definicija 1.1. *Neka je $(X, +)$ komutativna grupa, a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje. Tada je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ ako je definisano preslikavanje $\mathbb{K} \times X \to X$, odnosno $(\alpha, a) \mapsto \alpha a$ koje za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $a, b \in X$ zadovoljava sledeće osobine:*

1. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
2. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
3. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$;

4. $1a = a$.

Sa 1 *smo označili neutralni element za množenje u polju* $\mathbb{K}$.

Napomena 1.2. U nastavku podrazumevamo da $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, odnosno da radimo sa realnim ili kompleksnim vektorskim prostorima.

Definicija 1.3. *Neka je* $X \neq \emptyset$. *Kolekcija* τ *podskupova skupa* X *je kolekcija otvorenih skupova ako važe sledeći uslovi:*

(O1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$,

(O2) za svako $O_1, O_2 \in \tau$ *važi da* $O_1 \cap O_2 \in \tau$,

(O3) za svaku kolekciju skupova $\{O_i : i \in I\} \subset \tau$ *važi da* $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

Za kolekciju τ *kažemo da je topologija na skupu* X, *a za* (X, τ) *kažemo da je topološki prostor.*

Skup $F \subset X$ *je zatvoren ako i samo ako je njegov komplement* $X \backslash F$ *otvoren skup.*

Primer 1.4. Za bilo koji skup $X \neq \emptyset$ kolekcija svih podskupova skupa X je topologija na X. Ovu topologiju zovemo diskretna topologija i označavamo je sa τ_{disc}. Dakle $\tau_{disc} = P(X)$, gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X.

Kolekcija $\tau = \{\emptyset, X\}$ je takođe topologija na skupu X koju zovemo antidiskretna topologija i označavamo je sa τ_{adisc}.

Ako su τ_1 i τ_2 topologije na skupu X i ako je $\tau_1 \subset \tau_2$, onda kažemo da je topologija τ_2 finija od topologije τ_1, odnosno da je τ_1 grublja od τ_2. Primetimo da za proizvoljnu topologiju τ na skupu X važi $\tau_{adisc} \subset \tau \subset \tau_{disc}$, odnosno τ_{adisc} je najgrublja topologija na skupu X, a τ_{disc} je najfinija topologija na skupu X.

Primer 1.5. (Uobičajena topologija na skupu $\mathbb{R}$) Neka je $O \subset \mathbb{R}$ skup koji ima sledeća svojstva: za svaku tačku $x \in O$ postoji realan broj $r > 0$ tako da je $(x - r, x + r) \subset O$. Ako je τ kolekcija podskupova $O \subset \mathbb{R}$ sa navedenim svojstvom može se pokazati da je τ topologija na skupu $\mathbb{R}$. Topologiju τ zovemo uobičajena topologija na $\mathbb{R}$ i označavamo je sa τ_{uob}. Primetimo da je ovo standardna topologija na realnoj pravoj sa kojom se srećemo u matematičkoj analizi.

1.1.1 Baza topologije

Definicija 1.6. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je baza topologije τ ako važe sledeći uslovi:*

(B1) $\mathcal{B} \subset \tau$,

(B2) svaki otvoren skup $O \in \tau$ može da se prikaže kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$, odnosno postoji kolekcija $\{B_j : j \in J\} \subset \mathcal{B}$ tako da je $O = \bigcup_{j \in J} B_j$.

Primetimo da iz definicije 1.6 sledi da je svaka topologija τ na skupu X baza topologije τ.

U mnogim slučajevima se topologija na skupu X zadaje navođenjem elemenata neke njene baze.

Definicija 1.7. *Neka je $X \neq \emptyset$. Tada je familija $\mathcal{B} \subset P(X)$ baza neke topologije na skupu X ako i samo ako je familija $\{\cup_{B \in \mathcal{B}'} B \ : \ \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X.*

Naredna teorema nam daje dodatne informacije o bazi $\mathcal{B}$ neke topologije na skupu X.

Teorema 1.8. *Kolekcija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je baza neke topologije na skupu X ako i samo ako važe uslovi:*

(BN1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

(BN2) za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ postoji familija $\{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B}$ tako da je $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Iz teoreme 1.8 sledi naredna posledica.

Posledica 1.9. *Neka kolekcija podskupova $\mathcal{B} \subset P(X)$ zadovoljava uslove:*

(BN1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

(BN2) za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ važi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$.

Tada je kolekcija $\mathcal{B}$ baza neke topologije na skupu X.

Primer 1.10. Familija otvorenih intervala $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ je baza uobičajene topologije na skupu $\mathbb{R}$.

Metrički i normirani prostori

Posebna klasa topoloških prostora su prostori čija topologija je određena nekom metrikom.

Definicija 1.11. *Neka je* $X \neq \emptyset$*. Funkcija* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *koja ispunjava uslove*

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

je metrika na skupu X*, a za* (X, d) *kažemo da je metrički prostor.*

Za $x \in X$ i $r > 0$ skup

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

zovemo otvorena lopta sa centrom u tački x i poluprečnikom r. Često ćemo koristiti i oznaku $B_r(x)$ umesto $B(x, r)$.

Na svakom metričkom prostoru možemo definisati topologiju.

Teorema 1.12. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Tada je kolekcija svih otvorenih lopti* $\mathcal{B}_d = \{B(x, r) : x \in X, \ r > 0\}$ *baza neke topologije* τ_d *na skupu* X*.*

Definicija 1.13. *Topologiju* τ_d *definisanu u teoremi 1.12 zovemo topologijom koja je određena (indukovana) metrikom* d*.*

Topološki prostor (X, τ) *je metrizabilan ako i samo ako postoji metrika* d *na skupu* X *tako da je* $\tau = \tau_d$*.*

Sledi da u je u metričkom prostoru skup otvoren ako i samo je unija neke familije otvorenih lopti. Sledeća teorema daje još jednu karakterizaciju otvorenih skupova u metričkom prostoru.

Teorema 1.14. *U metričkom prostoru* (X, d) *skup* $O \subset X$ *je otvoren ako i samo ako za svaku tačku* $x \in O$ *postoji broj* $r > 0$ *tako da je* $B(x, r) \subset O$*.*

Primer 1.15. Prostor $(\mathbb{R}, \tau_{uob})$ je metrizabilan. Važi $\tau_{uob} = \tau_d$, gde je funkcija $d : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ definisana sa $d(x, y) = |x - y|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Posebno važni primeri metričkih prostora su normirani vektorski prostori. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Definišimo preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tako da za sve $x, y \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ važi:

(N1) $\|x\| \geq 0$,

(N2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Preslikavanje $\|\cdot\|$ je norma na X, a $(X, \|\cdot\|)$ je normiran vektorski prostor. Tada je

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

metrika na skupu X. Sledi da je svaki normiran prostor i metrički prostor (pa i topološki prostor).

1.1.2 Podbaza topologije

Nekad na skupu X želimo da definišemo topologiju tako da odabrana familija $\mathcal{S}$ podskupova skupa X bude familija otvorenih skupova. Ukoliko ta familija nije topologija, onda je treba dopuniti i obično je cilj da proširenje familije bude minimalno.

Definicija 1.16. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Familija $\mathcal{P} \subset P(X)$ je podbaza topologije τ ako važe uslovi:*

(PB1) $\mathcal{P} \subset \tau$,

(PB2) familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ je neka baza topologije τ.

Teorema 1.17. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{S}$ neka familija podskupova skupa X. Tada postoji najgrublja topologija na skupu X koja sadrži familiju $\mathcal{S}$.*

Označimo sa $\tau(\mathcal{S})$ najgrublju topologiju koja sadrži familiju $\mathcal{S}$. Sledeća teorema daje odgovor kako se topologija $\tau(\mathcal{S})$ dobija od familije $\mathcal{S}$, pod pretpostavkom $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A = X$.

Teorema 1.18. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{S} \subset P(X)$ tako da je $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A = X$. Tada je familija $\mathcal{B}$ svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{S}$ baza topologije τ na skupu X čija podbaza je $\mathcal{S}$. Pritom je τ najgrublja topologija na skupu X koja sadrži familiju $\mathcal{S}$.*

Napomena 1.19. Neka je $(\tau_i)_{i\in I}$ neprazna kolekcija topologija na skupu X. Tada postoji topologija $\overline{\tau}$ na X koja je najmanje gornje ograničenje topologija τ_i. To je topologija koja ima sledeće osobine:

1. $\overline{\tau}$ je finija od svake topologije $\tau_i, i \in I$, odnosno $\tau_i \subset \overline{\tau}$ za sve $i \in I$,

2. Ako je $\tilde{\tau}$ finija od svake topologije τ_i, onda je $\tilde{\tau}$ finija od $\overline{\tau}$.

Skup $\bigcup_{i\in I} \tau_i$ je podbaza najmanjeg gornjeg ograničenja topologija τ_i.

1.1.3 Topologija zadata preko okolina

Definicija 1.20. *Neka je (X,τ) topološki prostor. Skup $E \subset X$ je okolina tačke $x \in X$ ako i samo ako postoji otvoren skup $O \in \tau$ tako da $x \in O \subset E$. Familiju svih okolina tačke x označavamo sa $\mathcal{U}(x)$.*

Primer 1.21. U prostoru $(\mathbb{R}, \tau_{uob})$ skupovi $[-1,1]$ i $(-2,7)$ su okoline tačke 0 zato što sadrže otvoren interval koji sadrži nulu.

Važi sledeća teorema.

Teorema 1.22. *Neka je (X,τ) topološki prostor. Tada je skup $E \subset X$ otvoren ako i samo ako je E okolina svake svoje tačke.*

Teorema 1.23. *Neka je (X,τ) topološki prostor. Za svako $x \in X$ važi:*

(NB1) ako je $W \subset X$ i ako postoji $V \in \mathcal{U}(x)$ tako da je $V \subset W$, onda $W \in \mathcal{U}(x)$;

(NB2) *presek dva elementa iz $\mathcal{U}(x)$ pripada $\mathcal{U}(x)$;*

(NB3) *ako $V \in \mathcal{U}(x)$, onda $x \in V$;*

(NB4) *za svako $V \in \mathcal{U}(x)$ postoji $W \in \mathcal{U}(x)$ tako da za svako $y \in W$ važi $V \in \mathcal{U}(y)$.*

Obratno, topologiju možemo definisati tako što svakoj tački $x \in X$ dodelimo familiju $\mathcal{V}(x)$ koja zadovoljava uslove $(NB1)-(NB4)$, pa je otvoren skup onaj koji je okolina svake svoje tačke:

Teorema 1.24. *Neka je $X \neq \emptyset$ i neka je svakoj tački $x \in X$ dodeljena familija podskupova $\mathcal{V}(x)$ koja zadovoljava uslove $(NB1)-(NB4)$. Tada je familija $\mathcal{O} = \{O \subset X : \forall x \in O\ (O \in \mathcal{V}(x))\}$ topologija na skupu X. U topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$ je za svako $x \in X$ familija $\mathcal{V}(x)$ upravo familija svih okolina tačke X.*

Uslove (NB1)-(NB4) zovemo aksiome okolina.

1.1.4 Baza okolina tačke

Definicija 1.25. *Neka je (X, τ) topološki prostor i $x \in X$. Tada je familija skupova $\mathcal{B}(x)$ baza okolina tačke x ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(BO1) *elementi familije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x, odnosno $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$,*

(BO2) *za svaku okolinu $U \in \mathcal{U}(x)$ postoji okolina $B \in \mathcal{B}(x)$ tako da je $B \subset U$.*

Jasno je da je familija $\mathcal{U}(x)$ svih okolina tačke x jedna baza okolina tačke x.

1.1.5 Filteri

Definicija 1.26. *Neka je $X \neq \emptyset$ skup i $\mathcal{F} \subset P(X)$. Kažemo da je kolekcija $\mathcal{F}$ filter na X ako zadovoljava sledeće osobine:*

(F1) *ako je $A \subset X$ i A sadrži skup $B \in \mathcal{F}$, onda $A \in \mathcal{F}$;*

(F2) presek konačne kolekcije skupova u $\mathcal{F}$ pripada $\mathcal{F}$;

(F3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ i $X \in \mathcal{F}$.

Neka je $\mathcal{B}$ kolekcija podskupova skupa $X \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija svih podskupova od X koji sadrže skup u $\mathcal{B}$. Tada je $\mathcal{F}$ filter ako i samo ako $\mathcal{B}$ zadovoljava sledeće uslove:

(FB1) presek dva skupa u $\mathcal{B}$ sadrži skup u $\mathcal{B}$;

(FB2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ i $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Definicija 1.27. *Kolekcija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X se zove filter baza ako zadovoljava uslove (FB1) i (FB2). Kažemo i da je $\mathcal{B}$ baza za filter $\mathcal{F}$ koji generiše (filter čiji elementi su nadskupovi elemenata iz $\mathcal{B}$).*

Primer 1.28.
1. Neka $x \in X$. Kolekcija svih podskupova od X koji sadrže tačku x je filter na skupu X.
2. Neka je X topološki prostor i $x \in X$. Kolekcija $\mathcal{U}(x)$ svih okolina tačke x je filter na X. Bazu filtera $\mathcal{U}(x)$ zovemo i fundamentalan sistem okolina tačke x.

   Dakle, kolekcija $\mathcal{N}$ okolina tačke x je fundamentalan sistem okolina od x ako i samo ako svaka okolina od x sadrži skup $B \in \mathcal{N}$.

1.1.6 Neprekidna preslikavanja

Podsetimo se definicije neprekidnosti koja se odnosi na preslikavanja između opštih topoloških prostora.

Za preslikavanje $f : X \to Y$ i za proizvoljan skup $A \subset X$ skup

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

zovemo direktna slika skupa A. Za $B \subset Y$ skup

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

zovemo inverzna slika skupa B.

Definicija 1.29. *Neka su* (X, τ_X) *i* (Y, τ_Y) *topološki prostori i neka je* $x_0 \in X$ *proizvoljna tačka. Funkcija* $f : X \to Y$ *je neprekidna u tački* x_0 *ako i samo ako za svaku okolinu* V *tačke* $f(x_0)$ *postoji okolina* U *tačke* x_0 *tako da je* $f(U) \subset V$*. Funkcija* f *je neprekidna ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački* $x \in X$*.*

Neprekidnost funkcije $f : X \to Y$ može da se okarakteriše ekvivalentnim uslovima koji su dati u narednoj teoremi.

Teorema 1.30. *Neka su* (X, τ_X) *i* (Y, τ_Y) *topološki prostori i* $f : X \to Y$ *proizvoljno preslikavanje. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *preslikavanje* f *je neprekidno;*
2. *za svaki otvoreni skup* $O \subset Y$ *je skup* $f^{-1}(O) \subset X$ *otvoren;*
3. *za svaki zatvoren skup* $F \subset Y$ *je skup* $f^{-1}(F) \subset X$ *zatvoren;*
4. *za svaki skup* $A \subset X$ *je* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$*;*
5. *ako je* $\mathcal{B}_Y$ *proizvoljna baza topologije* τ_Y *onda je za svaki skup* $B \in \mathcal{B}_Y$ *skup* $f^{-1}(B) \subset X$ *otvoren.*

U nastavku ćemo koristiti i pojam homemorfnog preslikavanja.

Definicija 1.31. *Neka su* (X, τ_X) *i* (Y, τ_Y) *topološki prostori. Preslikavanje* $f : X \to Y$ *je homeomorfizam ako i samo ako važe uslovi:*

1. f *je bijekcija,*
2. f *je neprekidno,*
3. f^{-1} *je neprekidno.*

1.1.7 Oznake

Uvedimo pojmove nosača funkcije i multi-indeksa, koje ćemo često koristiti u nastavku teksta, kao i oznake za ove pojmove.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Skup $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$ zovemo **nosač** funkcije f. Nosač funkcije f je zatvorenje skupa tačaka u kojima je vrednost funkcije različita od nule, odnosno komplement najvećeg otvorenog skupa gde je funkcija f identički jednaka nuli.

- Neka je $\mathbb{N}_0^n := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i \leq n\}$.

  Element $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ zovemo **multi-indeks**.

- **Red multi-indeksa** α je broj $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

- Sa ∂_j (ili ∂_{x_j}) označavamo parcijalni izvod $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$.

- Za $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ je

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

  gde je red $|\alpha|$ takođe i red izvoda.

- Često ćemo multi-indekse označavati slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ali ćemo ponekad koristiti i oznake p i q.

Glava 2

Topološko-vektorski prostori, lokalno-konveksne topologije

Drugi deo udžbenika ćemo posvetiti uvođenju topološko-vektorskih prostora. Takođe ćemo se baviti lokalno-konveksnim prostorima, koji su specijalna klasa topološko-vektorskih prostora. Pokazaćemo da lokalno-konveksne prostore možemo definisati preko familije semi-normi i navešćemo primere takvih prostora. Za više detalja preporučujemo [8].

2.1 Topološko-vektorski prostori

Pretpostavljamo da je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Za $A, B \subset X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ definišemo skupove:

$$A \pm B = \{a \pm b : a \in A,\, b \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Definicija 2.1. ***Topološko-vektorski prostor*** *je uređen par* (X, τ)*, gde je* τ *topologija na* X *i važe osobine:*

1. *preslikavanje* $(x, y) \mapsto x+y$ *iz* $X \times X \to X$ *je neprekidno preslikavanje;*

2. *preslikavanje* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *iz* $\mathbb{K} \times X \to X$ *je neprekidno preslikavanje.*

Vektorska struktura i topologija prostora X su kompatibilne ako važe uslovi 1. *i* 2.

Napomena 2.2. Podrazumevamo da je na polju $\mathbb{K}$ data uobičajena topologija i da su na $X \times X$ i $\mathbb{K} \times X$ date topologije proizvoda. Preciznije, otvoren skup u prostoru $X \times X$ je oblika $O_1 \times O_2$, gde su skupovi $O_i, i \in \{1, 2\}$ otvoreni skupovi u τ. Analogno važi za topologiju na $\mathbb{K} \times X$.

Primer 2.3. Normiran vektorski prostor snabdeven topologijom norme je topološko-vektorski prostor. Ostavljamo čitaocu da za vežbu pokaže da u ovom slučaju važe osobine 1. i 2. iz definicije 2.1.

Da li isti zaključak važi za proizvoljan vektorski prostor koji je snabdeven topologijom metrike?

Napomena 2.4. Iz osobine 1 u definiciji 2.1 sledi da za svaku okolinu nule V u topološko-vektorskom prostoru (X, τ) postoji okolina nule U tako da je $U + U \subset V$.

Zaista, neka je V proizvoljna okolina nule u (X, τ). Tada iz neprekidnosti sabiranja (uslov 1 u definiciji 2.1) u $(0, 0) \in X \times X$, sledi da postoje okoline nule V_1 i V_2 takve da je $V_1 + V_2 \subset V$. Neka je $U = V_1 \cap V_2$. Znamo da je presek dve okoline neke tačke, ponovo okolina date tačke, pa iz $U + U \subset V_1 + V_2 \subset V$, sledi da je U tražena okolina nule.

Uvodimo u nastavku definicije apsorbujućeg i uravnoteženog skupa.

Definicija 2.5. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i $A \subset X$. Skup A je apsorbujući ako za svako $x \in X$ postoji $\alpha > 0$ tako da $x \in \lambda A$ za sve skalare $|\lambda| \geq \alpha$.*

Napomena 2.6. Uslovu iz definicije 2.5 je ekvivalentan uslov da $\lambda x \in A$ za sve $|\lambda| \leq \alpha^{-1}$.

Posledica 2.7. *Svaka okolina nule u topološko-vektorskom prostoru (X, τ) je apsorbujuća.*

Dokaz: Neka je V proizvoljna okolina nule u X. Iz uslova 2. u Definiciji 2.1, odnosno iz neprekidnosti preslikavanja $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ iz $\mathbb{K} \times X \to X$ sledi tvrđenje. Naime $(0, x) \mapsto 0$, pa postoji okolina $O \times U$ tačke $(0, x)$ tako da je $\lambda U \subset V$ za sve $\lambda \in O$. Dakle za svako $x \in X$ postoji $r > 0$ tako da $\lambda x \in V$ za sve $|\lambda| \le r$. ❑

Definicija 2.8. *Skup A u vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{K}$ je uravnotežen ako je $\lambda A \subset A$ za sve $\lambda \in \mathbb{K}$, za koje je $|\lambda| \le 1$.*

Primetimo da 0 mora da pripada svakom skupu koji je apsorbujući ili uravnotežen.

Primer 2.9.

1. Neka je $X = \mathbb{C}$ i $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Tada je skup $[-1, 1]$ uravnotežen. Međutim, ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, onda ovaj skup nije uravnotežen.
2. U normiranom vektorskom prostoru jedinična lopta sa centrom u 0 je uravnotežen i apsorbujući skup.
3. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ sa uobičajenom topologijom. Neka je B jedinična lopta sa centrom u $(1/2, 0)$. Skup B je apsorbujući, ali nije uravnotežen zato što $(1, 0) \in B$, ali $(-1)(1, 0) \notin B$.

Presek proizvoljne familije uravnoteženih skupova je uravnotežen skup. Za dati skup Y u vektorskom prostoru X postoji najmanji uravnotežen skup A koji sadrži Y. Skup A se zove uravnoteženi omotač za Y i to je presek svih uravnoteženih skupova koji sadrže Y.

Unija proizvoljne familije uravnoteženih skupova je uravnotežen skup. Za dati podskup A od X postoji najveći uravnotežen skup B koji je sadržan u A. Ovaj skup zovemo uravnoteženo jezgro od A i to je unija svih uravnoteženih skupova sadržanih u A. Ovaj skup je neprazan ako i samo ako $0 \in A$.

Zadatak 2.1. Neka je X topološko-vektorski prostor.

a) Neka $a \in X$. Posmatrajmo preslikavanje $x \mapsto x + a$ iz $X \to X$ (translacija za a). Pokazati da je translacija homeomorfizam i da su okoline tačke a oblika $V + a$, gde je V okolina nule u X. Dakle topologija prostora X nam je poznata, ako su nam poznate okoline nule.

b) Neka je $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{K}$. Pokazati da je preslikavanje $x \mapsto \alpha x$ iz $X \to X$ homeomorfizam.

Rešenje: a) Inverzno preslikavanje je dato sa $x \mapsto x - a$. Dokažimo neprekidnost preslikavanja $h : x \mapsto x + a$. Neka je V proizvoljna okolina tačke $x + a$. Iz uslova 1 u definiciji 2.1 sledi da postoji okolina U tačke x i okolina O tačke a tako da je $U + O \subset V$. Tada je $h(U) \subset V$, pa smo dokazali neprekidnost za h. Analogno se dobija da je inverzno preslikavanje neprekidno.

b) Inverzno preslikavanje je dato sa $x \mapsto \frac{1}{\alpha}x$. Neprekidnost polaznog i inverznog preslikavanja sledi iz osobine 2 u definiciji 2.1.

❑

U topološko-vektorskom prostoru (X, τ) uravnoteženo jezgro okoline nule V je okolina nule.

Zaista, množenje skalarom je neprekidno pa postoje okolina nule U i $\alpha > 0$ tako da za $|\lambda| \leq \alpha$ sledi da je $\lambda U \subset V$. Preslikavanje $x \mapsto \alpha x$ iz $U \to \alpha U$ je homeomorfizam, pa je αU okolina nule. Pokažimo da je αU sadržan u uravnoteženom jezgru B za V. Odatle će slediti da je B takođe okolina nule. Primetimo, za uravnoteženo jezgro B od V važi da je

$$B = \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda V, \tag{2.1}$$

što znači da je $x \in B$ ako i samo ako $\mu x \in V$ za sve $|\mu| \leq 1$.

Neka $\alpha x \in \alpha U$ i neka je $|\mu| \leq 1$. Tada je $|\mu\alpha| \leq \alpha$, pa $\mu(\alpha x) = (\mu\alpha)x \in V$. Iz (2.1) sledi da je $\alpha U \subset B$, što je i trebalo pokazati.

Cilj nam je da pokažemo sledeću teoremu.

Teorema 2.10. (a) *U topološko-vektorskom prostoru (X, τ) postoji baza okolina nule $\mathcal{B}$ takva da važi:*

(FS1) svaka okolina $V \in \mathcal{B}$ je apsorbujuća;

(FS2) svaka okolina $V \in \mathcal{B}$ *je uravnotežena;*

(FS3) za svaku okolinu $V \in \mathcal{B}$ *postoji okolina* $U \in \mathcal{B}$ *takva da je* $U+U \subset V$*.*

(b) *Obratno, neka je* X *vektorski prostor nad* $\mathbb{K}$ *i* $\mathcal{B}$ *filter baza na* X *koja zadovoljava uslove (FS1)–(FS3). Tada postoji jedinstvena topologija na* X*, takva da je* X *topološko-vektorski prostor i za koju je* $\mathcal{B}$ *baza okolina nule.*

Dokaz: (a) Posmatrajmo familiju svih okolina nule u (X, τ). Iz posledice 2.7 sledi da za svaku okolinu nule važi uslov *(FS1)*. Znamo i da je uravnoteženo jezgro okoline nule ponovo okolina nule. Dakle, neka je $\mathcal{B}$ familija uravnoteženih jezgara svih okolina nula. Jasno je da za ovu familiju važe prva dva uslova tvrđenja. Pokažimo i treći uslov. Za okolinu nule V postoji okolina nule U takva da je $U + U \subset V$, što sledi iz napomene 2.4. Tada za uravnoteženo jezgro B okoline U važi da je $B + B \subset V$.

(b) Primetimo da, ako postoji topologija na X za koju je X topološko-vektorski prostor i $\mathcal{B}$ baza okolina nule koja zadovoljava uslove $(FS1) - (FS3)$, onda takva topologija mora biti jedinstvena. Naime, u takvom prostoru skup W je okolina tačke $a \in X$ ako i samo ako W sadrži skup oblika $V + a$, gde je $V \in \mathcal{B}$ (odnosno homeomorfizmom se baze okolina nula slikaju u baze okolina tačke a). Dakle, otvoreni skupovi su jedinstveno određeni.

Definisaćemo topologiju τ na X preko okolina proizvoljne tačke $a \in X$, odnosno koristeći teoremu 1.24. Pokažimo da za $a \in X$ kolekcija skupova

$$\mathcal{V}(a) = \{W \subset X : \exists V \in \mathcal{B} \quad V + a \subset W\}$$

zadovoljava aksiome okolina date u teoremi 1.23. Pokažimo uslov $(NB1)$. Neka je $W_1 \subset X$ i neka $W \in \mathcal{V}(a)$, $W \subset W_1$. Tada postoji $V \in \mathcal{B}$ tako da $V + a \subset W \subset W_1$, pa i $W_1 \in \mathcal{V}(a)$, odnosno važi $(NB1)$.

Zatim pokazujemo $(NB2)$. Neka su W_1 i W_2 dva elementa u $\mathcal{V}(a)$. Treba pokazati da $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{V}(a)$. Znamo da postoje skupovi $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ tako da je $V_1 + a \subset W_1$ i $V_2 + a \subset W_2$. Kako je $\mathcal{B}$ filter baza, onda postoji skup $V \in \mathcal{B}$ tako da $V \subset V_1 \cap V_2$. Sledi da je $V + a \subset V_1 \cap V_2 + a \subset W_1 \cap W_2$, čime smo pokazali da $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{V}(a)$.

Dalje neka $W \in \mathcal{V}(a)$. Pokažimo $(NB3)$, odnosno da $a \in W$. Svaki element $V \in \mathcal{B}$ je neprazan po definiciji filter baze. Kako su svi elementi u $\mathcal{B}$ uravnoteženi i apsorbujući, sledi da $0 \in V$ za svako $V \in \mathcal{B}$. Pošto je za neko $V \in \mathcal{B}$ zadovoljeno da $V + a \subset W$, sledi da $a \in W$, pa važi $(NB3)$.

Dokažimo i $(NB4)$. Neka je $W \in \mathcal{V}(a)$, odnosno za neko $V \in \mathcal{B}$ je $V + a \subset W$. Treba da nađemo $W_1 \in \mathcal{V}(a)$ tako da za svako $b \in W_1$ važi da $W \in \mathcal{V}(b)$. Iz osobine $(FS3)$ sledi da postoji $U \in \mathcal{B}$ tako da je $U + U \subset V$. Neka je $W_1 = U + a$. Jasno je da $W_1 \in \mathcal{V}(a)$. Neka $b \in U + a$. Tada je $U + b \subset U + U + a \subset V + a \subset W$, odnosno $W \in \mathcal{V}(b)$. Time je osobina $(NB4)$ pokazana.

Kolekcije skupova $\mathcal{V}(a)$ za $a \in X$ određuju topologiju τ na X, gde je

$$\tau = \{O \subset X : \forall x \in O \quad O \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Pritom je $\mathcal{V}(a)$ kolekcija svih okolina tačke a. Sledi da je kolekcija

$$\mathcal{B}(a) = \{V + a : V \in \mathcal{B}\}$$

baza okolina tačke a, pa je kolekcija $\mathcal{B}$ baza okolina nule.

Ostaje da pokažemo da je (X, τ) topološko-vektorski prostor. Treba da pokažemo uslove 1. i 2. iz definicije 2.1. Neka se elementu $(a, b) \in X \times X$ dodeli element $c \in X$, to jest $a + b = c$ i neka je W okolina tačke c. Tada postoji $V \in \mathcal{B}$ tako da je $V + c \subset W$. Prema $(FS3)$ postoji $U \in \mathcal{B}$ tako da je $U + U \subset V$. Tada je $U + a$ okolina tačke a, skup $U + b$ je okolina tačke b i

$$U + a + U + b \subset V + c \subset W,$$

pa je sabiranje neprekidno.

Pokažimo da je množenje skalarom takođe neprekidno. Neka $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ i neka je W okolina za λa. Postoji $V \in \mathcal{B}$ tako da je $V + \lambda a \subset W$. Primenom osobine $(FS3)$ dva puta vidimo da postoji $U \in \mathcal{B}$ tako da je $U + U + U \subset V$. Pošto su svi elementi u $\mathcal{B}$ apsorbujući, onda postoji $\varepsilon > 0$ tako da $|\eta| \leq \varepsilon$ implicira da $\eta a \in U$.

Dodatno, postoji $T \in \mathcal{B}$ tako da je $\lambda T \subset U$. Zaista, za $U \in \mathcal{B}$ iz osobine (FS3) sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $T \in \mathcal{B}$ tako da je $2^n T \subset U$.

Odaberimo dovoljno veliko n_0 tako da je $|\lambda| \leq 2^{n_0}$. Tada je $2^{n_0}T \subset U$ i zbog $(FS2)$ je $2^{-n_0}\lambda T \subset T$, odnosno $\lambda T \subset 2^{n_0}T$. Zato je $\lambda T \subset U$.

Zatim, ako je $|\eta| \leq 1$ i $x-a \in U$, onda zbog $(FS2)$ sledi da $\eta(x-a) \in U$. Neka je $S \in \mathcal{B}$ tako da je $S \subset T \cap U$ ($\mathcal{B}$ je filter baza). Kako je

$$\xi x - \lambda a = (\xi - \lambda)a + \lambda(x-a) + (\xi - \lambda)(x-a),$$

onda ako je $|\xi - \lambda| \leq \min(1, \varepsilon)$ i $x \in S + a$ sledi da je

$$\xi x - \lambda a \in U + U + U \subset V,$$

odnosno $\xi x \in W$. Time je dokazana osobina 2. iz definicije 2.1. ❑

Propozicija 2.11. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i neka je $\mathcal{M}$ kolekcija apsorbujućih, uravnoteženih podskupova od X takvih da za svako $V \in \mathcal{M}$ postoji $U \in \mathcal{M}$ tako da je $U + U \subset V$. Tada postoji jedinstvena topologija na X tako da je X topološko - vektorski prostor i za koju konačni preseci elemenata u $\mathcal{M}$ formiraju bazu okolina nule.*

Dokaz: Svaki skup $V \in \mathcal{M}$ sadrži nulu, zato što je uravnotežen. Jasno je da je presek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{M}$ neprazan, pa $\emptyset$ ne pripada nepraznoj kolekciji svih konačnih preseka elemenata u $\mathcal{M}$ - označimo ovu kolekciju sa $\mathcal{M}_1$. Cilj je da pokažemo da je $\mathcal{M}_1$ filter baza. Uslov (FB2) smo pokazali. Treba pokazati $(FB1)$. Neka $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_1$. Jasno je da tada $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{M}_1$, pa $(FB1)$ važi. Kolekcija $\mathcal{M}_1$ zadovoljava uslove $(FS1) - (FS3)$ teoreme 2.10, pa iskaz tvrđenja sledi. ❑

Primer 2.12.

1. U normiranom vektorskom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ lopte $B_r = \{x : \|x\| \leq r\}$ formiraju filter bazu koja zadovoljava uslove $(FS1) - (FS3)$.

2. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Označimo sa $C(\Omega)$ vektorski prostor svih neprekidnih funkcija f definisanih na Ω. Za svaki kompaktan podskup K od Ω i za svaki $\varepsilon > 0$ neka je

$$V_{K,\varepsilon} = \{f \in C(\Omega) : |f(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in K\}.$$

Može se pokazati da skupovi $V_{K,\varepsilon}$ formiraju filter bazu na $C(\Omega)$ koja zadovoljava uslove $(FS1)-(FS3)$. Dakle skupovi $V_{K,\varepsilon}$ formiraju bazu okolina nule za topologiju na $C(\Omega)$ koju zovemo topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima.

3. Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup. Sa $\mathcal{D}(K)$ označavamo vektorski prostor svih funkcija koje su definisane na nekom otvorenom skupu koji sadrži K, koje su jednake nuli izvan K i čiji parcijalni izvodi svih redova postoje i neprekidni su. Za $p \in \mathbb{N}_0^n$ i $\varepsilon > 0$ definišemo skup

$$V_{p,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{D}(K) : |\partial^p f(x)| \leq \varepsilon,\ x \in K\}.$$

Skupovi $V_{p,\varepsilon}$ zadovoljavaju uslove $(FS1) - (FS3)$, pa prema propoziciji 2.11 njihovi konačni preseci formiraju bazu okolina nule za topologiju za koju je $\mathcal{D}(K)$ topološko-vektorski prostor.

Propozicija 2.13. *U topološko-vektorskom prostoru (X, τ) svaka okolina nule sadrži zatvorenu okolinu nule.*

Dokaz: Neka je V okolina nule. Tada postoji uravnotežena okolina nule U tako da je $U + U \subset V$. Pokažimo da je $\overline{U} \subset V$. Ako $x \in \overline{U}$, onda $(x+U) \cap U \neq \emptyset$, odnosno postoji $y \in U$ tako da $x + y \in U$. Odatle sledi da

$$x \in -y + U \subset U + U \subset V,$$

što je i trebalo pokazati. Primetimo da iz uravnoteženosti skupa U sledi da $-y \in U$. ❑

2.2 Lokalno-konveksni prostori

Neka je X vektorski prostor. Kažemo da je $A \subset X$ konveksan ako za $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ važi da je $\alpha A + \beta A \subset A$. Ako je A konveksan, onda su skupovi $A + a$ i λA konveksni za $a \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Neka su X i Y vektorski prostori i $f : X \to Y$ linearno preslikavanje. Ako je A konveksan u X, onda je $f(A)$ konveksan u Y. Ako je B konveksan u Y, onda je $f^{-1}(B)$ konveksan u X.

Presek proizvoljne familije konveksnih skupova je konveksan skup.

Za dati skup B u X postoji najmanji konveksan skup A koji ga sadrži. To je presek svih konveksnih skupova koji sadrže B i zovemo ga konveksan omotač skupa B.

Važe sledeće propozicije.

Propozicija 2.14. *Neka je A konveksan podskup vektorskog prostora X, neka je $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ konačan niz elemenata u A i neka je $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ niz skalara takvih da je $\lambda_i \geq 0, i \in \{1,\dots,n\}$ i $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Tada linearna kombinacija $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$.*

Dokaz: Za $n = 1$ propozicija važi trivijalno, a za $n = 2$ važi po definiciji konveksnog skupa. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$ i dokažimo da tada važi i za n. Neka je dat konačan niz $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ elemenata u A i neka je $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ niz skalara takvih da je $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Stavimo

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i, \quad \beta = \lambda_n, \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{\alpha}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Iz indukcijske hipoteze sledi da $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i \in A$. Kako je $\alpha+\beta = 1$ iz definicije konveksnog skupa dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \alpha\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i\Big) + \beta x_n \in A.$$

❑

Propozicija 2.15. *Neka je $A_i, i \in I$, familija konveksnih podskupova vektorskog prostora X. Tada je konveksan omotač skupa $\cup_{i\in I} A_i$ skup C svih linearnih kombinacija $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, gde $x_i \in A_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$ pri čemu je konačno mnogo skalara λ_i različito od nule.*

Dokaz: Iz propozicije 2.14 sledi da je skup C sadržan u svakom konveksnom skupu koji sadrži skupove A_i, $i \in I$. Ako stavimo $\lambda_i = 1$ dobijamo da je $A_i \subset C$ za svako $i \in I$, odnosno $\cup_{i\in I} A_i \subset C$. Ostaje još da se pokaže da je skup C konveksan.

Neka su $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ i $y = \sum_{i\in I} \mu_i y_i$ dva elementa iz C i neka su $\alpha > 0$, $\beta > 0, \alpha + \beta = 1$ dva skalara.Treba da pokažemo da $\alpha x + \beta y \in C$. Za svako $i \in I$ neka je $\nu_i = \alpha\lambda_i + \beta\mu_i$. Neka je J konačan podskup od I za koji je $\nu_i > 0$. Tada

$$z_i = \frac{\alpha\lambda_i x_i + \beta\mu_i y_i}{\alpha\lambda_i + \beta\mu_i} \in A_i, \quad \text{za sve} \quad i \in J.$$

Sledi da

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i\in J} \nu_i z_i \in C$$

zato što je $\sum_{i\in J} \nu_i = \sum_{i\in I} \nu_i = \alpha \sum_{i\in I} \lambda_i + \beta \sum_{i\in I} \mu_i = 1$. ❑

Posledica 2.16. *Konveksan omotač skupa A u vektorskom prostoru X je skup svih linearnih kombinacija $\sum_i \lambda_i x_i$, gde je (x_i) konačna familija elemenata u A, $\lambda_i \geq 0$ i $\sum_i \lambda_i = 1$.*

Uravnoteženo jezgro konveksnog skupa je konveksan skup, što sledi iz formule (2.1).

Dalje primetimo da je skup A uravnotežen i konveksan ako i samo ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ takve da je $|\lambda|+|\mu| \leq 1$ važi da $\lambda x+\mu y \in A$. Zaista, ako ovaj uslov važi, onda ako biramo da je $\mu = 0$ vidimo da je A uravnotežen. Konveksnost skupa A dobijamo ako izaberemo $\lambda > 0, \mu > 0$ i $\lambda + \mu = 1$. Obratno, ako je A uravnotežen i konveksan, onda $\lambda x + \mu y \in A$ sledi iz jednakosti

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|)\Big(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\lambda}{|\lambda|}x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\mu}{|\mu|}y\Big).$$

Zaista, $\frac{\lambda}{|\lambda|}x \in A$ i $\frac{\mu}{|\mu|}y \in A$ zbog uravnoteženosti skupa A. Kako je $\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|} = 1$ iz konveksnosti dobijamo da $\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}\frac{\lambda}{|\lambda|}x + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}\frac{\mu}{|\mu|}y \in A$. Sledi da i $\lambda x+\mu y \in A$, gde ponovo koristimo da je A uravnotežen i da je $|\lambda|+|\mu| \leq 1$.

Propozicija 2.17. *U topološko-vektorskom prostoru (X, τ) zatvorenje konveksnog skupa A je konveksan skup.*

Dokaz: Neka $x, y \in \overline{A}$ i $\alpha > 0, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Neka je W proizvoljna okolina od $\alpha x + \beta y$. Treba da pokažemo da $W \cap A \neq \emptyset$. Preslikavanje $(u, v) \mapsto \alpha u + \beta v$ je neprekidno iz $X \times X \to X$, pa postoje okolina U od x i okolina V od y tako da je $\alpha U + \beta V \subset W$. Elementi x i y su u zatvorenju skupa A, pa je $U \cap A \neq \emptyset$ i $V \cap A \neq \emptyset$. Neka $z \in U \cap A$ i $w \in V \cap A$. Tada $\alpha z + \beta w \in W \cap A$, što je i trebalo pokazati. ❑

Definicija 2.18. *Topološko-vektorski prostor (X, τ) je lokalno-konveksan ako svaka tačka ima bazu okolina koja se sastoji od konveksnih skupova.*

Jasno je da je topološko-vektorski prostor lokalno konveksan ako nula ima bazu okolina koja se sastoji od konveksnih skupova. Ako je $\mathcal{W}$ familija podskupova vektorskog prostora X koja zadovoljava uslove propozicije 2.11 i ako je svaki element te familije konveksan, onda je topologija definisana preko familije $\mathcal{W}$ na X lokalno-konveksna.

Primer 2.19. Prostori dati u primeru 2.12 su lokalno-konveksni.

Dovoljno je u svakom primeru pokazati da su skupovi koji formiraju bazu okolina nule konveksni.

Lema 2.20. *Neka je X topološko-vektorski prostor i $A \subset X$ zatvoren skup. Tada je uravnoteženo jezgro od A takođe zatvoren skup.*

Dokaz: Neka je B uravnoteženo jezgro za skup A. Ako je $B = \emptyset$, tvrđenje je pokazano. Ako B nije prazan, onda tvrđenje sledi iz formule (2.1). Naime, preslikavanje $x \mapsto \alpha x$ iz X u X (za $\alpha \neq 0$) je homeomorfizam (zadatak 2.1), pa B možemo predstaviti kao presek familije zatvorenih skupova, što znači da je i B zatvoren. ❑

Propozicija 2.21. *U lokalno- konveksnom prostoru uravnotežene, zatvorene, konveksne okoline nule formiraju bazu okolina nule.*

Dokaz: Neka je W proizvoljna okolina nule. Tada postoji zatvorena okolina nule V tako da je $V \subset W$ (propozicija 2.13). Po pretpostavci tvrđenja (prostor je lokalno konveksan) V sadrži konveksnu okolinu nule U i $\overline{U} \subset \overline{V} = V$. Iz propozicije 2.17 sledi da je $\overline{U}$ takođe konveksan skup. Najzad, uravnoteženo jezgro od $\overline{U}$, označimo ga sa V_1, je uravnotežena, zatvorena (lema 2.20), konveksna okolina nule sadržana u W. Dakle, za proizvoljnu okolinu nule W smo našli okolinu nule $V_1 \subset W$ koja je uravnotežena, zatvorena i konveksna, pa zaključujemo da familija takvih skupova formira bazu okolina nule. ❑

Propozicija 2.22. *Neka je X vektorski prostor i $\mathcal{B}$ filter baza na X koja se sastoji od apsorbujućih, uravnoteženih, konveksnih skupova. Neka je $\mathcal{R}$ kolekcija skupova oblika λV, gde je $\lambda > 0$ i $V \in \mathcal{B}$. Tada postoji jedinstvena topologija na X za koju je X lokalno-konveksan prostor i za koju je $\mathcal{R}$ baza okolina nule.*

Dokaz: Pokažimo prvo da je $\mathcal{R}$ filter baza. Jasno je da uslov $(FB2)$ važi, zato što je $\mathcal{B}$ filter baza. Da bismo pokazali uslov $(FB1)$ posmatrajmo dva elementa $\lambda_1 V_1$ i $\lambda_2 V_2$ u $\mathcal{R}$, gde su $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ i $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$. Kako je $\mathcal{B}$ filter baza znamo da postoji $V \in \mathcal{B}$ tako da je $V \subset V_1 \cap V_2$. Tada za $\lambda_3 = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ važi

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} V \subset V \subset V_1 \quad \text{i} \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_2} V \subset V \subset V_2$$

zato što je V uravnotežen. Dobijamo da je $\lambda_3 V \subset \lambda_1 V_1 \cap \lambda_2 V_2$, pa važi osobina $(FB1)$ za kolekciju $\mathcal{R}$.
Sada možemo da primenimo teoremu 2.10 na filter bazu $\mathcal{R}$. Jasno je da osobine $(FS1)$ i $(FS2)$ važe. Dodatno imamo i da je svaki element filter baze $\mathcal{R}$ konveksan skup. Važi i osobina $(FS3)$. Ako $V \in \mathcal{R}$ onda i $\frac{1}{2}V \in \mathcal{R}$ i $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$. Dakle, teorema 2.10 implicira da postoji jedinstvena topologija na X za koju je X topološko-vektorski prostor sa bazom okolina nule $\mathcal{R}$. ❑

Primer 2.23. Neka je X vektorski prostor i neka je $\mathcal{R}$ kolekcija **svih** apsorbujućih, uravnoteženih, konveksnih podskupova od X. Jasno, kolekcija $\mathcal{R}$

je filter baza i ako $V \in \mathcal{R}$, onda i $\lambda V \in \mathcal{R}$, za $\lambda > 0$. Primenom propozicije 2.22 dobijamo jedinstvenu topologiju na X koju zovemo najfinijom lokalno konveksnom topologijom na X.

Primer 2.24. Posmatrajmo prostor $C(\Omega)$ koji je dat u primeru 2.12. Skupovi $V_K = V_{K,1}$ zadovoljavaju uslove propozicije 2.22, odnosno formiraju filter bazu $\mathcal{B}$. Pošto je $V_{K,\varepsilon} = \varepsilon V_K$, dobijamo da skupovi $V_{K,\varepsilon}$ formiraju bazu okolina nule za lokalno konveksnu topologiju na $C(\Omega)$.

Propozicija 2.25. *Neka je X vektorski prostor i $\mathfrak{W}$ kolekcija apsorbujućih, uravnoteženih, konveksnih podskupova od X. Neka je $\mathcal{R}$ kolekcija svih konačnih preseka skupova oblika λV, gde je $\lambda > 0$ i $V \in \mathfrak{W}$. Tada postoji jedinstvena topologija na X za koju je X lokalno-konveksan prostor i za koju je $\mathcal{R}$ baza okolina nule.*

Dokaz: Analogno kao u dokazu propozicije 2.11 vidimo da je familija $\mathcal{R}$ filter baza na X koja se sastoji od konveksnih, apsorbujućih, uravnoteženih skupova. Jasno je i da iz $V \in \mathcal{R}$ sledi da $\lambda V \in \mathcal{R}$ za sve $\lambda > 0$. Tvrđenje onda sledi iz dokaza propozicije 2.22. ❑

Neka je $\mathfrak{W}$ kolekcija definisana kao u propoziciji 2.25 i $\mathcal{R}$, baza koja je data u propoziciji 2.25.

Posledica 2.26. *Neka je X vektorski prostor i $\mathcal{B}$ kolekcija svih konačnih preseka elemenata iz $\mathfrak{W}$. Neka je $\mathcal{M}$ kolekcija svih skupova λV, gde je $\lambda > 0$ i $V \in \mathcal{B}$. Tada je $\mathcal{M}$ baza okolina nule ekvivalentna sa bazom $\mathcal{R}$.*

Dokaz: Jasno je da je $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$. Dokažimo da je $\mathcal{M}$ baza okolina nule. Neka je $V \in \mathcal{R}$ oblika $V = \cap_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$ za neke $\lambda_i > 0$ i $V_i \in \mathfrak{W}$. Tada je

$$\lambda \cap_{i=1}^{n} V_i \subset \cap_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$$

za $\lambda = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$. Dakle, za skup $V \in \mathcal{R}$ našli smo skup $U \in \mathcal{M}$ tako da je $U \subset V$, odnosno $\mathcal{M}$ je baza okolina nule. Sledi i da su $\mathcal{R}$ i $\mathcal{M}$ ekvivalentne baze okolina nule, odnosno topologije koje ove baze određuju su jednake.

❑

Primer 2.27. (Topološko-vektorski prostor koji nije lokalno konveksan)
Neka je $C([0,1])$ prostor neprekidnih funkcija $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Za $\varepsilon>0$ i $0<\delta<1$ definišimo skup $V_{\varepsilon,\delta}\subset C([0,1])$ na sledeći način:

$$f\in V_{\varepsilon,\delta} \text{ ako i samo ako je } |f(t)|\le\varepsilon, \text{ za svako } t\in[0,1]\setminus A$$

$$\text{za neki skup } A=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)\subset[0,1], \text{ takav da je } \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i)\le\delta,$$

gde je $\alpha_i<\beta_i$ i $\alpha_i,\ \beta_i\in[0,1], i\in\mathbb{N}$.

Pokazaćemo da je kolekcija skupova $V_{\varepsilon,\delta}$ filter baza na $C\big([0,1]\big)$.

Funkcija $f\equiv 0$ je element skupa $V_{\varepsilon,\delta}$ za svako $\varepsilon>0,\ 0<\delta<1$, pa prazan skup nije element kolekcije, odnosno važi uslov $(FB2)$ iz definicije 1.27.

Neka su $V_{\varepsilon',\delta'}$ i $V_{\varepsilon'',\delta''}$ elementi kolekcije i $\varepsilon=min\{\varepsilon',\varepsilon''\}$ i $\delta=min\{\delta',\delta''\}$. Tada je $V_{\varepsilon,\delta}\subset V_{\varepsilon',\delta'}\cap V_{\varepsilon'',\delta''}$, pa je ispunjen i uslov $(FB1)$.

Dokažimo da kolekcija skupova $V_{\varepsilon,\delta}$ zadovoljava uslove *(FS1)–(FS3)* iz teoreme 2.10.

Pokazujemo prvo $(FS1)$. Neka je $\varepsilon>0,\ 0<\delta<1$ i $f\in C\big([0,1]\big)$. Funkcija f je realna neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom $[0,1]$, pa dostiže minimalnu i maksimalnu vrednost. Sledi da postoji $C>0$ tako da je $|f(t)|\le C$, za sve $t\in[0,1]$. Neka je $\varepsilon>0$ i $0<\delta<1$. Tada je $\left|\frac{\varepsilon}{C}f(t)\right|\le\varepsilon$, za sve $t\in[0,1]$.
Zatim, za svako $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda|\le\frac{\varepsilon}{C}$ važi $|\lambda f(t)|\le\left|\frac{\varepsilon}{C}f(t)\right|\le\varepsilon$, za sve $t\in[0,1]$. Stoga, za proizvoljan skup $A\subset[0,1]$ i svako $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda|\le\frac{\varepsilon}{C}$ važi da je $|\lambda f(t)|\le\varepsilon$, za sve $t\in[0,1]\setminus A$. Dakle, za sve $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda|\le\frac{\varepsilon}{C}$ važi $\lambda f\in\ V_{\varepsilon,\delta}$, pa je $V_{\varepsilon,\delta}$ apsorbujući skup.

Dalje neka je $\varepsilon > 0$ i $0 < \delta < 1$. Ako je $f \in V_{\varepsilon,\delta}$, onda postoji skup $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i) \subset [0,1]$ takav da je $\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) \leq \delta$ i važi $|f(t)| \leq \varepsilon$, za sve $t \in [0,1] \setminus A$. Tada je $|\lambda f(t)| \leq \varepsilon$, za svako $|\lambda| \leq 1$ i svako $t \in [0,1] \setminus A$, odnosno $V_{\varepsilon,\delta}$ je uravnotežen skup, pa važi $(FS2)$.

Primetimo i da za $\varepsilon > 0$ i $0 < \delta < 1$ važi da je $V_{\frac{\varepsilon}{2},\delta} + V_{\frac{\varepsilon}{2},\delta} \subset V_{\varepsilon,\delta}$, pa je ispunjen uslov $(FS3)$.

Teorema 2.10 implicira da postoji jedinstvena topologija τ, takva da je $\big(C\big([0,1]\big), \tau\big)$ topološko-vektorski prostor u kom je kolekcija skupova $V_{\varepsilon,\delta}$ baza okolina nule.

Treba još pokazati da topologija τ nije lokalno konveksna. Dovoljno je pokazati da skup $U \subset C\big([0,1]\big)$ takav da je $V_{\varepsilon',\delta'} \subset U \subset V_{\varepsilon,\delta}$, za neke $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ i $\delta, \delta' \in (0,1)$, ne može biti konveksan. Tada sledi da u (X, τ) ne postoji baza konveksnih okolina nule.

Neka je $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, $0 < \delta' < \delta < \frac{1}{2}$ i $V_{\varepsilon',\delta'} \subset U \subset V_{\varepsilon,\delta}$. Neka su $I_i = (\alpha_i, \beta_i) \subset [0,1]$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, međusobno disjunktni otvoreni intervali, takvi da za sve $1 \leq i \leq n$ važi $\beta_i - \alpha_i = \delta'$ i $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) > 2\delta$. Za svako i označimo sa J_i interval dužine $\frac{\delta'}{2}$ u sredini intervala I_i. Neka je $f_i \in C\big([0,1]\big)$ $(0 \leq i \leq n)$ nenegativna funkcija, takva da je $f_i(t) = 0$ za $t \in [0,1] \setminus I_i$ i $f_i(t) > n\varepsilon$ za $t \in J_i$. Kako je $\beta_i - \alpha_i = \delta'$, sledi da je $f_i \in V_{\varepsilon',\delta'} \subset U$, za $0 \leq i \leq n$. Pokazaćemo da $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f_i \notin V_{\epsilon,\delta}$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f_i \in V_{\epsilon,\delta}$. Tada postoji skup $O = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\gamma_i, \xi_i) \subset [0,1]$ takav da je $\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i - \gamma_i) \leq \delta$ i $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f_i(t) =$

$\left|\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i\right)(t)\right| \leq \varepsilon$, za svako $t \in [0,1] \setminus O$. Znamo da je $\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i - \alpha_i}{2} = n\frac{\delta'}{2} > \delta$, odakle sledi da postoji $t' \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} J_i\right) \setminus O$. Tada $t' \in J_{i'}$ za neko $0 \leq i' \leq n$. Dalje važi $f_{i'}(t') > n\varepsilon$, pa je

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i(t')\right| = \sum_{i \neq i'}\frac{1}{n}f_i(t') + \frac{1}{n}f_{i'}(t') > \frac{1}{n}n\varepsilon = \varepsilon.$$

Kako $t' \notin O$, dolazimo do kontradikcije, pa sledi da $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i \notin V_{\epsilon,\delta}$.

Dakle $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i \notin U$, pa skup U nije konveksan, prema propoziciji 2.14.

2.2.1 Zadavanje topologije preko familije semi-normi

Primer 2.28. Posmatrajmo prostor $\mathcal{D}(K)$ uveden u primeru 2.12. Skupovi $V_p = V_{p,1}$ su uravnoteženi, apsorbujući i konveksni. Pošto je $V_{p,\varepsilon} = \varepsilon V_p$ sledi da konačni preseci skupova $V_{p,\varepsilon}$ formiraju bazu okolina nule za lokalno-konveksnu topologiju na $\mathcal{D}(K)$.

Definicija 2.29. *Neka je X vektorski prostor. Preslikavanje $q : X \to [0,\infty)$ koje zadovoljava uslove:*

(SN1) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$ *za sve* $\lambda \in \mathbb{K}$ *i* $x \in X$,

(SN2) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$

zovemo semi-norma na X.

Iz uslova $(SN1)$ jasno je da važi $q(0) = 0$. Ako obratno $q(x) = 0$ implicira da je $x = 0$, onda je q norma na X.

Neka je X vektorski prostor i q semi-norma na X. Tada je skup

$$V = \{x \mid q(x) \leq 1\}$$

apsorbujući, uravnotežen i konveksan.

Neka je $(q_i)_{i\in I}$ familija semi-normi definisanih na X i neka je

$$V_i = \{x \in X \mid q_i(x) \leq 1\},\ i \in I.$$

Sledi iz propozicije 2.25 da konačni preseci skupova $\varepsilon V_i, \varepsilon > 0$ formiraju bazu okolina nule za lokalno konveksnu topologiju τ na X. Označimo $\varepsilon V_i = V_{i,\varepsilon}$. Jasno je da je $V_{i,\varepsilon} = \{x \in X \mid q_i(x) \leq \varepsilon\}$. Dakle, baza okolina nule za τ je data preko skupova

$$V_{i_1,\ldots,i_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \{x \mid q_{i_k}(x) \leq \varepsilon_k,\ 1 \leq k \leq n\},$$

gde je $\{i_1, \ldots, i_n\}$ konačan podskup od I i $\varepsilon_k > 0, 1 \leq k \leq n$. Iz posledice 2.26 sledi da je ekvivalentna baza okolina nule data preko skupova

$$V_{i_1,\ldots,i_n,\varepsilon} = \{x \mid q_{i_k}(x) \leq \varepsilon,\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Primer 2.30. Na prostoru $C(\Omega)$ možemo definisati familiju semi-normi na sledeći način. Neka je $K \subset \Omega$ kompaktan i definišimo

$$q_K(f) = \max_{x\in K} |f(x)|.$$

Topologija uvedena ovom familijom semi-normi je ista kao topologija uvedena u primeru 2.12. Skup V_K iz primera 2.24 je dat sa $V_K = \{f|\ q_K(f) \leq 1\}$.

Primer 2.31. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $m \in \mathbb{N}_0$. Sa $\mathcal{E}^m(\Omega)$ označavamo vektorski prostor funkcija $f : \Omega \to \mathbb{K}$ takvih da njihovi parcijalni izvodi $\partial^p f$ reda $|p| \leq m$ postoje i neprekidni su. Za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ i za svaki multi-indeks $p \in \mathbb{N}_0^n$ reda $|p| \leq m$ definišemo seminormu

$$q_{K,p}(f) = \max_{x\in K} |\partial^p f(x)|. \tag{2.2}$$

Familija semi-normi u (2.2) definiše lokalno-konveksnu topologiju na $\mathcal{E}^m(\Omega)$. Za $m = 0$ se radi o prostoru $C(\Omega)$.

Primer 2.32. Za $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup definišemo vektorski prostor $\mathcal{E}(\Omega)$ glatkih funkcija na Ω (imaju neprekidne parcijalne izvode svih redova). Prostor $\mathcal{E}(\Omega)$ snabdevamo familijom semi-normi koja je definisana u (2.2) za kompaktan skup $K \subset \Omega$ i $p \in \mathbb{N}_0^n$ i na taj način dobijamo i lokalno-konveksnu topologiju na $\mathcal{E}(\Omega)$.

Primer 2.33. Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $m \in \mathbb{N}_0$. Sa $\mathcal{D}^m(K)$ označavamo vektorski prostor funkcija f definisanih na $\mathbb{R}^n$ čiji parcijalni izvodi $\partial^p f$ za $|p| \leq m$ postoje i neprekidni su i čiji nosač je sadržan u K. Za svaki multi-indeks $|p| \leq m$ definišemo semi-normu

$$q_p(f) = \max_{x \in K} |\partial^p f(x)|. \tag{2.3}$$

Preko familije semi-normi (2.3) prostor $\mathcal{D}^m(K)$ postaje lokalno konveksan. Za $m = 0$ ćemo pisati $\mathcal{K}(K)$ umesto $\mathcal{D}^0(K)$. Primetimo da je topologija prostora $\mathcal{K}(K)$ definisana preko jedne semi-norme, odnosno preko norme q_0.

Primer 2.34. Na prostoru $\mathcal{D}(K)$ topologiju uvodimo preko familije semi-normi (2.3) za svako $p \in \mathbb{N}_0^n$. Skup V_p definisan u Primeru 2.28 je dat sa

$$V_p = \{f \mid q_p(f) \leq 1\}.$$

Primer 2.35. Neka je $m \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$. Sa S_k^m označavamo vektorski prostor funkcija definisanih na $\mathbb{R}^n$ čiji parcijalni izvodi $\partial^p f$ postoje i neprekidni su za $|p| \leq m$ i koje zadovoljavaju sledeći uslov: za dato $p \in \mathbb{N}_0^n, |p| \leq m$ i $\varepsilon > 0$ postoji $\rho > 0$ (koje zavisi od f, p, ε) tako da je

$$|(1 + |x|^2)^k \partial^p f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{za} \quad |x| > \rho. \tag{2.4}$$

Za svako $|p| \leq m$ definišemo semi-normu

$$q_{k,p}(f) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^k \partial^p f(x)| \tag{2.5}$$

Primer 2.36. Za fiksiran ceo broj k označimo sa S_k vektorski prostor svih funkcija definisanih na $\mathbb{R}^n$ koje imaju neprekidne parcijalne izvode svih redova i koje zadovoljavaju uslov (2.4) za svako $p \in \mathbb{N}_0^n$. Na S_k imamo familiju semi-normi $(q_{k,p})$, gde je $q_{k,p}$ definisana sa (2.5) i $p \in \mathbb{N}_0$.

Primer 2.37. Za fiksirano $m \in \mathbb{N}_0$ sa S^m označavamo vektorski prostor funkcija defnisanih na $\mathbb{R}^n$ čiji parcijalni izvodi $\partial^p f$ postoje i neprekidni su za $|p| \leq m$ i koje zadovoljavaju sledeći uslov: za svako $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}_0^n, |p| \leq m$ i $\varepsilon > 0$ postoji $\rho > 0$ tako da je

$$|(1+|x|^2)^k \partial^p f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{za} \quad |x| > \rho.$$

Kažemo da je funkcija f zajedno sa svojim izvodima reda $|p| \leq m$ brzo opadajuća. Prostor S^m snabdevamo sa familijom semi-normi koje su definisane sa (2.5), pri čemu $k \in \mathbb{Z}$ i $|p| \leq m$.

Primer 2.38. Sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ označavamo vektorski prostor funkcija koje imaju neprekidne parcijalne izvode svih redova i čiji svi izvodi su brzo opadajuće funkcije. Prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ snabdevamo lokalno- konveksnom toplogijom koja je definisana preko familije semi-normi $(q_{k,p})$ koja je data sa (2.5), gde $k \in \mathbb{Z}$ i $p \in \mathbb{N}_0$. U nastavku ćemo prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nazivati i prostorom brzo-opadajućih funkcija ili Švarcovim prostorom.

Primetimo i da ako uslov (2.4) važi za sve $k \in \mathbb{N}_0$, onda važi i za sve $k \in \mathbb{Z}$.

Primer 2.39. Neka je X normiran prostor i X' njegov dual, odnosno prostor linearnih, neprekidnih preslikavanja iz X u polje $\mathbb{K}$. Za svako $x' \in X'$ definišemo semi-normu $q_{x'}$ na X sa

$$q_{x'}(x) = |\langle x, x' \rangle|.$$

Lokalno-konveksnu topologiju na X definisanu preko familije semi-normi $(q_{x'})_{x' \in X'}$ zovemo slaba topologija na X.

2.2.2 Funkcional Minkovskog

Videli smo da lokalno-konveksnu topologiju možemo definisati preko familije semi-normi. Dokažimo obratno, ako je lokalno-konveksna topologija data, onda postoji familija semi-normi preko koje dobijamo istu topologiju.

Neka je X vektorski prostor i $A \subset X$. Funkcional Minkovskog skupa A je preslikavanje $g_A : X \to [0, \infty]$ tako da važe uslovi:

- $g_A(x) = \inf\{\rho > 0 \mid x \in \rho A\}$, ako postoji $\rho_0 > 0$ tako da $x \in \rho_0 A$,
- $g_A(x) = \infty$, ako $x \notin \rho A$ za sve $\rho > 0$.

U slučaju kada je A apsorbujući skup imamo da je vrednost za g_A konačna. Ako $0 \in A$, onda je $g_A(0) = 0$.

Lema 2.40. *Za $\lambda > 0$ važi $g_A(\lambda x) = \lambda g_A(x)$.*

Dokaz: Ako je $g_A(x) = \infty$ jasno je da tvrđenje važi. Pretpostavimo zato da je $g_A(x) < \infty$. Tada je

$$g_A(\lambda x) = \inf\{\rho > 0 \mid \lambda x \in \rho A\} = \inf\{\rho > 0 \mid x \in \frac{\rho}{\lambda}A\} = \inf\{\lambda\alpha > 0 \mid x \in \alpha A\}$$

$$= \inf \lambda\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha A\} = \lambda \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha A\} = \lambda g_A(x).$$

❑

Neka je sada $A \subset X$ apsorbujući, uravnotežen, konveksan skup. Važi sledeća teorema.

Teorema 2.41. *U vektorskom prostoru X funkcional Minkovskog apsorbujućeg, uravnoteženog, konveksnog skupa A je semi-norma.*

Dokaz: Primetimo da je $g_A(x) < \infty$ zato što je A apsorbujući. Pokažimo prvo da je $g_A(\alpha x) = |\alpha| g_A(x)$ za svaki $\alpha \in \mathbb{K}$. Kako je A uravnotežen znamo da $0 \in A$, pa možemo pretpostaviti da je $\alpha \neq 0$. Iz uravnoteženosti skupa A sledi da je za sve $x \in X$ i za sve $\alpha, \rho \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ ispunjeno

$$\alpha x \in \rho A \text{ ako i samo ako } x \in \frac{\rho}{|\alpha|}A.$$

Zaista, zbog uravnoteženosti je $\alpha A = |\alpha| A$, pa

$$x \in \frac{\rho}{|\alpha|}A \text{ ako i samo ako } \alpha x \in \alpha\frac{\rho}{|\alpha|}A = \rho A.$$

Dakle, za $x \in X$ i $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$ je

$$g_A(\alpha x) = \inf\{\rho > 0 \mid \alpha x \in \rho A\} = \inf\left\{\rho > 0 \mid x \in \frac{\rho}{|\alpha|}A\right\}$$

$$= \inf\left\{\frac{|\alpha|\rho}{|\alpha|} > 0 \mid x \in \frac{\rho}{|\alpha|}A\right\} = |\alpha| \inf\left\{\mu > 0 \mid x \in \mu A\right\} = |\alpha| g_A(x).$$

Pokažimo sada subaditivnost za g_A. Neka $x, y \in X$. Prema definiciji funkcionala Minkovskog za svako $\varepsilon > 0$ postoje $\lambda, \mu > 0$ tako da je

$$\lambda \leq g_A(x) + \varepsilon,\ x \in \lambda A \text{ i } \mu \leq g_A(y) + \varepsilon,\ y \in \mu A.$$

Skup A je konveksan pa je $\lambda A + \mu A \subset (\lambda + \mu)A$ i $x + y \in (\lambda + \mu)A$. Dakle,

$$g_A(x+y) = \inf\{\delta > 0 \mid x + y \in \delta A\} \leq \lambda + \mu \leq g_A(x) + g_A(y) + 2\varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno sledi da subaditivnost važi. ❑

Propozicija 2.42. *Neka je X topološko-vektorski prostor i $A \subset X$ apsorbujući, uravnotežen, konveksan skup. Tada je A okolina nule ako i samo ako je funkcional Minkovskog $g_A : X \to [0, \infty)$ neprekidno preslikavanje.*

Dokaz: Neka je A okolina nule. Dokažimo da je g_A neprekidno. Znamo da je g_A semi-norma, pa iz subaditivnosti sledi da je $|g_A(x) - g_A(y)| \leq g_A(x-y)$. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Pokazaćemo da je g_A neprekidno u x_0. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Treba naći okolinu V tačke x_0 tako da je za sve $y \in V$ važi $|g_A(x_0) - g_A(y)| \leq \varepsilon$. Neka je $V = x_0 + \varepsilon A$. Tada je $y = x_0 + \varepsilon a$ za neko $a \in A$, pa je $|g_A(x_0) - g_A(y)| \leq g_A(\varepsilon a) \leq \varepsilon$, pa je V tražena okolina tačke x_0 (primetimo da je dovoljno pokazati neprekidnost u $x_0 = 0$).

Pretpostavimo sada da je g_A neprekidno. Tada je skup

$$\{x \mid g_A(x) < 1\} = g_A^{-1}([0, 1))$$

otvoren, kao inverzna slika otvorenog skupa. Sledi da je $0 \in \{x \mid g_A(x) < 1\} \subset A$, pa je A okolina nule. ❑

Lema 2.43. *Neka je X topološko-vektorski prostor i neka je V uravnotežena, konveksna okolina nule. Tada je zatvorenje skupa V skup*

$$B = \{x \mid g_V(x) \leq 1\}.$$

Dokaz: Pokažimo da je $\overline{V} \subset B$. Jasno je da je $V \subset B$. Kako je $B = g_V^{-1}([0,1])$ i g_V je neprekidna (primetimo da je V okolina nule, pa je i apsorbujući skup) sledi da je B zatvoren skup. Zato je $\overline{V} \subset \overline{B} = B$.

Dokažimo da je $B \subset \overline{V}$. Neka je $x \in B$, odnosno $g_V(x) \leq 1$ i neka je W okolina tačke x. Za $|\rho| < 1$ važi da $\rho x \in V$, zato što je $g_V(\rho x) < 1$. Množenje skalarom je neprekidno i $1x = x$, pa postoji $\varepsilon > 0$ tako da za $1-\varepsilon < |\rho_1| < 1+\varepsilon$ važi $\rho_1 x \in W$. Dakle ako biramo $1-\varepsilon < |\rho_2| < 1$, sledi da $\rho_2 x \in W \cap V$. Pošto je W proizvoljna okolina tačke x i $W \cap V \neq \emptyset$, dobijamo da $x \in \overline{V}$, što je i trebalo pokazati. ❑

Sada možemo da dokažemo da za datu lokalno - konveksnu topologiju na prostoru X postoji familija semi-normi koja daje istu topologiju.

Teorema 2.44. *Neka je (X, τ) lokalno-konveksni topološki prostor. Tada postoji familija semi-normi koja definiše upravo topologiju τ.*

Dokaz: Prema propoziciji 2.21 znamo da postoji baza okolina nule $\mathcal{B}(0)$ u (X, τ) koja se sastoji od uravnoteženih, konveksnih, zatvorenih skupova. Označimo elemente ove baze sa $V_i, i \in I$. Skupovi εV_i, $\varepsilon > 0, i \in I$ su takođe okoline nule koje su uravnoteženi, zatvoreni i konveksni skupovi i posmatrajmo bazu okolina nule $\mathcal{B}_1(0)$ u (X, τ) koja se sastoji od konačnih preseka skupova εV_i. Iz leme 2.43 sledi da je $V_i = \overline{V_i} = \{x \in X \mid g_{V_i}(x) \leq 1\}$. Znamo i da su funkcionele g_{V_i} semi-norme na X. Za ovu familiju semi-normi skupovi $V_{i_1,\ldots,i_n,\varepsilon} = \varepsilon(V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_n})$ formiraju bazu okolina nule $\nu(0)$ za lokalno-konveksnu topologiju τ_1 na X. Iz posledice 2.26 sledi da je $\tau = \tau_1$. ❑

Važi i sledeća teorema.

Teorema 2.45. *Neka je (X, τ) lokalno-konveksni prostor. Topologija τ se može definisati preko familije svih semi-normi koje su neprekidne za τ.*

Neka je $q_i, 1 \leq i \leq n$ konačna familija semi-normi definisana na vektorskom prostoru X. Tada je funkcija $q(x) = \max_{1 \leq i \leq n} q_i(x)$ takođe semi-norma na X i važi

$$\{x \mid q(x) \leq \varepsilon\} = \{x \mid q_i(x) \leq \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}. \tag{2.6}$$

Ako je X topološko-vektorski prostor i ako su $q_i, 1 \leq i \leq n$ neprekidne, onda je i q neprekidna semi-norma. Uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.46. *Neka je $\mathcal{F}$ familija semi-normi na vektorskom prostoru X. Kažemo da je $\mathcal{F}$ zasićena ako za svaku konačnu potfamiliju (q_i) u $\mathcal{F}$ važi da* $\max_i q_i \in \mathcal{F}$.

Neka je $(q_i)_{i\in I}$ zasićena familija semi-normi na X koja definiše lokalno-konveksnu topologiju τ. Tada iz (2.6) sledi da je baza okolina nula za τ data preko skupova $V_{i,\varepsilon} = \{x \mid q_i(x) \leq \varepsilon\}$. Lokalno-konveksna topologija uvek može da se definiše preko zasićene familije semi-normi. Na primer, iz teoreme 2.45 sledi da je familija svih neprekidnih semi-normi tražena zasićena familija.

Kažemo da su dve familije semi-normi na vektorskom prostoru X ekvivalentne ako definišu istu lokalno konveksnu topologiju na X.

Napomena 2.47. Neka je $(q_i)_{i\in I}$ familija semi-normi koja definiše lokalno konveksnu topologiju τ na vektorskom prostoru X. Posmatrajmo za svaku konačnu potfamiliju $q_{i_k}, 1 \leq k \leq n$ semi-norme definisane sa

$$q_{i_1,\ldots,i_n} = \max_{1\leq k\leq n} q_{i_k}.$$

Na ovaj način dobijamo ekvivalentnu zasićenu familiju semi-normi $q_{i_1,\ldots,i_n}$. Prema (2.6) okolina $V_{i_1,\ldots,i_n,\varepsilon}$ je sada skup $\{x \mid q_{i_1,\ldots,i_n} \leq \varepsilon\}$.

2.2.3 Neprekidna linearna preslikavanja

Propozicija 2.48. *Neka su X i Y topološko-vektorski prostori i neka je $f : X \to Y$ linearno preslikavanje. Ako je f neprekidno u nuli, onda je i neprekidno na X.*

Dokaz: Neka je $a \in X$ proizvoljna tačka. Treba pokazati da za svaku okolinu V tačke $f(a)$ postoji okolina U tačke a tako da je $f(U) \subset V$. Neka je V data okolina tačke $f(a)$. Znamo da je tada $V = W + f(a)$ gde je W okolina nule u Y. Kako je f neprekidno u nuli znamo da postoji okolina W_1 nule u X tako da je $f(W_1) \subset W$. Tada je $U = a + W_1$ okolina tačke a i zbog linearnosti je $f(a+W_1) = f(a)+f(W_1)$, pa je $f(a+W_1) \subset f(a)+W$, čime smo dokazali neprekidnost u $a \in X$. ❑

Sada dokazujemo teoremu koja nam daje uslov da linearno preslikavanje između dva lokalno-konveksna prostora bude neprekidno.

Teorema 2.49. *Neka je X lokalno- konveksni prostor čija topologija je definisana preko zasićene familije semi-normi $(q_i)_{i\in I}$. Neka je Y lokalno konveksni prostor čija topologija je definisana preko familije semi-normi $(r_j)_{j\in J}$. Linearno preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaku semi-normu r_j postoje semi-norma q_i i $M > 0$ (koji zavise od j) tako da je*

$$r_j(f(x)) \leq M q_i(x) \quad \text{za sve } x \in X.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je f neprekidno i neka $j \in J$. To znači da je f neprekidno i u nuli i pošto je $f(0) = 0$ (linearnost) za okolinu nule $V = \{y \in Y \ : \ r_j(y) \leq 1\}$ u Y postoji okolina nule U u X tako da je $f(U) \subset V$. Familija $(q_i)_{i\in I}$ je zasićena, pa su okoline nule u X oblika $V_{i,\varepsilon} = \{x \mid q_i(x) \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Dakle, zbog neprekidnosti postoje $i \in I$ i $\gamma > 0$ tako da je $f(\{x \in X \mid q_i(x) \leq \gamma\}) \subset \{y \in Y \ : \ r_j(y) \leq 1\}$. Zaključujemo da za svako $j \in J$ postoje $i \in I, \gamma > 0$ tako da $q_i(x) \leq \gamma$ implicira $r_j(f(x)) \leq 1$. Tada je

$$r_j(f(x)) \leq \frac{1}{\gamma} q_i(x) \quad \text{za sve } x \in X. \tag{2.7}$$

Zaista, pretpostavimo prvo da je $q_i(x) = 0 < \gamma$ (primetimo da je q_i semi-norma pa ne mora biti $x = 0$). Tada je za svako $\mu > 0$ ispunjeno $q_i(\mu x) < \gamma$, pa je $r_j(f(\mu x)) = \mu r_j(f(x)) \leq 1$. Kako je $\mu > 0$ proizvoljno sledi da je $r_j(f(x)) = 0$. Ako je $q_i(x) \neq 0$, onda je $q_i(\frac{\gamma x}{q_i(x)}) = \gamma$, pa je

$$r_j\Big(f\Big(\frac{\gamma x}{q_i(x)}\Big)\Big) = \frac{\gamma}{q_i(x)} r_j(f(x)) \leq 1.$$

Dakle, važi uslov (2.7).

Pretpostavimo sada da za svaku semi-normu r_j postoje semi-norma q_i i $M > 0$ tako da je $r_j(f(x)) \leq Mq_i(x)$. Da bismo pokazali neprekidnost preslikavanja f dovoljno je da pokažemo neprekidnost u nuli (propozicija 2.48). Neka je W okolina nule u Y. Tada W sadrži skup oblika

$$\{x \mid r_{j_k}(x) \leq \varepsilon,\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Znamo da postoje indeksi i_k i konstante $M_k > 0$, $1 \leq k \leq n$ tako da je $r_{j_k}(f(x)) \leq M_k q_{i_k}(x)$. Neka je

$$V = \left\{x \mid q_{i_k}(x) \leq \frac{\varepsilon}{M_k},\ 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Tada je $f(V) \subset W$, pa je tvrđenje dokazano. ❑

Napomena 2.50. Neka je X lokalno-konveksan prostor sa zasićenom familijom semi-normi i posmatrajmo $\mathbb{R}$ sa uobičajenom topologijom. Linearno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidno ako i samo ako postoje semi-norma q_i i $M > 0$ tako da je $|f(x)| \leq Mq_i(x)$ za sve $x \in X$.

Napomena 2.51. Neka su X i Y dva lokalno konveksna prostora čije topologije su definisane preko familije semi-normi $(q_i)_{i \in I}$ i $(r_j)_{j \in J}$ i neka je $f : X \to Y$ linearno preslikavanje. Tada je f neprekidno ako i samo ako za svako $j \in J$ postoji konačna familija elemenata $(i_1, \ldots, i_n)$ elemenata u I i pozitivan broj M tako da je

$$r_j(f((x)) \leq M \max_{1 \leq k \leq n} q_{i_k}(x), \quad \text{za sve} \quad x \in X.$$

2.2.4 Zadaci

Zadatak 2.2. Pokazati formulu (2.1) za uravnoteženo jezgro skupa.

Zadatak 2.3. Pokazati da je uravnoteženo jezgro konveksnog skupa A konveksan skup.

Zadatak 2.4. Neka je X vektorski prostor na kom su date dve lokalno konveksne topologije τ i τ'. Neka je τ definisana preko familije semi-normi $(q_i)_{i\in I}$, a τ' preko familije semi-normi $(r_j)_{j\in J}$. Tada je τ finija od τ' ako i samo ako za svako r_j postoji konačna potfamilija q_{i_k}, $1 \leq k \leq n$ i $M > 0$ tako da je

$$r_j(x) \leq M \max_{1\leq k\leq n} q_{i_k}(x), \quad \text{za sve} \quad x \in X.$$

Uputstvo: Ovaj uslov znači da je identičko preslikavanje $i : (X, \tau) \to (X, \tau')$ neprekidno.

2.3 Ograničeni skupovi, normabilnost, metrizabilnost

Definicija 2.52. *Neka je X vektorski prostor i A, B neka su podskupovi od X. Kažemo da A apsorbuje B ako postoji $\alpha > 0$ tako da je $B \subset \lambda A$ za sve $|\lambda| \geq \alpha$.*

Napomena 2.53. Neka je $A \subset X$, gde je X vektorski prostor. Tada je A apsorbujući (definicija 2.5) ako i samo ako A apsorbuje sve konačne podskupove od X.

Ako je A uravnotežen, onda A apsorbuje B ako postoji $\mu \in \mathbb{K}$ tako da je $B \subset \mu A$. Zaista, ako postoji takvo μ, onda za $|\lambda| \geq |\mu|$ sledi da je $|\lambda^{-1}\mu| \leq 1$, pa iz uravnoteženosti sledi

$$B \subset \mu A = \lambda(\lambda^{-1}\mu)A \subset \lambda A.$$

Dakle, za $\alpha = |\mu|$ je ispunjen uslov iz definicije 2.52

Definicija 2.54. *Neka je X topološko-vektorski prostor. Skup $B \subset X$ je ograničen ako ga apsorbuje svaka okolina nule.*

Napomena 2.55. Podskup E normiranog vektorskog prostora $(V, \|\cdot\|)$ je ograničen ako postoji $C > 0$ tako da je $\|v\| \leq C$ za sve $v \in E$. Primetimo da definicija 2.54 uopštava pojam ograničenog skupa sa normiranog na proizvoljni topološko-vektorski prostor.

Jasno je i da je skup ograničen ako i samo ako ga apsorbuje svaka okolina koja pripada bazi okolina nule.

Napomena 2.56. Navedimo dodatne osobine koje slede iz definicije ograničenog skupa.

1. Svaki podskup ograničenog skupa je takođe ograničen.

2. Unija konačno mnogo ograničenih skupova je ograničen skup. Ovu osobinu je dovoljno pokazati za dva skupa. Neka su A i B dva ograničena skupa u topološko-vektorskom prostoru X. Treba da pokažemo da svaka okolina nule apsorbuje $A \cup B$, odnosno da svaka okolina iz baze okolina nule apsorbuje ovaj skup. Neka je U proizvoljna okolina iz baze okolina nule. Tada postoji uravnotežena okolina nule V tako da je $V \subset U$ (na primer uravnoteženo jezgro od U). Kako su A i B ograničeni postoje $\alpha, \beta > 0$ tako da je $A \subset \alpha V$ i $B \subset \beta V$. Tada za $\gamma = \max(\alpha, \beta)$ sledi da je $A \cup B \subset \gamma V$, što sledi iz uravnoteženosti okoline V. Takođe sledi i da je $A \cup B \subset \lambda V$ za sve skalare λ tako da je $|\lambda| \geq \gamma$. Dakle za proizvoljnu okolinu U koja je u bazi okolina nule smo pokazali da postoji $\gamma > 0$ tako da za sve $\lambda \in \mathbb{K}$ tako da je $|\lambda| \geq \gamma$ važi da je $A \cup B \subset \lambda U$.

3. Jednočlani skup je ograničen zato što je svaka okolina nule apsorbujuća. Sledi da je skup koji se sastoji od konačno mnogo tačaka ograničen.

4. Zatvorenje ograničenog skupa je ograničen skup (zadatak 2.6).

Definicija 2.57. *Kolekcija $\mathcal{B}$ ograničenih skupova u X je baza okolina ograničenih skupova ako za svaki ograničen skup B u X postoji skup $P \in \mathcal{B}$ tako da je $B \subset P$.*

Lema 2.58. *U lokalno-konveksnom prostoru X postoji baza ograničenih skupova koja se sastoji od uravnoteženih, zatvorenih, konveksnih (ograničenih) skupova.*

Dokaz: Neka je B ograničen skup u X. Neka je P presek svih uravnoteženih, zatvorenih, konveksnih skupova koji sadrže B. Tada je P takođe uravnotežen, zatvoren i konveksan skup koji sadrži B. Treba još pokazati da je P ograničen. Prema propoziciji 2.21 sledi da u X postoji baza okolina nule koja se sastoji od uravnoteženih, konveksnih, zatvorenih okolina. Neka je V takva okolina nule. Skup B je ograničen, pa postoji $\alpha > 0$ tako da je $B \subset \lambda V$ za sve skalare λ takve da je $|\lambda| \geq \alpha$. Tada je i $P \subset \lambda V$ za sve $|\lambda| \geq \alpha$. Dakle, tražena baza ograničenih skupova je familija nadskupova ograničenih skupova koji su pritom presek svih uravnoteženih, zatvorenih, konveksnih skupova koji sadrže dati ograničen skup B. ❑

Neka je X lokalno konveksni prostor čija topologija je definisana familijom semi-normi $(q_i)_{i \in I}$. Tada imamo sledeću karakterizaciju ograničenih skupova u X.

Lema 2.59. *Skup $B \subset X$ je ograničen ako i samo ako je svaka semi-norma q_i ograničena na B.*

Dokaz leme 2.59 ostavljamo čitaocu za vežbu.

Neka je X vektorski prostor i neka je q semi-norma na X. Znamo da q definiše lokalno-konveksnu topologiju τ na X. Ova topologija ima bazu ograničenih (lema 2.59) okolina nule koja se sastoji od skupova

$$V_\varepsilon = \{x \mid q(x) \leq \varepsilon\}, \ \varepsilon > 0.$$

Obratno važi sledeće tvrđenje.

Propozicija 2.60. *Neka je X lokalno-konveksan prostor u kom postoji ograničena okolina nule. Tada topologiju prostora X možemo definisati preko jedne semi-norme.*

Dokaz: Neka je V uravnotežena, ograničena okolina nule u X. Iz propozicije 2.21 sledi da postoji ograničena, zatvorena, konveksna okolina nule W koja je sadržana u V. Tada je funkcional Minkovskog q_W semi-norma, prema teoremi 2.41 i $W = \{x : q_W(x) \leq 1\}$ prema propoziciji 2.43. Skupovi

$$W_\varepsilon = \{x : q_W(x) \leq \varepsilon\}, \ \varepsilon > 0$$

formiraju bazu okolina nule za topologiju koja je data na X. Zaista, neka je U proizvoljna okolina nule. Kako je V ograničena, onda postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $\varepsilon V \subset U$, pa je i $W_\varepsilon \subset U$. ❑

Neka je X topološko-vektorski prostor čija topologija je definisana preko jedne semi-norme q. Može se pokazati da je tada q norma ako i samo ako je X Hauzdorfov prostor.

Ako topologija prostora X može da se definiše preko konačne familije semi-normi $(q_i)_{1\leq i\leq n}$, onda može da se definiše preko jedne semi-norme q. Na primer, možemo posmatrati $q(x) = \max_{1\leq i\leq n} q_i(x)$ ili $q(x) = \sum_{i=1}^n q_i(x)$. Tada je za svako $x \in X$

$$q_i(x) \leq \max_{1\leq i\leq n} q_i(x) \leq \sum_{i=1}^n q_i(x) \leq n \max_{1\leq i\leq n} q_i(x).$$

2.3.1 Normabilni i metrizabilni prostori

Ako topologija topološko-vektorskog prostora može da se definiše preko norme, onda kažemo da je prostor normabilan. Sledi da potreban i dovoljan uslov da prostor bude normabilan jeste da je prostor lokalno-konveksan i Hauzdorfov i da ima ograničenu okolinu nule.

Primer 2.61. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup, $m \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$. Prostori $\mathcal{D}^m(K)$ i S_k^m su normabilni pošto su Hauzdorfovi i definisani preko konačne familije semi-normi.

Topološko-vektorski prostor X je metrizabilan ako postoji metrika na X koja definiše datu topologiju na X. Metrizabilan prostor je uvek Hauzdorfov i svaka tačka ima prebrojivu bazu okolina. Recimo, za $x \in X$ možemo posmatrati lopte $B_{1/n}(x), n \geq 1$. U topološko-vektorskim prostorima važi obrat.

Definicija 2.62. *Kažemo da je metrika δ na vektorskom prostoru X translaciono invarijantna ako je $\delta(x + a, y + a) = \delta(x, y)$ za sve $x, y, a \in X$.*

Teorema 2.63. *Pretpostavimo da je topološko-vektorski prostor X Hauzdorfov i da postoji prebrojiva baza okolina nule u X. Tada se topologija na X može definisati preko translaciono-invarijantne metrike δ.*

Pretpostavimo da niz semi-normi $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiše topologiju na vektorskom prostoru X. Tada familija semi-normi definisana sa

$$r_n(x) = \max_{1\leq i\leq n} q_i(x)$$

definiše ekvivalentnu familiju semi-normi koja zadovoljava uslov $r_n(x) \leq r_{n+1}(x)$ za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in X$. Kažemo da je (r_n) rastući niz semi-normi. Važi sledeća propozicija.

Propozicija 2.64. *Neka je X lokalno-konveksan Hauzdorfov prostor čija topologija τ je definisana preko rastuće familije semi-normi $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tada se pomoću preslikavanja $x \mapsto |x|$, gde je*

$$|x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(x)}{1+q_n(x)}$$

može definisati metrika $\delta(x, y) = |x - y|$ koja definiše topologiju τ.

Sledi da je lokalno-konveksan prostor metrizabilan ako i samo ako je Hauzdorfov i njegova topologija može da se definiše preko prebrojive familije semi-normi.

Primer 2.65. Prostori $\mathcal{D}(K)$ i $\mathcal{S}$ su metrizabilni pošto su Hauzdorfovi i njihova topologija može da se definiše preko prebrojive familije semi-normi.

Primer 2.66. Prostori $C(\Omega), \mathcal{E}(\Omega)$ i $\mathcal{E}^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ su metrizabilni.

Definicija 2.67. *Neka je X topološko-vektorski prostor sa bazom okolina nule $\mathcal{B}$. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata u X je Košijev niz ako za svaku okolinu $V \in \mathcal{B}$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za sve $m, n > N$ važi da $x_m - x_n \in V$.*

Primetimo da se definicija 2.67 poklapa sa definicijom Košijevog niza u metričkom prostoru u slučaju kada je topološko-vektorski prostor metrizabilan.

Definicija 2.68. *Frešeov prostor je lokalno-konveksan prostor koji je kompletan i metrizabilan.*

Primer 2.69. Svaki Banahov prostor je Frešeov prostor.

Primer 2.70. Prostor $C(\Omega)$ sa topologijom uvedenom u primeru 2.30 je Frešeov. Znamo iz primera 2.66 da je metrizabilan, a pokazali smo i da je i lokalno-konveksan, pa ostaje da se pokaže kompletnost. Neka je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Košijev niz u $C(\Omega)$. Sledi da za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N = N(K, \varepsilon)$ tako da je za sve $k, l > N$ i $x \in K$ zadovoljeno $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$. Dakle za svako $x \in \Omega$ dobijamo Košijev niz $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{K}$ koji konvergira ka nekom skalaru $f(x)$. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x)$ koja preslikava $X \to \mathbb{K}$. Dokažimo da $f \in C(\Omega)$ i da $f_k \to f$ u $C(\Omega)$. Neka je $x_0 \in \Omega$ proizvoljna tačka i neka je $x_0 \in K \subset \Omega$ za kompaktan skup K. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoji $N = N(K, \varepsilon)$ tako da je za sve $k, l > N$ i za sve $x \in K$ zadovoljeno da je $\lim_{l\to\infty} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$. Sledi da je $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ za sve $x \in K$, odnosno imamo uniformnu konvergenciju niza (f_k) na K, pa $f_k \to f$ u $C(\Omega)$. Sledi da je f neprekidna u x_0 kao granica niza uniformno neprekidnih funkcija. Kako je x_0 bila proizvoljna sledi da $f \in C(\Omega)$.

Primer 2.71. Prostori $\mathcal{E}^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, su Frešeovi.

Primer 2.72. Prostori $\mathcal{K}(K)$ i $\mathcal{D}^m(K)$ za $1 \leq m < \infty$ su normabilni i kompletni. Prostor $\mathcal{D}(K)$ je Frešeov. Neka je $K \subset \Omega$ zadat kompaktan skup. Tada prostor $\mathcal{D}^m(K)$ možemo da posmatramo kao potprostor od $\mathcal{E}^m(\Omega)$ sa indukovanom topologijom od $\mathcal{E}^m(\Omega)$, za $0 \leq m \leq \infty$. Kako je $\mathcal{E}^m(\Omega)$ kompletan, da bismo pokazali kompletnost za $\mathcal{D}^m(K)$ dovoljno je da pokažemo da je $\mathcal{D}^m(K)$ zatvoren u $\mathcal{E}^m(\Omega)$, odnosno da sadrži granice svih svojih nizova. Neka je (f_k) niz u $\mathcal{D}^m(K)$ koji konvergira ka nekoj funkciji $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$. Pretpostavimo da $x \notin K$. Tada je

$$|f(x) - f_k(x)| = |f(x)| < \varepsilon, \quad \text{za} \;\; k > k_0(\varepsilon).$$

Dakle, $f(x) = 0$ za $x \notin K$, pa je nosač od f sadržan u K, odnosno $f \in \mathcal{D}^m(K)$.

2.3.2 Zadaci

Zadatak 2.5. Ako su X i Y topološko-vektorski prostori i $f : X \to Y$ linearno, neprekidno preslikavanje, onda f preslikava ograničene skupove iz X u ograničene skupove u Y. Dokazati.

Zadatak 2.6. Pokazati da je u topološko-vektorskom prostoru X zatvorenje ograničenog skupa ograničen skup.

Zadatak 2.7. Dokazati lemu 2.59.

Zadatak 2.8. Pokazati da su prostori iz primera 2.66 metrizabilni.

2.4 Inicijalne i finalne topologije

2.4.1 Inicijalne topologije

Neka je X vektorski prostor, $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ familija topološko-vektorskih prostora i $f_i : X \to X_i$, $i \in I$ familija linearnih preslikavanja. Na skupu X ćemo opisati najgrublju topologiju $\mathcal{T}$ za koju su sva preslikavanja $(f_i)_{i \in I}$ neprekidna.
Za topologiju $\tau_{disc} = P(X)$ su sva preslikavanja $(f_i)_{i \in I}$ neprekidna, ali cilj nam je da dobijemo topologiju sa što manje otvorenih skupova.

Posmatrajmo kolekciju skupova

$$\mathcal{S} = \left\{ f_i^{-1}[O_i] : O_i \in \tau_i,\ i \in I \right\}.$$

Preslikavanja $(f_i)_{i \in I}$ su neprekidna za neku topologiju τ na X ako i samo ako je $\mathcal{S} \subset \tau$ (prema teoremi 1.30). Iz teoreme 1.18 sledi da do topologije $\mathcal{T}$ dolazimo na sledeći način:

$$\mathcal{S} \xrightarrow[\text{preseci}]{\text{konačni}} \mathcal{B} \xrightarrow[\text{unije}]{\text{proizvoljne}} \mathcal{T}.$$

Topologiju $\mathcal{T}$ zovemo **inicijalna topologija** na X za familiju preslikavanja $(f_i)_{i \in I}$.

Ako je $\mathcal{B}_i$ baza okoline nule u X_i, $i \in I$, onda je baza okolina nule u X za $\mathcal{T}$ data preko konačnih preseka oblika

$$f_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(U_n),$$

gde $U_k \in \mathcal{B}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Prostor $(X, \mathcal{T})$ je topološko-vektorski prostor što dokazujemo u narednoj propoziciji.

Propozicija 2.73. *Prostor $(X, \mathcal{T})$ je topološko-vektorski prostor.*

Dokaz: Dokazujemo da je topologija $\mathcal{T}$ kompatibilna sa vektorskom strukturom skupa X. Dokazaćemo da važi uslov 1 iz definicije 2.1. Slično se pokazuje i da važi uslov 2.

Neka su $a, b \in X$ i $\bigcap\limits_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[W_k]$ okolina nule u $(X, \mathcal{T})$, gde su W_k okoline nule u (X_{i_k}, τ_{i_k}), za $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Obeležimo $a_k = f_{i_k}(a)$ i $b_k = f_{i_k}(b)$, $1 \leq k \leq n$. Na osnovu osobine 1 za topološko-vektorski prostor (X_{i_k}, τ_{i_k}) postoje okoline nule U_k i V_k u (X_{i_k}, τ_{i_k}), takve da za sve $u \in a_k + U_k$ i sve $v \in b_k + V_k$ važi

$$u + v \in a_k + b_k + W_k \ 1 \leq k \leq n.$$

Sledi da za sve $x \in a + \bigcap\limits_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[U_k]$ i $y \in b + \bigcap\limits_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[V_k]$ važi

$$x + y \in a + b + \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[W_k],$$

pa je sabiranje neprekidno, odnosno važi uslov 1 iz teoreme 2.1. ❑

Ako su $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ lokalno-konveksni prostori, onda je i prostor $(X, \mathcal{T})$ lokalno-konveksan.

Propozicija 2.74. *Neka je X realan vektorski prostor i $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ kolekcija lokalno konveksnih prostora. Neka su $f_i : X \to X_i$, $i \in I$ linearna* *preslikavanja i* $\mathcal{T}$ *inicijalna topologija na* X *za familiju preslikavanja* $(f_i)_{i\in I}$*. Tada je* $(X,\mathcal{T})$ *lokalno konveksan prostor. Ako je za* $i \in I$ *lokalno konveksna topologija* τ_i *definisana familijom seminormi* $(q_{i\lambda})_{\lambda\in L_i}$*, onda je topologija* $\mathcal{T}$ *definisana familijom seminormi* $(q_{i\lambda}\circ f_i)_{\lambda\in L_i,\, i\in I}$*.*

Dokaz: U prethodnoj propoziciji je dokazano da je $(X,\mathcal{T})$ topološko-vektorski prostor. Treba još dokazati da ima bazu konveksnih okolina nule.
Za svako $i \in I$ postoji baza konveksnih okolina nule u prostoru (X_i,τ_i). Ako su U_k konveksne okoline nule u (X_{i_k},τ_{i_k}), $1\le k\le n$, $n\in\mathbb{N}$, onda je $\bigcap\limits_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[U_k]$ konveksna okolina nule u $(X,\mathcal{T})$. Prema tome, prostor $(X,\mathcal{T})$ ima bazu konveksnih okolina nule, pa je lokalno konveksan prostor.
Za dato $i\in I$, $\lambda\in L_i$ i $\varepsilon>0$ važi

$$f_i^{-1}\big[\,\{x\in X_i : q_{i\lambda}(x)\le\varepsilon\}\,\big] = \{x\in X : (q_{i\lambda}\circ f_i)(x)\le\varepsilon\}\,.$$

Prema tome, ako je za svako $i\in I$ topologija τ_i definisana familijom seminormi $(q_{i\lambda})_{\lambda\in L_i}$, onda je topologija $\mathcal{T}$ na X definisana familijom seminormi

$$\{q_{i\lambda}\circ f_i : \lambda\in L_i,\ i\in I\}.$$

❑

Primer 2.75. Neka je X vektorski prostor i (τ_i) familija topologija na X kompatibilna sa vektorskom strukturom na X. Označimo sa F_i topološko vektorske prostore (X,τ_i) i neka su f_i identička bijektivna preslikavanja iz X u F_i. Tada je inicijalna topologija τ na X za familiju (f_i) zapravo najmanje gornje ograničenje topologija τ_i (videti napomenu 1.19). Sledi i da je τ kompatibilna sa vektorskom strukturom na X.

2.4.2 Finalne topologije

Neka je X vektorski prostor i neka je $(Y_i)_{i\in I}$ familija topološko-vektorskih prostora nad istim poljem $\mathbb{K}$. Neka je za svako $i\in I$ preslikavanje $f_i : Y_i \to X$ linearno. Označimo sa Φ skup svih lokalno-konveksnih topologija na X

za koje su sva preslikavanja f_i neprekidna. Anti-diskretna topologija na X pripada skupu Φ, pa je Φ neprazan. Neka je τ najmanje gornje ograničenje topologija koje su u skupu Φ. Topologija τ je kompatibilna sa vektorskom strukturom na X (primer 2.75). Na ovaj način smo dobili da je (X, τ) topološko-vektorski prostor.

Posmatrajmo kolekciju $\mathcal{R}$ svih apsorbujućih, konveksnih, uravnoteženih skupova V takvih da je $f_i^{-1}(V)$ okolina nule u Y_i. Ova kolekcija je filter baza. Pokazaćemo da je $\mathcal{R}$ baza okolina nule u X za τ, iz čega sledi da je τ lokalno-konveksna topologija.

Iz propozicije 2.22 sledi da je filter baza $\mathcal{R}$ baza okolina nule za neku lokalno-konveksnu topologiju τ_1 na X. Sva preslikavanja f_i su neprekidna za topologiju τ_1. Znamo da je τ finija od τ_1 kao najmanje gornje ograničenje topologija u skupu Φ. Dokažimo da je τ_1 finija od τ, iz čega će slediti da je $\tau = \tau_1$. Neka je U okolina nule u X za τ. Tada postoji konačna familija $(\tau_k)_{1 \le k \le n}$ topologija u Φ (videti napomenu 1.19) i za svako k uravnotežena, konveksna okolina nule V_k u X za topologiju τ_k tako da je $\cap_{k=1}^n V_k \subset U$. Kako je $f_i^{-1}(\cap_{k=1}^n V_k) = \cap_{k=1}^n f_i^{-1}(V_k)$ sledi da

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k \in \mathcal{R}.$$

Preciznije, V je apsorbujući, uravnotežen, konveksan skup i za svako $i \in I$ skup $f_i^{-1}(V)$ je okolina nule u Y_i.

Dobili smo da je (X, τ) lokalno konveksan prostor. Štaviše, τ je najfinija lokalno-konveksna topologija za koju su sva preslikavanja f_i neprekidna.

Ovako definisana topologija τ naziva se finalna lokalno-konveksna topologija na X za familiju $(f_i)_{i \in I}$.

Važe sledeće propozicije.

Propozicija 2.76. *Neka je X vektorski prostor, $(Y_i)_{i \in I}$ familija lokalno konveksnih prostora i neka je za svako $i \in I$ preslikavanje $f_i : Y_i \to X$ linearno. Neka je X snabdeven najfinijom lokalno-konveksnom topologijom τ za koju su sva preslikavanja f_i neprekidna. Neka je G lokalno konveksan prostor i $g : X \to G$ linearno preslikavanje. Tada je g neprekidno za τ ako i samo ako su sva preslikavanja $g \circ f_i$ neprekidna.*

Propozicija 2.77. *Neka je X vektorski prostor i neka su (E_i) i (F_λ) dve familije lokalno konveksnih prostora. Za svako $i \in I$ neka je f_i linearno preslikavanje iz E_i u X i za svako $\lambda \in L$ neka je g_λ linearno preslikavanje iz F_λ u X. Neka je τ najfinija lokalno konveksna topologija na X za koju su preslikavanja f_i neprekidna i neka je τ' najfinija lokalno konveksna topologija na X za koju su sva preslikavanja g_λ neprekidna. Pretpostavimo da za svako $i \in I$ postoji neprekidno linearno preslikavanje $u_{\lambda i}$ iz E_i u neko F_λ tako da je $f_i = g_\lambda \circ u_{\lambda i}$. Tada je τ' grublja od τ.*

Ako dodatno za svako $\lambda \in L$ postoji neprekidno linearno preslikavanje $v_{i\lambda}$ iz F_λ u neko E_i tako da je $g_\lambda = f_i \circ v_{i\lambda}$, onda su topologije τ i τ' jednake.

Teorema 2.78. *Neka je X vektorski prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz potprostora od X takvih da je $X_n \subset X_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Pretpostavimo da je svaki prostor X_n snabdeven lokalno konveksnom topologijom τ_n i da za svako n topologija indukovana sa τ_{n+1} na X_n je τ_n. Neka je τ najfinija lokalno konveksna topologija na X za koju su sva injektivna utapanja $f_n : X_n \to X$ neprekidna. Tada τ indukuje topologiju τ_n na X_n.*

Pod pretpostavkama iz teoreme 2.78 kažemo da je X striktni induktivni limit niza (X_n).

Primer 2.79. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $\mathcal{D}(\Omega)$ vektorski prostor svih funkcija na Ω čiji parcijalni izvodi svih redova postoje i neprekidni su i čiji nosač je sadržan u nekom kompaktnom podskupu od Ω. Za $K \subset \Omega$ kompaktan skup neka je $\mathcal{D}(K)$ potprostor onih funkcija iz $\mathcal{D}(\Omega)$ čiji nosač je sadržan u K. Tada je $\mathcal{D}(\Omega)$ unija potprostora $\mathcal{D}(K)$ po svim kompaktnim podskupovima $K \subset \Omega$. Prostore $\mathcal{D}(K)$ smo snabdeli lokalno-konveksnim topologijama za koje je $\mathcal{D}(K)$ Frešeov prostor. Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ snabdevamo najfinijom lokalno konveksnom topologijom τ za koju su sva injektivna preslikavanja $\mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(\Omega)$ neprekidna.

Ako je $K \subset K'$ onda je $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(K')$ i topologija od $\mathcal{D}(K')$ indukuje na $\mathcal{D}(K)$ topologiju prostora $\mathcal{D}(K)$. Neka je $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rastući niz kompaktnih skupova u Ω takvih da je $K_k \subset Int(K_{k+1})$ (sa $Int(K_{k+1})$ smo označili unutrašnjost skupa K_{k+1}) i svaki kompaktan podskup od Ω je sadržan u nekom skupu K_k. Tada je $\mathcal{D}(K_k) \subset \mathcal{D}(K_{k+1})$ i $\mathcal{D}(\Omega) = \cup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(K_k)$. Sledi iz propozicije 2.77 da je τ najfinija lokalno konveksna topolgija za koju su injektivna preslikavanja $f_k : \mathcal{D}(K_k) \to \mathcal{D}(\Omega)$ neprekidna.

Može se pokazati da je $\mathcal{D}(\Omega)$ kompletan, Hauzdorfov prostor koji na svakom prostoru $\mathcal{D}(K)$ indukuje topologiju prostora $\mathcal{D}(K)$.

Primer 2.80. (Geljfand-Šilov prostori) Neka $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $s, \sigma > 0$. Kažemo da f pripada prostoru $\mathcal{S}_s^\sigma$ ako postoji $h > 0, C > 0$ tako da je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f| \leq C h^{|\alpha+\beta|} \alpha!^s \beta!^\sigma$$

za sve multi-indekse α, β.

Sa $S_{s,h}^\sigma$ označavamo prostor glatkih funkcija takvih da je

$$\|f\|_{s,h}^\sigma = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|x^\alpha D^\beta f|}{h^{|\alpha+\beta|} \alpha!^s \beta!^\sigma} < \infty.$$

Preslikavanje $\| \cdot \|_{s,h}^\sigma : S_{s,h}^\sigma \to [0, \infty)$ je norma i na ovaj način prostor $S_{s,h}^\sigma$ postaje Banahov.

Jasno je da je

$$\mathcal{S}_s^\sigma = \bigcup_{h>0} S_{s,h}^\sigma.$$

Prostor $\mathcal{S}_s^\sigma$ snabdevamo najfinijom lokalno konveksnom topologijom τ za koju su injektivna utapanja iz $S_{s,h}^\sigma$ u $\mathcal{S}_s^\sigma$ neprekidna, za svako $h > 0$. Prostor $(\mathcal{S}_s^\sigma, \tau)$ zovemo prostor Geljfand - Šilova.

2.4.3 Zadaci

Zadatak 2.9. Pokazati da niz rastućih kompaktnih skupova iz primera 2.79 postoji, odnosno konstruisati takav niz skupova.

2.5 Uparivanja

Posmatrajmo preslikavanje $B : F \times G \to \mathbb{K}$, gde su F i G vektorski prostori nad poljem $\mathbb{K}$. Preslikavanje B je bilinearno, ako je linearno po svakoj promenljivoj.

Definicija 2.81. *Neka su F i G vektorski prostori nad poljem $\mathbb{K}$. Ako je na $F \times G$ data bilinearna forma $(x, y) \mapsto B(x, y)$, onda kažemo da su prostori F i G upareni, odnosno da formiraju uparivanje u odnosu na bilinearnu formu B.*

Kažemo da uparivanje ili bilinearna forma razdvaja tačke od F ako za $x \in F, x \neq 0$ postoji $y \in G, y \neq 0$ tako da je $B(x, y) \neq 0$. Analogno, uparivanje ili bilinearna forma razdvaja tačke od G ako za $y \in G, y \neq 0$ postoji $x \in F, x \neq 0$ tako da je $B(x, y) \neq 0$. Ako uparivanje razdvaja tačke i od F i od G, onda kažemo da je (F, G) dualan sistem u odnosu na bilinearnu formu B.

Primer 2.82. Neka je X vektorski prostor i neka je X^* skup svih linearnih preslikavanja iz X u $\mathbb{K}$. Označimo elemente u X sa $x, y, \ldots$, a elemente u X^* sa $x', y', \ldots$. Sabiranje i množenje skalarom na X^* definišemo sa

$$(x' + y')(x) = x'(x) + y'(x), \qquad (\alpha x')(x) = x'(\alpha x), \alpha \in \mathbb{K}.$$

Nula vektor u X^* je preslikavanje koje dodeljuje nulu svakom elementu $x \in X$. Lako je proveriti da na ovaj način X^* postaje vektorski prostor i X^* zovemo algebarski dual od X. Ako stavimo $\langle x, x' \rangle = \langle x', x \rangle = x'(x)$ za $x \in X$ i $x' \in X^*$, onda je preslikavanje $x \mapsto \langle x, x' \rangle$ linearno, pošto je x' linearno. Takođe je i $x' \mapsto \langle x, x' \rangle$ linearno. Preslikavanje $(x, x') \mapsto \langle x, x' \rangle$ zovemo kanonička bilinearna forma. Ova kanonička bilinearna forma razdvaja tačke od X^*. Takođe razdvaja i tačke od X. Neka je $x \neq 0$ element u X i neka je $(e_i)_{i \in I}$ algebarska baza u X. Tada je $x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i$, gde je $\xi_k \neq 0$ za neko k. Neka je $x' \in X^*$ linearna forma na X koja svakom vektoru $y = \sum_i \eta_i e_i$ dodeljuje $k-$tu koordinatu. Tada je $\langle x, x' \rangle = \xi_k \neq 0$.

Primer 2.83. Neka je X topološko-vektorski prostor i neka je X' skup svih linearnih, neprekidnih preslikavanja $X \to \mathbb{K}$. Tada je X' potprostor algebarskog duala X^* (za dokaz pogledati [8], strana 184, primer 2). Vektorski prostor X' zovemo (topološki) dual prostora X. Sa $(x, x') \mapsto \langle x, x' \rangle$ označavamo restrikciju na $X \times X'$ kanoničke bilinearne forme definisane na $X \times X^*$. Ova bilinearna forma razdvaja tačke od X'.

Neka su vektorski prostori X i Y upareni u odnosu na bilinearnu formu $(x, y) \mapsto B(x, y)$. Uvedimo lokalno konveksne topologije na X i Y, koje ćemo zvati slabe topologije definisane uparivanjem od X i Y.

Neka $y \in Y$. Tada je preslikavanje $x \mapsto |B(x, y)|$ semi-norma na X. Označimo ovu semi-normu sa q_y. Sa $\sigma(X, Y)$ označavamo topologiju na X koje je definisana preko familije semi-normi q_y, $y \in Y$. Ovu topologiju zovemo slaba topologija na X. Baza okolina nule u X za topologiju $\sigma(X, Y)$ je data preko skupova

$$U_{y_1,\dots,y_k,\varepsilon} = \{x \mid |B(x, y_k)| \leq \varepsilon\},$$

gde je $\varepsilon > 0$ i $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$ je konačna familija elemenata u Y. Analogno se definiše i slaba topologija na Y, označavamo je sa $\sigma(Y, X)$.

2.5.1 Polarnost

Definicija 2.84. *Neka su F i G vektorski prostori nad poljem $\mathbb{K}$ upareni u odnosu na bilinearnu formu $(x, y) \mapsto B(x, y)$. Neka je $A \subset F$. Tada definišemo polar od A, u oznaci A°, na sledeći način:*

$$A^\circ = \{y \in G \mid |B(x, y)| \leq 1, \text{ za sve } x \in A\}.$$

Analogno definišemo i polar podskupa skupa G.

Važi sledeća propozicija:

Propozicija 2.85. *Pretpostavimo da su vektorski prostori F i G upareni u odnosu na bilinearnu formu $(x, y) \mapsto B(x, y)$. Tada važe sledeće osobine:*

1. *Ako je $A_1 \subset A_2 \subset F$, onda je $A_2^\circ \subset A_1^\circ$.*

2. *Ako je $A \subset F$ i D je uravnoteženi omotač od A, onda je $A^\circ = D^\circ$.*

3. *$A \subset A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$.*

4. *$A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$.*

5. *Ako je $A \subset F$, onda je A° uravnotežen, konveksan skup u G, zatvoren za $\sigma(G,F)$.*

6. $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ *za skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Skup A° je apsorbujući ako i samo ako je A ograničen za $\sigma(F,G)$.*

7. *Ako je $(A_i)_{i\in I}$ familija podskupova od F, onda je*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ.$$

Dokaz: Dokažimo osobine $1, 2, 3, 4$ i 7. Za osobine 5 i 6 pogledati zadatak 2.10.

1. Neka $y \in A_2^\circ$. Tada je $|B(x,y)| \leq 1$ za sve $x \in A_2$. Kako je $A_1 \subset A_2$, onda je ova nejednakost ispunjena i za $x \in A_1$, pa $y \in A_1^\circ$.

2. Iz $A \subset D$ i iz dela 1. imamo da je $D^\circ \subset A^\circ$. Dokažimo da je $A^\circ \subset D^\circ$. Neka $y \in A^\circ$. Tada je $|B(\lambda x, y)| \leq 1$ za sve $x \in A$ i $|\lambda| \leq 1$. Kako je

$$D = \{\lambda x : x \in A,\ |\lambda| \leq 1\},$$

   sledi da $y \in D^\circ$.

3. Ako $x \in A$, onda je $|B(x,y)| \leq 1$ za sve $y \in A^\circ$, pa $x \in A^{\circ\circ}$.

4. Sledi iz 1. i 3.

7. Sledi iz definicije polara.

❑

2.5.2 Σ-topologije

Neka su F i G vektorski prostori upareni u odnosu na bilinearnu formu $(x,y) \mapsto B(x,y)$. Neka je Σ kolekcija $\sigma(F,G)$ ograničenih skupova. Iz propozicije 2.85 sledi da polari A° skupova $A \in \Sigma$ formiraju kolekciju apsorbujućih, uravnoteženih, konveksnih skupova u G, pa ova familija definiše lokalno konveksnu topologiju na G. Ovu topologiju zovemo Σ-topologija ili topologija uniformne konvergencije na skupovima koji pripadaju Σ. Konačni preseci skupova λA°, $\lambda > 0$ i $A \in \Sigma$ formiraju bazu okolina nule za Σ-topologiju.

Primetimo da je Σ-topologija na G definisana preko familije semi-normi q_A, gde je $q_A(y) = \sup_{x\in A} |B(x,y)|$. Naime, za funkcional Minkovskog skupova A° za $A \in \Sigma$ važi

$$p_{A^\circ}(y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid y \in \varepsilon A^\circ\} = \inf\{\varepsilon > 0 \mid |B(x,y)| \leq \varepsilon \text{ za sve } x \in A\} =$$

$$= \sup\{|B(x,y)| \mid x \in A\} = q_A(y).$$

Neka je Σ kolekcija svih ograničenih skupova za $\sigma(F,G)$ topologiju. Uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.86. *Neka su F i G upareni vektorski prostori. Ako je Σ kolekcija svih $\sigma(F,G)$ ograničenih skupova u F, onda se odgovarajuća Σ-topologija na G zove jaka topologija i označava se sa $\beta(G,F)$.*

Topologiju $\beta(G,F)$ zovemo i topologija uniformne konvergencije na ograničenim podskupovima od F.

Primer 2.87. Neka je E normiran prostor i E' njegov dual. Tada je topologija $\beta(E',E)$ zapravo topologija definisana normom na E'.

2.5.3 Zadaci

Zadatak 2.10. Dokazati osobine 5 i 6 iz propozicije 2.85.

Glava 3

Distribucije

3.1 Motivacija

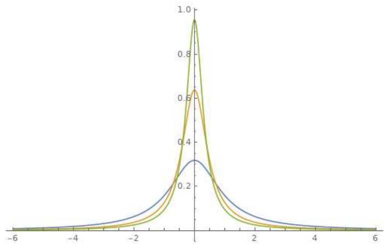
U primenjenoj matematici se često koristi takozvana Dirakova delta funkcija $\delta(t)$, koja se uvodi kao funkcija sa osobinama:

1. $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ i
3. za proizvoljnu funkciju g neprekidnu u $t = 0$ važi
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)dt = g(0).$$

Ipak, funkcija sa ovakvim osobinama ne postoji. Integral funkcije koja je nula svuda, osim na skupu mere nula, mora biti jednak nuli. Zato ćemo delta funkciju predstaviti kao limes niza pogodno odabranih funkcija. Zamislimo niz funkcija od kojih svaka dostiže maksimalnu vrednost za $t = 0$ i svaki sledeći član niza ima veću maksimalnu vrednost od prethodnog člana, pri čemu je integral svake funkcije u nizu jednak 1. Posmatrajmo sledeći primer.

Primer 3.1. Dat je niz funkcija (koristio ga je Hermit 1891. godine) definisanih sa

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2t^2+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$



Slika 3.1. Primer delta niza.

Delta funkciju možemo da posmatramo kao limes ovakvog niza funkcija (delta niz): $\delta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$.
Ispostaviće se da je delta funkcija jedan primer singularnih distribucija (ili uopštenih funkcija).

Furijeova transformacija se često koristi prilikom rešavanja linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. U svom klasičnom obliku definisana je za $L^1(\mathbb{R}^n)$ funkcije (apsolutno integrabilne funkcije). Furijeova transformacija Hevisajdove funkcije H ne postoji u klasičnom smislu, gde je $H(t) = 1$ za $t \geq 0$ i $H(t) = 0$ za $t < 0$. Definisanjem Furijeove transformacije na prostoru distribucija moći ćemo da odredimo Furijeovu transformaciju funkcije H.

Ma koja distribucija ima izvod prozivljnog reda, za razliku od klasičnih funkcija. Uvođenjem distribucionog izvoda definisaćemo prostore Soboljeva.

3.2 Definicija distribucija

Neka je Ω otvoren podskup u $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{D}(\Omega)$ prostor glatkih funkcija sa kompaktnim nosačem u Ω. Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ snabdevamo najfinijom lokalno konveksnom topologijom $\mathcal{T}$ za koju su kanonička injektivna preslikavanja $\mathcal{D}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ neprekidna (K je proizvoljan kompaktan podskup od Ω, topologija na $\mathcal{D}(K)$ je definisana familijom semi - normi $(q_p), q_p(f) = \max_{x \in K} |\partial^p f(x)|$).

Definicija 3.2. *(*L. Schwartz*) Neka je $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ neprekidno linearno preslikavanje. Tada je u distribucija definisana na Ω.*

Dakle, dual $E' = \mathcal{D}'(\Omega)$ prostora $E = \mathcal{D}(\Omega)$ je prostor svih distribucija definisanih na Ω. Obično ćemo E' posmatrati kao prostor snabdeven jakom topologijom $\beta(E', E)$ (definicija 2.86).

Neka je K kompaktan podskup od Ω i $i_K : \mathcal{D}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ kanonička injekcija. Tada je linearna funkcionela T na $\mathcal{D}(\Omega)$ neprekidna ako i samo ako su preslikavanja $T \circ i_K$ neprekidna na $\mathcal{D}(K)$ za svako K. Važi sledeća propozicija ([8], strana 97).

Propozicija 3.3. *Linearna funkcionela T na $\mathcal{D}(\Omega)$ je distribucija ako i samo ako za svaki kompaktan podskup K od Ω postoji pozitivan broj M i $m \in \mathbb{N}_0$ tako da je za sve $\varphi \in \mathcal{D}(K)$*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \max_{|p| \leq m} \max_{x \in K} |\partial^p \varphi(x)|. \tag{3.1}$$

Uslov (3.1) može da se zameni sa

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sum_{|p| \leq m} \max_{x} |\partial^p \varphi(x)|,$$

pošto imamo ekvivalentne familije semi-normi.

Primer 3.4. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka $f \in C(\Omega)$ (sa $C(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija definisanih na Ω). Tada je za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ funkcija $f\varphi$ neprekidna i jednaka je nuli van nosača od φ. Ako definišemo da je $f\varphi$ jednaka nuli izvan Ω, onda je ovako proširena funkcija neprekidna na $\mathbb{R}^n$ i ima kompaktan nosač. Sledi da $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$ postoji. Preslikavanje $T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$ je linearna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$. Ovako definisano preslikavanje T_f je i neprekidno. Zaista, ako

$\varphi \in \mathcal{D}(K)$, gde je K sadržan u skupu $\{x : |x_i| \leq \frac{1}{2}a, 1 \leq i \leq n\}$ i ako je $m = \max_{x \in K} |f(x)|$, onda je

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx \leq m a^n \max_x |\varphi(x)|.$$

Preslikavanje $f \mapsto T_f$ iz $C(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ je linearno. Pokažimo da je i injektivno. Neka je $f \neq 0$. Tada postoji $x_0 \in \Omega$ tako da je $f(x_0) \neq 0$. Funkciju f možemo da zapišemo u obliku $f = f_1 + i f_2$, gde su f_1 i f_2 realne, neprekidne funkcije. Kako su f_1 i f_2 neprekidne postoje $c > 0$ i lopta $B_r(x_0)$ tako da važi jedna od nejednakosti $f_i(x) > c$ i $f_i(x) < -c$ za bar jedan od indeksa $i = 1, 2$ za sve $x \in B_r(x_0)$. Neka je $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ funkcija za koju je $\phi(x) \geq 0$, $\phi(x) = 1$ za $x \in B_{\frac{1}{2}r}(x_0)$ i $\phi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_r(x_0)$. Tada je

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{B_r(x_0)} f_1(x)\phi(x) dx + i \int_{B_r(x_0)} f_2(x)\phi(x) dx \neq 0,$$

odakle sledi injektivnost.

U nastavku funkciju $f \in C(\Omega)$ identifikujemo sa distribucijom T_f i pišemo $\langle f, \varphi \rangle$ umesto $\langle T_f, \varphi \rangle$.

Slično kao u prethodnom primeru prostor $L^1_{loc}(\Omega)$ (klasa) Lebeg merljivih funkcija, koje su Lebeg integrabilne na svakom kompaktnom skupu od Ω, može da se posmatra kao element od $\mathcal{D}'(\Omega)$. Važi $C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definicija 3.5. *Distribucija $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je regularna ako postoji $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tako da je $T = T_f$, tj.*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = \langle T_f, \varphi \rangle.$$

Funkciju $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ identifikujemo sa distribucijom T_f i pišemo $\langle f, \varphi \rangle$ umesto $\langle T_f, \varphi \rangle$.

Primer 3.6. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $a \in \Omega$. Linearna funkcionela $\varphi \mapsto \varphi(a)$ je neprekidna na $\mathcal{D}(\Omega)$ pošto za kompaktan podskup K od Ω

imamo $|\varphi(a)| \leq \max_x |\varphi(x)|$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Dobijamo distribuciju δ_a, koju zovemo delta distribucija, pri čemu je $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. Distribuciju δ_0 zovemo i Dirakova mera ($a = 0$). Delta distribucija nije regularna distribucija, što ćemo pokazati u primeru 3.11.

Navedimo neke osobine prostora $\mathcal{D}(\Omega)$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Konvergencija niza (familije) elemenata prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$ u slaboj $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ topologiji je ekvivalentna konvergenciji u jakoj $\beta(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ topologiji. Kako je jaka topologija finija od slabe, jasno je da konvergencija u jakoj topologiji implicira konvergenciju u slaboj topologiji. Propozicija koja sledi pokazuje da važi i obratno.

Propozicija 3.7. *Neka je $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz distribucija (respektivno neka je $(T_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\alpha}$ familija distribucija) i pretpostavimo da za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ granična vrednost $T(\varphi) = \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)$ (respektivno $T(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\varphi)$) postoji. Tada je $T : \varphi \mapsto T(\varphi)$ distribucija i (T_n) (resp.(T_ε)) konvergira ka T u jakoj topologiji u $\mathcal{D}'(\Omega)$*

Propozicija 3.7 nam omogućava da pokažemo da je injekcija $f \mapsto T_f$ iz $C(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ neprekidna.

Propozicija 3.8. *Injekcija $f \mapsto T_f$ iz $C(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekidno preslikavanje.*

Dokaz: Koristeći da je $C(\Omega)$ metrizabilan prostor i da je preslikavanje $f \mapsto T_f$ linearno, dovoljno je pokazati da ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $C(\Omega)$ koji konvergira ka nuli u prostoru $C(\Omega)$, onda odgovarajući niz slika $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira na nuli u prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Iz konvergencije niza (f_n) sledi da za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je za svako $n \geq n_0$ ispunjeno

$$\max_{x\in \mathrm{supp}\varphi} |f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

pa je prema tome

$$|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx \right| \leq \varepsilon \int_\Omega |\varphi(x)|dx.$$

Dakle, $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \to 0$, za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Na osnovu Propozicije 3.7 sledi da niz (T_{f_n}) konvergira ka nuli u prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$. ❑

Primer 3.9. Za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definišemo distribuciju

$$p.v.\frac{1}{x} = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Pokažimo da $p.v.\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Linearnost je jasna, dokažimo neprekidnost. Treba da pokažemo da važi uslov (3.1). Pretpostavimo da je supp $\varphi \subset [-d, d]$. Tada je

$$\Big| \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \Big| = \Big| \int_0^d \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \Big| = \Big| \int_0^d \frac{x \int_{-1}^1 \varphi'(sx) ds}{x} dx \Big|$$

$$\leq \int_0^d \int_{-1}^1 |\varphi'(sx)| ds dx \leq 2d \max_{-d \leq t \leq d} |\varphi'(t)|.$$

Dakle, uslov (3.1) je ispunjen za $M = 2d$ i $m = 1$.

Pre nego što navedemo dalje osobine i primere, razmotrićemo ponašanje beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem. Može se pokazati da je funkcija definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

beskonačno diferencijabilna.

Odatle sledi da je funkcija φ definisana sa

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\frac{1}{1-|x|^2}\Big), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

beskonačno diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$ i njen nosač je jedinična lopta

$$B_1 = \{x : |x| \leq 1\}$$

na $\mathbb{R}^n$. Stoga je nosač funkcije $x \mapsto \varphi(\frac{x-x_0}{\varepsilon})$ lopta $B_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| \leq \varepsilon\}$, što pokazuje da ako je $\Omega \neq \emptyset$, onda $\mathcal{D}(\Omega)$ sadrži elemente različite od nule. Ako φ podelimo sa pozitivnom konstantom $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$, dobijamo funkciju ρ sa sledećim osobinama:

1. ρ je glatka na $\mathbb{R}^n$,
2. supp$\rho = B_1$,
3. $\rho(x) > 0$ za $|x| < 1$,
4. $\rho(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$,
5. $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.

Za $\varepsilon > 0$ funkcija ρ_ε definisana sa

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \tag{3.2}$$

ima osobine 1, 4, 5 i osobine

2'. supp$\rho_\varepsilon = B_\varepsilon$,

3'. $\rho_\varepsilon(x) > 0$ za $|x| < \varepsilon$.

Primer 3.10. Neka je ρ neprekidna funkcija definisana na $\mathbb{R}^n$ sa osobinama

a) supp$\rho \subset B_1$,

b) $\rho(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$,

c) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$,

gde je, kao i pre, $B_1 = \{x : |x| \leq 1\}$. Iz prethodne konstrukcije vidimo da takva funkcija postoji. Za svako $\varepsilon > 0$ definišemo funkciju ρ_ε sa (3.2). Tada ρ_ε zadovoljava uslove

a') supp$\rho_\varepsilon \subset B_\varepsilon$,

b') $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$,

c') $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$.

Pokažimo da ρ_ε konvergira u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ka Dirakovoj meri δ, kad $\varepsilon \to 0$. Za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ imamo na osnovu $c')$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx$$

i koristeći osobine $a'), b'), c')$ dobijamo

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\Big| \leq \max_{|x|\leq\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)|.$$

Pošto desna strana gornje nejednakosti može da se napravi proizvoljno malom za dovoljno malo ε zaključujemo da je

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

odnosno da ρ_ε konvergira ka δ u slaboj topologiji, pa i u jakoj, na osnovu propozicije 3.7.

U primeru 3.6 smo uveli delta distribuciju: $\delta_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$, za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Pokažimo da delta nije regularna distribucija.

Primer 3.11. Delta distribucija δ_a nije regularna distribucija.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tako da je

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Izaberimo $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tako da je supp$\rho \subset \overline{B_1(0)}$, $\rho(0) = 1$ i definišimo $\rho_l(x) = \rho(l(x - x_0))$, $l \in \mathbb{N}_0$. Tada je supp$\rho_l \subset \overline{B_{1/l}(x_0)}$, $\rho_l(x_0) = 1$ (postojanje ovakve funkcije sledi iz primera 3.10). Zaključujemo da je

$$1 = |\langle \delta_{x_0}, \rho_l \rangle| \leq \int_{B_{1/l}(x_0)} |f(x)||\rho(l(x-x_0))|dx \leq \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\rho(x)| \int_{B_{1/l}(x_0)} |f(x)|dx.$$

Međutim, kako je $\displaystyle\int_{B_{1/l}(x_0)} |f(x)|dx \xrightarrow{l\to\infty} 0$, dolazimo do kontradikcije. Dakle, δ_a nije regularna distribucija. ❑

3.3 Nosač distribucije

Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{K}$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, često govorimo o vrednosti funkcije u tački $x \in \Omega$ i o restrikciji te funkcije na neku okolinu tačke x. Da bismo ove pojmove uveli i za distribucije, definisaćemo restrikciju (lokalizaciju) distribucija na otvorene podskupove skupa Ω.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i U otvoren podskup od Ω. Svaka funkcija u $\mathcal{D}(U)$ može da se posmatra kao funkcija u $\mathcal{D}(\Omega)$. Ako je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ onda je restrikcija ovog preslikavanja na $\mathcal{D}(U)$ distribucija $T_U \in \mathcal{D}'(U)$ definisana sa $\langle T_U, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Preslikavanje T_U je *restrikcija* od T na U ili distribucija *indukovana* sa T na U. Ako je $T_U = 0$, kažemo da je T jednako nuli na U. Slično, ako su Ω_1 i Ω_2 dva otvorena skupa u $\mathbb{R}^n$ i ako je U otvoren podskup u $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, onda su S i T jednaki na U ako je $S_U = T_U$.

Propozicija 3.12. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i neka je U otvoren podskup u Ω. Ako za svako $x \in U$ postoji otvorena okolina V_x tako da je T jednako nuli na V_x, onda je T jednako nuli na U.*

Iz prethodne propozicije sledi da ako je (U_i) familija otvorenih podskupova od Ω i ako je $T = 0$ na svakom U_i, onda je $T = 0$ na $\bigcup_{i \in I} U_i$. Zato naredna definicija ima smisla.

Definicija 3.13. *Neka je Ω otvoren podskup u $\mathbb{R}^n$ i neka $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ako je U najveći otvoren podskup od Ω na kom je T jednako nuli, onda je skup U^C nosač od T i označavamo ga sa* $\mathrm{Supp}(T)$.

Skup $\mathrm{Supp}(T)$ je zatvoren u Ω prema definiciji, kao komplement otvorenog skupa.

Napomena 3.14. Nosač distribucije T je komplement najvećeg otvorenog skupa na kom je T jednako nuli. Drugim rečima, tačka $x \in \Omega$ je element nosača distribucije T ako i samo ako za svaku (otvorenu) okolinu V tačke x postoji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tako da je $\operatorname{supp} \varphi \subset V$ i $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

Sledeća lema je posledica koju dobijamo iz definicije nosača distribucije.

Lema 3.15. *Neka je* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *i* $K = \operatorname{Supp} T$. *Tada je* $\langle T, \varphi \rangle = 0$, *za sve* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *za koje je* $\operatorname{supp} \varphi \cap K = \emptyset$.

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i $K \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$. Kako je $\operatorname{supp} \varphi \subset (\Omega \setminus K)$ i $\Omega \setminus K$ je najveći otvoren skup na kome je T jednako nuli, sledi da je $\langle T, \varphi \rangle = 0$. ❑

Primer 3.16. Ako je $f \in C(\Omega)$, onda je $\operatorname{Supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

($\subset$) Neka je $x \in \operatorname{Supp} T_f$. Iz napomene 3.14 sledi da za svaku okolinu V tačke x postoji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tako da je

$$\operatorname{supp} \varphi \subset V \ i \ \langle T_f, \varphi \rangle \neq 0. \tag{3.3}$$

Ako je $f(x) \neq 0$, onda $x \in \operatorname{supp} f$. Ako je $f(x) = 0$, pokažimo da za svaku okolinu V tačke x važi $V \cap \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji okolina W tačke x, takva da je $W \cap \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} = \emptyset$. Prema (3.3) postoji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tako da je $\operatorname{supp} \varphi \subset W$ i $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \neq 0$. Međutim, iz $\operatorname{supp} \varphi \subset W$ i $W \cap \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} = \emptyset$, sledi da je $f(x)\varphi(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$, pa je $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$. Došli smo do kontradikcije, pa je presek svake okoline tačke x i skupa $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ neprazan i onda $x \in \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} = \operatorname{supp} f$.

($\supset$) Ovu inkluziju pokazujemo kontrapozicijom. Neka $x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{Supp} T_f$. Na osnovu napomene 3.14, postoji okolina $B_\xi(x_0)$ tačke x_0, takva da je za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, za koje je $\operatorname{supp} \varphi \subset B_\xi(x_0)$, ispunjeno da je $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$. Pokažimo da $x_0 \notin \operatorname{supp} f$.

Pretpostavimo suprotno, da $x_0 \in \operatorname{supp} f$. Tada za svaku okolinu V tačke x_0 važi da postoji $y \in V$, tako da je $f(y) \neq 0$, pa i za okolinu $B_\xi(x_0)$. Neka je $y \in B_\xi(x_0)$, tako da je $f(y) \neq 0$. Tada postoje $\alpha > 0$ i $\eta > 0$, tako da je $f_i(x) > \alpha$ ili $f_i(x) < -\alpha$, za sve $x \in B_\eta(y)$ i bar jedan od indeksa $i \in \{1, 2\}$ (koristimo $f = f_1 + i f_2$). Neka je $\delta > 0$, tako da je $B_\delta(y) \subset B_\xi(x)$. Dalje, neka je $\gamma = \min\{\delta, \eta\}$. Sada za funkciju $\rho(x) = \rho(\frac{x-y}{\gamma}) \in \mathcal{D}(\Omega)$, koja ima osobine kao u primeru 3.10, važi da je $\operatorname{supp} \rho \subset B_\gamma(y) \subset B_\xi(x_0)$. Ako je, na primer, $f_1(x) > \alpha$, onda na osnovu osobina funkcije ρ sledi

$$\int_{\Omega} f_1(z)\rho(z)dz = \int_{B_\gamma(y)} f_1(z)\rho(z)dz > \alpha \int_{B_\gamma(y)} \rho(z)dz = \alpha,$$

pa je

$$\int_{\Omega} f(x)\rho(x)dx \neq 0.$$

Dobijamo kontradikciju sa činjenicom da za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, čiji je nosač sadržan u $B_\xi(x_0)$, važi $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$.

Primer 3.17. $\mathrm{Supp}(\delta) = \{0\}$.
Zaista, ako je $x \neq 0$ možemo da izaberemo otvorenu okolinu U tačke x tako da $0 \notin U$. Tada za $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ imamo $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0) = 0$. Zato je $\mathrm{Supp}(\delta) \subset \{0\}$. Sa druge strane, za svaku okolinu nule V postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tako da je $\mathrm{supp}(\varphi) \subset V$ i $\varphi(0) \neq 0$. Zato je za takvu funkciju φ, $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0) \neq 0$ i sledi da je $\{0\} \subset \mathrm{Supp}\delta$.

Propozicija 3.18. *Ako $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, onda je*

$$\mathrm{Supp}(S+T) \subset \mathrm{Supp}S \cup \mathrm{Supp}T,$$

i

$$\mathrm{Supp}(\lambda T) = \mathrm{Supp}T, \text{ za } \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ funkcija za koju važi

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega\backslash(\mathrm{Supp}S \cup \mathrm{Supp}(T)) = \Omega\backslash\mathrm{Supp}(S) \cap \Omega\backslash\mathrm{Supp}(T).$$

Tada je $\langle S+T, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle + \langle T, \varphi\rangle = 0$ i zato je

$$\Omega\backslash(\mathrm{Supp}S \cup \mathrm{Supp}T) \subset \Omega\backslash\mathrm{Supp}(S+T).$$

Ostatak tvrđenja sledi iz $\mathrm{supp}(\lambda\varphi) = \mathrm{supp}(\varphi)$ za $\lambda \neq 0$ i $\langle \lambda T, \varphi\rangle = \langle T, \lambda\varphi\rangle$.
❑

Sledi da sve distribucije iz $\mathcal{D}'(\Omega)$, čiji nosač je sadržan u fiksnom podskupu od Ω, formiraju vektorski prostor. Slično, sve distribucije sa kompaktnim nosačem formiraju vektorski prostor.

3.4 Izvod distribucije

Jedna od najvažnijih osobina distribucija je da za proizvoljno $j \in \{1, \dots, n\}$ može da se definiše linearno preslikavanje $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ koje uopštava uobičajeni parcijalni izvod ∂_j. Ovo preslikavanje takođe obeležavamo simbolom ∂_j. Neka je f neprekidno diferencijabilna funkcija i neka je $T = T_f$ distribucija povezana sa ovom funkcijom. Tada je razumljivo da očekujemo da distribucija $\partial_j T_f$ bude povezana sa funkcijom $\partial_j f$.

Neka $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Parcijalnom integracijom u odnosu na x_j i ako uzmemo u obzir da je φ jednako nuli izvan nekog kompaktnog skupa dobijamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j\varphi(x)dx.$$

Prethodnu jednačinu možemo da napišemo u obliku

$$\langle \partial_j T, \varphi\rangle = -\langle T, \partial_j\varphi\rangle.$$

Propozicija 3.19. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Za svaki indeks j, $1 \leq j \leq n$ linearno preslikavanje $\varphi \mapsto \partial_j\varphi$ iz $\mathcal{D}(\Omega)$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ je neprekidno.*

Dokaz: Dovoljno je pokazati da je za proizvoljni kompaktan podskup K od Ω preslikavanje $\varphi \mapsto \partial_j\varphi$ neprekidno. Neka je V okolina 0 u $\mathcal{D}(\Omega)$. Postoji $\varepsilon > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ tako da $V \cap \mathcal{D}(K)$ sadrži skup

$$\{\varphi : |\partial^p\varphi(x)| \leq \varepsilon,\ |p| \leq k\}.$$

Tada je skup

$$U = \{\varphi : |\partial^p\varphi(x)| \leq \varepsilon,\ |p| \leq k+1\}$$

okolina 0 u $\mathcal{D}(K)$ i iz $\varphi \in U$ sledi da $\partial_j\varphi \in V$. ❑

Posledica 3.20. *Za svaki multi-indeks $p \in \mathbb{N}^n$ preslikavanje $\varphi \mapsto \partial^p\varphi$ iz $\mathcal{D}(\Omega)$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ je neprekidno.*

Neka je $p \in \mathbb{N}_0^n$. Ako je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definišimo preslikavanje $\partial^p T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$, tako da je

$$\partial^p T(\varphi) = (-1)^{|p|}\langle T, \partial^p\varphi\rangle,\ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- Iz linearnosti distribucije T sledi da je $\partial^p T$ linearno preslikavanje.
- Neka je $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \in \Omega$ i neka $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ u $\mathcal{D}(\Omega)$. Tada na osnovu neprekidnosti preslikavanja $\varphi \mapsto \partial^p\varphi$ sledi da niz $(\partial^p\varphi_k)$ konvergira ka $\partial^p\varphi$ u prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$. Dalje, kako je T neprekidna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$, sledi da
$$\langle T, \partial^p\varphi_k\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \langle T, \partial^p\varphi\rangle.$$
Iz definicije preslikavanja $\partial^p T$ sledi
$$\langle \partial^p T, \varphi_k\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \langle \partial^p T, \varphi\rangle.$$
Uslov neprekidnosti linearne funkcionele na $\mathcal{D}(\Omega)$ ekvivalentan je uslovu sekvencijalne neprekidnosti, pa je $\partial^p T$ neprekidna linearna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$, to jest $\partial^p T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Dobijamo da je naredna definicija dobra.

Definicija 3.21. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $p \in \mathbb{N}_0^n$. Sa ∂^p označavamo linearno preslikavanje iz $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ definisano sa*
$$\langle \partial^p T, \varphi\rangle = (-1)^{|p|}\langle T, \partial^p\varphi\rangle$$
za $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Preslikavabhe $\partial^p T = T^{(p)}$ zovemo parcijalnim izvodom reda $|p|$ od T.

Primetimo da je $\partial_i\partial_j T = \partial_j\partial_i T$ za $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \le i, j \le n$, pošto analogna formula važi za funkcije iz $\mathcal{D}(\Omega)$.

Znamo da je $\operatorname{supp}(\partial^p f) \subset \operatorname{supp} f$. Analogno važi i za distribucije.

Propozicija 3.22. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tada je* $\operatorname{Supp}(\partial^p T) \subset \operatorname{Supp} T$, *za svako $p \in \mathbb{N}_0^n$.*

Dokaz: Neka je $x \in \operatorname{Supp}(\partial^p T)$ i V okolina tačke x. Tada postoji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tako da je $\operatorname{supp}\varphi \subset V$ i $\langle \partial^p T, \varphi\rangle \neq 0$. Sledi da je
$$\langle T, \partial^p\varphi\rangle \neq 0.$$
Kako je $\partial^p\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i $\operatorname{supp}(\partial^p\varphi) \subset \operatorname{supp}\varphi \subset V$, sledi da je $x \in \operatorname{Supp} T$ (videti napomenu 3.14). ❏

Primer 3.23. Neka je H Hevisajdova funkcija definisana na $\mathbb{R}$, tj.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Preslikavanje

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx$$

iz $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ u $\mathbb{K}$ je neprekidno zato što je

$$\Big| \int_0^{\infty} \varphi(x)dx \Big| \leq a \cdot \max_x |\varphi(x)|$$

ako je nosač od φ sadržan u intervalu $[-a, a]$. Dakle, H definiše distribuciju koju označavamo isto sa H, odnosno

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Prema definiciji 3.21 važi

$$\langle \partial H, \varphi \rangle = -\langle H, \partial\varphi \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

odnosno, $H' = \partial H = \delta$. Primetimo da je izvod Hevisajdove funkcije u klasičnom smislu funkcija koja je jednaka 0 za $x \neq 0$ i koja nije definisana u koordinatnom početku. Ovaj primer nam ilustruje i da izvod regularne distribucije ne mora biti regularna distribucija.

Primer 3.24. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna svuda, osim u konačno mnogo tačaka $a_1 < a_2 < \cdots < a_s$ i pri tome za svaku tačku a_k, $1 \leq k \leq s$, leve i desne granične vrednosti

$$f(a_k + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a_k + \varepsilon), \;\; f(a_k - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a_k - \varepsilon),$$

postoje i konačne su. Tada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ i definiše regularnu distribuciju T_f,

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{s} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\varphi(x)dx, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

gde je $a_0 = -\infty$ i $a_{s+1} = \infty$.

Dodatno, pretpostavimo da na svakom intervalu (a_k, a_{k+1}), $0 \leq k \leq s$, funkcija f ima neprekidan prvi izvod i da u svakoj tački a_k, $1 \leq k \leq s$, jednostrane granične vrednosti

$$f'(a_k + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(a_k + \varepsilon) - f(a_k)}{\varepsilon}, \; f'(a_k - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(a_k - \varepsilon) - f(a_k)}{\varepsilon},$$

postoje i konačne su. Tada $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ i definiše regularnu distribuciju $T_{f'}$. Ako označimo $j_k = f(a_k + 0) - f(a_k - 0)$, $1 \leq k \leq s$, onda za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ važi

$$\langle \partial T_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\sum_{k=0}^{s} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\varphi'(x)dx = (\star).$$

Primenom parcijalne integracije i koristeći da φ ima kompaktan nosač dobijamo da je

$$(\star) = \sum_{k=1}^{s} j_k \varphi(a_k) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx.$$

Dakle,

$$\partial T_f = T_{f'} + \sum_{k=1}^{s} j_k \delta_{a_k}.$$

Posebno, ako je f neprekidna funkcija, onda je $\partial T_f = T_{f'}$, ali u opštem slučaju ∂T_f nije ponovo regularna distribucija.

3.5 Distribucije konačnog reda

Definicija 3.25. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Par (E, j), gde je E lokalno konveksan Hauzdorfov prostor i $j : E \to \mathcal{D}'(\Omega)$ neprekidno, injektivno linearno preslikavanje nazivamo* ***injektivni par****. Za sliku $j(E)$ kažemo da je prostor distribucija na Ω.*

Često prostor E identifikujemo sa slikom $j(E)$, pa za E kažemo da je prostor distribucija. Napomenimo da prostor E posmatramo sa njegovom prvobitnom topologijom, koja je finija od topologije indukovane topologijom prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definicija 3.26. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Trojku (i, E, j), gde je E lokalno konveksan Hauzdorfov prostor, a $i : \mathcal{D}(\Omega) \to E$ i $j : E \to \mathcal{D}'(\Omega)$ su neprekidna, injektivna linearna preslikavanja, zovemo* ***normalni triplet****, ako su sledeći uslovi zadovoljeni:*

- *skup $Im(i)$ je gust u prostoru E,*
- *preslikavanje $j \circ i$ je upravo preslikavanje $\varphi \mapsto T_\varphi$ iz $\mathcal{D}(\Omega)$ u $\mathcal{D}(\Omega)$, definisano u primeru 3.4.*

Prostor $j(E)$ tada nazivamo ***normalan prostor distribucija****.*

Može se pokazati da važi naredna propozicija.

Propozicija 3.27. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $m \in \mathbb{N}_0$. Tada je $\mathcal{D}^m(\Omega)$ normalan prostor distribucija.*

Sada možemo da zaključimo da je dual $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ prostora $\mathcal{D}^m(\Omega)$ prostor distribucija (definicija 3.25). Sa $\mathcal{D}^m(\Omega)$ smo označili prostor svih m puta diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem sadržanim u otvorenom skupu Ω. Takođe, možemo da zaključimo da imamo sledeći niz injektivnih preslikavanja, tako da je slika svakog prostora gust skup u prostoru koji je kodomen posmatranog preslikavanja.

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^m(\Omega) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{K}(\Omega)$$

Iste osobine ima i naredni niz preslikavanja.

$$\mathcal{K}'(\Omega) \to \cdots \to \mathcal{D}'^m(\Omega) \to \mathcal{D}'^{m+1}(\Omega) \to \cdots \to \mathcal{D}'(\Omega).$$

Na prethodno opisan način možemo svaki od navedenih prostora posmatrati kao vektorski potprostor narednog prostora u nizu. Preciznije, za $0 \le m < k \le \infty$, distribucija $T \in \mathcal{D}'^k(\Omega)$ je elemenat prostora $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ ako i samo ako je T restrikcija na $\mathcal{D}^k(\Omega)$ nekog elementa $\tilde{T} \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$. Dolazimo da naredne definicije.

Definicija 3.28. *Neka je $m \in \mathbb{N}$. Distribucija $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je* ***distribucija reda m*** *ako je $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ i $T \notin \mathcal{D}'^{m-1}(\Omega)$. Distribucija $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je* ***reda nula*** *ako je $T \in \mathcal{K}'(\Omega)$. Distribucije reda nula takođe nazivamo i (Radonove) mere na Ω.*

Na osnovu definicije sledi da je za $0 \le m \le \infty$ prostor $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ upravo prostor svih distribucija čiji je red manji ili jednak m. Za distribuciju $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ koja pripada nekom od prostora $\mathcal{D}'^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, kažemo da je **distribucija konačnog reda**.

Red distribucije $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je manji ili jednak $m \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako je T neprekidna na $\mathcal{D}(\Omega)$ u odnosu na (grublju) topologiju koja je na $\mathcal{D}(\Omega)$ indukovana topologijom prostora $\mathcal{D}^m(\Omega)$, odnosno ako postoji distribucija $\tilde{T} \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$, takva da je $T = \tilde{T}|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Uzimajući u obzir potreban i dovoljan uslov da linearna funkcionela deifnisana na lokalno-konveksnom prostoru bude neprekidna (napomena 2.50), oblik semi-normi koje definišu topologiju prostora $\mathcal{D}^m(K)$, gde je K kompaktan podskup od Ω i činjenicu da je topologija prostora $\mathcal{D}^m(\Omega)$ striktni induktivni limit topologija na $\mathcal{D}^m(K)$, možemo da zaključimo da je $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ ako i samo ako za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji $M > 0$, tako da je

$$|\langle T, \varphi \rangle| \le M \max_{|p|\le m} \max_{x \in K} |\partial^p \varphi(x)|, \ \ \varphi \in \mathcal{D}(K) \ (\varphi \in \mathcal{D}^m(K)).$$

Na osnovu prethodnih zaključaka i posmatrajući ekvivalentne familije seminormi na prostoru $\mathcal{D}^m(K)$, možemo uvesti i sledeću (ekvivalentnu prethodnoj) definiciju distribucije konačnog reda.

Definicija 3.29. *Distribucija $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je* ***konačnog reda*** *ako postoji $m \in \mathbb{N}_0$, tako da za svaki kompaktan podskup K od Ω postoji $M > 0$, tako da je*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \le M \sum_{|p|\le m} \max_{x \in K} |\partial^p \varphi(x)|, \ \ \varphi \in \mathcal{D}(K). \tag{3.4}$$

Najmanji broj $m \in \mathbb{N}_0$ za koji je (3.4) ispunjeno naziva se ***red distribucije T****.*

Dajemo primere distribucija konačnog reda.

Primer 3.30. Neka je $f \in C(\Omega)$ i $K \subset \Omega$ kompaktan skup. Važi da je

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq m(K)\max_{x\in K}|f(x)|\cdot\max_{x\in K}|\varphi(x)|,\ \ \varphi\in\mathcal{D}(K),$$

pa je T_f distribucija reda nula.

Primer 3.31. Neka je $a \in \Omega$ i $K \subset \Omega$ kompaktan skup. Tada je za $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ ispunjeno

$$|\langle \delta_a, \varphi\rangle| = |\varphi(a)| \leq \max_{x\in K}|\varphi(x)|,$$

pa je δ_a distribucija reda nula.

Primer 3.32. Košijeva glavna vrednost za $\frac{1}{x}$ je distribucija reda 1. Neka je $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup i $a > 0$, tako da je $K \subset [-a, a]$. Pokazali smo u primeru 3.9 da je

$$|\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi\rangle| \leq 2a\max_{x\in[-a,a]}|\varphi'(x)|,\ \ \varphi\in\mathcal{D}(K),$$

pa sledi da je red distribucije $p.v.\frac{1}{x}$ manji ili jednak 1. Pretpostavimo da je $p.v.\frac{1}{x}$ distribucija reda nula. Tada za svaki skup $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup postoji $C_K > 0$, tako da za svako $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ važi

$$|\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi\rangle| \leq C_K\max_{x\in K}|\varphi(x)|. \tag{3.5}$$

Konstruišimo niz funkcija $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n \in \mathcal{D}([-2, 2])$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ \\ 0, & x \notin [\frac{1}{2n}, 2] \end{cases}.$$

Iz (3.5), za $K = [-2, 2]$, sledi da postoji $C > 0$, tako da je

$$|\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle| \leq C\max_{x\in K}|\varphi_n(x)| = C,\ \text{ za svako } n\in\mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Međutim, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $\tilde{\varepsilon} > 0$, tako da za sve $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ važi $[\frac{1}{2n}, 2] \subset [\varepsilon, \infty)$. Prema tome, za svako $n \in \mathbb{N}$ je

$$|\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle| = \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x}\, dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \ln 1 - \ln\frac{1}{n} = \ln n. \tag{3.7}$$

Sada na osnovu (3.6) i (3.7) sledi da za svako $n \in N$ važi da je $\ln n \leq C$. Došli smo do kontradikcije, pa sledi da je $p.v.\frac{1}{x}$ distribucija reda 1.

Primer 3.33. Distribucija $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \partial^n \delta_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ data sa

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\partial^n \varphi)(n), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

nije konačnog reda.

Važe i naredna tvrđenja koja navodimo bez dokaza.

Posledica 3.34. *Svaka distribucija koja ima kompaktan nosač je distribucija konačnog reda.*

Propozicija 3.35. *Neka je $0 \in \Omega$. Svaka distribucija $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ za koju je $Supp\, T = \{0\}$ je konačna linearna kombinacija Dirakove delta distribucije (Dirakove mere) i njenih izvoda.*

3.6 Množenje distribucija

Primetimo da je diferencijalni operator na prostoru distribucija definisan tako da na određeni način predstavlja uopštenje diferencijalnog operatora na prostoru funkcija. Prilikom definisanja operacije množenja distribucija očekivano je da ono bude uopštenje operacije množenja funkcija. Međutim, takvu operaciju na prostoru distribucija nije uvek moguće definisati. Videćemo da ova operacija ne mora da bude asocijativna, što je osobina operacije množenja funkcija.

Razmotrimo množenje distribucije beskonačno diferencijabilnom funkcijom. Posmatrajmo funkcije $f \in C(\Omega)$ i $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$. Tada je funkcija αf elemenat prostora $\mathcal{C}(\Omega)$ i za $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$\langle T_{\alpha f}, \varphi\rangle = \int_\Omega \alpha(x) f(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_f, \alpha\varphi\rangle.$$

Cilj je definisati proizvod αT funkcije $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$ i distribucije $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tako da za $T = T_f$ bude ispunjeno da je $\alpha T_f = T_{\alpha f}$. Važi sledeća propozicija.

Propozicija 3.36. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $0 \le m \le \infty$ i $\alpha \in \mathcal{E}^m(\Omega)$. Linearno preslikavanje $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ iz $\mathcal{D}^m(\Omega)$ u $\mathcal{D}^m(\Omega)$ je neprekidno.*

Definicija 3.37. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $0 \le m \le \infty$. Ako je $\alpha \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ i $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$, onda je distribucija αT definisana na sledeći način*

$$\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle,\ \ \varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega).$$

Važi da je $\alpha\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$, pa je αT dobro definisana linarna funkcionela na $\mathcal{D}^m(\Omega)$. Presliakvanje $\varphi \mapsto \langle T, \alpha\varphi\rangle$ je Prema propoziciji 3.36 kompozicija neprekidnih preslikavanja $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ i $\psi \mapsto \langle T, \psi\rangle$, pa je neprekidno. Dakle, definicija je dobra.

Preslikavanje $T \mapsto \alpha T$ iz $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ u $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ je transponovano preslikavanje neprekidnog preslikavanja $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ iz $\mathcal{D}^m(\Omega)$ u $\mathcal{D}^m(\Omega)$, pa je i ono neprekidno. Ako prostor $C(\Omega)$ posmatramo kao potprostor prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$ (pomoću injekcije $f \mapsto T_f$), onda restrikcija preslikavanja $T \mapsto \alpha T$ na $C(\Omega)$ predstavlja uobičajeno množenje funkcija $f \mapsto \alpha f$.

Primer 3.38. Neka $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$, $f(x) = x$, $x \in \Omega$. Za $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je

$$\langle x\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x\varphi\rangle = (x\varphi)(0) = 0.$$

Primer 3.39. Neka $f \in C(\mathbb{R})$, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $p.v.\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ važi

$$\langle x \cdot p.v.\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle T_1, \varphi\rangle,$$

gde je T_1 distribucija pridružena funkciji $g \in C(\mathbb{R})$, $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Propozicija 3.40. *Neka je* $0 \leq m \leq \infty$ *i* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otvoren skup. Za* $\alpha \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ *i* $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ *važi*

$$\operatorname{Supp}(\alpha T) \subset \operatorname{supp}\alpha \cap \operatorname{Supp} T.$$

Dokaz: Pokazaćemo da važi

$$(\operatorname{supp}\alpha)^c \cup (\operatorname{Supp} T)^c \subset (\operatorname{Supp}(\alpha T))^c,$$

pri čemu komplement skupa posmatramo u odnosu na skup Ω. Pretpostavimo da $x \in (\operatorname{supp}\alpha)^c$. Sledi da postoji okolina V tačke x, tako da je $\alpha(y) = 0$, za sve $y \in V$. Ako za $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi da je $\operatorname{supp}\varphi \subset V$, onda je $\alpha\varphi(x) = 0$, za sve $x \in \Omega$. Prema tome sledi

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle = 0.$$

Možemo na osnovu napomene 3.14 da zaključimo da je $x \in (\operatorname{Supp}(\alpha T))^c$. Dalje, pretpostavimo da je $x \in (\operatorname{Supp} T)^c$. Tada postoji okolina V tačke x, tako da za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset V$, važi $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Kako je $\operatorname{supp}(\alpha\varphi) \subset \operatorname{supp}\varphi$ sledi da je

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle = 0,$$

pa ponovo na osnovu napomene 3.14 zaključujemo da je $x \in (\operatorname{Supp}(\alpha T))^c$.

❑

Propozicija 3.41. *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *i* $m \in \mathbb{N}_0$. *Ako je* $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$ *i* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *ili ako je* $\alpha \in \mathcal{E}^{m+1}(\Omega)$ *i* $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$, *onda sledi*

$$\partial_j(\alpha T) = \partial_j\alpha \cdot T + \alpha \cdot \partial_j T, \;\; 1 \leq j \leq n.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tada važi

$$\begin{aligned}
\langle \partial_j(\alpha T), \varphi \rangle &= -\langle \alpha T, \partial_j\varphi \rangle \\
&= -\langle T, \alpha \cdot \partial_j\varphi \rangle \\
&= -\langle T, \partial_j(\alpha\varphi) - \varphi \cdot \partial_j\alpha \rangle \\
&= \langle \partial_j T, \alpha\varphi \rangle + \langle \partial_j\alpha \cdot T, \varphi \rangle \\
&= \langle \alpha \cdot \partial_j T + \partial_j\alpha \cdot T, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

❑

Posledica 3.42. *Neka je $p \in \mathbb{N}_0^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$. Tada važi*

$$\partial^p(\alpha T) = \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} \partial^q \alpha \cdot \partial^{p-q} T.$$

Množenje distribucija $\mathcal{E}^m$-funkcijama je asocijativno i distributivno. Preciznije, važi sledeća propozicija.

Propozicija 3.43. *Neka je $0 \leq m \leq \infty$. Ako je $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ i $T, S \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$, onda važi*

$$(\alpha + \beta)T = \alpha T + \beta T, \quad \alpha(S + T) = \alpha S + \alpha T,$$

$$(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T).$$

Neka je $0 \leq m \leq \infty$. Za $\alpha \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ i $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ definišemo da je $T\alpha = \alpha T$. Ako je $T_1, ..., T_k \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ i ako je najmanje $k-1$ distribucija elemenat prostora $\mathcal{E}^m(\Omega)$, onda induktivno može biti definisan proizvod

$$T_1 T_2 \cdots T_k = T_1(T_2 \cdots T_k).$$

Navedeni proizvod ne zavisi od redosleda članom u proizvodu, to jest važi uopšteno pravilo asocijativnosti

$$\left(\prod_{j=1}^{l} T_j \right) \cdot \left(\prod_{j=l+1}^{k} T_j \right) = \prod_{j=1}^{k} T_j,$$

za svako $1 \leq l < k$.

Međutim, operacija množenja $\mathcal{E}^m(\Omega) \times \mathcal{D}'^m(\Omega) \to \mathcal{D}'^m(\Omega)$ ne može na pogodan način biti proširena na operaciju množenja $\mathcal{D}'^m(\Omega) \times \mathcal{D}'^m(\Omega) \to \mathcal{D}'^m(\Omega)$. Za tako definisanu operaciju ne bi važila asocijativnost.

Primer 3.44. Posmatrajmo distribucije $\delta, p.v.\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i $f \in C(\mathbb{R})$, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je

$$\langle (\delta x) \cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ primer\ 3.38}}{=} \langle 0 \cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = 0,$$

dakle $(\delta x)\cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 0$. Međutim,

$$\langle \delta\cdot(x\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \varphi\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ primer\ 3.39}}{=} \langle \delta, \varphi\rangle,$$

dakle $\delta\cdot(x\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = \delta$. Sledi, $(\delta x)\cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \neq \delta\cdot(x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$.

Nemogućnost definisanja množenja proizvoljnih distribucija u $\mathcal{D}'$ uzrokovala je probleme u fizici, na primer u hidrodinamici se javljaju proizvodi udarnih talasa i njihovih izvoda, oblika $H(x)\delta(x)$. To je dovelo do ideje da se $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ utopi u neku algebru, čime bi se dobilo množenje sa uobičajenim osobinama. Čuveni ,,*Schwartz impossibility result*" pokazuje da se u ovakvom pristupu javljaju izvesna ograničenja.

3.7 Lebegov integral, L^p prostori

Definicija 3.45. *Neka je $X \neq \emptyset$. Familiju skupova $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ sa osobinama*

1. $X \in \mathcal{M}$
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$
3. $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$,

*nazivamo **$\boldsymbol{\sigma}$-algebra** na X. Par $(X, \mathcal{M})$ nazivamo prostor sa σ-algebrom. Elementi σ-algebre $\mathcal{M}$ su **merljivi skupovi**.*

Definicija 3.46. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom. **Mera** na $\mathcal{M}$ je funkcija $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ za koju važi:*

Ako je $\{A_i \in \mathcal{M} : i \in \mathbb{N}\}$ familija disjunktnih skupova, onda je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma \textit{ aditivnost}).$$

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ nazivamo ***merljiv prostor*** *ili* ***prostor sa merom****. Skup $A \in \mathcal{M}$ za koji je $\mu(A) = 0$ nazivamo* ***skup mere nula****.*

Mera μ je ***σ-konačna*** *ako je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathcal{M}$, $\mu(E_i) < \infty$, za svako $i \in \mathbb{N}$.*

Definicija 3.47. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom. Kažemo da je mera μ na $\mathcal{M}$* ***kompletna****, to jest da je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa kompletnom merom, ako je svaki podskup merljivog skupa mere nula takođe merljiv skup. Drugačije zapisano,*

$$B \subset A,\ A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{M}.$$

Za prostor sa (nekompletnom) merom $(X, \mathcal{M}, \mu)$ postoji najmanji prostor sa kompletnom merom koji ga sadrži. Taj prostor nazivamo **kompletiranje od $\mathcal{M}$ u odnosu na meru μ**.
Značaj kompletnih mera je u tome što se u teoriji mera tvrđenja često formulišu da važe za **skoro svako (s.s)** $x \in X$, a ne za svako $x \in X$. Ako je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ proizvoljan prostor sa merom, kažemo da neko tvrđenje važi za skoro svako $x \in X$ ako postoji skup $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, tako da tvrđenje važi za svako $x \in X \setminus N$. U tom smislu možemo, na primer, definisati jednakost skoro svuda ili konvergenciju skoro svuda.

Definicija 3.48. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom i (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f : X \to Y$ (ili $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \tau)$) je* ***merljiva*** *ako i samo ako je $f^{-1}[\omega] \in \mathcal{M}$, za svako $\omega \in \tau$.*

Na skupovima $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ podrazumevamo **Lebegove σ-algebre** i **Lebegove mere**, koje su σ-konačne i kompletne mere.

3.7.1 L^p prostori

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa σ-konačnom, kompletnom merom μ, što u nastavku podrazumevamo.

Sa $L^1(\mu)$ obeležavamo skup svih realnih merljivih funkcija, $f : X \to \mathbb{R}$, za koje važi

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Na skupu $L^1(\mu)$ možemo uvesti relaciju ekvivalencije $\sim$: Za $f, g \in L^1(\mu)$ je

$$f \sim g \text{ ako i samo ako } f = g \text{ s.s.}$$

Tada možemo definisati i klase ekvivalencije te relacije. Za $f \in L^1(\mu)$ je

$$\big[f\big]_\sim = \{g \in L^1(\mu) : f = g \text{ s.s.}\}.$$

Odgovarajući faktor prostor obeležavamo sa $L^1(X)$. Na njemu je definisana vektorska struktura, za $\big[f\big]_\sim, \big[g\big]_\sim \in L^1(X)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$\big[f + g\big]_\sim = \big[f\big]_\sim + \big[g\big]_\sim, \quad \big[\lambda f\big]_\sim = \lambda\big[f\big]_\sim,$$

gde podrazumevamo uobičajene operacije sabiranja funkcija i množenja funkcije realnim brojem. Preslikavanje $\| \cdot \|_1 : L^1(X) \to [0, \infty)$,

$$\big\| [f]_\sim \big\|_1 = \int_X |f| d\mu, \ \ \big[f\big]_\sim \in L^1(X),$$

je dobro definisano, jer klasu relacije ekvivalencije čine funkcije jednake skoro svuda.
Elemenat $\big[f\big]_\sim$ možemo označavati sa f, vodeći računa o tome da se radi o klasi funkcija jednakih skoro svuda (identifikovane su sve funkcije jednake skoro svuda). U tom kontekstu faktor prostor možemo identifikovati sa početnim prostorom $L^1(\mu)$ i zvati ga prostor Lebeg-integrabilnih funkcija (u kom su prethodno identifikovane sve funkcije jednake skoro svuda).

Uz prethodno navedene pretpostavke i uzimajući u obzir identifikaciju skoro svuda jednakih funkcija (na način koji je opisan za $L^1(\mu)$) dajemo naredne definicije.

Definicija 3.49. *Za $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, prostor $L^p(X)$ je skup realnih merljivih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ za koje važi*

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

i u kojem identifikujemo funkcije jednake skoro svuda. Drugačije zapisano,

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ je merljiva i } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Definicija 3.50. *Prostor esencijalno ograničenih funkcija, u oznaci $L^\infty(X)$, je skup realnih merljivih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ za koje važi da postoje $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ i $C > 0$, tako da je*

$$|f(x)| \leq C, \text{ za sve } x \in X \setminus A$$

i u kojem identifikujemo funkcije jednake skoro svuda. Drugačije zapisano,

$$L^\infty(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ je merljiva,} \\ \text{postoje } C > 0 \text{ i } A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = 0, \text{ tako da je} \\ |f(x)| \leq C, \text{ za sve } x \in (X \setminus A) \end{array} \right\}.$$

Sa uobičajenim operacijama sabiranja funkcija i množenja funkcije realnim brojem $L^p(X)$ je realan vektorski prostor, za svako $1 \leq p \leq \infty$. U narednim tvrđenjima predstavićemo i norme na ovim prostorima.

Lema 3.51. *Neka je $1 \leq p < \infty$. Preslikavanje $\|\cdot\|_p : L^p(X) \to [0, \infty)$,*

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}, \ f \in L^p(X),$$

je norma na $L^p(X)$.

Lema 3.52. *Preslikavanje* $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X) \to [0,\infty)$,

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}, \; f \in L^\infty(X),$$

je norma na $L^\infty(X)$.

Teorema 3.53. *Za svako* $1 \leq p \leq \infty$ *prostor* $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ *je Banahov.*

Teorema 3.54. *Za svako* $1 < p < \infty$ *Banahov prostor* $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ *je refleksivan.*

Napomena 3.55. Prostori $(L^1(X), \|\cdot\|_1)$ i $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ nisu refleksivni, osim u trivijalnom slučaju, kada je X konačan skup.

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je Lebeg integrabilna ako je merljiva i

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty.$$

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je Lebeg integrabilna ako su njeni realni i imaginarni deo Lebeg integrabilni. Tada je

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} \text{Re } f(x)dx + i \int_{\mathbb{R}^n} \text{Im} f(x)dx.$$

Prostor svih Lebeg integrabilnih funkcija označavamo sa $L^1(\mathbb{R}^n)$. To je vektorski prostor na kom definišemo normu

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx,$$

pri čemu identifikujemo funkcije koje se razlikuju na skupu mere nula. Sa ovako uvedenom normom prostor $L^1(\mathbb{R}^n)$ je Banahov.

Često ćemo koristiti sledeću teoremu.

Teorema 3.56. (Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji) *Neka je* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *niz funkcija u* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *tako da je* $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ *skoro svuda i* $|f_k(x)| \leq g(x)$ *skoro svuda za neku funkciju* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Tada* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *i*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Primenom Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji možemo pokazati sledeću teoremu.

Teorema 3.57. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup i $a \in U$. Neka je $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{C}$ funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:*

1. *za svako $x \in \mathbb{R}^n$ funkcija $t \mapsto f(x,t)$ je neprekidna u a,*
2. *za svako $t \in U$ funkcija $x \mapsto f(x,t)$ je integrabilna na $\mathbb{R}^n$;*
3. *postoji $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tako da je $|f(x,t)| \leq F(x)$ za skoro sve $x \in \mathbb{R}^n$ i za sve $t \in U$.*

Tada je funkcija

$$U \ni t \mapsto g(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx \in \mathbb{C}$$

neprekidna u a.

Navedimo i specijalnu formu Fubinijeve teoreme, koju ćemo koristiti u nastavku.

Teorema 3.58. *Neka su $X \subset \mathbb{R}^m$ i $Y \subset \mathbb{R}^n$ Lebeg merljivi skupovi.*

1. *Neka $f \in L^1(X \times Y)$. Tada funkcije*

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)dy, \qquad y \mapsto \int_X f(x,y)dx$$

definišu integrabilne funkcije na X i Y redom i važe jednakosti

$$\int_X (\int_Y f(x,y)dy)dx = \int_{X\times Y} f(x,y)d(x,y) = \int_Y (\int_X f(x,y)dx)dy.$$

2. *Ako je f Lebeg merljiva na $X \times Y$, onda su funkcije*

$$x \mapsto \int_Y |f(x,y)|dy, \qquad y \mapsto \int_X |f(x,y)|dx$$

Lebeg merljive na X i Y redom i važe jednakosti

$$\int_X (\int_Y |f(x,y)|dy)dx = \int_{X\times Y} |f(x,y)|d(x,y) = \int_Y (\int_X |f(x,y)|dx)dy.$$

Važi i Helderova nejednakost:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad \text{za sve } f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n),$$

gde je $1 \leq p \leq \infty$ i $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

Prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$ je Hilbertov. Norma i unutrašnji proizvod su dati sa

$$\|f\|_2 := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$(f, g)_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)} dx$$

za sve $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Za $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup definišemo vektorski prostor

$$L^p_{loc}(U) = \{f : U \to \mathbb{K} \text{ merljiva} \mid f|_K \in L^p(K) \text{ za svaki } K \subset U \text{ kompaktan.}\}$$

Važe i naredna tvrđenja.

Teorema 3.59. *Neka je $1 \leq p < \infty$. Tada je $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gust u $L^p(\mathbb{R}^n)$, to jest za svako $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ postoji niz funkcija $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, tako da je $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0$.*

Teorema 3.60. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $f \in L^1_{loc}(U)$ funkcija takva da je*

$$\int_U f(x)\varphi(x) dx = 0 \text{ za sve } \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Tada je $f(x) = 0$ za skoro sve $x \in U$.

Uvodimo oznaku $\langle x \rangle = (1 + \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}$ za $x \in \mathbb{R}^n$ („japanska zagrada"). Važi sledeća lema.

Lema 3.61. *Neka je $s > n$. Tada $\langle x \rangle^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $(1 + \|x\|)^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

3.7.2 Konvolucija

Neka su $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ i pretpostavimo da funkcija g ima kompaktan nosač. Tada je za svako $x \in \mathbb{R}^n$ funkcija

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

neprekidna na $\mathbb{R}^n$, njen nosač je podskup nosača funkcije g, pa je

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy < \infty.$$

Definicija 3.62. *Neka $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ i neka funkcija g ima kompaktan nosač. Konvolucija funkcija f i g je definisana sa:*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy, \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Napomena 3.63. Druga jednakost u definiciji 3.62 se dobija preko smene promenljive.

Navedimo neke od osobina konvolucije za neprekidne funkcije f i g i uz pretpostavku da g ima kompaktan nosač.

(1) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Pretpostavimo da $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Kako je $x = (x-y)+y$, sledi da $x - y \notin \operatorname{supp} f$ ili $y \notin \operatorname{supp} g$, za sve $y \in \mathbb{R}^n$, pa je $(f * g)(x) = 0$. Dakle,

$$\mathbb{R}^n \setminus (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : (f * g)(x) = 0\},$$

odnosno

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : (f * g)(x) \neq 0\}} \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Skup $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ je zatvoren (pošto je zbir zatvorenog i kompaktnog skupa) odakle sledi

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

(2) Ako funkcija f ima kompaktan nosač, onda i konvolucija $f * g$ ima kompaktan nosač.

(3) Ako i funkcija f ima kompaktan nosač, onda je $f * g$ neprekidna funkcija.

(4) Ako funkcija f ima kompaktan nosač i ako je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, onda je

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)(\check{f} * \varphi)(y)\, dy, \tag{3.8}$$

gde je $\check{f}(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Funkcija $F(x, y) = f(x - y)g(y)\varphi(x)$ je neprekidna i ima kompaktan nosač u $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pa $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Na osnovu Fubinijeve teoreme sledi da je

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} F(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\, dx\, dy.$$

Sledi da je

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\varphi(x)\, dx\, dy,$$

pa smo dokazali jednakost (3.8). Smena promenljive u drugom integralu nam daje i jednakost

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x + y)\, dx\, dy.$$

3.8 Furijeova transformacija

U ovom odeljku ćemo uvesti Furijeovu transformaciju i pokazaćemo njene osnovne osobine. Videćemo da je Furijeova transformacija korisna za rešavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Definicija 3.64. *Za* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *definišemo Furijeovu transformaciju* $\hat{f}$ *sa*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx, \tag{3.9}$$

gde je $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$.

Kako je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sledi da je $f(x)e^{-ix\cdot\xi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ u odnosu na x, pa je (3.9) dobro definisana.

Važi sledeća teorema.

Teorema 3.65. 1. *Preslikavanje* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_b^0(\mathbb{R}^n)$ *je linearno i važi*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{C_b^0(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Sa $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ *označavamo neprekidne, ograničene funkcije i za* $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ *je* $\|g\|_{C_b^0(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)|$.

2. *Ako je* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *neprekidno diferencijabilna funkcija tako da* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *i* $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *onda*

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi). \tag{3.10}$$

3. *Ako* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *i* $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *onda je* $\hat{f}(\xi)$ *neprekidno diferencijabilna u odnosu na* ξ_j *i*

$$\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j f(x)). \tag{3.11}$$

4. *Neka* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Označimo sa* $(\tau_y f)(x) := f(x+y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ *translaciju od* f *za* y. *Tada je* $\mathcal{F}(\tau_y f)(\xi) = e^{iy\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$, *za sve* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

5. *Neka $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Označimo sa $(\rho_\lambda f)(x) := f(\lambda x), \lambda > 0$ dilataciju od f za λ. Tada je*

$$\mathcal{F}(\rho_\lambda f)(\xi) = \lambda^{-n}\hat{f}(\xi/\lambda).$$

Dokaz: Pokazaćemo prvi deo tvrđenja. Pokažimo prvo da je $\hat{f}$ ograničena. Važi

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\hat{f}| \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|e^{-ix\cdot\xi}f(x)|dx = \|f\|_{L^1}.$$

Dalje označimo $g(x,\xi) = e^{-ix\cdot\xi}f(x)$. Tada je za fiksirano x funkcija $\xi \mapsto g(x,\xi)$ neprekidna. Zatim, za fiksirano ξ funkcija $x \mapsto g(x,\xi)$ je integrabilna i $|g(x,\xi)| \le |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Primenom Teoreme 3.57 dobijamo neprekidnost za $\hat{f}$. ❑

Napomena 3.66. Uvodimo oznaku $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$. Tada je osobina (3.10) ekvivalentna sa

$$\mathcal{F}(D_{x_j})(f) = \xi_j\mathcal{F}(f).$$

Posmatrajmo sada konvoluciju dve funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, za $1 \le p \le \infty$ na sledeći način:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \text{ za skoro sve } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.12}$$

Pokažimo da kada $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onda $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Važi sledeća propozicija.

Propozicija 3.67. *Neka $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.*

Dokaz: Primetimo da je funkcija $(x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$ Lebeg merljiva i

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(y)g(x-y)|d(x,y) = \int|f(y)|\int|g(x-y)|dxdy =$$

$$\int |f(y)|\|g\|_1 dy = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.$$

Primenom Teoreme 3.58 sledi da funkcija $x \mapsto \int f(y)g(x-y)dy = (f*g)(x)$ definiše integrabilnu funkciju na $\mathbb{R}^n$. Za Furijeovu transormaciju konvolucije važi:

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}(f*g)(x)dx = \int e^{-ix\cdot\xi} \int f(y)g(x-y)dydx =$$

$$\int f(y) \int g(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dxdy = \int f(y) \int g(z)e^{-i(z+y)\xi}dzdy =$$

$$\int f(y)e^{-iy\xi} \int g(z)e^{-iz\xi}dzdy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

❑

Napomena 3.68. Može se pokazati da za $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ važi da $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

3.8.1 Prostor brzo opadajućih funkcija

Podsetimo se prostora brzo opadajućih funkcija - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Posmatrajmo funkciju $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tada $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Takođe je i $|\hat{f}(\xi)| \le C(1+|\xi|)^{-k}$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$. Dodatno, $(1+|x|)^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Sledi da $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ pri čemu su svi izvodi do reda k za $\hat{f}$ ograničeni. Međutim, $\hat{f} \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (osim ako je $f = 0$). Ako $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, onda $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definicija 3.69. *Sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ označavamo prostor svih glatkih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tako da za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i za sve $N \in \mathbb{N}_0$ postoji konstanta $C_{\alpha,N}$ tako da je*

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \le C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N} \tag{3.13}$$

uniformno po $x \in \mathbb{R}^n$. Za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $m \in \mathbb{N}_0$ definišemo niz semi-normi

$$|f|_m := \sup_{|\alpha|+|\beta|\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)|.$$

Napomena 3.70. Funkcije u prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zovemo i Švarcove funkcije. Jasno je da je $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \backslash C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Napomena 3.71. Prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ snabdevamo topologijom preko familije semi-normi $|\cdot|_m$ i na taj način $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ postaje Frešeov prostor.

Lema 3.72. *Furijeova transformacija $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je linearno preslikavanje. Za svako $m \in \mathbb{N}_0$ postoji $C_m > 0$ tako da je*

$$|\hat{f}|_m \leq C_m |f|_{m+n+1}, \text{ za sve } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dokaz: Za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1}((1+|x|)^{n+1}|f(x)|) \leq c|f|_{n+1}.$$

Sledi da je (primenom teoreme 3.65)

$$|\hat{f}|_0 = \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq c|f|_{n+1}.$$

Ponovo primenom teoreme 3.65 znamo da je

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(D_x^\alpha(x^\beta f(x))).$$

Dobijamo da je

$$\|\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}\|_\infty \leq c|D_x^\alpha(x^\beta f(x)))|_{n+1}.$$

Lajbnicovo pravilo implicira

$$D_x^\alpha(x^\beta f(x))) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (D_x^\gamma x^\beta)(D_x^{\alpha-\gamma} f(x)).$$

Dalje sledi da je

$$|D_x^\alpha(x^\beta f(x)))|_{n+1} \leq c_{\alpha,\beta}|f|_{|\alpha|+|\beta|+n+1}.$$

Kad uzmemo u obzir sve ove ocene i uzmemo supremum po $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ sa $|\alpha| + |\beta| \leq m$ dobijamo

$$|\hat{f}|_m \leq C_m |f|_{m+n+1}$$

za $m \in \mathbb{N}_0$. Dakle, $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ za sve $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ❑

3.9 Inverzna Furijeova transformacija, Planšerelova teorema

Furijeova transformacija $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je invertibilna i inverz je dat sa

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi) d\xi.$$

Primetimo da je ovako definisano preslikavanje dobro definisano za $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Preslikavanje $\mathcal{F}^{-1}$ zovemo inverzna Furijeova transformacija. Važi

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(g)(-x).$$

Važi sledeća lema (formula o inverziji).

Lema 3.73. *Neka $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tada je $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Dodatno, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je linearni izomorfizam.*

Dokaz: Iz definicije preslikavanja $\mathcal{F}^{-1}$ sledi da je

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} f(y) dy \Big) d\xi.$$

Funkcija $F(y,\xi) := e^{i(x-y)\xi} f(y) \notin L^1(\mathbb{R}^{2n})$, pa ne možemo da primenimo Fubinijevu teoremu. Zbog toga definišemo preslikavanje $\psi_\varepsilon(\xi) := e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2}$, $\varepsilon > 0$ i funkcija $F_\varepsilon(y,\xi) := e^{i(x-y)\xi}\psi_\varepsilon(\xi) f(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Kako je $\lim_{\varepsilon\to 0} \psi_\varepsilon(\xi) = 1$ za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$, prema Lebegovoj teoremi o dominantnoj konvergenciji i Fubinijevoj teoremi dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \psi_\varepsilon(\xi) f(y) dy \Big) d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2} f(y) d(y,\xi).
\end{aligned}$$

Dalje koristimo smene $\xi = \eta/\varepsilon$ i $y = x + \varepsilon z$ pa je

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2} f(y) d(y,\xi)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta}e^{-|\eta|^2/2}d\eta\Big)f(x+\varepsilon z)dz = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2}f(x+\varepsilon z)dz,$$

gde koristimo zadatak 3.5. Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji implicira

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2}f(x+\varepsilon z)dz = f(x)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2}dz = f(x).$$

❏

Važi i Planšerelova teorema, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 3.74. *Za sve $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

Sledi da je

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|\hat{f}\|_2^2$$

i $\mathcal{F}$ može da se proširi do linearnog izomorfizma $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

3.10 Temperirane distribucije i Furijeova transformacija

Definicija 3.75. *Prostor temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))'$ je prostor linearnih i neprekidnih preslikavanja $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Niz $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergira ka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako*

$$\langle f_k, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle, k \to \infty, \text{ za sve } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Koristimo oznaku $\langle f, \varphi\rangle := f(\varphi)$.

Napomena 3.76. 1. Ako je $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ linearno, onda iz Teoreme 2.49 sledi da je f neprekidno ako i samo ako postoji $m \in \mathbb{N}_0$ i $C >$ tako da je

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le C|\varphi|_{m,\mathcal{S}} \text{ za sve } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2. Kao i u slučaju klasičnih distribucija možemo uvesti regularne temperirane distribucije. Međutim, da bi izraz $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$ bio dobro definisan za sve $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nije dovoljno pretpostaviti da $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

   Pretpostavićemo da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ i $\langle x\rangle^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za neko $N \in \mathbb{N}_0$. Tada f možemo da identifikujemo sa temperiranom distribucijom $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Distribuciju F_f definišemo sa

$$\langle F_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \text{za sve} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

   Primetimo da je

$$|\langle F_f, \varphi\rangle| \leq c\|\langle x\rangle^{-N} f\|_1 |\varphi|_{N,\mathcal{S}}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

   Preslikavanje $f \mapsto F_f$ je injektivno zbog Teoreme 3.60. Ostavljamo za vežbu da se pokaže da zaista $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Primer 3.77. Nisu sve temperirane distribucije regularne. Na primer, delta distribucija definisana sa

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

nije regularna.

Definicija 3.78. *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Distribucioni izvod $\partial^\alpha f$ distribucije f je definisan sa*

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Napomena 3.79. Može se pokazati da $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Primer 3.80. Hevisajdova funkcija definiše regularnu distribuciju, to jest $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i $H' = \delta$.

Definicija 3.81. *Neka* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Furijeova transformacija* $\mathcal{F}(f)$ *i inverzna Furijeova transformacija* $\mathcal{F}^{-1}(f)$ *su definisane kao distribucije*

$$\langle \mathcal{F}(f), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \textit{za sve} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(f), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle, \quad \textit{za sve} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Važi sledeća teorema koju navodimo bez dokaza.

Teorema 3.82. *Furijeova transformacija* $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *je neprekidno, linearno preslikavanje. Pritom,* $\mathcal{F}^{-1}$ *je inverzno preslikavanje za* $\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *je takođe linearno i neprekidno.*

Primer 3.83. Izračunajmo Furijeovu transformaciju delta distribucije:

$$\langle \mathcal{F}(\delta), \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \mathcal{F}(\varphi)(0) = \langle 1, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dakle, $\mathcal{F}(\delta) = 1$.

Napomena 3.84. Važi $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Inkluzija je striktna. Na primer, $e^{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Primer 3.85. Neka je H Hevisajdova distribucija i znamo da je

$$H' = \delta.$$

Važi da je $H \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$. Primenom Furijeove transformacije i na osnovu primera 3.83, sledi da je

$$i\xi \mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(\delta) = 1.$$

Iz primera 3.39 imamo da je (na $\mathcal{D}'$)

$$\xi \mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}) = 1.$$

Sledi da je

$$i\xi \mathcal{F}(H) = \xi \mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}),$$

to jest
$$\xi(i\mathcal{F}(H) - \mathrm{vp}(\frac{1}{\xi})) = 0.$$
Pokažimo da za $T \in \mathcal{D}'$ važi
$$\xi T = 0 \ \ \Rightarrow \ \ T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = 0.$$
Pretpostavimo suprotno, da postoji $\varphi \in \mathcal{D}$, tako da je $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i
$$\langle T, \varphi\rangle \neq 0.$$
Tada za $\frac{1}{\xi}\varphi \in \mathcal{D}$ važi $\operatorname{supp}(\frac{1}{\xi}\varphi) \subset \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i
$$\langle \xi T, \frac{1}{\xi}\varphi\rangle = \langle T, \xi\frac{1}{\xi}\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \neq 0.$$
Dobili smo kontradikciju sa pretpostavkom da je $\xi T = 0$. Dakle, $T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = 0$, pa sledi da je
$$\operatorname{Supp} T \subset \{0\}.$$
Sada na osnovu propozicije 3.35 sledi da je
$$T = \sum_{j=0}^{m} c_j\delta^{(j)}.$$
Pretpostavimo, na primer da je $c_1 \neq 0$. Tada bi za $\varphi \in \mathcal{D}$ važilo
$$\langle \xi T, \varphi\rangle = \langle c_0\delta, \xi\varphi\rangle + \langle c_1\delta^{(1)}, \xi\varphi\rangle = c_0\cdot 0\cdot\varphi(0) - c_1\langle\delta, (\xi\varphi)'\rangle = -c_1\varphi(0),$$
pa dolazimo do kontradikcije sa $\xi T = 0$. Slično zaključujemo da je $c_j = 0$, $j \in \{1, ..., m\}$. Dakle, sledi da je $T = c\delta$, $c \in \mathbb{K}$. Možemo da zaključimo da je
$$i\mathcal{F}(H) - \mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}) = \tilde{c}\delta,$$
ili ekvivalentno
$$(\star) \qquad \mathcal{F}(H) + i\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}) = c\delta.$$

Važi da je

$$H + \breve{H} = 1,$$

pa primenom Furijeove transformacije i njenih osobina dobijamo

$$(\star\star) \qquad \mathcal{F}(H) + (\mathcal{F}(H))\breve{} = \mathcal{F}(1) = 2\pi\delta.$$

Takođe, za $\varphi \in \mathcal{D}$ važi

$$\langle (\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}))\breve{}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|>\varepsilon}\frac{\varphi(-\xi)}{\xi}d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{|\xi|>\varepsilon}\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,d\xi\right) = -\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}), \varphi\rangle.$$

Dakle,

$$(\star\star\star) \qquad (\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}))\breve{} = -\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}).$$

Na osnovu svega što smo pokazali sledi

$$c\delta = c\breve{\delta} \underset{\substack{\uparrow\\(\star)}}{=} (\mathcal{F}(H))\breve{} + i(\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}))\breve{} \underset{\substack{\uparrow\\(\star\star),\,(\star\star\star)}}{=} 2\pi\delta - \mathcal{F}(H) - i\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}) \underset{\substack{\uparrow\\(\star)}}{=} 2\pi\delta - c\delta.$$

Dakle, $c = \pi$ i

$$\mathcal{F}(H) = \pi\delta - i\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi}).$$

3.11 Prostori Soboljeva

Definicija 3.86. *Neka je $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Prostor Soboljeva reda m definišemo sa*

$$W_p^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ |\alpha| \le m\}.$$

Takođe definišemo

$$\|f\|_{W_p^m} = \Big(\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha f\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{za } 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{W_\infty^m} = \max_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

Izvod $\partial^\alpha f$ je definisan kao izvod u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pritom, ako $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onda $\partial^\alpha f$ definiše regularnu distribuciju, odnosno postoji $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tako da je

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(x)\varphi(x)dx, \quad \text{za sve} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Uobičajeno, identifikujemo $\partial^\alpha f$ i g_α.

Napomena 3.87. Važi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ za sve $1 \leq p \leq \infty$. Pritom, funkcije iz $L^p(\mathbb{R}^n)$ posmatramo kao regularne distribucije u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Napomena 3.88.

1. Za $p = 2$ koristimo oznaku $H^m(\mathbb{R}^n) = W_2^m(\mathbb{R}^n)$. Prostori $H^m(\mathbb{R}^n)$ su Hilbertovi, pri čemu je unutrašnji proizvod dat sa
$$(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)} dx.$$

2. Za $m_1 \leq m_2$ je $W_p^{m_2}(\mathbb{R}^n) \subset W_p^{m_1}(\mathbb{R}^n)$. Primetimo i da je $W_p^0(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Prostori $(W_p^m(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{W_p^m})$ su Banahovi.

Primer 3.89. Pokazati da rešenje jednačine $u^{(4)} + u = f$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ pripada prostoru $H^4(\mathbb{R})$.

Rešenje: Treba pokazati da $u, u', u'', u^{(3)}$ i $u^{(4)}$ pripadaju prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Primenom Furijeove transformacije na obe strane jednakosti dobijamo $(\xi^4 + 1)\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$. Odavde sledi da $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$, pa onda i $u \in L^2(\mathbb{R})$. Takođe možemo zaključiti i da $\xi\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R})$, pa onda i $\mathcal{F}(u') \in L^2(\mathbb{R})$. Sledi da $u' \in L^2(\mathbb{R})$. Analogno se dobija da i ostali izvodi pripadaju $L^2(\mathbb{R})$. ❑

Definišimo za $s \in \mathbb{R}$ Beselov potencijal sa

$$J^s f = \mathcal{F}^{-1}(1 + \|\xi\|^2)^{s/2}\mathcal{F}f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Sada možemo da proširimo definiciju prostora $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ na slučaj kada je m realan broj.

Definicija 3.90. *Neka je $s \in \mathbb{R}$ i $1 \leq p \leq \infty$ i neka je*

$$\|f\|_{H_p^s} = \|J^s f\|_p.$$

Nehomogeni prostor Soboljeva $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ definišemo sa

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_{H_p^s} < \infty\}.$$

Kada je $p = 2$ pišemo $H^s(\mathbb{R}^n)$ umesto $H_2^s(\mathbb{R}^n)$.

Na ovaj način prostor $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ je normiran prostor i Banahov. Zaista, neka je (f_m) Košijev niz u H_p^s. Prostor L^p je kompletan, pa sledi da postoji $g \in L^p$ tako da je

$$\|f_m - J^{-s}g\|_{H_p^s} = \|J^s f_m - g\|_{L^p} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Jasno je da $J^{-s}g \in \mathcal{S}'$, pa je H_p^s kompletan.

Teorema 3.91. *Neka $s \in \mathbb{R}$ i $1 \leq p \leq \infty$. Tada važi:*

1. *$\mathcal{S}$ je gust u H_p^s, $1 \leq p < \infty$,*
2. *$H_p^{s+\varepsilon} \subset H_p^s$ za svako $\varepsilon > 0$,*
3. *$H_p^s \subset L^\infty$ za sve $s > n/p$*

Dokaz: 1. Neka $f \in H_p^s$, odnosno $J^s f \in L^p$. Pošto je $\mathcal{S}$ gust u L^p $(1 \leq p < \infty)$, onda postoji $g \in \mathcal{S}$ tako da je

$$\|f - J^{-s}g\|_{H_p^s} = \|J^s f - g\|_p$$

i ova razlika je manja od svakog datog pozitvnog broja. Kako $J^{-s}g \in \mathcal{S}$ sledi da je $\mathcal{S}$ gust u H_p^s.

2. Može se pokazati da za $\varepsilon > 0$ operator $J^{-\varepsilon}$ slika L^p u L^p sa normom 1. Neka $f \in H_p^{s+\varepsilon}$. Dobijamo

$$\|f\|_{H_p^s} = \|J^s f\|_p = \|J^{-\varepsilon}J^{s+\varepsilon}f\|_p \leq \|J^{s+\varepsilon}f\|_p = \|f\|_{H_p^{s+\varepsilon}}.$$

3. Za $s > 0$ označimo $G_s(x) = \mathcal{F}^{-1}((1 + \|\xi\|^2)^{-s/2})(x)$. Tada $G_s \in L^{p'}$ za $1 \le p \le \infty$, $s > n/p$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Iz Jangove nejednakosti sledi

$$\|f\|_\infty = \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{-s/2}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\|_\infty$$
$$= \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{-s/2} * J^s f\|_\infty \le \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\|_{p'}\|J^s f\|_p$$
$$= \|G_s(x)\|_{p'}\|f\|_{H_p^s} \le C\|f\|_{H_p^s}.$$

❑

Napomena 3.92. Može se pokazati da je $W_p^m(\mathbb{R}^n) = H_p^m(\mathbb{R}^n)$ za $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p \le \infty$.

3.12 Zadaci

Zadatak 3.1. Koja od sledećih preslikavanja definišu distribucije u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

1. $\langle u, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)$,
2. $\langle u, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x)dx$.

Zadatak 3.2.
1. Pokazati da $ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
2. Pokazati da je $(ln|x|)' = p.v.\frac{1}{x}$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Zadatak 3.3. Ako je $p \in \mathbb{N}^n$, onda je izvod $\partial^p\delta = \delta^{(p)}$ definisan sa

$$\langle\delta^{(p)}, \varphi\rangle = (-1)^{|p|}\varphi^{(p)}(0),$$

gde $\varphi \in \mathcal{D}$ i $\varphi^{(p)} = \partial^p\varphi$. Dokazati.

Zadatak 3.4. Pokazati da Hermitov niz $f_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2t^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (videti primer 3.1) konvergira ka delta distribuciji, odnosno da $f_n \to \delta$, $n \to \infty$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Zadatak 3.5. Neka je $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}, x \in \mathbb{R}^n$. Tada je $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-\|\xi\|^2/2}$. Dokazati.

Zadatak 3.6. Pokazati da je

$$\mathcal{F}(e^{-\lambda|x|})(\xi) = \frac{2\lambda}{(\lambda^2+\xi^2)}, \;\; x \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

Zadatak 3.7. Rešiti jednačinu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \;\; u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \;\; y > 0, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ideja: jedna mogućnost je da se primeni Furijeova transformacija po x.

Zadatak 3.8. Pokazati osobine 2, 3, 4, 5 navedene u Teoremi 3.65.

Zadatak 3.9. Pokazati Lemu 3.61.

Zadatak 3.10. Pokazati da je $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$. Zatim pokazati da je $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gust u $L^p(\mathbb{R}^n)$ za $1 \leq p < \infty$ (u normi $\|\cdot\|_p$). Da li je $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gust u $L^\infty(\mathbb{R}^n)$(u normi $\|\cdot\|_\infty$)?

Literatura

[1] Abels, H. *Pseudodifferential and singular integral operators. An introduction with applications.* De Gruyter, Berlin, 2012

[2] Adams, R., Fournier J., *Sobolev Spaces*, Academic Press, Elsevier Science, 2005

[3] Brezis H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer New York, 2010

[4] Gajić Lj., Kurilić M., Pilipović S., Stanković B., *Zbirka zadataka iz funkcionalne analize, kardinalni broj, topološki, metrički i vektorsko topološki prostori*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2000

[5] Gelfand I. M., Shilov G. E., *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing: An Imprint of the American Mathematical Society, 1964

[6] Hadžić O., Pilipović S., *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, 1996.

[7] Hao C., *Introduction to Harmonic Analysis*, AMSS, Chinese Academy of Sciences, 2016

[8] Horvath J., *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley publishing company, 1966.

[9] Kurilić Miloš, *Osnovi opšte topologije*, edicija ,,Univerzitetski udžbenik", Novi Sad, 1998.

[10] Milne R. D., *Applied Functional Analysis, An Introductory Treatment*, Pitman Advanced Publishing Program, 1980

[11] Rauch J, *Partial Differential Equations*, Springer New York, NY, 1991

[12] Seleši D., Pilipović S., *Mera i integral - fundamenti teorije verovatnoće*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012

[13] Stanković B., Pilipović S., *Teorija distribucija*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1983

[14] Teofanov N., *Wave-front Sets In Non-quasianalytic Setting for Fourier-Lebesgue and Modulation Spaces*, Bulletin T. CLI De l' Academie Serbe Des Sciences Et Des Arts, 2018